Конспект лекций по курсу

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Второй курс, 4 семестр

Лектор: профессор
Черняев Александр Петрович

МФТИ 2020

Лекция 8.
Скалярное произведение и его свойства.

Будем пока рассматривать лишь действительные линейные пространства, и не будем это специально оговаривать.

Определение 1. Пусть X – линейное пространство. Числовая функция, обозначаемая (x, y), $x \in X, y \in Y$, заданная на множестве упорядоченных пар точек пространства *X*, называется скалярным произведением, если для любых точек $x \in X, y \in Y$ и любых чисел $\lambda \in R, \mu \in R$ выполняются следующие условия:

1° коммутативность $(x, y) = (y, x)$;

2° линейность $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$;

3° $(x, x) \geq 0$;

4° если $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

Функция (x, y), удовлетворяющая условиям $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ называется почти скалярным произведением. Очевидно, что скалярное произведение является и почти скалярным произведением.

Лемма 1. Если (x, y) - почти скалярное произведение в линейном пространстве *X*, то для любых $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство Коши – Буняковского

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}\,. \qquad (1)$$

Доказательство. В силу свойства 3° почти скалярного произведения для любого действительного *t*: $(tx + y, tx + y) \geq 0$. Применив свойства 1° и 2° почти скалярного произведения, получим

$$t^2(x, x) + 2t(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Если $(x, x) = 0$, то $2t(x, y) + (y, y) \geq 0$. Поскольку это неравенство выполняется для любого действительного t, $(x, y) = 0$ (в самом деле, если бы было $(x, y) \neq 0$, то на числа t налагалось бы ограничение

$$t \geq -\frac{(y, y)}{2(x, y)}$$

при $(x, y) > 0$. Если $(x, y) < 0$, то рассуждения аналогичны). Следовательно, (1) имеет место : обе его части обращаются в нуль.

Если же $(x, x) \neq 0$, то дискриминант получившегося квадратного относительно t трехчлена неположителен, т.е.

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0,$$

а это равносильно (1).

Следствие 1. Для любых точек $x \in X, y \in X$ имеет место неравенство (называется неравенством треугольника)

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\,. \qquad (2)$$

Доказательство. Имеем

$$(x + y, x + y) = |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \leq (x, x) + |(x, y)| +$$

$$+\left|(y,x)\right|+(y,y)\underset{(1)}{\le}(x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y)=$$
$$=(\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)})^2 .$$

Из последнего неравенства следует (2).

Следствие 2. Если (x,y) – почти скалярное (в частности, скалярное) произведение в линейном пространстве X, то функция

$$\|x\|\overset{def}{=}\sqrt{(x,x)} \qquad (3)$$

является полунормой (соответственно нормой) в этом пространстве, и неравенство Коши – Буняковского (1) можно записать в виде

$$|(x,y|\le\|x\|\,\|y\| . \qquad (4)$$

Для доказательства нужно непосредственно проверить свойства полунормы (соответственно нормы) для функции (3).

$$\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda^2(x,x)}=|\lambda|\sqrt{(x,x)}=|\lambda|\|x\|,$$
$$\|x+y\|=\sqrt{(x+y.x+y)}\underset{(2)}{\le}\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}=\|x\|+\|y\|.$$

Пример 1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является пространством со скалярном произведением, если под скалярным произведением (x,y) чисел x и y понимать их обычное произведение $(x,y)=xy$.

Пример 2. В арифметическом действительном линейном n- мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ функция

$$(x,y)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i,\ \ x=(x_1,\dots,x_n),\ \ y=(y_1,\dots,y_n),\ x_i\in R,\ y_i\in R,\ i=1,2,\dots,n$$

является скалярным произведением.

Пример 3. Обозначим через $RL_2=RL_2(a,b)$ множество функций f , заданных на конечном или бесконечном интервале $(a,b),-\infty\le a<b\le+\infty$, для каждой из которых существует правильное разбиение этого интервала и интеграл $\int_a^b f^2(x)dx$ сходится.

Легко проверить, что множество $RL_2(a,b)$ является линейным пространством. Докажем, что функционал

$$(f,g)\overset{def}{=}\int_a^b f(x)g(x)dx,\ f\in RL_2(a,b) \text{ и } g\in RL_2(a,b) \qquad (5)$$

является почти скалярным произведением.

Прежде всего, если $f\in RL_2(a,b)$ и $g\in RL_2(a,b)$, то в силу числового неравенства

$$|\alpha\beta|\le\left[\alpha^2+\beta^2\right]/2,\ \alpha\in R,\beta\in R,\ \forall\, x\in(a,b),$$

где определены $f(x)$ и $g(x)$, справедливо

$$|f(x)g(x)|\le(f^2(x)+g^2(x))/2,$$

следовательно, согласно признаку сравнения для сходимости интегралов, из конечности интегралов $\int_a^b f^2(x)dx$ и $\int_a^b g^2(x)dx$ следует сходимость (и даже абсолютная) интеграла

$$\int_a^b f(x)g(x)dx .$$

Т. о., (5) имеет смысл. Свойства почти скалярного произведения, следуют в этом случае из свойств интеграла. Функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, x \neq x_0, x_0 \in (a,b) \\ 1, x = x_0 \end{cases},$$

не являясь нулем пространства $RL_2(a, b)$, удовлетворяет равенству $(f, f) = 0$. Поэтому полунорма

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},\ f \in RL_2(a, b) \tag{6}$$

не является нормой в $RL_2(a, b)$ и, следовательно, почти скалярное произведение (5) не есть скалярное произведение в этом пространстве.

Неравенство Коши - Буняковского в $RL_2(a, b)$ имеет вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} . \tag{7}$$

Почти скалярное произведение (5) на подпространстве $CL_2(a, b)$, состоящем из непрерывных на (a, b) функций f, для которых сходится

$$\int_a^b f^2(x)dx ,$$

является уже скалярным произведением, а полунорма (6) – нормой (это доказывается аналогично тому, как это делалось в примере 7 для пространства $CL(a, b)$).

Зафиксируем теперь конечный или бесконечный интервал (a, b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, и рассмотрим на множестве, всех заданных на этом интервале функций, функционал

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)}|f(x)| . \tag{8}$$

Как мы знаем (пример 5) этот функционал на пространстве $B(a, b)$ всех ограниченных на (a, b) функций является нормой, а для любой неограниченной на (a, b) функции f, очевидно, $\|f(x)\|_\infty = +\infty$. Рассмотрим далее множество функций, заданных на (a, b), для каждой из которых существует правильное разбиение, и на этом множестве функционалы

$$\|f(x)\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx ,\ \|f(x)\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} . \tag{9}$$

Было доказано, что первый функционал (9) является полунормой в пространстве $RL(a, b)$ и нормой в $CL(a, b)$ (см. примеры 6 и 7). Заметим, что пространства $RL(a, b)$ и $CL(a, b)$ обозначаются также соответственно $RL_1(a,b)$ и $CL_1(a,b)$.

Второй функционал (9) является полунормой в пространстве $RL_2(a,\ b)$ и нормой в $CL_2(a,\ b)$ (пример 3). Если же $f \notin RL(a,\ b)$, но для нее существует правильное разбиение $(a,\ b)$, то $\|f(x)\|_1 = +\infty$, а если $f \notin RL_2$ (a, b), то $\|f(x)\|_2 = +\infty$.

Сходимость последовательности функций по полунорме $\|\ \|_1$ называется сходимостью в среднем, а сходимость по полунорме $\|\ \|_2$ – сходимостью в смысле среднего квадратичного.

В дальнейшем, когда будет идти речь о функционалах (9), будет предполагаться, что рассматриваемые функции таковы, что существуют правильные разбиения $(a,\ b)$, и это не будет специально оговариваться.

Лемма 2. Если f задана на конечном интервале $(a,\ b)$, то

$$\|f(x)\|_1 \le \sqrt{b-a}\,\|f(x)\|_2, \tag{10}$$

и

$$\|f(x)\|_2 \le \sqrt{b-a}\,\|f(x)\|_\infty. \tag{11}$$

Доказательство. Докажем (10). Пусть $f \in RL_2(a,\ b)$. Т. к. $1 \in RL_2(a,\ b)$, то в силу неравенства Коши -Буняковского при $g(x)$=1(тождественно) получим

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\cdot 1dx \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b dx\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 .$$

Если же $f \notin RL_2(a,\ b)$, то норма $\|f(x)\|_2 = +\infty$ и неравенство (10) очевидно.

Докажем теперь неравенство (11). Пусть $f \notin B(a,b)$, тогда

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b [\sup|f(x)|]^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^b \|f\|_\infty^2\, dx\right)^{1/2} = \|f\|_\infty \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty .$$

Если же $f \notin B(a,\ b)$, то $\|f\|_\infty = +\infty$ и (11) очевидно.

Следствие. Если последовательность функций равномерно сходится на конечном интервале к некоторой функции, то она сходится на этом же интервале и в смысле среднего квадратичного, следовательно, она сходится и в среднем к той же функции. Доказательство вытекает из неравенства

$$\|f_n - f\|_1 \underset{(10)}{\le} \sqrt{b-a}\,\|f_n - f\|_2 \underset{(11)}{\le} (b-a)\|f_n - f\|_\infty .$$

Замечание 1. Ограниченность промежутка в лемме 2 существенна.

Замечание 2. Можно рассматривать и пространства функций, заданные не на интервалах, а на промежутках других типов, например, на отрезках: $RL[a;b]$, $RL_2[a;b]$, $CL[a;b]$, $CL_2[a;b]$.

