Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра высшей математики

Консультация по курсу Многомерный анализ, интегралы и ряды для студентов 2-го семестра I-го курса. Часть II

Учебно-методическое пособие

по курсу *Многомерный анализ, интегралы и ряды*

Автор *А. А. Бурцев*

МОСКВА
МФТИ
2021

УДК 517
ББК 22.161

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент *А.Ю. Петрович*

Консультация по курсу Многомерный анализ, интегралы и ряды для студентов 2-го семестра I-го курса. Часть I: учебно-методическое пособие по курсу *Многомерный анализ, интегралы и ряды* / автор А. А. Бурцев. – М.: МФТИ, 2021. – 41 с.

В пособии приводятся решения задач по математическому анализу, которые входят в письменную экзаменационную работу по математическому анализу у студентов первого курса МФТИ во 2-м семестре. Предназначается для студентов высших учебных заведений, изучающих математический анализ, преподавателей математического анализа для проведения семинаров и практикумов по решению задач.

© Бурцев А.А., 2021
© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

Содержание

1. Предисловие

В пособии приводятся решения задач по математическому анализу, которые входят в письменную экзаменационную работу по математическому анализу у студентов первого курса МФТИ во 2-м семестре. Приводятся подробные решения задач и ответы, даются методические указания, разбираются типичные ошибки, рассматриваются соответствующие контрпримеры, формулируются, а иногда и доказываются необходимые утверждения, взятые, как правило, из лекций по математическому анализу, читающихся для студентов 1-го курса МФТИ. Некоторые задачи решаются несколькими способами. Имеются упражнения для самостоятельного решения. Цель пособия – оказать помощь студенту в освоении методов решения задач, что необходимо для успешного выполнения письменной экзаменационной работы, а также для усвоения теоретического курса математического анализа в объёме 2-го семестра. Пособие может быть полезным преподавателям математического анализа для проведения семинаров и практикумов по решению задач. Автор благодарит А. Ю. Петровича за ценные советы и замечания.

2. Обозначения

$\forall$ — любой

$\exists$ — существует

$\nexists$ — не существует

$\Leftrightarrow$ — равносильно

$\Rightarrow$ — следовательно

$\hookrightarrow$ — выполнено, справедливо

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$

$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\} \cup \{x+0,\ x-0 : x \in \mathbb{R}\}$

$x \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty,\ -\infty$

$x \in \widehat{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty,\ -\infty,\ \infty$

$x \in \widetilde{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty,\ -\infty,\ \infty,\ a+0,\ a-0$, где a — действительное число

$f(x) \to b$, если $x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где $a \in \widetilde{\mathbb{R}},\ b \in \widetilde{\mathbb{R}}$

$f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$

$f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$

$f(x)$ — значение функции f в точке x, а также иногда этот знак обозначает функцию f

$\min\{a, b\}$ — минимум из a и b, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

$\max\{a, b\}$ — максимум из a и b, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

$\sim$ — эквивалентно

$\not\sim$ — не эквивалентно

$f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестости a $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to a \Leftrightarrow$ $f(x) = \lambda(x) g(x)$ при $x \to a$, причём $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$; $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$

$x_n \sim y_n$ при $n \to \infty \Leftrightarrow x_n - y_n = o(y_n)$ при $n \to \infty$

$o(1)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, или бесконечно малая последовательность при $n \to \infty$

$C[a, +\infty)$ — множество всех функций, непрерывных на луче $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

$f \in C[a, +\infty)$ — функция f непрерывна на луче $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

$R[a, b]$ — множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$

$f \in R[a, b]$ — функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$

$f \downarrow$ — f убывает

$f \downdownarrows$ — f строго убывает

$f \downdownarrows a$ на луче $[x_0; +\infty)$ — f строго убывает на луче $[x_0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$

$f \downarrow$ при $x \to +\infty$ — f убывает на луче $[x_0, +\infty)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$

$f \downarrow a$ при $x \to +\infty$ — f убывает на луче $[x_0, +\infty)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$

$f \upuparrows$ — f строго возрастает

$f \upuparrows a$ на луче $[x_0; +\infty)$ — f строго возрастает на луче $[x_0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$

$\rightrightarrows$ — сходится равномерно

$\not\rightrightarrows$ — равномерной сходимости нет

$f(x)|_{x=a}$ — знак подстановки, здесь $f(a)$

$f(x)|_a^b$ — знак подстановки, здесь $f(b)-f(a)$

$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \ldots\ \cdot 2n = 2^n(n!)$

$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1) = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$

$[x]$ – целая часть числа $x\in\mathbb{R}$ – наибольшее целое число, не превосходящее x. Для всех $x\in\mathbb{R}$ имеют место неравенства: $[x]\leqslant x<[x]+1$

окрестность $+\infty$ — интервал $(c,+\infty)$, $c>0$

промежуток — отрезок, интервал или полуинтервал

критическая точка производной — значение аргумента, при котором производная обращается в ноль либо не существует

$\rho(M,N)$ — расстояние между точками M и N

$A\wedge B$ — конъюнкция утверждений A и B

$\mathbb{R}^n$ — прямое декартово произведение $\mathbb{R}$ на себя n раз

R^n — арифметическое n-мерное вещественное линейное пространство

3. Задача 7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональную последовательность

Задача 7.1. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}\cos\frac{nx}{1+e^{nx}}.$$

Решение.

1) $\forall\ x\in E_1\cup E_2\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}=f(x)$.

2) Рассмотрим $E_1=(0,1)$.

$|R_n(x)|=|f(x)-f_n(x)|=$

$=\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(1-\cos\frac{nx}{1+e^{nx}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x+2}}\sin^2\frac{nx}{2(1+e^{nx})}$;

$x_n=\frac{1}{n}\in E_1$ при $n\geqslant 2$;

$|R_n(x_n)|=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}}\sin^2\frac{1}{2(1+e)}\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\ n \geqslant 2\ \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \geqslant |R_n(x_n)| = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}} \sin^2 \frac{1}{2(1+e)}$.
Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\}$ существует, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}} \sin^2 \frac{1}{2(1+e)} =$
$= \sqrt{2} \sin^2 \frac{1}{2(1+e)} > 0$.

Таким образом, либо предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\}$ не существует, либо если существует, то отличен от нуля. В любом из этих двух случаев функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к $f(x)$ на E_1.

$f_n(x)$ сходится к $f(x)$ неравномерно на E_1.

З а м е ч а н и е. Приведённое решение основано на следующем определении (1) (см. [1]): $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R^n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in E\} = 0$. Равносильное ему определение (2) состоит в том, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R^n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geqslant N\ \forall\ x \in E\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

3) Рассмотрим $E_2 = (1, +\infty)$. Так как
$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in E_2 \quad |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \sin^2 \frac{nx}{2(1+e^{nx})} \leqslant$
$\leqslant \left(\frac{nx}{e^{nx}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{n}{e^n}\right)^2 \to 0$ при $n \to \infty$, то, согласно определению (2), сходимость на E_2 равномерная.

Задача 7.2. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2} + \sin x.$$

Решение.

1) $\forall\ x \in E_1 \cup E_2 \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 + \sin x = f(x)$.

2) Рассмотрим $E_2 = (1, +\infty)$.

$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|1 - \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2}\right|$,

$x_n = n^2 \in E_2$ при $n \geqslant 2$,

$|R_n(x_n)| = |1 - \sin 1| \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall\ n > 1 \quad \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} \geqslant |R_n(x_n)| = |1 - \sin 1| > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к $f(x)$ на E_2.

$f_n(x)$ сходится к $f(x)$ неравномерно на E_2.

3) Рассмотрим $E_1 = (0, 1)$.

I способ. Так как $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in E_1\ 0 < \frac{x}{n^2} < 1$, то по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем: $\sin \frac{x}{n^2} = \frac{x}{n^2} - \frac{\sin \xi}{2!} \cdot \frac{x^2}{n^4}$, $0 < \xi < 1$. Таким образом, $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in E_1$ $\exists\ \xi \in (0; 1) : |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = |1 - \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2}| =$ $= \left|\frac{x \sin \xi}{2n^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на E_1.

З а м е ч а н и е. Безоговорочное применение формулы Маклорена с остаточным членом в форме Пеано здесь не корректно: например, $|R_n(x)| = \left|o\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| \to 0$ при $n \to \infty$ при любом фиксированном x, но $o\left(\frac{x}{n^2}\right)$ зависит как от n, так и от x, и, может быть, стремление к нулю по x неравномерное. Например, на множестве E_2 $|R_n(x)| = \left|o\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| \to 0$ при $n \to \infty$ при любом фиксированном x, но неравномерно.

З а м е ч а н и е. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа в частном случае выглядит следующим образом: $f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(\xi)}{2!}t^2$, $0 < \xi < t$. При необходимости можно взять больше членов разложения. В приведённом решении $f(t) = \sin t$, $t = \frac{x}{n^2}$. Точка ξ существует и удовлетворяет указанным неравенствам. Так как $\xi = \xi(n, x)$ зависит от x, окончательная оценка не должна содержать ξ.

II способ. Исследуем поведение функции $R_n(x) = f(x) - f_n(x) = 1 - \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2}$ на E_1 при фиксированном n с помощью производной: $R_n'(x) = -\frac{n^2}{x^2}\left(\frac{x}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} - \sin \frac{x}{n^2}\right) =$ $= -\frac{n^2}{x^2} \cos \frac{x}{n^2}\left(\frac{x}{n^2} - \operatorname{tg} \frac{x}{n^2}\right) > 0$, так как $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$, если $0 < \alpha \leqslant 1$. Здесь $\alpha = \frac{x}{n^2}$. Значит, $R_n(x) \upuparrows$ на полуинтервале $(0; 1]$. Тогда $0 < R_n(x) < R_n(1) = 1 - n^2 \sin \frac{1}{n^2}$. Таким образом, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\forall\ x \in\ E_1\ |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = |1 - \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2}| < 1 - n^2 \sin \frac{1}{n^2} =$ $= \frac{1}{6n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на E_1.

III способ. Используем неравенства $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$, справедливые для всех $x \geqslant 0$.

Неравенство $\sin x \leqslant x$ доказывалось на лекциях. Докажем неравенство $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x$ при помощи теоремы Лагранжа о среднем $\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)x,\ 0 < \xi < x$. Дважды применяя теорему Лагранжа, находим: $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} = (\cos\xi - 1 + \frac{\xi^2}{2})x = (-\sin\eta + \eta)\xi x \geqslant 0,\ 0 < \eta < \xi < x$, как и требовалось.

Следовательно, $\forall\ t \in \mathbb{R}\ |t - \sin t| \leqslant \frac{|t|^3}{6}$ и $|R_n(x)| = \frac{n^2}{x}\left|\frac{x}{n^2} - \sin\frac{x}{n^2}\right| \leqslant \frac{n^2}{x} \cdot \frac{x^3}{6n^6} = \frac{x^2}{6n^4} \leqslant \frac{1}{6n^4} \to 0$ при $n \to \infty$.

$f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на E_1.

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

Решение. 1) $\forall\ x \in E_1 \cup E_2\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x = f(x)$.

2) Рассмотрим $E_1 = (0, 1)$. Докажем, что для всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1 + t) \leqslant t$. Применяя теорему Лагранжа о средем, находим: $\varphi(t) = t - \ln(1 + t) = \frac{\xi}{1+\xi}t \geqslant 0$ и $\psi(t) = \ln(1 + t) - t + \frac{t^2}{2} = \frac{\eta^2}{1+\eta}t \geqslant 0,\ 0 < \eta,\ \xi < t$, как и требовалось.[1] Следовательно, $\forall\ t \geqslant 0\ |t - \ln(1 + t)| \leqslant \frac{t^2}{2}$ и $|R_n(x)| = \left|x - n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| = n\left|\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| \leqslant n \cdot \frac{x^2}{2n^2} = \frac{x^2}{2n} \leqslant \frac{1}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_1 равномерная.

3) Рассмотрим $E_2 = (1, +\infty)$. $|R_n(n)| = n|\ln 2 - 1| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_2 неравномерная.

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, a)$ и $E_2 = (a, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{x\ln(xn)}{n^2}$.

Решение. 1) $\forall\ x \in E_1 \cup E_2\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

2) Пусть $R_n(x) = f_n(x) - 0 = \frac{x}{n^2}\ln(xn)$.
$\forall\ n \in \mathbb{N}\ R_n'(x) = \frac{\ln(xn)+1}{n^2},\ R_n'(x) = 0$ при $x_n = \frac{1}{ne},\ R_n(x_n) = -\frac{1}{en^3},\ |R_n(x_n)| = \frac{1}{en^3},\ |R_n(+0)| = 0,\ |R_n(a-0)| = \frac{a}{n^2}|\ln an|,\ \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} = \max\{\frac{1}{en^3},\ \frac{a}{n^2}|\ln an|\} \leqslant \frac{1}{en^3} + \frac{a}{n^2}|\ln an| \to 0$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_1 равномерная.

3) $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = |R_n(+\infty)| = +\infty$. Сходимость на E_2 неравномерная.

---

[1] Возможно, неравенство $\ln(1 + t) \leqslant t$ доказывалось на лекциях. В таком случае не надо доказывать это неравенство.

Задача 7.3. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = n(e^{\frac{1}{nx}} - 1)$.

Решение.

1) $\forall\, x \in E_1 \cup E_2 \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x} = f(x)$.

2) Рассмотрим $E_1 = (0,1)$.

$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\right|$,

$x_n = \frac{1}{n} \in E_1$ при $n \geqslant 2$,

$|R_n(x_n)| = n|2 - e| \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, n \geqslant 2 \quad \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \geqslant |R_n(x_n)| = n|2-e| \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к $f(x)$ на E_1.

На E_1 $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ неравномерно.

3) Рассмотрим $E_2 = (1,+\infty)$.

I способ. Так как $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in E_2\ 0 < \frac{1}{nx} < 1$, то по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем: $e^{\frac{1}{nx}} = 1 + \frac{1}{nx} + \frac{e^{\xi}}{2!} \cdot \frac{1}{n^2x^2}$, $0 < \xi < 1$. Таким образом, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in E_2$ $\exists\, \xi \in (0;1) : |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\right| =$ $= \left|\frac{e^{\xi}}{2nx^2}\right| \leqslant \frac{e}{2n} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = 0 \Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на E_2.

II способ. Исследуем поведение функции $R_n(x) = f(x) -$ $- f_n(x) = \frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1)$ на E_2 при фиксированном n с помощью производной: $R_n'(x) = \frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{nx}} - 1\right) > 0$ при $x \in [1;+\infty)$. Так как для всех $t > 0$ выполняется $e^t > 1 + t$, то

$R_n(x) = n\left(1 + \frac{1}{nx} - e^{\frac{1}{nx}}\right) < 0$. Значит, $R_n(x) \upuparrows 0$ на E_2 и

$\sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = -R_n(1) = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - 1$. Таким образом,

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in E_2\ |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\right| <$

$< n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - 1;$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - 1 = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = 0 \Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на E_2.

Задача 7.4. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2+n^2x}\right).$$

Решение.

1) $\forall\ x \in E_1 \cup E_2\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

2) Рассмотрим $E_2 = (1,+\infty)$. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in E_2$ выполнено

$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2+n^2x}\right)\right| \leqslant \left|\left(\frac{\pi n}{2+n^2x}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{nx} \leqslant$
$\leqslant \frac{\pi}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}\ \ 0 \leqslant \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} \leqslant \frac{\pi}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на E_2.

3) Рассмотрим $E_1 = (0,1)$.

$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2+n^2x}\right)\right|$,

$x_n = \frac{1}{n^2} \in E_1$ при $n \geqslant 2$,

$|R_n(x_n)| = |\sin\frac{\pi n}{3}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \geqslant |\sin\frac{\pi n}{3}| \geqslant 0$.

Предположив, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} = 0$, по теореме о зажатой последовательности находим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |\sin\frac{\pi n}{3}| = 0$, а это не так. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \neq 0$ и функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к $f(x) = 0$ на E_1. $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ неравномерно на E_1.

Задача 7.5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = \sqrt{n}\ln\left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$.

Решение. $\forall\ x \in E_1 \cup E_2\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x} = f(x)$. По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем:

$\forall\, x \in E_1\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, \xi \in (0;1) : |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| =$
$= \left|\sqrt{x} - \sqrt{n}\ln\left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{x}{n}} - \frac{1}{(1+\xi)^2}\frac{x}{n}\right)\right| =$
$= \left|\frac{1}{(1+\xi)^2}\frac{x}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E_1. Так как $|R_n(n)| = |1 - \ln 2|\sqrt{n} \to +\infty$ при $n \to \infty$, то $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ неравномерно на E_2.

З а м е ч а н и е. Пусть $\forall\ x \in E \subset \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)|$, $\{x_n\} \subset E$, $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x_n)| \neq 0$ (то есть либо предел не существует, либо если существует, то отличен от нуля). Тогда $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на E, более того, $f_n(x) \not\rightrightarrows$ на E (то есть не существует такой функции $f(x)$, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если, например, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in$ $\in E\} = 0$, то из неравенств $\sup\{|R_n(x)| : x \in E\} \geqslant |R_n(x_n)| \geqslant 0$ вытекает $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x_n)| = 0$ вопреки условию.

Если теперь $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$ на E, то $g(x) = f(x)$, что, как мы только что видели, невозможно.

Задача 7.6. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{th}\,\frac{1}{x^4 n^2}$.

Ответ: а) сходится к $f(x) = 0$ равномерно на E_1, равномерно на E_2.