Если $(a;\ b)$ –конечный интервал, то отображение, при котором каждой функции, заданной на $[a;b]$, ставится в соответствие ее сужение на интервал $(a;\ b)$, отображает пространства $RL[a;b]$, $RL_2[a;b]$ соответственно на пространства $RL(a;b)$ и $RL_2(a;b)$ (т. е. является сюръекцией) и сохраняет полунорму, т. к. значение интеграла от a до b некоторой функции не зависит от значений или от их отсутствия в точках $x = a$ и $x = b$. При сужении на интервал $(a;\ b)$ непрерывных на $[a;\ b]$ функций уже не получится отображений пространств $CL[a;\ b]$, $CL_2[a;b]$ соответственно на пространства $CL(a;\ b)$ и $CL_2(a;b)$, а только в эти пространства (не каждую функцию, непрерывную на $(a;b)$, можно с сохранением непрерывности продолжить на $[a;\ b]$), но зато эти отображения являются взаимно однозначными (т.е. инъекциями), т. к. они сохраняют значения норм.

В полунормированном пространстве можно рассматривать не только конечные суммы его элементы, но и бесконечные, т. е. ряды, членами которых являются элементы пространства. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overset{def}{=} \lim_{m\to\infty} x_n \,. \tag{12}$$

Лемма 3. Почти скалярное произведение непрерывно по порождаемой им полунорме.

Доказательство. Пусть X - линейное пространство с почти скалярным произведением $x_n \in X$, $y_n \in X$, n=1,2,… , $x \in X, y \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$,

тогда

$$\begin{aligned} &\left|(x_n, y_n) - (x, y)\right| = \left|(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)\right| = \\ &= \left|(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)\right| \le \left|(x_n - x, y_n)\right| + \\ &+ \left|(x, y_n - y)\right| \underset{(4)}{\le} \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \to 0, n \to \infty, \end{aligned}$$

ибо последовательность $\{y_n\}$ ограничена, поскольку она сходящаяся и

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n - y\| = 0 .$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y) \,. \tag{13}$$

Следствие 1. Если в линейном пространстве X с почти скалярным произведением сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, то для любого элемента $y \in X$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y) \,. \tag{14}$$

Доказательство.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\right) \underset{(12)}{=} \left(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} x_n, y\right) \underset{(13)}{=} \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m} x_n, y\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(x_n, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y).$$

Следствие 2. Если $(a,\ b)$ - конечный интервал, $f_n(x) \in RL_2(a,b)$, n=1,2,..., и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится в $RL_2(a,b)$, то

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx \,. \tag{15}$$

Доказательство. Применим (14) к ряду элементов пространства $RL_2(a,b)$, взяв $y=1 \in RL_2(a,b)$:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \cdot 1dx \underset{(5)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n, 1 \right) \underset{(14)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, 1) \underset{(5)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx .$$

Замечание. В случае конечного интервала из равномерной сходимости на нем последовательности функций пространства $RL_2(a,b)$ следует ее сходимость в смысле среднего квадратичного (следствие из леммы 2). Поэтому, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n \in RL_2(a,b)$ равномерно сходится на конечном интервале (a,b), то этот ряд можно почленно интегрировать (следствие 2 леммы 3). При более сильных ограничениях (непрерывности членов ряда и равномерная сходимость ряда на $[a, b]$) это утверждение было доказано ранее другим методом.

Лекция 9

Гильбертово пространство. Пространство L_2

Скалярное произведение (x, y) порождает норму $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, а норма – метрику $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Тогда любое линейное пространство со скалярным произведением является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y,x-y)}. \qquad (1)$$

Определение 1. Полное линейное пространство со скалярным произведением называется гильбертовым пространством. Полнота понимается в смысле метрики (1).

Теорема 1. Любое линейное пространство со скалярным произведением содержится и плотно в некотором гильбертовым пространстве. Это гильбертово пространство называется пополнением исходного пространства со скалярным произведением.

Доказательство. Если X - линейное пространство со скалярным произведением, то X^* – его пополнение как метрического пространства. Линейную операцию определим в X^* по формуле

$$\lambda x^* + \mu y^* = \lim\nolimits_{n\to\infty}(\lambda x_n + \mu y_n),$$

где $x_n \to x^*, y_n \to y^*$ в смысле нормы (1), а λ и μ – произвольные действительные числа. Скалярное произведение элементов из X* определим с помощью предельного перехода следующим образом. Пусть $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$. Поскольку $\overline{X} = X^*$, то существуют такие последовательности $x_n \in X$ и $y_n \in X$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$. Положим

$$(x^*, y^*) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n). \qquad (2)$$

Легко проверить, что при заданных $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ определение (2) имеет смысл, т. е. указанный предел существует и не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, и, что из выполнения свойств 1° – 4° скалярного произведения в X в силу свойств предела следует наличие этих свойств у функции (x^*, y^*), т. е. она есть скалярное произведение в X*.

Замечание. Для комплексных линейных пространств также существуют понятия скалярного и почти скалярного произведений. Их определения отличаются первым условием определения этих произведений в действительных линейных пространствах: вместо условия $(x, y) = (y, x)$ требуется, чтобы для всех элементов x и y рассматриваемого линейного пространства выполнялось $(x,y) = \overline{(y,x)}$, где черта над числом означает сопряжение комплексному числу, стоящему под этой чертой.

Из этого свойства следует, что для произвольного комплексного λ
$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\,(x, y)$, т. к.

$$(x,\lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y,x)} = \overline{\lambda}\cdot\overline{(y,x)} = \lambda(x,y).$$

Для комплексных линейных пространств сохраняются многие свойства действительных линейных пространств. Например, для скалярного и почти скалярного произведений в комплексном линейном пространстве верно неравенство Коши – Буняковского, любое комплексное линейное пространство со скалярным произведением можно пополнить, превратив его в полное, где исходное пространство – плотное множество.

Докажем неравенство Коши - Буняковского для почти скалярного произведения в комплексном линейном пространстве.

Пусть X - комплексное линейное пространство, $x \in X, y \in Y$ и λ – произвольное комплексное число. Согласно свойству 3° определения почти скалярного произведения имеем $(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$ и, тогда

$$(x, x) + \lambda (y, x) + \overline{\lambda} (x, y) + \lambda \overline{\lambda} (y, y) \geq 0.$$

Если $(x, x) = (y, y) = 0$, то $\lambda (y, x) + \overline{\lambda} (x, y) \geq 0$. Выбрав $\lambda = -(x, y)$, получим – $(x, y)(y, x) - \overline{(x, y)}(x, y) = -2(x, y)\overline{(x, y)} = -2|(x, y)|^2 \geq 0$, что возможно когда $(x, y) = 0$. В этом случае неравенство Коши - Буняковского очевидно выполнено, ибо обе его части обращаются в нуль.

Если $(y, y) \neq 0$, то берем $\lambda = -(x, y)/(y, y)$, тогда

$$(x, x) - \frac{(x, y)}{(y, y)}(y, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) + \frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{(y, y)^2}(y, y) \geq 0,$$

или $(x, x)(y, y) - (x, y)\overline{(x, y)} - \overline{(x, y)}(x, y) + (x, y)\overline{(x, y)} \geq 0$. Таким образом, $(x, x)(y, y) - (x, y)\overline{(x, y)} \geq 0$, откуда сразу следует неравенство Коши– Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Случай, когда $(y, y) = 0$, но $(x, x) \neq 0$ в специальном доказательстве не нуждается, т. к. легко сводится к уже рассмотренному.

Пространство L_2.

Лемма 1. Пространство $CL_2[a,b]$ не является гильбертовым.

Для доказательства достаточно привести пример фундаментальной, но не сходящейся в $CL_2[-1,1]$ последовательности. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, -1 \leq x \leq -1/n \\ nx, -1/n < x < 1/n \\ 1, 1/n \leq x \leq 1, n = 1,2,\ldots \end{cases} \qquad (3)$$

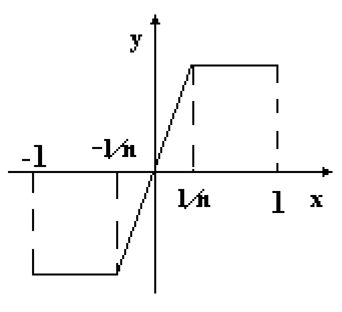

Рис.1

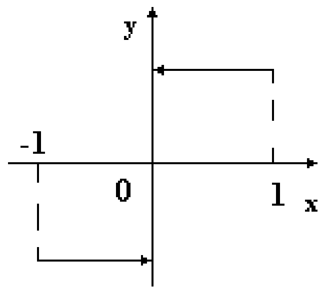

Рис.2

(см. рис. 3)

Функции f_n, очевидно, непрерывны. Покажем, что они образуют в $CL_2[-1,1]$ фундаментальную последовательность. Считая, например, что $m > n$, получим

$$\| f_n - f_m \|_2^2 = \int_{-1}^{1} | f_n(x) - f_m(x) |^2 \, dx = \int_{-1/n}^{1/n} | f_n(x) - f_m(x) |^2 \, dx \le$$

$$\le \int_{-1/n}^{1/n} \left[| f_n(x) | + | f_m(x) | \right]^2 dx \underset{(3)}{\le} 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n}.$$

Очевидно, что если задано $\varepsilon > 0$, то достаточно выбрать $n_\varepsilon > \dfrac{8}{\varepsilon^2}$, чтобы при $n \ge n_\varepsilon$ и $m \ge n_\varepsilon$ выполнялось неравенство $\| f_n - f_m \|_2 < \varepsilon$, а это и означает фундаментальность последовательности $\{f_n\}$. В каждой точке [–1, 1] эта последовательность сходится к функции (рис.2)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, -1 \le x < 0; \\ 0, \; x = 0; \\ 1, \; 0 < x \le 1. \end{cases}.$$

Покажем, что $\{f_n\}$ сходится к f и по полунорме пространства $RL_2[-1,1]$:

$$\| f_n - f \|_2^2 = \int_{-1}^{1} | f_n(x) - f(x) |^2 \, dx = \int_{-1/n}^{1/n} | f_n(x) - f(x) |^2 \, dx \le$$

$$\le \int_{-1/n}^{1/n} \left[| f_n(x) | + | f(x) | \right]^2 dx \le \frac{8}{n} \to 0, n \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_2 = 0. \tag{4}$$

Функция f разрывна и, следовательно, не принадлежит пространству $CL_2[-1,1]$. Покажем, что $\{f_n\}$ не может одновременно сходится в $RL_2[-1,1]$ и к непрерывной функции. Допустим противное: существует непрерывная на [–1, 1] функция g, что

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - g \|_2 = 0. \tag{5}$$

Поскольку

$$\| f - g \|_2 = \| (f - f_n) + (f_n - g) \|_2 \le \| f - f_n \| + \| f_n - g \| \xrightarrow[(4),(5)]{} 0, n \to \infty.$$

Т. к., $n \to \infty$ и $f - g$ не зависит от n, то $\| f - g \|_2 = 0$ (это равенство следует, конечно, и из леммы: если X – полунормированное пространство, $x_n \in X, n = 1,2,\ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ возможно тогда и только тогда, когда $\| x - y \| = 0$), т.е.

$$\int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^2\,dx = 0\,.$$

Но

$$0 \le \int_{-1}^{0} |f(x)-g(x)|^2\,dx \le \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^2\,dx,\; 0 \le \int_{0}^{1} |f(x)-g(x)|^2\,dx \le \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^2\,dx\,.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{0} |f(x)-g(x)|^2\,dx = 0,\; \int_{0}^{1} |f(x)-g(x)|^2\,dx = 0\,. \tag{6}$$

Функции f и g непрерывны на [–1, 0), (0, 1], поэтому равенства (6) возможны только в том случае, если

$$f(x) = g(x), x \in [-1,0) \cup (0,1]\,,$$

но тогда

$$\lim_{x\to -0} g(x) = -1 \ne 1 = \lim_{x\to +0} g(x)\,,$$

т.е. g разрывна в точке $x = 0$.

Итак, $\{f_n\}$ - последовательность непрерывных функций фундаментальна в $CL_2[-1,1]$, но не имеет в нём предела. Это и означает, что $CL_2[-1,1]$ – неполно, а, значит, оно не гильбертово. Лемма доказана.

Определение 2. Подмножество Y полунормированного пространства X называется плотным в X по его полунорме, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in Y$ такой, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Очевидно, когда полунорма является нормой, понятие плотности подмножества в пространстве в смысле определения 2 совпадает с понятием его плотности в смысле метрики, порождённой нормой рассматриваемого пространства.

Лемма 2. Пусть $f \in RL_2(a,b), -\infty \le a < b \le +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция φ, что $\operatorname{supp}\varphi \subset (a,b)$ (т.е. φ – финитна на (a, b)) и

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon\,.$$

Доказательство. Пусть f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi,\eta] \subset (a,b)$ (общий случай абсолютно интегрируемой функции легко сводится к этому случаю; см. ранее). Для любого $\varepsilon > 0$ в силу сходимости $\int_a^b f^2(x)dx$ существуют такие ξ и η, $a < \xi < \eta < b$, что

$$\int_a^{\xi} f^2(x)dx + \int_{\eta}^{b} f^2(x)dx < \frac{\varepsilon^2}{2}\,. \tag{7}$$

В силу интегрируемости f на $[\xi,\eta]$ мы имеем ограниченность f на нём, т.е. существует $c > 0$,
что

$$|f(x)| \le c, \xi \le x \le \eta\,. \tag{8}$$

Согласно соответствующей теореме и замечанию к ней для f существует ступенчатая функция φ, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [\xi,\eta], \tag{9}$$

$$|f(x)| \le c, \xi \le x \le \eta, \tag{10}$$

$$\int_{\xi}^{\eta} |f(x)-\phi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{4C}. \tag{11}$$

Поэтому

$$\|f-\phi\|_2^2 = \int_a^b |f(x)-\phi(x)|^2\,dx = \int_a^{\xi} f^2(x)dx +$$

$$+\int_{\xi}^{\eta} |f(x)-\phi(x)|^2\,dx + \int_{\eta}^{b} f^2(x)dx \underset{(7)}{<} \frac{\varepsilon^2}{2} +$$

$$+\int_{\xi}^{\eta} |f(x)-\phi(x)|\big[|f(x)|+|\phi(x)|\big]dx \underset{(8),(10)}{\le}$$

$$\underset{(8),(10)}{\le} \frac{\varepsilon^2}{2} + 2c\int_{\xi}^{\eta} |f(x)-g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2. \tag{12}$$

Из выполнения условия (9) и (12) следует утверждение леммы (рис. 3)

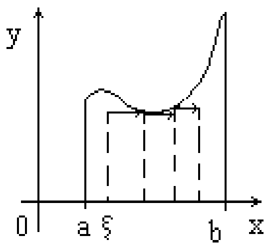

Рис. 3

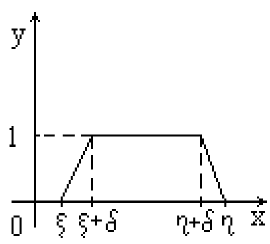

Рис. 4

<u>Лемма 3.</u> Если φ - ступенчатая функция, $\operatorname{supp}\varphi \subset (a,b), -\infty \le a < b \le +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная и финитная на (a, b) функция g, что

$$\|\varphi - g\|_2 < \varepsilon\,. \tag{13}$$

<u>*Доказательство.*</u> Поскольку всякая ступенчатая функция с носителем, лежащем в (a, b),является линейной комбинацией характеристических функций конечных полуоткрытых промежутков типа $[\xi, \eta)$, то лемму достаточно доказать для характеристической функции χ произвольно фиксированного интервала $[\xi,, \eta)$, $a < \xi < \eta < b$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмём $\delta > 0$,так чтобы выполнялось условие

$$\delta < \min\{\frac{\varepsilon^2}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\},$$

и рассмотрим непрерывную кусочно-линейную функцию g, график которой изображён на рис.4. Эта функция финитна на (a, b), т.к. $\operatorname{supp} g(x) = [\xi, \eta] \subset (a,b)$ и для неё во всех точках $x \in R$ выполняется неравенство $0 \le \chi(x) - g(x) \le 1$. Поэтому,

$$\|\chi - g\|_2^2 =$$
$$= \int_\xi^\eta |\chi(x) - g(x)|^2\, dx = \int_\xi^{\xi+\delta} \left(\chi(x) - g(x)\right)^2 dx + \int_{\eta-\delta}^{\eta} \left(\chi(x) - g(x)\right)^2 dx \le \int_\xi^{\xi+\delta} dx + \int_{\eta-\delta}^{\eta} dx =$$
$$= 2\delta < \varepsilon^2,$$

т.е. для функции $\varphi = \chi$ выполняется (13). Лемма доказана.

Обозначим за $\overset{0}{C}L_2(a,b), -\infty \le a < b \le +\infty$, подмножество полунормированного пространства $RL_2(a,b)$, состоящее из непрерывных и финитных на конечном или бесконечном интервале (a, b) функций.

Ясно, что любая непрерывная финитная на конечном или бесконечном интервале (a, b) функция принадлежит пространству $RL_2(a,b)$, т.к. в силу непрерывности и финитности функции интеграл от её квадрата всегда конечен.

<u>Теорема 2.</u> Множество $\overset{0}{C}L_2(a,b), -\infty \le a < b \le +\infty$, плотно в линейном полунормированном пространстве $RL_2(a,b)$ по его полунорме.

<u>Доказательство.</u> Пусть $f \in RL_2(a,b)$ и произвольно взято $\varepsilon > 0$. По лемме 2 существует такая финитная на (a, b) ступенчатая функция φ, что

$$\|f - \varphi\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

Для φ согласно лемме 3, существует такая непрерывная и финитная на (a, b) функция g, т. е. $g \in \overset{0}{C}L_2(a,b)$, что

$$\|\varphi - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Поэтому

$$\|f - g\|_2 \le \|f - \varphi\|_2 + \|\varphi - g\|_2 \underset{(14)(15)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\overset{0}{C}L_2(a,b)$ плотно в $RL_2(a,b)$. Теорема доказана.

В силу очевидного включения

$$\overset{0}{C}L_2(a,b) \subset CL_2(a,b) \subset RL_2(a,b),$$

$CL_2(a,b)$ также плотно в $RL_2(a,b)$.

Сказанное справедливо для любого конечного или бесконечного промежутка. В случае отрезка функция, непрерывная на [a, b] так же, как и её квадрат, интегрируема по Риману на [a, b], а, следовательно, принадлежит $RL_2(a,b)$. Для отрезка множество непрерывных на нём функций совпадает с $CL_2(a,b)$. Отсюда следует, что в случае отрезка множество непрерывных на нём функций плотно в $RL_2(a,b)$.

Лекция 10.

Пространство L_2 (продолжение). Функция типа Дирихле как элемент пространства L_2. Понятие интеграла Лебега. Интегрируемость по Лебегу функции типа Дирихле.

При использовании RL_2 неудобным является то, что в нём определено почти скалярное, а не скалярное произведение, и поэтому, в частности, его нельзя пополнить до гильбертова пространства. Опишем конструкцию, приводящую к пространству со скалярным произведением.

Функции $f_1 \in RL_2(a,b),\ f_2 \in RL_2(a,b), -\infty \le a < b \le +\infty$ назовём эквивалентными, и будем писать $f_1 \sim f_2$, если

$$\|f_1 - f_2\|_2 = 0. \qquad (1)$$

Обозначим через $\tilde{RL}_2 = \tilde{RL}_2(a,b)$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных функций пространства $RL_2 = RL_2(a,b)$.