Решение. При $|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt[7]{n}}$ выполняется $|f_n(x)| \leqslant \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt[14]{n}}$. При $x \geqslant \frac{1}{\sqrt[7]{n}}$ выполняется $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^{7/2}\cdot n^2} \leqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[7]{n}}\right)^{7/2}\cdot n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.
Поэтому при $x > 0$ выполняется $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[14]{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \to 0$,
$n \to \infty$. Значит, $f_n(x)$ сходится к $f(x) = 0$ равномерно на E_1, равномерно на E_2.

4. Задача 8. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

Задача 8.1. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}$.

Решение. 1) Сходимость. Поскольку $\forall\ x \in E_1 \cup E_2\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) = \frac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n} > 0$, $u_n(x) \sim \frac{C}{n \ln^2 n}$, $n \to \infty$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n \ln^2 n}$ сходится (эталон), то $\forall\ x \in E_1 \cup E_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

Замечание. Эталонами являются следующие числовые ряды ($C \neq 0$):

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^\alpha}$ – сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$;

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^\alpha \ln^\beta n}$ – сходится, если $\alpha > 1$ при любом β; если $\alpha = 1$, то сходится при $\beta > 1$; во всех остальных случаях – расходится.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^\beta e^{\alpha n}}$ – сходится, если $\alpha > 0$ при любом β; если $\alpha = 0$, то сходится при $\beta > 1$; во всех остальных случаях – расходится.

Сходимость или расходимость этих рядов при $\alpha > 0$, $\forall\ \beta$ и при $\alpha = 0$, $\beta > 0$ устанавливается по интегральному признаку (следует из сходимости или расходимости соответствующих несобственных интегралов); во всех остальных случаях указанные числовые ряды расходятся, поскольку общий член каждого из них не стремится к нулю при $n \to \infty$.

2) Так как $\forall\ x \in E_1\ \forall\ n > 1$ $|u_n(x)| \leqslant \frac{xn}{(x^2+n^2)(1+\ln^2 n)} \leqslant \frac{1}{n \ln^2 n}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1.

3) Общий член ряда $u_n(x) \rightrightarrows 0$ на $E_1 \cup E_2$. В самом деле, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geqslant n_0\ \forall\ x \in E_1 \cup E_2$ $\left| \frac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n} \right| \leqslant \frac{1}{\ln^2 n} < \varepsilon.$

Таким образом, необходимое условие равномерной сходимости на E_2 функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполнено, и ряд может сходиться как равномерно, так и не равномерно (сходимость ряда установлена в пункте 1). Докажем при помощи критерия Коши отсутствие равномерной сходимости на E_2 у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Так как $\forall\ x \in E_2$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(x)\right| = \frac{\sin\frac{x(n+1)}{x^2+(n+1)^2}}{1+\ln^2(n+1)} + \cdots +$
$+ \frac{\sin\frac{x2n}{x^2+(2n)^2}}{1+\ln^2(2n)} \geqslant \frac{n\sin\frac{nx}{x^2+4n^2}}{1+\ln^2 2n}$, то при $x = x_n = n \in E_2$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(x_n)\right| \geqslant$
$\geqslant \frac{n\sin\frac{nx}{x^2+4n^2}}{1+\ln^2 2n}\big|_{x=n} = \frac{n\sin\frac{1}{5}}{1+\ln^2 2n} \geqslant 1$, $\forall\ n \geqslant n_0 > 1$, и, таким образом, $\exists\ \varepsilon_0 = 1 > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ n = \max\{N, n_0\} \geqslant\ N\ \exists\ p = n$ $\exists\ x_n = n \in E_2 : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n)\right| \geqslant \varepsilon_0$, как и требовалось. Ряд сходится неравномерно на E_2.

Замечание. $\forall\ x \in E_2\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \mathbb{N} \to 0 < \frac{x(n+k)}{x^2+(n+k)^2} =$ $= \frac{1}{\frac{x}{n+k}+\frac{n+k}{x}} \leqslant \frac{1}{2}$, откуда вытекает использованная в решении монотонность синуса.

Замечание. При оформлении решения в данном случае не нужно доказывать, что $u_n(x) \rightrightarrows 0$ на $E_1 \cup E_2$.

Замечание. Формальное отрицание условия Коши вытекает из условия
$\exists\ \varepsilon_0 = 1 > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geqslant n_0\ \exists\ p = n\ \exists\ x_n = n \in E_2 :$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n)\right| \geqslant \varepsilon_0$, что позволяет записать решение следующим образом: так как
$\exists\ \varepsilon_0 = 1 > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geqslant n_0\ \exists\ p = n\ \exists\ x_n = n \in E_2 :$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n)\right| = \frac{\sin\frac{x(n+1)}{x^2+(n+1)^2}}{1+\ln^2(n+1)} + \cdots + \frac{\sin\frac{x2n}{x^2+(2n)^2}}{1+\ln^2(2n)}\big|_{x=n} \geqslant \frac{n\sin\frac{nx}{x^2+4n^2}}{1+\ln^2 2n}\big|_{x=n} =$
$= \frac{n\sin\frac{1}{5}}{1+\ln^2 2n} \geqslant 1$, то условие Коши не выполняется и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E_2.

Замечание. Допустим, удалось найти такую функцию $g(n)$, что $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(x_n)\right| \geqslant |g(n)| \to C > 0$, $n \to \infty$. Тогда в рассуждении достаточно взять $\varepsilon_0 = \frac{C}{2}$. В случае $\lim\limits_{n\to\infty} |g(n)| = +\infty$, как, например, в указанном решении, подойдёт любое $\varepsilon_0 > 0$, например, $\varepsilon_0 = 1$.

З а м е ч а н и е. Если критерий Коши равномерной сходимости на множестве E функционального ряда не выполняется,[2] то ряд либо сходится неравномерно на множестве E, либо расходится хотя бы в одной точке множества E. Поточечная сходимость исследуется отдельно в пункте 1. При решении задач исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множестве E функциональную последовательность или функциональный ряд во избежание ошибок в первую очередь следует провести исследование поточечной сходимости.

П р и м е р. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве $E = (1; +\infty)$ ряд $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Решение. На множестве E ряд сходится по интегральному признаку, но, по критерию Коши, неравномерно. В самом деле, так как $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(x)\right| = \frac{1}{(n+1)^x} + \frac{1}{(n+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(2n)^x} \geqslant \frac{n}{(2n)^x}$, то при $x = x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \in E_2$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(x_n)\right| \geqslant \frac{n}{(2n)^x}\Big|_{x=1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{(2n)^{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. Таким образом,
$\exists\ \varepsilon_0 = \frac{1}{4} > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geqslant n_0\ \exists\ p = n\ \exists\ x_n = n \in E_2 :$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n)\right| \geqslant \varepsilon_0$, откуда вытекает справедливость формального отрицания критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Ошибочным является рассуждение: поскольку $\forall\ x \in E_1$ $\forall\ n > 1 \hookrightarrow 0 < u_n(x) \sim \frac{x}{n\ln^2 n}$ при $n \to \infty$, $\left|\frac{x}{n\ln^2 n}\right| \leqslant \frac{1}{n\ln^2 n}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1.

[2]Строго говоря здесь предполагается, что не выполняется условие Коши критерия Коши. Критерий Коши всегда выпоняется, будучи верной теоремой. Помня об этом, мы допускаем вольность речи.

Контрпример: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $E = [1, +\infty)$, где

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{xn^2}, & \text{если } x \neq n, \\ 1 + \frac{1}{n^2}, & \text{если } x = n. \end{cases}$$

Так как $\forall\, x \in E\ u_n(x) \sim \frac{C}{n^2}$ при $n \to \infty$, то ряд сходится на E. Так как $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \sup\{|u_n(x)| : x \in E\} \geqslant |u_n(n)| = 1 + \frac{1}{n^2} \geqslant 1$, то общий член ряда $u_n(x) \not\rightrightarrows 0$ на E и ряд сходится неравномерно на E, так как не выполнено необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Однако $0 < u_n(x) \sim \frac{1}{xn^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. По теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{xn^2}$ сходится равномерно на E, а ряд с эквивалентным общим членом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, как было показано, сходится на E неравномерно.

Вывод. *При исследовании равномерной сходимости общий член ряда, даже знакопостоянного, нельзя менять на эквивалентную величину.*

Ошибочным является рассуждение: при подстановке в функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}$ при $x \in E_2$ вместо x значений $x = x_n = n \in \mathbb{N}$ получается числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2}}{1+\ln^2 n}$. Поскольку указанный числовой ряд расходится, для него справедливо отрицание условия Коши критерия Коши: $\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall\ N \in \mathbb{N}$ $\exists\, n > N\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n = n \in E_2 : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n)\right| \geqslant \varepsilon_0$. На основании критерия Коши о равномерной сходимости функциональных рядов заключаем отсутствие равномерной сходимости на E_2 у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Контрпример: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $E = [1, +\infty)$, где

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{xn^2}, & \text{если } x \neq n, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = n. \end{cases}$$

Так как $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n > N\ \forall\ p \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in E$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \left(\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right) + + \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{n+1} = = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon$, то по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $E = [1, +\infty)$. Однако $u_n(n) = \frac{1}{n}$, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. По указанному ошибочному рассуждению получается, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на E.