Пусть F и G – элементы $\tilde{RL}_2$: $F = \{f\},\ f \in RL_2; G = \{g\}, g \in RL_2$. Выберем в F и G по элементу, $f \in F, g \in G$ и определим для любых чисел λ и μ элемент λF, μG как класс эквивалентных функций, содержащий $\lambda f + \mu g$,

$$\lambda F + \mu G \overset{def}{=} \{\lambda f + \mu g\}, \qquad (2)$$

а скалярное произведение F и G положим равным почти скалярному произведению f и g:

$$(F,G) \overset{def}{=} (f,g), \qquad (3)$$

эти определения корректны, т.е. не зависят от выбора элементов $f \in F, g \in G$. Действительно, если $f_1 \in F, g_1 \in G$ то, заметив, что $f \sim f_1, g \sim g_1$, а, следовательно,

$$\|f - f_1\|_2 = 0, \|g - g_1\|_2 = 0$$

получим

$$\|(\lambda f + \mu g) - (\lambda f_1 + \mu g_1)\|_2 =$$
$$= \|\lambda(f - f_1) + \mu(g - g_1)\|_2 \le |\lambda| \|f - f_1\|_2 + |\mu| \|g - g_1\|_2 = 0.$$

Это и означает, что $\lambda f + \mu g \sim \lambda f_1 + \mu g_1$.

Из того, что RL_2 - линейное, вытекает, что операция $\lambda F + \mu G$ является линейной, т.е. $\tilde{RL}_2$ также линейное. Действительно, проверка восьми аксиом основывается на том факте, что два класса, имеющие общий элемент, совпадают.

Покажем, что произведение (3) не зависит от выбора представителей $f, f_1; g, g_1$ соответственно в классах F и G эквивалентных функций:

$$|(f,g) - (f_1,g_1)| = |(f,g) - (f_1,g) + (f_1,g) - (f_1,g_1)| \le |(f - f_1,g)| + |(f_1,g - g_1)| \le$$

$$\le \| f - f_1\|_2 \|y\|_2 + \| f_1\|_2 \|g - g_1\|_2 = 0,$$

а поэтому $(f, g) = (f_1, g_1)$.

Покажем, что (*F*, *G*) является скалярным произведением. Свойства 1°, 2°, 3° скалярного произведения следуют из аналогичных свойств почти скалярного произведения $(f, g), f \in F, g \in G$, и определения (3). Докажем, что для произведения (*F*, *G*) выполняется и четвёртое свойство скалярного произведения. Действительно, если (*F*, *F*) = 0 и $f \in F$, то $(f, f) \underset{(3)}{=} (F, F) = 0$. Следовательно,

$$\|f - 0\|_2 = \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = 0,$$

т.е. $f \sim 0$, а это значит, что $F = 0$.

Итак, $\tilde{RL}_2 = \tilde{RL}_2(a,b)$ с введёнными в нём операциями (2) и (3) является линейным пространством со скалярным произведением. Можно показать, что и оно не является гильбертовым (т. е. оно неполное).

В силу (3), если $f \in F \in \tilde{RL}_2$, то

$$\|F\|_{\tilde{RL}_2} = \| f \|_{RL_2}. \tag{4}$$

В самом деле, $\|F\|_{\tilde{RL}_2} = \sqrt{(F, F)} \underset{(3)}{=} \sqrt{(f, f)} = \| f \|_{RL_2}$.

<u>Замечание 1.</u> Если в $F \in RL_2(a,b)$ имеется непрерывная функция $f \in F$, то она единственна. Это следует из того, что если f, f_1 непрерывны и эквивалентны, то есть $\| f - f_1\|_2^2 = \int\limits_a^b (f(x) - f_1(x))^2 dx = 0$, то $f(x) = f_1(x)$ для всех $x \in (a,b)$.

Из замечания следует, что отображение, ставящее в соответствие каждой $f \in CL_2(a,b)$ содержащий её класс эквивалентных функций $F \in \tilde{RL}_2(a,b)$, является однозначным отображением $CL_2(a,b)$ в $\tilde{RL}_2(a,b)$, т.е. инъекцией. При этом линейные операции с функциями и скалярное произведение функций из $CL_2(a,b)$ совпадают соответственно с линейными операциями и скалярным произведением, применёнными к содержащим рассматриваемые функции классам, т.е. к образам этих функций при указанной выше инъекции. Отождествив каждую $f \in CL_2(a,b)$ с содержащим её классом эквивалентных функций, $CL_2(a,b)$ можно рассматривать как подмножество пространства $\tilde{RL}_2(a,b)$:

$$CL_2(a,b) \subset \tilde{RL}_2(a,b).$$

Поскольку множество $\overset{0}{CL}_2(a,b)$ непрерывных финитных на (*a*, *b*) функций является подмножеством $CL_2(a,b)$, то

$$\overset{0}{CL}_2(a,b) \subset CL_2(a,b) \subset \tilde{RL}_2(a,b). \tag{5}$$

<u>Определение 1.</u> Пополнение пространства $\tilde{RL}_2(a,b)$ называется лебеговым пространством $L_2 = L_2(a,b)$.

Теорема 1. Пространство $\overset{0}{C}L_2(a,b), -\infty \le a < b \le +\infty$ плотно в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$.

Доказательство. Пусть $H \in L_2(a,b)$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$.

Поскольку L_2 – пополнение $\tilde{RL}_2$, то $\tilde{RL}_2$ плотно в L_2, т. е. $\overline{\tilde{RL}_2} = L_2$. Следовательно, существует $F \in \tilde{RL}_2$, для которой

$$\|H - F\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Элемент F есть класс эквивалентных функций из RL_2. Пусть f одна из них: $f \in F$. Тогда $f \in RL_2(a,b)$, и, согласно соответствующей теореме существует $g \in \overset{0}{C}L_2(a,b)$, такая что

$$\|f - g\|_{RL_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Функция g отождествлена с содержащим её классом эквивалентных функций и поэтому является элементом пространства $\tilde{RL}_2$. Следовательно,

$$\|F - g\|_{L_2} = \|F - g\|_{\tilde{RL}_2} = \|f - g\|_{RL_2} \underset{(7)}{<} \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

В результате будем иметь

$$\|H - g\|_{L_2} \le \|H - F\|_{L_2} + \|F - g\|_{L_2} \underset{(6)(8)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пространство $L_2(a,b)$ является пополнением пространства $CL_2(a,b)$.

Доказательство. Из включений (5) получаем требуемое, ибо если $\overset{0}{C}L_2$ плотно в L_2, то и CL_2, содержащее $\overset{0}{C}L_2$, тем более плотно в L_2.

Функция типа Дирихле как элемент пространства L_2

Функцию типа Дирихле можно определить следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} 0, x - \text{рациональн ое число}, \\ 1, x - \text{иррационал ьное число}. \end{cases}$$

Ограничимся произвольным конечным интервалом (a, b), т. е. будем рассматривать только те x, которые удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$. Известно, что такая функция типа Дирихле разрывна в каждой точке и не является интегрируемой по Риману, откуда $f(x) \notin RL_2(a,b)$. Т. к., квадрат этой функции совпадает с ней самой он также не является интегрируемым по Риману.

Однако, такая функция типа Дирихле все-таки является элементом пространства $L_2(a,b)$ и для того, чтобы это показать сначала докажем справедливость формулы

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)|, \qquad (9)$$

где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \text{если } x > 0; \\ 0, \text{если } x = 0; \\ -1, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Действительно, пусть *x*– рациональное число, но тогда существует такое натуральное число n_0, что число xn_0 является целым. Тогда, очевидно, что целым числом является и число $xn_0!$, поскольку оно делится на xn_0. Замечая, что при натуральных $n > n_0$ число $n!$ делится на $n_0!$, получаем делимость числа $xn!$ на $xn_0!$. Отсюда следует, что число $n_0!\pi x$ кратно π, а значит и при всех натуральных $n > n_0$ числа $n!\pi x$ также кратны π. На основании только что сказанного

$$\sin(n!\pi x) = 0,\ n \ge n_0,$$

числа n и n_0 по – прежнему предполагаются натуральными. Тогда, очевидно,

$$\operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)| = 0,\ n \ge n_0,$$

а значит и

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)| = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, из (10) следует, что справедливость формулы (9) доказана для рациональных *x*.

Пусть теперь *x* – иррациональное число. Тогда, какое бы натуральное число *n* мы ни взяли, *xn* не будет являться целым числом. Это значит, что для любого натурального *n* число $xn!$ также целым являться не будет. Таким образом, $n!\pi x$ не будет кратно π ни при каком натуральном *n*. Это, в свою очередь, означает, что $\sin(n!\pi x) \ne 0$ какое бы ни было натуральное *n*. Тогда, для любого натурального n $|\sin(n!\pi x)| > 0$, а значит и

$$\operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)| = 1. \qquad (11)$$

Из равенства (11), очевидно, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)| = 1. \qquad (12)$$

Таким образом, из (12) следует, что справедливость формулы (9) доказана для иррациональных *x*.

Рассмотрим теперь функциональную последовательность

$$f_n(x) = \operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)|. \qquad (13)$$

Мы уже показали, получив формулу (12), что при любом натуральном *n* и любом иррациональном *x*

$$f_n(x) = 1.$$
Последнее равенство справедливо и при рациональном *x*, лишь бы было выполнено условие
$$n!x \neq l,$$
где *l* – целое число. Если же
$$n!x = l,$$
то
$$f_n(x) = 0.$$
Таким образом, для выполнения последнего равенства нужно, чтобы
$$x = \frac{l}{n!}.$$
При фиксированном *n* на конечном отрезке [*a*, *b*] таких рациональных точек конечное множество. Отсюда следует, что при любом фиксированном *n* функция $f_n(x)$ – кусочно постоянна, а значит принадлежит пространству $L_2(a,b)$, более того
$$\int_a^b f_n^2(x)dx = b - a.$$

Условимся, кусочно постоянной функцией на [*a*, *b*] называть произвольную конечную линейную комбинацию характеристических функций любых промежутков из [*a*, *b*]. Очевидно, введенные ранее ступенчатые функции являются частным случаем кусочно постоянных.

Далее, если мы при любом натуральном *m* рассмотрим выражение
$$\left| f_m(x) - f_n(x) \right|^2,$$
то на основании изложенного выше, получаем, что оно везде равно нулю за исключением конечного числа рациональных точек, в которых оно равно единице. Тогда, мы можем утверждать, что
$$\left\| f_m(x) - f_n(x) \right\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b \left| f_m(x) - f_n(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$
Отсюда следует, что последовательность $\{f_n(x)\}$– последовательность кусочно постоянных функций, фундаментальная в $L_2(a,b)$. В силу полноты этого пространства, получаем, что в нем существует предел этой последовательности, который мы и понимаем как функцию Дирихле в пространстве $L_2(a,b)$.

В итоге, мы получили, что обычная функция Дирихле является поточечным пределом кусочно постоянных функций $f_n(x)$ из (13), а предел тех же функций в пространстве $L_2(a,b)$, существование которого мы доказали, мы берем как определение функции Дирихле в этом пространстве.

Понятие интеграла Лебега

Напомним, что линейным функционалом в линейном пространстве является функция на элементах этого пространства, удовлетворяющая условиям линейности [3] и непрерывности [1]. Чтобы непрерывный функционал был определен на всем пространстве достаточно его задать лишь на плотном множестве этого пространства, тогда на все остальные элементы этот функционал распространяется по непрерывности.

В качестве линейного непрерывного функционала возьмем интеграл Римана, то есть

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx. \qquad (14)$$

Линейность функционала (1) означает справедливость равенства [3]

$$I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g); \alpha,\beta=\text{const}. \qquad (15)$$

Но подставив (15) в (14) мы получим широко известное свойство линейности интеграла.

В силу линейности, очевидно, что для установления непрерывности (14) на каждом элементе пространства достаточно доказать непрерывность этого функционала в нуле. Действительно, эта непрерывность означает, что

$$I(f)\to I(g) \text{ при } f\to g \text{ в смысле } L_2.$$

Но, в силу линейности, это эквивалентно условию

$$I(f)-I(g)=I(f-g)\to 0 \text{ при } f-g\to 0 \text{ в смысле } L_2.$$

Обозначив $f-g=h$, получим

$$I(h)\to 0 \text{ при } h\to 0 \text{ в смысле } L_2, \qquad (16)$$

а это и означает непрерывность I в нуле.

Непрерывность в нуле функционала (14), заданного на $L_2(a,b)$ следует из неравенства Коши–Буняковского

$$|I(h)|=\left|\int_a^b h(x)dx\right|\le\left(\int_a^b h^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b dx\right)^{1/2}=\sqrt{b-a}\|h\|_{L_2(a,b)}.$$

Из последнего соотношения следует, что если

$$\|h\|_{L_2(a,b)}\to 0, \text{ то } |I(h)|\to 0.$$

Последнее как-раз и означает (16).

В качестве плотного множества в $L_2(a,b)$ возьмем множество кусочно постоянных функций, каждая из которых, очевидно, интегрируема по Риману.

Как уже показано ранее, любая функция из $L_2(a,b)$ может быть представлена фундаментальной в смысле нормы L_2 последовательностью ступенчатых функций в силу плотности множества ступенчатых функций в L_2. Таким образом, можно сказать, что любая функция из $L_2(a,b)$ может быть представлена фундаментальной в смысле нормы L_2 последовательностью f_n – кусочно постоянных функций, поскольку ступенчатая функция является частным случаем кусочно постоянной и множество кусочно постоянных функций, как более широкое, чем ступенчатых, также плотно в $L_2(a,b)$.

<u>Интегрируемость по Лебегу функции типа Дирихле.</u>

Итак, функция типа Дирихле $f(x)$, как элемент $L_2(a,b)$, есть предел в смысле пространства $L_2(a,b)$ фундаментальной в этом пространстве последовательности кусочно постоянных функций (13).

Интеграл от каждой из этих функций (13) существует, поскольку $f_n(x)$ – кусочно постоянна и равен единице, так как $f_n(x)$ на $[a, b]$ отличается от единицы лишь в конечном числе точек, которые, как известно, не могут изменить значения интеграла. Отсюда, по опредению интеграла Лебега

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = b - a\ .$$

Лекция 11.
Ортогональные системы. Полные системы

Ортогональные системы

Пусть X – линейное пространство со скалярным произведением, а A – некоторое множество, называемое множеством индексов. Система $\{x_\alpha : \alpha \in A\}, x_\alpha \in X$, называется ортогональной, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta, \alpha \in A, \beta \in A$. Если, кроме того, для всех $\alpha \in A$ выполняется условие $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$, то система $\{x_\alpha : \alpha \in A\}, x_\alpha \in X$ называется ортонормированной.

Лемма 1. Если $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ - ортогональная система в пространстве со скалярным произведением и для всех $\alpha \in A$ выполняется неравенство $x_\alpha \neq 0$, то эта система является линейно независимой системой.

Доказательство. Надо показать, что, каково бы ни было конечное подмножество элементов системы $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, его элементы линейно независимы. Пусть $x_{\alpha_i} \in \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ и существуют числа $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,n$, такие, что

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0. \tag{1}$$

Умножив (1) скалярно на x_{α_k} $(k = 1,2,\ldots,n)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_k}) = 0.$$

Так как при $i \neq k$ выполняется равенство $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_k}) = 0$, то $\lambda_k (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0$. По условию $x_{\alpha_k} \neq 0$, следовательно, и $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, поэтому $\lambda_k = 0$. Таким образом, из (1) следует, что все $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,n$ равны нулю, а это и означает линейную независимость элементов x_{α_k} $(k = 1,2,\ldots,n)$.

Примеры. 1. Тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\ldots$$

ортогональна в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ортонормирована. Это следует из соответствующей леммы.

2. Полиномы

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, n = 1,2,\ldots,$$

называемые полиномами Лежандра, образуют ортогональную систему в пространстве $L_2(-1,1)$.

Докажем это. Заметив, что

$$\left. \frac{d^k (x^2 - 1)^n}{dx^n} \right|_{x=\pm 1} = 0, k = 0,1,\ldots,n-1,$$

и, проинтегрировав последовательно по частям, получим при $0 \le m \le n-1$:

$$\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} dx = x^m \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} x^{m-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} dx = \ldots =$$

$$= (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} dx = (-1)^m m! \frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0\,, \qquad (2)$$

ибо $0 \le n-m-1 \le n-1$.

Поскольку любой многочлен $Q_m(x)$ степени не выше m, $m = 0,1,\ldots,n-1$, является линейной комбинацией степеней $1, x, x^2, \ldots, x^m$, то из (2) следует, что

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x) dx = 0, m = 0,1,\ldots,n-1.$$

В частности,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0, m \ne n\,.$$

Вычислим интеграл от квадрата $P_n(x)$ на [–1, 1]. Положим $u_n(x) = (x^2-1)^n$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x) u_n^{(n)}(x) dx = -\int_{-1}^{1} u_n^{(n-1)}(x) u_n^{(n+1)}(x) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} u_n^{(n-2)}(x) u_n^{(n+2)}(x) dx = \ldots = (-1)^n \int_{-1}^{1} u_n(x) u_n^{(2n)}(x) dx =$$

$$= (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx.$$

Но

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^n d(1+x)^{n+1} = \frac{1}{n+1}\Big[(1-x)^n (1+x)^{n+1}\Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} (1+x)^{n+1} d(1-x)^n \Big] = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{1} (1+x)^{n+1} n(1-x)^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1} dx = \ldots =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} dx = \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} \left(\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_{-1}^{1} \right) =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots 1 \cdot 2^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\ldots 2n(2n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)} 2^{2n+1}.$$

Поэтому,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \right)^2 dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x) u_n^{(n)}(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$\|P_n\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} .$$

Лемма 2. Всякий многочлен степени не выше n является линейной комбинацией полиномов Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что степени $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы, т.к., если

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \lambda_n x^n = 0 \qquad (3)$$

на каком-то промежутке, то, продифференцировав последовательно n раз равенство (3), получим

$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \lambda_n x^n = 0,$

$1 \cdot \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \ldots + (n-1)\lambda_{n-1}x^{n-2} + n\lambda_n x^{n-1} = 0,$

…………………………………………,

$(n-1)!\lambda_{n-1} + n(n-1)\ldots 2\lambda_n x = 0,$

$n!\lambda_n = 0.$

Из последнего равенства следует, что $\lambda_n = 0$. Подставив это значение λ_n в предпоследнее равенство, будем иметь $\lambda_{n-1} = 0$. Продолжив этот процесс, получим $\lambda_{n-2} = \lambda_{n-3} = \ldots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$, что и означает линейную независимость степеней $1, x, x^2, \ldots, x^m$. Следовательно, эти степени образуют базис в их линейной оболочке $L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$, являющейся, очевидно, (n + 1) – мерным пространством всех многочленов степени не выше n, дополненных нулевым многочленом.

Теперь заметим, что любая система n + 1 многочленов, степени которых различны и не превосходят n, т. е. система многочленов $Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$, где многочлен $Q_k(x)$ имеет степень, равную k, k = 0, 1, …, n, образует базис в пространстве $L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Действительно, если $Q_k(x) = \sum_{m=0}^{k} a_{km}x^m$, то по условию $a_{kk} \neq 0$. Таким образом, многочлены $Q_k(x)$ выражаются через элементы базиса $1, x, x^2, \ldots, x^n$ с помощью треугольной матрицы, диагональные элементы которой не равны нулю, и, следовательно, с помощью невырожденной матрицы. Поэтому многочлены $Q_k(x), k = 0,1,\ldots,n$, также образуют базис в пространстве $L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Полиномы Лежандра $P_k(x), k = 0,1,\ldots,n$, удовлетворяют указанному условию: полином $P_k(x)$ имеет в точности степень k. Поэтому они образуют базис в пространстве $L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$, состоящем из всех многочленов степени не выше n и нулевого многочлена. Отсюда и следует, что любой многочлен степени не выше n является линейной комбинацией полиномов Лежандра. Теорема доказана и попутно доказано

Следствие. Линейная оболочка степеней $1, x, x^2, \ldots, x^n$, т. е. множество всех многочленов степени не выше *n*, дополненных нулевым многочленом, совпадает с линейной оболочкой полиномов Лежанлра $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$.