Фактически таким рассуждением показано, что $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ $\forall\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ n > N\ \exists\ p \in \mathbb{N}\ \exists\ x_{n+1} = (n+1) \in E_2,\ \dots,\ \exists\ x_{n+p} = = (n+p) \in E_2 : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_k)\right| \geqslant \varepsilon_0$, а это не есть формальное отрицание условия Коши.

Ошибочным является рассуждение: поскольку $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(k)\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin\frac{1}{2}}{1+\ln^2 k}\right| \geqslant \frac{n \sin\frac{1}{2}}{1+\ln^2 2n} \geqslant 1,\ \forall\ n \geqslant n_0 > 1$, то
$\exists\ \varepsilon_0 = 1 > 0\ \forall\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ n = \max\{N, n_0\} \geqslant N\ \exists\ p = n\ \exists\ x_n =\in E_2 :$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n)\right| \geqslant \varepsilon_0$. На основании критерия Коши заключаем отсутствие равномерной сходимости на E_2 у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Контрпример тот же, что в предыдущем случае.

Во избежание ошибок в рассуждении точку $x = x_n$ можно подставлять уже после оценки снизу модуля отрезка ряда.

Таким рассуждением показано: $\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall\ N \in \mathbb{N}$
$\exists\ n > N\ \exists\ p \in \mathbb{N}\ \exists\ x_{n+1} = (n+1) \in E_2,\ \dots,\ \exists\ x_{n+p} = (n+p) \in E_2 :$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_k)\right| \geqslant \varepsilon_0$. Это не есть формальное отрицание условия Коши.

В качестве контрпримера в этом и в предыдущем случае можно взять более простой ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $E=[1,+\infty)$, где

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\neq n,\\ \frac{1}{n}, & \text{если } x=n.\end{cases}$$

Задача 8.2. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n}\operatorname{sh}\frac{x}{n}$.

Решение. 1) Так как
$\forall\ x\in E_1\cup E_2\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ 0<u_n(x)=\frac{x}{x+n}\operatorname{sh}\frac{x}{n}\sim\frac{C}{n^2}$, $n\to\infty$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ сходится (эталон), то $\forall\ x\in E_1\cup E_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

2) Так как
$\forall\ x\in E_1\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ |u_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$, $n\to\infty$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1.

3) Рассмотрим E_2. Докажем, что общий член функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неравномерно на E_2 стремится к нулю. Так как на E_2 ряд сходится, то $\forall\ x\in E_2\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=0$. Далее, $|u_n(x)|=$ $=\left|\frac{x}{x+n}\operatorname{sh}\frac{x}{n}\right|$; $\forall\ n\in\mathbb{N}\ x_n=2n\in E_2$; $|u_n(x_n)|=\frac{2}{3}\operatorname{sh}2>0\Rightarrow$ общий член ряда $u_n(x)$ стремится к нулю неравномерно, откуда следует неравномерная сходимость на E_2 функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, так как не выполнено необходимое условие его равномерной сходимости (сходимость ряда установлена в пункте 1).

З а м е ч а н и е. Из критерия Коши следует, что если предел $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x_n)|\neq 0$, то равномерной сходимости у функционального ряда нет.[3] В самом деле, условие Коши

[3]Этим фактом можно пользоваться в письменной работе без доказательства.

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,N\in\mathbb{N}\ \forall\,n\geqslant N\ \forall\,p\ \forall\,x\in E\ \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}u_k(x)\right|<\varepsilon$ для $p=1$ имеет вид: $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,N\in\mathbb{N}\ \forall\,n\geqslant N\ \forall\,x\in E\ |u_n(x)|<\varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x_n)|=0$. Значит, условие Коши не выполняется и по критерию Коши ряд не является равномерно сходящимся на E. В нашем примере $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x_n)|=\frac{2}{3}\operatorname{sh}2\neq 0$.

Задача 8.3. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^3n^3}{x^6+n^2}\operatorname{th}\left(\frac{x}{n}\right)^3$.

Решение. 1) Так как $\forall\,x\in E_1\cup E_2\ \forall\,n\in\mathbb{N}\ 0<u_n(x)=\frac{x^3n^3}{x^6+n^2}\operatorname{th}\left(\frac{x}{n}\right)^3\sim\frac{C}{n^2}$ при $n\to\infty$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ сходится (эталон), то $\forall\,x\in E_1\cup E_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

2) Так как $\forall\,x\in E_1\ \forall\,n\in\mathbb{N}\ |u_n(x)|\leqslant\frac{x^3n^3}{x^6+n^2}\cdot\frac{x^3}{n^3}\leqslant\frac{1}{n^2}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно на E_1.

3) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(n)|=\operatorname{th}1>0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E_2. Ряд сходится неравномерно на E_2 (сходимость ряда установлена в пункте 1).

Задача 8.4. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{x^2}{n}}\left(\operatorname{ch}\frac{x^3}{n}-1\right)$.

Решение. 1) Так как $\forall\,x\in E_1\cup E_2\ \forall\,n\in\mathbb{N}\ 0<u_n(x)=n^{-\frac{x^2}{n}}\left(\operatorname{ch}\frac{x^3}{n}-1\right)\sim\frac{x^6}{2n^2},\ n\to\infty$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ сходится (эталон), то $\forall\,x\in E_1\cup E_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

2) Рассмотрим $E_1 = (0,1)$. Так как $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in E_1\ 0 < \frac{x^3}{n} < 1$, то по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем: $\left(\operatorname{ch}\frac{x^3}{n} - 1\right) = \frac{x^6 \operatorname{ch}\xi}{2n^2}$, $0 < \xi < 1$. Кроме того, $\left|n^{-\frac{x^2}{n}}\right| \leqslant 1$.

Поскольку $\forall\ x \in E_1\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ |u_n(x)| \leqslant \frac{\operatorname{ch} 1}{2n^2}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1.

3) $\forall\ n \geqslant 2\ x_n = \sqrt[3]{n} \in E_2$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n(x_n)| =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n^{-1/3}}} |\operatorname{ch} 1 - 1| = |\operatorname{ch} 1 - 1| > 0$, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на E_2 (сходимость ряда установлена в пункте 1).

Задача 8.5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\right) \operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{n}}$.

Решение. Общий член ряда $u_n(x) = 2\sin^2\left(\frac{x^{5/2}}{2\sqrt{n}}\right) \operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{n}}$.

На $E_1:\ \ 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{2x^5}{4n} \cdot \frac{e^x}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{e}{2n\sqrt{n}}$, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e}{2n\sqrt{n}}$ сходится (например, по интегральному признаку), функциональный ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса.

На $E_2:\ u_n(x) \sim \frac{C}{n\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$, ряд сходится; $u_n(\sqrt[5]{n}) \sim \pi\sin^2(1/2)$ при $n \to \infty$, ряд сходится неравномерно.

Задача 8.6. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x) = \sqrt{x}\operatorname{th}\frac{1}{x^4n^2}$.

Решение. Так как на E_2 выполняется $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^{7/2}\cdot n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E_2.

Так как на E_1 $f_n(x) \sim \frac{C}{n^2}$ при $n \to \infty$, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на E_1, но по критерию Коши неравномерно: $\forall\ n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant \operatorname{th}\frac{1}{4} > 0$.

5. Задача 9. Исследовать функцию на дифференцируемость в заданной точке

Задача 9.1. Исследовать на дифференцируемость в точке $D(1,1)$ функцию

$$z(x,y) = (2x^2 - y^2 - 1)\sqrt{x^2 + y^2 - xy - x - y + 1}.$$

Замечание. Напомним, что числовая функция двух переменных $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если её приращение в этой точке представляется в виде $\Delta f(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ есть функция 2-х переменных Δx и Δy, $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y =$
$= y - y_0 = dy$. У дифференцируемой функции
$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x=x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$,
$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0, y)|_{y=y_0} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$.
Если обе частные производные A и B существуют, то дифференцируемость равносильна равенству $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$.

Решение. Из теоремы о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций следует, что заменой $u = x - 1$, $v = y - 1$ задача сводится к исследованию на дифференцируемость в точке $O(0,0)$ функции $f(u,v) = z(u+1, v+1)$,

$$f(u,v) = (2u^2 + 4u - v^2 - 2v)\sqrt{u^2 + v^2 - uv}.$$

Нетрудно видеть, что $f(0,0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{d}{du} f(u,0)|_{u=0} = \left(\frac{d}{du}(2u^2 + 4u)\sqrt{u^2}\right)|_{u=0} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{(2u^2+4u)|u|}{u} = \lim_{u\to 0}(2u+4)|u| \;=\; 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dv} f(0,v)|_{v=0} = \left(\frac{d}{dv}(-v^2-2v)\sqrt{v^2}\right)|_{v=0} =$$

$$= \lim_{v\to 0} \frac{(-v^2-2v)|v|}{v} = \lim_{v\to 0}(-v-2)|v| \;=\; 0,$$

и, таким образом, функция $f(u,v)$ дифференцируема в точке $(0,0)$ тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$. Перейдём к полярным координатам: $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$. Тогда

$$\forall\ \rho > 0\ \forall\ \varphi \in [0, 2\pi) \hookrightarrow \left|\frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(2\rho^2\cos^2\varphi + 4\rho\cos\varphi - \rho^2\sin^2\varphi - 2\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2-\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{\rho}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\rho(3\rho+6) \to 0, \quad \rho \to +0.$$

Следовательно, $\exists \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$, и функция $f(u,v)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

Ответ: функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $D(1,1)$.

З а м е ч а н и е. Подчеркнём, что окончательная оценка модуля $\left|\frac{f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}{\rho}\right| \leqslant \sqrt{2}\rho(3\rho+6)$ не должна содержать φ, она должна содержать только ρ.

Ошибочным является рассуждение:
$\forall\,\varphi \in [0,2\pi)\ \exists \lim\limits_{\rho\to+0} \frac{(2\rho^2\cos^2\varphi+4\rho\cos\varphi-\rho^2\sin^2\varphi-2\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2-\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{\rho} =$
$= \lim\limits_{\rho\to+0} \rho(2\rho\cos^2\varphi + 4\cos\varphi - \rho\sin^2\varphi - 2\sin\varphi)\sqrt{1-\cos\varphi\sin\varphi} = 0$
(предел равен нулю, например, как произведение бесконечно малой ρ на ограниченную функцию: полагаем $\rho < 1$). Следовательно, $\exists \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$. Этим рассуждением (посылка импликации) установлено лишь, что предел по каждому направлению равен нулю, откуда ещё не следует существование соответствующего двойного предела.

Не редко указанное ошибочное рассуждение оформляется в виде равенства
$\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}} =$
$= \lim\limits_{\rho\to+0} \frac{(2\rho^2\cos^2\varphi+4\rho\cos\varphi-\rho^2\sin^2\varphi-2\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2-\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{\rho} = 0$, которое не доказывает требуемое, так как в общем случае равенство $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim\limits_{\rho\to+0} \frac{f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}{\rho}$ не является верным.[4]

З а м е ч а н и е. Можно обойтись без перехода к полярным координатам [3]. Заметим, что для всех $x,\ y \in \mathbb{R}$ $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ и $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$. Пусть $0 < \rho = \sqrt{u^2+v^2} < 1$. Тогда

$0 \leqslant \left|\frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| \leqslant \frac{(2\rho^2+4\rho+\rho^2+2\rho)\sqrt{\rho^2+2\rho^2}}{\rho} \leqslant$

$\leqslant \rho(3\rho+6)\sqrt{3} \leqslant 18\rho = 18\sqrt{u^2+v^2} \to 0$, если $(u,v) \to (0,0)$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$, и функция $f(u,v)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

П р и м е р. Исследовать на дифференцируемость в точке $M(0,0)$ функцию

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x}\,\mathrm{sh}(3x), & x \neq 0,\\ y^3 + |y|^{3/2}, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. $f(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(\frac{d}{dy} f(0,y)\right)\Big|_{y=0} =$
$= (y^3+|y|^{3/2})'|_{y=0} = (y^3)'|_{y=0} + \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{\sqrt{|\Delta y|^3}}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}\sqrt{|\Delta y|} = 0.$

Докажем, что $\exists \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0.\ \ (*)$

I способ. Пусть $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \in (0,\rho_0)$, где положительное ρ_0 столь мало, что $|\mathrm{sh}(3\Delta x)| < 6|\Delta x|$. Тогда при $\Delta x \neq 0$ $\left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| = \left|\frac{\Delta y^2\,\mathrm{sh}(3\Delta x)}{\Delta x\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant \frac{6\Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \leqslant \frac{6(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$

[4] Для функции $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, $x^2+y^2 > 0$, в точке $(0;0)$ предел по каждому направлению равен 0, а двойной предел не существует, так как, например, $f(x,x^2) = \frac{1}{2}$. См. [5].

$= 6\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, если $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ по множеству определения (при $\Delta x \neq 0$).

При $\Delta x = 0,\ \Delta y \neq 0$ $\left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| = \left|\frac{\Delta y^3+|\Delta y|^{3/2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant \frac{|\Delta y|^3+|\Delta y|^{3/2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \leqslant$

$$\leqslant \frac{\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^3 + \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^{3/2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leqslant$$

$$\leqslant (\Delta x^2 + \Delta y^2) + \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^{1/2} \to 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

по множеству определения (при $\Delta x = 0,\ \Delta y \neq 0$).

Таким образом, для всех достаточно малых Δx и Δy, не равных одновременно нулю, выполнено $\left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant$ $\leqslant 6\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + (\Delta x^2 + \Delta y^2) + (\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})^{1/2} \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Значит, $\exists \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$.

II способ. Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} \Delta x = \rho\cos\varphi, \\ \Delta y = \rho\sin\varphi, \quad \rho > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

1-й случай: $\Delta x \neq 0$.

$\exists\ \rho_0 > 0\ \forall\ \rho \in (0, \rho_0)\ \forall\ \varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ $\left|\frac{f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}{\rho}\right| =$ $= \left|\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\operatorname{sh}(3\rho\cos\varphi)\right| = \left|6\rho\sin^2\varphi \cdot \frac{\operatorname{sh}(3\rho\cos\varphi)}{6\rho\cos\varphi}\right| \leqslant |6\rho\sin^2\varphi| \leqslant 6\rho =$ $= F_1(\rho)$, поскольку для некоторого $\alpha_0 > 0,\ 0 < \frac{\operatorname{sh}\alpha}{2\alpha} < 1$ для всех $\alpha:\ 0 < |\alpha| < \alpha_0$.

2-й случай: $\Delta x = 0$. $\forall\ \rho > 0\ \forall\ \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ $\left|\frac{f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}{\rho}\right| =$ $= \left|\rho^2\sin^3\varphi + \sqrt{\rho}|\sin\varphi|^{3/2}\right| \leqslant \rho^2 + \sqrt{\rho} = F_2(\rho)$.

Таким образом, $\exists\ \rho_0 > 0\ \forall\ \rho \in (0, \rho_0)\ \forall\ \varphi \in [0, 2\pi)$ $\left|\frac{f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}{\rho}\right| \leqslant F_1(\rho) + F_2(\rho) = 6\rho + \rho^2 + \sqrt{\rho} \to 0$ при $\rho \to +0$, что и требовалось доказать.

Утверждение $(*)$ равносильно дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке $M(0, 0)$.

Ответ: $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(0, 0)$.

Задача 9.2. Исследовать на дифференцируемость в точке $M(0,0)$ функцию

$$z(x,\, y) = \begin{cases} \ln\left(1 + x\sin\sqrt[3]{\dfrac{y^4}{x}}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}z(x,0)|_{x=0} = \frac{d}{dx}0 = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}z(0,y)|_{y=0} = \frac{d}{dy}0 = 0$, $z(0,0) = 0$, то функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$ тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

I способ. Поскольку для всех достаточно малых x и y, не равных одновременно нулю, выполнено $0 \leqslant \left|\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{2\sqrt[3]{x^2y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant$ $\leqslant \frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ при $(x,y) \to (0,0)$, то $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ и функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $M(0,0)$.

II способ. Перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Поскольку для всех действительных значений переменной t справедливо неравенство $|\sin t| \leqslant |t|$ и для всех достаточно малых по модулю действительных значений переменной t справедливо неравенство $|\ln(1+t)| \leqslant |2t|$, то $\exists\, \rho_0 > 0\ \forall\, \rho \in (0,\rho_0)\ \forall\, \varphi \in [0,2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ $\left|\frac{\ln\left(1+x\sin\sqrt[3]{\frac{y^4}{x}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| =$ $= \left|\frac{\ln\left(1+\rho\cos\varphi\cdot\sin\sqrt[3]{\frac{\rho^4\sin^4\varphi}{\rho\cos\varphi}}\right)}{\rho}\right| \leqslant 2\rho\sqrt[3]{\cos^2\varphi\sin^4\varphi} \leqslant 2\rho$. Следовательно, $\forall\, \rho > 0\ \forall\, \varphi \in [0,2\pi)$ $\left|\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{z(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}{\rho}\right| \leqslant 2\rho \to 0$, если $\rho \to +0$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ и функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $M(0,0)$.

Задача 9.3. Исследовать на дифференцируемость в точке $M(0,0)$ функцию $z(x,y) = \ln(2 + y + \sqrt[5]{x^2y^4})$.