Полные системы.

Определение 2. Пусть X – полунормированное пространство. Система $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ его элементов называется полной в нём, если линейная оболочка этой системы плотна в нём по его полунорме.

Иначе говоря, полнота системы $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ в пространстве X означает, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ этой системы и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что

$$\left\| x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}) \right\| < \varepsilon .$$

Из этого определения следует, что если две системы элементов полунормированного пространства имеют одинаковые линейные оболочки, то они одновременно полны или неполны в нём. Примером полной системы является система всех непрерывных финитных на (*a*, *b*) функций в полунормированном пространстве $RL_2(a,b)$ и в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$ (см. соответствующие теоремы).

Определение 3. Полунормированное пространство *X* называется вложенным в полунормированное пространство *Y*, если: 1) $X \subset Y$, 2) существует постоянная *c* > 0, называемая константой вложения, такая, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|x\|_Y \le c\|x\|_X . \tag{4}$$

В этом случае пишут X$\hookrightarrow$Y.

Отметим, что если X_1, Y_1 являются соответственно подпространствами пространств X, Y, причём $X_1 \subset Y_1$, то из вложения X$\hookrightarrow$Y следует, очевидно, вложение $X_1 \hookrightarrow Y_1$ с той же константой.

Примеры 1. Простейшим примером вложения является тождественное вложение, когда полунорма на *X* является сужением полунормы на *Y*, т. е. когда $\|x\|_X = \|x\|_Y$ для всех $x \in X$. В этом случае константа вложения равна единице. Примерами таких вложений являются вложения $C[a,b] \hookrightarrow B[a,b]$, $CL_1[a,b] \hookrightarrow RL_1[a,b]$, $CL_2[a,b] \hookrightarrow RL_2[a,b]$, $CL_2[a,b] \hookrightarrow L_2(a,b)$.

2. Из неравенства $\|f\|_1 \le \sqrt{b-a}\|f\|_2$ следует вложение $RL_2[a,b] \hookrightarrow RL_1[a,b]$, а, следовательно, и вложение для подпространств непрерывных функций

$$CL_2[a,b] \hookrightarrow CL_1[a,b]. \tag{5}$$

3. Из неравенства $\|f\|_1 \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$ следует, что если в линейном пространстве $B[a,b] \bigcap RL_2[a,b]$ взять в качестве нормы $\|f\|_\infty$ пространства $B[a,b]$, то имеет место вложение $B[a,b] \bigcap RL_2[a,b] \hookrightarrow RL_2[a,b]$, а, следовательно, и вложение

$$C[a,b] \hookrightarrow CL_2[a,b]. \tag{6}$$

В примерах 2 и 3 число $\sqrt{b-a}$ является константой рассмотренных вложений.

Вложение пространств, очевидно, обладает транзитивностью: если $X \hookrightarrow Y$ и $Y \hookrightarrow Z$, то $X \hookrightarrow Z$. Так из вложений $C[a,b] \hookrightarrow CL_2[a,b]$ и $CL_2[a,b] \hookrightarrow L_2[a,b]$ следует, что

$$C[a,b] \hookrightarrow L_2[a,b]. \tag{7}$$

Отметим, что если $X \hookrightarrow Y$, $x_n \in X$, $n = 1,2,\dots$, $x \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ по полунорме в X, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и по полунорме в Y. Действительно, из (4) следует, что

$$0 \le \|x_n - x\|_Y \le c\|x_n - x\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_Y = 0 \ .$$

Описанное свойство вложения называют его непрерывностью.

<u>Лемма 3.</u> Пусть X и Y – полунормированные пространства. Если : 1) система $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ элементов из X полна в нем, 2) $X \hookrightarrow Y$, 3) пространство X плотно в Y ,то $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ полна в Y.

<u>Доказательство:</u> Пусть $y \in Y$ и задано ε > 0 .т. к. X плотно в Y, то существует $x \in X$, такой что

$$\|y - x\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

В силу полноты $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ в X существует конечные множества $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}$ элементов системы и чисел $\lambda_1, \dots \lambda_n$ также , что

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n})\|_X < \varepsilon/(2c) \tag{9}$$

где c - константа вложения $X \hookrightarrow Y$, . Поэтому

$$\|y - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n})\|_Y \le \|y - x\|_Y + \|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n})\|_Y \overset{(4),(8)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ c\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n})\|_X \overset{(9)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Лемма доказана.

<u>Примеры:</u> 4. Система степеней $1, x, x^2, \dots, x^k$ согласно теореме Вейерштрасса полна в $C[a,b]$, а в силу вложений (5) и (6), согласно лемме 3, эта система полна и в $CL_2[a,b]$ и $CL_1[a,b]$ (все пространства $C[a,b]$, $CL_2[a,b]$ и $CL_1[a,b]$ состоят из одних и тех же функций, поэтому условие плотности одного в другом выполняются очевидным образом). Поскольку $CL_2[a,b]$ плотно в $L_2(a,b)$ (см. следствие из теоремы 1 предыдущей лекции), то в силу тождественного вложения $CL_2[a,b]$ в $L_2(a,b)$, согласно лемме 3, система степеней $1, x, x^2, ..., x^k$ полна в $L_2(a,b)$.

5. Система полиномов Лежандра полна в $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$ и $L_2(a,b)$, при $a=-1, b=1$. Это следует из того, что согласно следствию леммы 2 полиномы Лежандра и степени $1, x, x^2, ..., x^k$ имеют одну и ту же линейную оболочку.

6. Обозначим через $C^*[-\pi,\pi]$ и $C^*L_2[-\pi,\pi]$ – подмножества соответственно пространств $C[-\pi,\pi]$ и $CL_2[-\pi,\pi]$, состоящих из таких непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций f, что $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда

$$\overset{0}{CL}_2[-\pi,\pi] \subset C^*L_2[-\pi,\pi] \subset L_2(-\pi,\pi)$$

Множество $\overset{0}{CL}_2[-\pi,\pi]$ плотно в $L_2(-\pi,\pi)$ (теорема 1 предыдущей лекции), поэтому $C^*L_2[-\pi,\pi]$ также плотно в $L_2(-\pi,\pi)$.

Тригонометрическая система

$$1, \sin x, \cos x, ..., \sin nx, \cos nx, ...,$$

согласно теореме Вейерштрасса полна в $C^*[-\pi,\pi]$, поэтому в силу вложения $C^*[-\pi,\pi] \hookrightarrow L_2(a,b)$, которое справедливо в силу (7), и плотности $C^*L_2[-\pi,\pi]$ в $L_2(-\pi,\pi)$ тригонометрическая система полна и в $L_2(-\pi,\pi)$.

Мы получили примеры двух ортогональных полных систем : в $L_2(-\pi,\pi)$ тригонометрической и полиномов Лежандра в $L_2(-1,1)$.

Лекция 12.
Коэффициенты Фурье по ортогональной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Равенство Парсеваля.Существования базиса пространства.

Необходимое и достаточное условия ,чтобы последовательность вещественных чисел была последовательностью коэффициентов Фурье элемента полного пространства. Связь замкнутости и полноты системы. Дифференцирование рядов Фурье и порядок убывания их коэффициентов. Равномерная сходимость ряда Фурье.

Коэффициенты Фурье по ортогональной системе.

Пусть X-пространство со скалярным произведением. Если любой элемент $x\in X$ можно представить в виде.

$$x = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \ , \tag{1}$$

где a_n – некоторые числа, система $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ линейно независима, а представление (1) единственно, то эта система называется базисом в X.

Если $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ ортогональный базис ,то при $k \le n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \, , e_k\right) = a_k\,(e_k\,, e_k). \tag{2}$$

В силу (1) и непрерывности скалярного произведения, переходя в (2) к пределу при $n\to\infty$, получим

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, k = 1,2,\dots. \tag{3}$$

Числа a_k называют коэффицентами Фурье элемента x по ортогональной системе $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$.

Если отказаться от требования ,что $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ базис в X, то коэффициенты Фурье всё равно можно вычислить по формулам (3). Выражение $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, где a_k – коэффиценты Фурье элемента x, будем называть рядом Фурье элемента x по ортогональной системе $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$, понимая, что он может и не сходиться.

Если $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ – ортонормированный базис т.е. $\|e_k\| = 1$, то (3) имеет вид $a_k = (x, e_k), k = 1,2,\dots.$

Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Теорема 1. Если $\{e_i\}_{i=1,2,...}$ – ортонормированная система в *X*– пространстве со скалярным произведением, то для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$\min_{\alpha_1,...\alpha_n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|. \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим $\sigma_n=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2$. Так как $\|x\|^2=(x,x)$, то, в силу ортонормированности $(x,e_i)=a_i$. Далее,

$$0\le\sigma_n=(x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\, x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i)=(x,x)-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,e_i)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=$$

$$=\|x\|^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\|x\|^2+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что минимум σ_n достигается при $\alpha_i=a_i$ причём

$$0\le\min_{\alpha_i}\sigma_n=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \qquad (6)$$

Теорема доказана.

Следствие . Для коэффициентов Фурье элементов *x* по ортонормированному базису система $\{e_i)$ справедливо неравенство Бесселя .

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\le\|x\|^2. \qquad (7)$$

Докозательство : Из (6) следует , что $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\le\|x\|^2$.Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем (7).

Равенство Парсеваля.
Существования базиса пространства

Теорема 2. Если $\{e_i\}_{i=1,2,...}$ ортонормированная система в *X* пространстве со скалярным произведением, то следующие условия эквивалентны:

1) $\{e_i\}_{i=1,2,...}$ полна в *X* ;

2) для любого $x \in X$ справедливо равенство Парсеваля

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\ ,a_i=(x,e_i)\,; \qquad (8)$$

3) для любого $x \in X$ выполнено равенство

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}a_i e_i\ . \qquad (9)$$

Доказательство. Докажем, что из 1) следует 2). В силу 1) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, такая что

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon . \qquad (10)$$

Из минимального свойства коэффицентов Фурье и (10)

$$0 \le \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Используя это неравенство и неравенство Бесселя , получаем

$$0 \le \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \le \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \varepsilon^2 .$$

В силу произвольности ε получаем (8).