Решение. Докажем, что функция $f(x,y) = 2+y+\sqrt[5]{x^2y^4}$ дифференцируема в точке $M(0,0)$. Так как $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}f(x,0)|_{x=0} = \frac{d}{dx}2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}f(0,y)|_{y=0} = \frac{d}{dy}(2+y)|_{y=0} = 1$ и $f(0,0) = 2$, то функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(0,0)$ тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(2+y+\sqrt[5]{x^2y^4}\right)-2-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

I способ. Пусть $\rho = \sqrt{x^2+y^2} > 0$. Тогда $0 \leqslant \left|\frac{\sqrt[5]{x^2y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{\rho^{2/5}\rho^{4/5}}{\rho} = \sqrt[5]{\rho} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/5} \to 0$ при $(x,y) \to (0,0)$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2+y+\sqrt[5]{x^2y^4})-2-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ и функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(0,0)$.

II способ. Перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда $\forall\ \rho > 0\ \forall\ \varphi \in [0, 2\pi)$ $\left|\frac{\sqrt[5]{x^2y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\sqrt[5]{\rho^6\cos^2\varphi\sin^4\varphi}}{\rho}\right| \leqslant \sqrt[5]{\rho} \to 0$ при $\rho \to +0$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2+y+\sqrt[5]{x^2y^4})-2-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ и функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(0,0)$.

Далее, так как функция одной переменной $\ln u$ дифференцируема в точке $u_0 = 2 = f(0,0)$, то сложная функция $z(x,y) = \ln f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(0,0)$ по теореме о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций.

Ответ: функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $M(0,0)$.

Задача 9.4. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0,0)$ функцию

$$z(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{y^3}\ln\left(1+\dfrac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}z(x,0)|_{x=0} = \frac{d}{dx}0 = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}z(0,y)|_{y=0} = \frac{d}{dy}0 = 0$, $z(0,0) = 0$, то функция

$z(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$ тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

I способ. $0 \leqslant \left| \frac{\frac{x^5}{y^3}\ln\left(1+\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leqslant \frac{|x|^5|y|}{(x^2+y^2)^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} \leqslant$
$\leqslant \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ при $(x,y)\to(0,0)$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ и функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$.

II способ. Перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда $\forall\ \rho > 0\ \forall\ \varphi \in [0,2\pi)\setminus\{0,\pi\}$ справедливо $\left| \frac{\frac{x^5}{y^3}\ln\left(1+\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left|\rho\frac{\cos^5\varphi}{\sin^3\varphi}\ln(1+\sin^4\varphi)\right| \leqslant |\rho\cos^5\varphi\sin\varphi| \leqslant \rho$.
Следовательно,
$\forall\ \rho > 0\ \forall\ \varphi \in [0,2\pi)$ $\left|\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{z(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}{\rho}\right| \leqslant \rho$, $\rho \to 0$ при $\rho \to +0$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ и функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$.

6. Задача 10. Разные задачи

Задача 10.1. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Верно ли, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ сходится? Доказать, или опровергнуть примером.

Решение. Ввиду верного неравенства $\left|\frac{a_n}{n}\right| \leqslant \frac{a_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}$ (между средним геометрическим и средним арифметическим) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится по признаку сравнения. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ абсолютно сходится, значит, он сходится.

Задача 10.2. Является ли функция $z(x,y) = \sin\frac{1}{x^2+y^2+2y}$ равномерно-непрерывной в области $G = \{x^2+y^2+y < 0\}$?

Решение. Заменой переменных: $u = x$, $v = y+1$ задача сводится к вопросу: является ли функция $f(u,v) = -\sin\frac{1}{1-u^2-v^2}$

равномерно-непрерывной в области $H=\left\{u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}\right\}$? В этой области функция $f(u,v)$ не является равномерно-непрерывной. В самом деле, для последовательностей

$M_n=(u_n,v_n)=\left(0,\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}}\right)\in H$

и

$M_n'=(u_n',v_n')=\left(0,\sqrt{1-\frac{2}{\pi(1+4n)}}\right)\in H$

имеем:

$\rho(M_n,M_n')==\sqrt{(u_n-u_n')^2+(v_n-v_n')^2}=$

$=\left|\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}}-\sqrt{1-\frac{2}{\pi(1+4n)}}\right|\to 0$ при $n\to\infty$, однако

$\forall\ n\in\mathbb{N}\ \ |f(M_n)-f(M_n')|=\left|-\sin 2\pi n+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right|=1.$

Таким образом, $\exists\ \varepsilon_0=1>0\ \forall\ \delta>0\ \exists\ M_n\in H\ \exists\ M_n'\in H:$ $\rho(M_n,M_n')<\delta\wedge|f(M_n)-f(M_n')|\geqslant\varepsilon_0$, то есть выполнено формальное отрицание необходимого и достаточного условия равномерной непрерывности.

Задача 10.3. У непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ интегралы $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходятся условно. Может ли интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ a) сходиться абсолютно; b) сходиться условно;
c) расходиться?

Ответ:

a) Может. Например, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $g(x)=\frac{\sin x}{x}$, $f(x)g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$.

b) Может. Например,
$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $f(x)g(x)=\frac{\sin 2x}{2x}$.

c) Может. Например, $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $f(x)g(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$.

Задача 10.4. При всех $\alpha>0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$I=\int\limits_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin 2x}{x^\alpha}\right)dx.$$

Решение.

$z=\frac{\sin 2x}{x^\alpha}\to 0$ при $x\to+\infty$. $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}(1+o(1))$ при $z\to 0$.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{z^2}{2}(1+o(1))dx$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{z^2}{2}(1+o(1))dx$ абсолютно сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} z^2dx$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{x^{2\alpha}}dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $\alpha > \frac{1}{2}$. Поэтому при $\alpha > \frac{1}{2}$ интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \ln(1+z)dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} zdx$ сходятся и абсолютно сходятся одновременно. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} zdx$ сходится при $\alpha > 0$ и абсолютно сходится при $\alpha > 1$. Значит, I абсолютно сходится при $\alpha > 1$, I условно сходится при $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, I расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

З а м е ч а н и е. Пусть несобственные интегралы I, I_1, I_2 с одними и теми же пределами интегрирования таковы, что $I = I_1 + I_2$ и интеграл I_2 абсолютно сходится. Тогда интегралы I и I_1 сходятся и абсолютно сходятся одновременно. У п р а ж н е н и е. Докажите это утверждение. П о д с к а з к а. Примените признак сравнения.

7. Равномерная непрерывность

Пусть $E \subset R^n$. Функция $f : E \to R$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$ по множеству E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in E \; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Функция $f : E \to R$ непрерывна на множестве E по множеству E, если она непрерывна в каждой точке множества E по множеству E, то есть

$$\forall x_0 \in E \; (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \; \forall x \in E \; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)). \tag{2}$$

Если в условии (2) зависимость δ от точки x_0 несущественная, то говорят о равномерной непрерывности функции $f : E \to R$ на множестве E. Итак, функция $f : E \to R$ называется равномерно-непрерывной на множестве $E \subset R^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x_1, x_2 \in E \; (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon). \qquad (3)$$

Из (3) следует, что функция $f : E \to R$ не является равномерно-непрерывной на множестве $E \subset R^n$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x_1 \in E\, \exists x_2 \in E : \, |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что равномерно-непрерывная на множестве E функция равномерно-непрерывна и на подмножестве $E' \subset E$ множества E. Если же функция не является равномерно-непрерывной на подмножестве $E' \subset E$ множества E, то она не является равномерно-непрерывной и на множестве E. Из (3) и (2) следует, что равномерно-непрерывная функция непрерывна. Обратное не верно, как показывает следующий

П р и м е р 1. Функция $f(x) = \sin(1/x)$ неравномерно-непрерывна на $E = (0; 1) \subset R$.

В самом деле, $f(x)$ непрерывна на E как композиция непрерывных функций. Докажем, что $f(x)$ не является равномерно-непрерывной на E. Возьмём две последовательности точек из $E : x_n = \frac{1}{2\pi n}$ и $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Тогда $|x_n - y_n| \to 0$ при $n \to \infty$, но $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ для всех натуральных n. Таким образом, $\exists \varepsilon = 1 > 0$

$$\forall \delta > 0\, \exists x_n \in E\, \exists y_n \in E : \, |x_n - y_n| < \delta \wedge |f(x_n) - f(y_n)| = \varepsilon, \qquad (5)$$

то есть выполнено необходимое и достаточное условие (4) отсутствия равномерной непрерывности.

П р и м е р 2. Функция $f(x) = x$ равномерно-непрерывна на всей числовой прямой. Для доказательства достаточно положить в (3) $\delta = \varepsilon$ и $E = R$.

П р и м е р 2а. Функция $f(x) = 1$ равномерно-непрерывна на всей числовой прямой. Доказательство такое же, как в примере (2).

Теорема Кантора. *Числовая функция, непрерывная на компакте $E \subset R^n$ равномерно-непрерывна на этом компакте.*

Теорема доказывается в лекциях курса.

П р и м е р 3. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно-непрерывна на интервале $E = (0;1)$.

В самом деле, функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно-непрерывна на отрезке $E_1 = [0;1]$ по теореме Кантора, ведь она непрерывна на E_1, а всякий отрезок компактен в R. Но тогда условие (3) выполнено и для $E \subset E_1$, что и требовалось доказать.

У т в е р ж д е н и е 1. Числовая функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на *ограниченном* интервале $(a;b) \subset R$ в том и только в том случае, когда $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$ и существуют *конечные* односторонние пределы $l = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $L = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Непрерывность функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ следует из её равномерной непрерывности на этом интервале. В силу той же равномерной непрерывности функции $f(x)$ на конечном интервале $(a;b)$ выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall x_1, x_2 \in (a; a+\delta) \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad (6)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall x_1, x_2 \in (b-\delta; b) \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (7)$$

Но (6) и (7) есть не что иное, как условия критерия Коши существования соответствующих односторонних пределов.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на конечном интервале $(a;b)$ и существуют конечные односторонние пределы $l = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $L = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$. Положим $f(a) = l$, $f(b) = L$. Тогда функция $f(x)$ будет определённой и непрерывной на отрезке $[a;b]$ и по теореме Кантора равномерно-непрерывной. Поскольку свойство (3) выполнено на отрезке $[a;b]$, оно выполнено и на интервале $(a;b) \subset [a,b]$. Утверждение доказано.

У т в е р ж д е н и е 2. Числовая функция $f(x)$, равномерно-непрерывная на *ограниченном* интервале $(a;b) \subset R$, ограничена на этом интервале.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $f(a) = l$, $f(b) = L$, где l и L взяты из утверждения (1). Тогда функция $f(x)$ будет определённой и непрерывной на отрезке $[a;b]$ и по теореме Вейерштрасса ограниченной на нём. Значит, $f(x)$ ограничена и на интервале $(a;b) \subset [a;b]$.

Пример (1) показывает, что необходимое условие из утверждения (2) не является достаточным, а пример (2) – что конечность интервала в утверждении (2) существенна.

Пример 4. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ неравномерно-непрерывна на $E = (0;1)$. В самом деле, эта непрерывная функция не ограничена на конечном интервале E.

Утверждение 3. Если числовые функции $f(x)$ и $g(x)$ равномерно-непрерывны на *конечном* интервале $(a;b) \subset R$, то и их произведение $f(x)g(x)$ – равномерно-непрерывная функция на интервале $(a;b)$.

Для доказательства воспользуемся утверждением (1) и арифметическими свойствами пределов.

Примеры (2) и (5) показывают, что конечность интервала в утверждении (3) существенна: функции $f(x) = x$ и $g(x) = x$ равномерно-непрерывны на R, но их произведение – функция $h(x) = x^2$ неравномерно-непрерывна на R. Пример (4) показывает, что аналогичное свойство для частного функций не справедливо.

Пример 5. Функция $h(x) = x^2$ неравномерно-непрерывна на R.

Доказательство. Рассмотрим две числовые последовательности $x_n = n$ и $y_n = n + \frac{1}{n}$. Тогда $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, но $|h(x_n) - h(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2$ при $n \to \infty$. Это значит, что $|h(x_n) - h(y_n)| \geqslant 1$ для всех $n \geqslant n_0$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\exists \varepsilon = 1 > 0$

$$\forall \delta > 0\ \exists x_n \in R\ \exists y_n \in R:\ |x_n - y_n| < \delta\ \wedge\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon, \quad (8)$$

то есть выполнено необходимое и достаточное условие (4) отсутствия равномерной непрерывности.

Утверждение 4. Для числовых функций, равномерно-непрерывных на $E \subset R^n$, справедливо свойство линейности: если функции $f(x)$ и $g(x)$ равномерно-непрерывны на E, то и их линейная комбинация $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ равномерно-непрерывна на E.

Доказательство. Имеем: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall \; x_1, x_2 \in E \hookrightarrow (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \wedge (|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon))$. Тогда $\forall \lambda \in R, \forall \mu \in R \; |h(x_1) - h(x_2)| = |\lambda f(x_1) + \mu g(x_1) - \lambda f(x_2) - - \mu g(x_2)| \leqslant |\lambda||f(x_1) - f(x_2)| + |\mu||g(x_1) - g(x_2)| < (|\lambda| + |\mu| + 1)\varepsilon$.

Утверждение 5. Если числовая функция $f(x)$ имеет на луче $I = [a; +\infty)$ ограниченную производную, то $f(x)$ равномерно-непрерывна на луче $[a; +\infty)$.

Доказательство. По условию, $\exists M > 0 : \; \forall x \in I \; |f'(x)| < < M$. Тогда при помощи теоремы Лагранжа получаем:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M} > 0 : \forall \; x_1, x_2 \in I \; \exists \xi \in I : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| < M|x_1 - x_2| < M\delta = \varepsilon$, то есть выполнено свойство (3).

Лемма. *Если у непрерывной числовой функции* $f : [a; +\infty) \to R$ *существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, *то* $f(x)$ *ограничена на луче* $[a; +\infty)$.

Доказательство. Для некоторого $b > a$
$\exists M > 0 \; \forall x \geqslant b \; |f(x)| < M$ в силу существования указанного в условии конечного предела. На отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ ограничена по теореме Вейерштрасса: $\exists C > 0 \; \forall x \in [a; b] \; |f(x)| < C$. Тогда число $M + C > 0$ ограничивает сверху $|f(x)|$ на луче $[a; +\infty)$.

Утверждение 6. Если числовая функция $f(x)$ имеет на луче $I = [a; +\infty)$ непрерывную производную и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$, то $f(x)$ равномерно-непрерывна на луче $[a; +\infty)$.

Для доказательства достаточно заметить, что $f'(x)$ ограничена на I по лемме, и воспользоваться утверждением (5).

Пример 6. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ на множествах
$E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1 + \infty)$.

Решение. Полагая $f(0) = 0, \; f(1) = 0$, получаем непрерывную на отрезке $[0; 1]$ функцию $f(x)$, равномерно-непрерывную на отрезке $[0; 1]$ по теореме Кантора. Тогда $f(x)$ равномерно-непрерывна и на $E_1 = (0; 1) \subset [0; 1]$.

Поскольку $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$, то по утверждению (6) функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на $E = [1; +\infty)$, что влечёт её равномерную непрерывность и на $E_2 = (1; +\infty) \subset [1; +\infty)$.

Пример 7. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно-непрерывна на $E = [1; +\infty)$.

Доказательство. Поскольку $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$ при $x \to +\infty$, воспользуемся утверждением (6).

Утверждение 7. Если числовая функция $f(x)$ имеет на луче $I = [a; +\infty)$ расходящуюся к бесконечности производную при $x \to +\infty$, то $f(x)$ неравномерно-непрерывна на луче $[a; +\infty)$.

Доказательство. Непрерывность $f(x)$ на луче I следует из дифференцируемости.

Далее, по условию, $\forall M > 0\ \exists b > a\ \forall x \geqslant b\ |f'(x)| > M$. Для произвольного $\delta > 0$ возьмём $M = \frac{2}{\delta}$ и при помощи теоремы Лагранжа находим:
$\exists \varepsilon = 1 > 0\ \forall \delta > \ 0\ \exists b > a\ \exists x_1 = b \in I\ \exists x_2 = b + \frac{\delta}{2} \in I$
$\exists \xi \in (b; b + \frac{\delta}{2}) \subset I$:
$\left(|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta\right) \wedge \left(|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| > M\frac{\delta}{2} = \varepsilon\right)$,
что и требовалось доказать (см. условие (4)).

Пример 8. Функция $f(x) = x^2$ неравномерно-непрерывна на R. В самом деле, $f'(x) = 2x \to \ \infty$ при $x \to +\infty$. По утверждению (7) $f(x)$ не является равномерно-непрерывной на луче $[0; +\infty)$. Но тогда эта непрерывная функция не может быть равномерно-непрерывной на R.

Пример 8а. Функция $f(x) = e^x$ неравномерно-непрерывна на R. Доказательство такое же, как в примере (8).

Замечание. Из неограниченности производной не следует неравномерная непрерывность.

Для доказательства возьмём функцию $g(x)$, график которой есть «верхняя полуокружность» $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0$, если $x \in [0; 2]$, и «нижняя полуокружность» $(x-3)^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$, если $x \in (2; 4]$. Продолжим эту функцию периодически до функции $f(x)$ на R. Тогда $f(x)$ равномерно-непрерывна на R, но её производная не ограничена.

В этом примере в некоторых точках функция недифференцируема. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}$ на луче $[1, +\infty)$. Функция всюду дифференцируема на луче $[1, +\infty)$ и, согласно утверждению 8, равномерно непрерывна на луче $[1, +\infty)$. Производная $f'(x)$ неограничена на луче $[1, +\infty)$.

Утверждение 8. Если $f(x) \in C[a, +\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in R$, то $f(x)$ равномерно-непрерывна на $[a, +\infty)$.