Докажем, что из 2) следует 3).Из (8) имеем

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0 ,$$

то есть справедливо (9).

Утверждение, что из 3) следует 1) очевидно. Теорема доказана.

Необходимое и достаточное условие ,чтобы последовательность вещественных чисел была последовательностью коэффициентов Фурье элемента полного пространства.

Теорема 3. Пусть X – гильбертово пространство и $\{e_i\}_{i=1,2,...}$ – ортонормированная система его элементов. Для того,чтобы ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \qquad (11)$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$.

Доказательство. Необходимость следует из неравенство Бесселя. Если $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, то $\alpha_i = (x, e_i)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \le \|x\|^2$.

Докажем достаточность. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ – сходится. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой что для всех $n, m \ge N$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \varepsilon .$$

Последовательность частичных сумм ряда (11) будет фундаментальной, так как для любых $n, m \ge N$ выполнено условие

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\|\sum_{i=n}^{m} \alpha_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=n}^{m} \alpha_i^2 < \varepsilon ,$$

где $S_n = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$.

Но *X* – полно, значит последовательность $\{S_n\}$ сходится, то есть сходится и ряд (11).

<u>Связь замкнутости и полноты системы</u>

Ортогональная система $\{e_i\}$ называется замкнутой в пространстве со скалярным произведением *X*, если для любого $x \in X$ из равенств $(x, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, ...$ следует, что $x = 0$.

<u>Теорема 4.</u> Для того, чтобы ортонормированная система была полной в *X*, необходимо, а в случае если *X* полно, и достаточно чтобы она была замкнута.

<u>Доказательство</u> Необходимость. Пусть $\{e_i\}$– полная система. Если для $x \in X$ справедливы равенства $(x, e_i) = 0$, *i*–натуральное, то применяя равенство Парсеваля, получим

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 = 0 ,$$

то есть $x = 0$.

Достаточность: пусть *X* – полно. Покажем, что для любого $x \in X$ ряд Фурье по ортонормированной системе сходится и справедливо представление

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + y , \ a_i = (x, e_i) , \ (y, e_i) = 0 . \qquad (12)$$

Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ – ряд Фурье элемента *x*. В силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ сходится. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ –сходящийся.

Пусть $y = x - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right)$. В силу ортогональности $\{e_i\}$ и непрерывности скалярного произведения получаем

$$(y, e_i) = \lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right) = (x, e_i) - a_i = 0 .$$

Воспользуемся представлением (12). Из замкнутости $\{e_i\}$ следует, что если $(y, e_i) = 0$, *i*–натуральное, то $y = 0$. То есть любой элемент *x* есть сумма своего ряда Фурье на ортонормированной системе $\{e_i\}$. Следовательно, система $\{e_i\}$ полна в *X*.

<u>Дифференцирование рядов Фурье</u>
<u>и порядок убывания их коэффициентов.</u>

<u>Теорема 5.</u> Если f непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фурье f' получается при помощи формального почленного дифференцирования ряда Фурье f.

Доказательство. Пусть a_n, b_n - коэффициенты Фурье f, а a'_n, b'_n - коэффициенты Фурье f', тогда

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] = 0, \pi a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} nf(x)\sin nx dx = (-1)^n\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] + \pi n b_n = n\pi b_n, a'_n = nb_n,$$

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} nf(x)\cos nx dx = -\pi n a_n, b'_n = -na_n.$$

Поэтому ряд Фурье $f'(x)$ будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n \cos nx - na_n \sin nx\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Теорема доказана. Из неё вытекает

Следствие 1. Если 2π – периодическая функция f имеет на $[-\pi,\pi]$ $k-1$ непрерывных производных и кусочно-непрерывную k – ю производную, то ряд Фурье $f^{(k)}$ получается k – кратным почленным дифференцированием ряда Фурье f.

Следствие 2. Если выполнены условия следствия 1, и, кроме того, $f^{(k)}$ абсолютно интегрируемы на $[-\pi,\pi]$, то для коэффициентов Фурье f справедливы равенства

$$a_n = o(n^{-k}), b_n = o(n^{-k}), n \to \infty. \qquad (13)$$

Доказательство. В силу следствия 1

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[n^k a_n \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + n^k b_n \sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right].$$

С точностью до знака $n^k a_n{}^k, n^k b_n{}^k$ есть коэффициенты Фурье $f^{(k)}$ и, поэтому по теореме Римана $\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0, \lim_{n\to\infty} n^k b_n = 0$, т.е. выполнено (13).

Равномерная сходимость ряда Фурье.

Теорема 6. Пусть $f - 2\pi$ – периодическая кусочно-гладкая и непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция. Тогда ряд Фурье f сходится равномерно.

Доказательство. Поскольку кусочно-гладкая функция f это такая функция, что существует такое разбиение отрезка, что на каждом из интервалов разбиения f' непрерывна и существуют все односторонние пределы производной на каждом из концов любого отрезка разбиения. Ясно, что f' определена везде, кроме может быть конечного числа точек и кусочно-непрерывна. Если a_n, b_n – коэффициенты Фурье f, а a'_n, b'_n – коэффициенты Фурье f', то из теоремы о дифференцировании рядов Фурье, найдём

$$a'_0 = 0, a_n = -\frac{b'_n}{n}, b_n = \frac{a'_n}{n}, n - \text{натуральное}. \qquad (14)$$

Поскольку $f' \in L_2(-\pi,\pi)$, то можно записать неравенство Бесселя для неё

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,dx. \tag{15}$$

В силу (14) имеем

$$\left|a_n\cos nx+b_n\sin nx\right|\le\left|a_n\right|+\left|b_n\right|=\frac{\left|a_n'\right|}{n}+\frac{\left|b_n'\right|}{n}\le\frac{1}{2}(a_n')^2+\frac{1}{2}(b_n')^2+\frac{1}{n^2}.$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что

$$\frac{1}{2}(a_n')^2-\frac{\left|a_n'\right|}{n}+\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(\left|a_n'\right|-\frac{1}{n}\right)^2\ge 0,$$

$$\frac{1}{2}(b_n')^2-\frac{\left|b_n'\right|}{n}+\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(\left|b_n'\right|-\frac{1}{n}\right)^2\ge 0.$$

Так как в силу (15) числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n')^2+\frac{1}{2}(b_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]$$

сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$.

Лекция 13.

Свойства собственного интеграла, зависящего от параметра. Равномерная сходимость несобственных интегралов по параметру. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов. Непрерывность несобственного интеграла по параметру. Интегрируемость несобственного интеграла по параметру. Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру.

Свойства собственного интеграла, зависящего от параметра.

Доказано [1], что если f непрерывна на

$$E = \{(x,y): \varphi(y) \le x \le \psi(y), c \le y \le d\},$$

где φ и ψ непрерывны на $[c, d]$, то функция

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

непрерывна на $[c, d]$.

Теорема 1. Если f непрерывна на $K = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$, то

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \qquad (1)$$

Доказательство. Каждый из повторных интегралов в (1) равен двойному интегралу по K от f.

Теорема 2. Пусть f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области $G \supset K$. Тогда $\int_a^b f(x,y)dx$ непрерывно дифференцируем по y на $[c, d]$, причём

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, y \in [c,d]. \qquad (2)$$

Доказательство. Обозначив $\varphi(\eta) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)dx$, из (1) для $K_y = \{(x,\eta): a \le x \le b, c \le \eta \le y\}$, получаем

$$\int_c^y \varphi(\eta)d\eta = \int_c^y d\eta \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)dx = \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)d\eta = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,c)dx. \qquad (3)$$

Левая часть (3) дифференцируема, а, значит, дифференцируема и правая, следовательно

$$\varphi(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b (x,y)dx,$$

что и означает (2).

Теорема 3. Пусть f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в $\mathbb{R}^2$, а $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ дифференцируемы на $[c, d]$. Тогда

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + f(\psi(y),y)\psi'(y) \qquad (4)$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции

$$F(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)dx, u = \varphi(y), v = \psi(y),$$

имеем

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}u'(y) + \frac{\partial F}{\partial v}v'(y),$$

откуда следует (4).

Равномерная сходимость несобственных интегралов по параметру.

Предположим, что: 1) $-\infty < a < b \le +\infty$; 2) $f(x,y)$ задана на множестве $\{(x,y): x \in [a,b), y \in Y\}$; 3) для любого $\xi \in [a,b)$ и для любого $y \in Y$ существует интеграл Римана $\int_a^\xi f(x,y)dx$; 4) для любого $y \in Y$ $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится как несобственный.

Если выполнены 1-4, то говорят, что $\int_a^b f(x,y)dx$ с особенностью в b сходиться на Y.

Аналогично рассматривают $\int_a^b f(x,y)dx$ с особенностью в a, $-\infty \le a < b$. Если и a и b особые точки, то интеграл нужно разбить на сумму двух интегралов с одной особой точкой.

Определение. Пусть $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится на множестве Y. Говорят, что интеграл сходится равномерно по параметру y на Y, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b' \in [a,b)$ такое, что $\forall \xi \in [b',b)$ и $\forall y \in Y$ выполнено неравенство:

$$\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Критерий Коши. Для того, чтобы $\int_a^b f(x,y)dx$ сходился равномерно по параметру y на Y, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b' \in [a,b)$ такое, что $\forall \xi, \xi' \in [b',b)$ и $\forall y \in Y$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_\xi^{\xi'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \qquad (5)$$

Необходимость. Пусть $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится по y на Y. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$, такое, что $\forall\xi\in[b',b)$ и $\forall y\in Y$

$$\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Из (6) для $\xi,\xi'\in[b',b)$ и $y\in Y$ получаем

$$\left|\int_\xi^{\xi'} f(x,y)dx\right|=\left|\int_\xi^b f(x,y)dx-\int_{\xi'}^b f(x,y)dx\right|\le\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right|+\left|\int_{\xi'}^b f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

<u>Достаточность</u>. Пусть $\forall\varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ такое, что $\forall\xi,\xi'\in[b',b)$ и $\forall y\in Y$ выполнено (5). Тогда из критерия Коши сходимости несобственных интегралов, $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится при $\forall y\in Y$. Перейдя в (5) к пределу при $\xi'\to b-0$, получаем, что $\forall\xi\in[b',b)$ и $\forall y\in Y$ справедливо неравенство $\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right|\le\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ достаточность доказана.

<u>Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов.</u>

<u>Признак Вейерштрасса.</u> Пусть $\forall y\in Y\ \ f(x,y)$ интегрируема по x на любом $[a,b']\subset[a,b)$ и на $[a,b)$ существует $\varphi(x)$ такая, что $\forall x\in[a,b)$ и $\forall y\in Y$ выполнено неравенство $|f(x,y)|\le\varphi(x)$, а $\int_a^b\varphi(x)dx$ сходится. Тогда $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно по y на Y.

<u>Доказательство.</u> Из условия $\forall\varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ такое, что $\forall\xi,\in[b',b)$ справедливо неравенство $\int_\xi^b\varphi(x)dx<\varepsilon$. Так как $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится абсолютно $\forall y\in Y$ по признаку сравнения, то $\forall\xi\in[b',b)$ и $\forall y$ выполнено неравенство

$$\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right|\le\int_\xi^b|f(x,y)|dx\le\int_\xi^b\varphi(x)dx<\varepsilon,$$

то есть искомый интеграл сходится равномерно по y на Y.

<u>Признак Дирихле</u>. Пусть: 1) $\forall y\in Y\ \ f(x,y),g(x,y)$ и $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ непрерывны по x на $[a,+\infty)$; 2) $F(x,y)$, первообразная по x функции $f(x,y)$ $\forall y\in Y$, ограничена на множестве $x\in[a,+\infty)$, $y\in Y$; 3) $\frac{\partial g}{\partial x}\le0$ при $y\in Y$ и $x\in[a,+\infty)$; 4) $\exists\psi(x)$ непрерывная на $[a,+\infty)$, такая что $|g(x,y)|\le\psi(x)$ для $y\in Y$ и $x\in[a,+\infty)$ и $\lim_{x\to\infty}\psi(x)=0$.

Тогда равномерно по y на Y сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx. \qquad (7)$$

Доказательство. По признаку Дирихле (7) сходится $\forall y \in Y$. Покажем равномерную сходимость (7) на Y. Из 4) следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists a' > a$ такое, что $\forall \xi \in [a,+\infty)$ выполнено неравенство

$$\psi(\xi) < \varepsilon/2C, \qquad (8)$$

где $C \geq |F(x,y)|$ при $y \in Y$, $x \in [a,+\infty)$. Для $y \in Y$ и $\xi \in [a',+\infty)$ из интегрирования по частям и того, что $g(x,y) \to 0$ при $x \to \infty$, получаем

$$\int_\xi^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx = -F(\xi,y)g(\xi,y) - \int_\xi^{+\infty} F(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}dx. \qquad (9)$$

Из (9), (8) и условия имеем

$$\left|\int_\xi^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx\right| \leq C\psi(\xi) + \int_\xi^{+\infty} C\left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|dx =$$

$$= C\psi(\xi) - C\int_\xi^{+\infty}\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}dx = C\psi(\xi) + Cg(\xi,y) \leq 2C\psi(\xi) < \varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная сходимость (7) по y на Y.

Непрерывность несобственного интеграла по параметру.

Теорема 4. Пусть $f(x,y)$ - непрерывна на множестве $\{(x,y): a \leq x < b, c \leq y \leq d\}$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно по y на $[c,d]$. Тогда этот интеграл – непрерывная функция y на $[c,d]$.

Доказательство. В силу равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in [a,b)$ такое, что $\forall y \in [c,d]$

$$\left|\int_{b'}^{b} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (10)$$

Но собственный интеграл $\int_a^{b'} f(x,y)dx$ есть непрерывная функция y на $[c,d]$. Пусть $y_0 \in [c,d]$. Найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall y \in [c,d]$ и такого, что $|y - y_0| < \delta$ имеет место

$$\left|\int_a^{b'} f(x,y)dx - \int_a^{b'} f(x,y_0)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (11)$$

Тогда для любого $\forall y \in [c,d]$ такого, что $|y - y_0| < \delta$, имеем в силу (10) и (11)

$$\left|\int_a^{b} f(x,y)dx - \int_a^{b} f(x,y_0)dx\right| \leq$$

$$\le \left| \int_a^{b'} f(x,y)dx - \int_a^{b'} f(x,y_0)dx \right| + \left| \int_{b'}^{b} f(x,y)dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{b'}^{b} f(x,y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Это и означает искомую непрерывность.

Интегрируемость несобственного интеграла по параметру.

<u>Теорема 5.</u> Пусть $f(x,y)$ непрерывна на множестве $\{(x,y), a \le x < b, c \le y \le d\}$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно по y на $[c,d]$. Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \ . \tag{12}$$

<u>Доказательство</u>. Функция $\int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна по y на $[c,d]$, а значит интегрируема, то есть интеграл левой части (12) существует. Далее $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in [a,b)$ такое, что $\forall \xi \in (b'.b)$ и $\forall y \in [c,d]$ выполнено

$$\left| \int_\xi^b f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c} . \tag{13}$$

Переставляя порядок интегрирования в собственных интегралах, получим

$$\int_c^d dy \int_a^\xi f(x,y)dx = \int_a^\xi dx \int_c^d f(x,y)dy . \tag{14}$$

Покажем, что интеграл левой части (14) при $\xi \to b-0$ стремится к интегралу левой части (12). Действительно,

$$\left| \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx - \int_c^d dy \int_a^\xi f(x,y)dx \right| =$$

$$= \left| \int_c^d dy \int_\xi^b f(x,y)dx \right| \le \int_c^d \left| \int_\xi^b f(x,y)dx \right| dy <$$

$$< \frac{\varepsilon}{d-c} \int_c^d dy = \varepsilon .$$

Левая часть (14) имеет предел при $\xi \to b-0$. Поэтому правая часть (14) также имеет предел при $\xi \to b-0$. Переходя к пределу при $\xi \to b-0$ в (14) получаем (12).

<u>Теорема 6</u>. Пусть $f(x,y)$ непрерывна на множестве

$$\{(x,y), a \le x < b, c \le y < d\}$$

и выполнены условия:

1) $\int\limits_a^b |f(x,y)|dx$ сходится равномерно по y на любом $[c',d'] \subset (c,d)$;

2) $\int\limits_c^d |f(x,y)|dx$ сходится равномерно по x на любом $[a'.b'] \subset (a,b)$;

3) один из двух интегралов $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b |f(x,y)|dx$, $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,y)|dy$ сходится.

Тогда сходятся оба повторных интеграла $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ и $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$ и

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \tag{15}$$

Доказательство. а) Пусть $f \geq 0$ и существует интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Возьмем произвольно $[c',d'] \subset (c,d)$; и применим теорему 5, тогда

$$\int\limits_{c'}^{d'} dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{c'}^{d'} f(x,y)dy \leq \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{16}$$

Перестановка интегрирования законна, так как $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно по y на $[c',d'] \subset (c,d)$;. Последнее неравенство в (16) следует из неотрицательности f и существования $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Переходя в (16) к пределу при $d' \to d-0$ и $c' \to c+0$ и замечая, что, в силу неотрицательности f интеграл в левой части (16) есть возрастающая функция верхнего предела d' и убывающая функция нижнего предела c', получаем, что

$$I_2 = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \leq \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = I_1. \tag{17}$$

Проделав то же самое рассуждение для $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$ получим вместо (17) неравенство $I_1 \leq I_2$. Поэтому справедливо (15).

б) Пусть $f(x,y)$ знакопеременна. Представим её в виде $f = f^+ - f^-$, где $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$, $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$, $f^+ \geq 0, f^- \geq 0.$

Очевидно, что $0 \leq f^+ \leq |f|$, $0 \leq f^- \leq |f|$. Используя критерий Коши и признаки сравнения для несобственных интегралов, получаем, что для f^+ и f^- выполнены условия теоремы. В силу пункта а) доказательства повторные интегралы от f^+ и f^- равны. Поэтому и равны и повторные интегралы от $f = f^+ - f^-$.

Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру.

<u>Теорема 7.</u> Пусть $f(x,y)$ и $f_y(x,y)$ непрерывны на множестве

$$\{(x,y), a \le x < b, c \le y \le d\}$$

и $\int\limits_a^b f_y(x,y)dx$ сходится равномерно по y на $[c,d]$.

Тогда, если $\int\limits_a^b f(x,c)dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится на $[c,d]$ и является на $[c,d]$ непрерывно дифференцируемой функцией y, причем

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b f_y(x,y)dx. \tag{18}$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $c \le y \le d$. В силу равномерной сходимости $\int\limits_a^b f_y(x,\eta)dx$ на $[c,y]$ законна перестановка порядка интегрирования

$$\int\limits_c^y d\eta \int\limits_a^b f_y(x,\eta)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y f_y(x,\eta)d\eta = \int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^b f(x,c)dx. \tag{19}$$

Так как $\int\limits_a^b f_y(x,\eta)dx$ сходится равномерно по η на $[c,d]$, то он будет непрерывной функцией η на $[c,d]$ и интеграл, стоящий в левой части (19), будет непрерывно дифференцируемой функцией y на $[c,d]$. Но тогда и $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ есть непрерывно дифференцируемая функция на $[c,d]$. Дифференцируя обе части (19) по y получаем (18).