В самом деле, неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ выполняется для всех $x_1, x_2 \geqslant x_0 > |a|$ для некоторого x_0, а на отрезке $[a, 2x_0]$ функция $f(x)$ равномерно-непрерывна по теореме Кантора.

Пример 9. Функция $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ равномерно-непрерывна на луче $I = [1; +\infty)$.

Для доказательства заметим, что $f(x)$ непрерывна на I и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, после чего воспользуемся утверждением (8).

Пример 10. Функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{x}\ln(1 + x^2)$ равномерно-непрерывны на луче $I = [1; +\infty)$.

Доказательство такое же, как в примере (9).

Утверждение 9. Пусть числовая функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на отрезке $E_1 = [a; b]$ и равномерно-непрерывна на луче $E_2 = [b; +\infty)$. Тогда $f(x)$ равномерно-непрерывна на
$E = [a; +\infty)$.

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = b$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, и, по критерию Коши,
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0)\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Окрестность взята не проколотая ввиду непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0. Таким образом,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1(\varepsilon) > 0:\ \forall x_1, x_2 \in E_1 = [a, b]\ (|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2(\varepsilon) > 0:\ \forall x_1, x_2 \in E_2 = [b, +\infty)\ (|x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_3(\varepsilon) > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_3}(b)\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, и, следовательно,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0 :$
$\forall x_1, x_2 \in E\ (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$, то есть функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на $E = [a, +\infty)$.

Пример 11. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ на множестве $E = (0; +\infty)$.

Решение. Пусть $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = [1; +\infty)$. Расширим область определения f, положив $f(0) = 0$. Тогда $f(x)$ будет непрерывна на E_1, и, по теореме Кантора, равномерно-непрерывна на E_1. По утверждению (6), $f(x)$ равномерно-непрерывна и на E_2. По утверждению (9), $f(x)$ равномерно-непрерывна на $[0, +\infty) \supset E$.

Замечание. Утверждение (9) будет не верно, если вместо $E_2 = [b; +\infty)$ взять $E_3 = (b; +\infty)$: положим $f(x) = 1$ на $E_1 = [a; b]$, и $f(x) = 3$ на E_3. Тогда $f(x)$ равномерно-непрерывна как на E_1, так и на E_3, но не обладает этим свойством на $E_1 \cup E_3 = [a; +\infty)$, поскольку даже не является непрерывной на $E_1 \cup E_3$.

Замечание. Функция $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ равномерно-непрерывна на $E_1 = (-1; 0)$, равномерно-непрерывна на $E_2 = (0; 1)$, непрерывна на $E = E_1 \cup E_2 = (-1; 0) \cup (0; 1)$, но неравномерно-непрерывна на E. В самом деле, возьмём две последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = -\frac{1}{n}$ точек из E $(n \geqslant 2)$. Тогда $|x_n - y_n| \to 0$ при $n \to \infty$, но $|f(x_n) - f(y_n)| = \frac{2\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 2$ при $n \to \infty$.

Пример 12. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = xe^{\sin x}$ на множестве $E = [0; +\infty)$.

Решение. $f(x)$ неравномерно-непрерывна на E. Возьмём две последовательности элементов из $E : x_n = 2\pi n$ и $y_n = 2\pi n + \frac{1}{n}$. Тогда $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to\ \infty$, но $|f(x_n) - f(y_n)| =$
$= 2\pi n(\sqrt[n]{e} - 1) + \frac{\sqrt[n]{e}}{n} \to 2\pi$ при $n \to\ \infty$. Значит, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant\ n_0\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant 1$. Таким образом, $\exists\varepsilon_0 = 1 > 0 :$
$\forall\delta > 0\ \exists x_n \in E\ \exists y_n \in E :\ |x_n - y_n| < \delta\ \wedge\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$, – отсутствие равномерной непрерывности установлено. Для завершения доказательства осталось отметить непрерывность $f(x)$ на E, например, как композиции непрерывных функций.

П р и м е р 14. Докажите, что числовая функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ равномерно-непрерывна в R^2.

Р е ш е н и е. Поскольку всегда $||x|-|y||\leqslant|x-y|$, имеем: $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}|\leqslant$ $\leqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta=\varepsilon$. Это значит, что

$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\delta=\varepsilon>0\,\forall\,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)\in R^2\hookrightarrow\rho(A,B)<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow|f(A)-f(B)|<\varepsilon$.

П р и м е р 15. Докажите, что функция $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}$ неравномерно-непрерывна в своей области определения E.

Р е ш е н и е. Отметим, что $E=\{(x,y)\in R^2:|x|\leqslant|y|\wedge y\neq0\}$ и что $f(x,y)$ непрерывна на E как композиция непрерывных элементарных функций, но неравномерно, ведь для последовательностей $(M_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ и $(M'_n)=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ справедливо: $||M_n-M'_n||=\rho(M_n,M'_n)=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{2}{n}\to0$ при $n\to\infty$, но $\forall n\in\mathbb{N}\ |f(M_n)-f(M'_n)|=|\arcsin1-\arcsin(-1)|=\pi$.

П р и м е р 16. Пусть дифференцируемая функция $f(x,y)$ имеет ограниченные частные производные f'_x и f'_y в выпуклой области $G\subset R^2$. Тогда $f(x,y)$ равномерно-непрерывна в G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмём две различные точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) из E и рассмотрим функцию $\varphi(t)=f(x_2+t(x_1-x_2),y_2+$ $+t(y_1-y_2))$, определённую на отрезке $[0;1]$ в силу выпуклости E и непрерывную на нём. Тогда в силу дифференцируемости функции $\varphi(t)$ при $t\in(0;1)$, как композиции дифференцируемых функций, учитывая, что $|f'_x(x,y)|<L$ и $|f'_y(x,y)|<L$ для некоторого L и всех $(x,y)\in E$, при помощи теоремы Лагранжа имеем: $\exists\xi\in(0;1):\ |\varphi(0)-\varphi(1)|=|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=|\varphi'(\xi)|=|(x_1-$ $-x_2)f'_x(x(\xi),\ y(\xi))+(y_1-y_2)f'_y(x(\xi),y(\xi))|\leqslant L(|x_1-x_2|+|y_1-$ $-y_2|)<\varepsilon$, если $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta=\frac{\varepsilon}{2L}$.

З а м е ч а н и е. В не выпуклой области утверждение не имеет места: «на квадрате с разрезом» $E=\{|x|<1,\ |y|<1\}\setminus([-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]\times\{0\})$ функция $f(x,y)=\cos^2\pi x$, если $|x|<\frac{1}{2}$, $y>0$, и $f(x,y)=0$ в противном случае, непрерывно дифференцируема, имеет ограниченные частные производные, но неравномерно-непрерывна, так как для последовательностей $M_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$ и $M'_n=\left(0,-\frac{1}{n}\right)$ выполняется $\rho(M_n,M'_n)=\frac{2}{n}\to0$ при

$n \to \infty$, и $|f(M_n) - f(M'_n)| = |\cos^2 0 - 0| = 1$ для всех натуральных n. Если же область выпуклая, то достаточно существования частных производных, можно не требовать дифференцируемости функции, утверждение останется верным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. I. – Москва : МФТИ, 2004.
2. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. I. – Москва : МФТИ, 2000, 2004.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – Москва : Наука, 1988; Москва : МФТИ, 1997; Москва : Физматлит, 2003.
4. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математичекому анализу. Ч. 1. – Москва : Физматлит, 2004.
5. *Петрович А.Ю.* Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных : учеб.-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2007. – Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/da6/petrovic-arph0dxlxmm.pdf
6. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу: учебное пособие. В трёх частях. Ч. II. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. – Изд. 2-е, испр. и дополн. / А.Ю. Петрович – Москва : МФТИ, 2017. – 270 с.
7. *Кожевников П.А.* Исследование сходимости несобственных интегралов : учеб.-метод. пособие. Москва : МФТИ, 2007. – Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/kozhevnikov-arph0dybmbp.pdf
8. *Головко А.Ю.* Методическое пособие по теме: «Неопределённый интеграл». – Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: https://mipt.ru/upload/Golovko.pdf
9. *Иванова С.В.* Формула Тейлора и её применение при вычислении пределов функций: учеб.-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2011.
10. Сборник задач по математическому анализу /под ред. Л.Д. Кудрявцева. Т. 1–3. – 2-е изд. – Москва : Физматлит, 2003.
11. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – Москва : Дрофа, 2003.
12. *Гельбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе / пер. Б.И. Голубов.[5] – Волгоград : Изд-во «Платон», 1997.

[5] Борис Иванович Голубов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ.

Учебное издание

Консультация по курсу Многомерный анализ, интегралы и ряды для студентов 2-го семестра I-го курса. Часть II

Учебно-методическое пособие

по курсу *Многомерный анализ, интегралы и ряды*

Автор **Бурцев** Алексей Анатольевич

Редактор *Н.Е. Кобзева*. Корректор *Л.В. Себова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 19.04.2021. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 200 экз. Заказ № 17.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок