Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра высшей математики

Консультация по курсу Многомерный анализ, интегралы и ряды для студентов 2-го семестра I-го курса. Часть I

Учебно-методическое пособие

по курсу *Многомерный анализ, интегралы и ряды*

Автор *А. А. Бурцев*

МОСКВА
МФТИ
2021

УДК 517
ББК 22.161

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент *А.Ю. Петрович*

Консультация по курсу Многомерный анализ, интегралы и ряды для студентов 2-го семестра I-го курса. Часть I: учебно-методическое пособие по курсу *Многомерный анализ, интегралы и ряды* / автор А. А. Бурцев. – М.: МФТИ, 2021. – 41 с.

В пособии приводятся решения задач по математическому анализу, которые входят в письменную экзаменационную работу по математическому анализу у студентов первого курса МФТИ во 2-м семестре. Предназначается для студентов высших учебных заведений, изучающих математический анализ, преподавателей математического анализа для проведения семинаров и практикумов по решению задач.

Содержание

1. Предисловие

В пособии приводятся решения задач по математическому анализу, которые входят в письменную экзаменационную работу по математическому анализу у студентов первого курса МФТИ во 2-м семестре. Приводятся подробные решения задач и ответы, даются методические указания, разбираются типичные ошибки, рассматриваются соответствующие контрпримеры, формулируются, а иногда и доказываются необходимые утверждения, взятые, как правило, из лекций по математическому анализу, читающихся для студентов 1-го курса МФТИ. Некоторые задачи решаются несколькими способами. Имеются упражнения для самостоятельного решения. Цель пособия – оказать помощь студенту в освоении методов решения задач, что необходимо для успешного выполнения письменной экзаменационной работы, а также для усвоения теоретического курса математического анализа в объёме 2-го семестра. Пособие может быть полезным преподавателям математического анализа для проведения семинаров и практикумов по решению задач. Автор благодарит А. Ю. Петровича за ценные советы и замечания.

2. Обозначения

$\forall$ — любой
$\exists$ — существует
$\nexists$ — не существует
$\Leftrightarrow$ — равносильно
$\Rightarrow$ — следовательно
$\hookrightarrow$ — выполнено, справедливо
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$
$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\} \cup \{x+0,\ x-0 : x \in \mathbb{R}\}$

$x \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty,\ -\infty$

$x \in \widehat{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty,\ -\infty,\ \infty$

$x \in \widetilde{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty,\ -\infty,\ \infty,\ a+0,\ a-0$, где a — действительное число

$f(x) \to b$, если $x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где $a \in \widetilde{\mathbb{R}},\ b \in \widetilde{\mathbb{R}}$

$f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$

$f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$

$f(x)$ — значение функции f в точке x, а также иногда этот знак обозначает функцию f

$\min\{a, b\}$ — минимум из a и b, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

$\max\{a, b\}$ — максимум из a и b, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

$\sim$ — эквивалентно

$\nsim$ — не эквивалентно

$f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестости a $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to a \Leftrightarrow$ $f(x) = \lambda(x) g(x)$ при $x \to a$, причём $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1;\ a \in \widetilde{\mathbb{R}}$

$x_n \sim y_n$ при $n \to \infty \Leftrightarrow x_n - y_n = o(y_n)$ при $n \to \infty$

$o(1)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, или бесконечно малая последовательность при $n \to \infty$

$C[a, +\infty)$ — множество всех функций, непрерывных на луче $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

$f \in C[a, +\infty)$ — функция f непрерывна на луче $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

$R[a, b]$ — множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$

$f \in R[a, b]$ — функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$

$f \downarrow$ — f убывает

$f \downdownarrows$ — f строго убывает

$f \downdownarrows a$ на луче $[x_0; +\infty)$ — f строго убывает на луче $[x_0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

$f \downarrow$ при $x \to +\infty$ — f убывает на луче $[x_0, +\infty)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$

$f \downarrow a$ при $x \to +\infty$ — f убывает на луче $[x_0, +\infty)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

$f \upuparrows$ — f строго возрастает

$f \upuparrows a$ на луче $[x_0; +\infty)$ — f строго возрастает на луче $[x_0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

$\rightrightarrows$ — сходится равномерно

$\not\rightrightarrows$ — равномерной сходимости нет

$f(x)|_{x=a}$ — знак подстановки, здесь $f(a)$

$f(x)|_a^b$ — знак подстановки, здесь $f(b) - f(a)$

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ \ldots \ \cdot 2n = 2^n(n!)$

$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \ldots \ \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$

$[x]$ – целая часть числа $x \in \mathbb{R}$ – наибольшее целое число, не превосходящее x. Для всех $x \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства: $[x] \leqslant x < [x] + 1$

окрестность $+\infty$ — интервал $(c, +\infty)$, $c > 0$

промежуток — отрезок, интервал или полуинтервал

критическая точка производной — значение аргумента, при котором производная обращается в ноль либо не существует

$\rho(M, N)$ — расстояние между точками M и N

$A \wedge B$ — конъюнкция утверждений A и B

$\mathbb{R}^n$ — прямое декартово произведение $\mathbb{R}$ на себя n раз

R^n — арифметическое n-мерное вещественное линейное пространство

3. Задача 1. Разложить функцию по формуле Тейлора. Найти первый и второй дифференциалы

Задача 1.1. Найти первый и второй дифференциалы в точке $D(1;1)$ функции $f(x,y)$, если $f(x,y) = ye^{2xy-x-y}$. Разложить функцию $f(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $D(1;1)$ до $o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

Решение. I способ «формальное дифференцирование».[1] Формально дифференцируя тождество $f = ye^{2xy-x-y}$, находим $df = dy \cdot e^{2xy-x-y} + ye^{2xy-x-y}(2dx \cdot y + 2xdy - dx - dy)$ (1). Подставляя в (1) $x = 1$, $y = 1$, находим $df(1;1) = dx + 2dy$.

Формально дифференцируя тождество (1), считая dx и dy постоянными, а $d(df) = d^2f$, находим $d^2f = dy \cdot e^{2xy-x-y}(2dx \cdot y + {}$ $+ 2xdy - dx - dy) + dy \cdot e^{2xy-x-y}(2dx \cdot y + 2xdy - dx - dy) +$

[1] Формальное дифференцирование есть «протаскивание» знака первого дифференциала вглубь формулы, пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала.

$+ye^{2xy-x-y}(2dx\cdot y+2xdy-dx-dy)^2+ye^{2xy-x-y}(2dxdy+2dxdy)$ (2). Подставляя в (2) $x=1$, $y=1$, находим $d^2f(1;1)=2dy(dx+dy)+$ $+(dx+dy)^2+4dxdy=dx^2+8dxdy+3dy^2$.

Формула Тейлора имеет вид: $f(x,y)-f(1;1)=df(1;1)+$ $+\frac{d^2f(1,1)}{2!}+o(\rho^2)$. Учитывая, что $dx=(x-1)$, $dy=(y-1)$, $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$, находим $f(x,y)=1+(x-1)+2(y-1)+$ $+\frac{1}{2}(x-1)^2+4(x-1)(y-1)+\frac{3}{2}(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2)$.

II способ «вычисление частных производных».

$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{2xy-x-y}(2y-1)$;

$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{2xy-x-y}+ye^{2xy-x-y}(2x-1)$;

$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$;

$df(1;1)=dx+2dy$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;1)=\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial x}(x,1)\right)|_{x=1}=\frac{d}{dx}e^{x-1}|_{x=1}=e^{x-1}|_{x=1}=1$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1;1)=\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x}(1,y)|_{y=1}=\frac{d}{dy}ye^{y-1}(2y-1)|_{y=1}=$ $=(4y-1)e^{y-1}+(2y^2-y)e^{y-1}|_{y=1}=4$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;1)=\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)|_{y=1}=\frac{d}{dy}(e^{y-1}+ye^{y-1})|_{y=1}=2e^{y-1}+$ $+ye^{y-1}|_{y=1}=3$;

$d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$;

$d^2f(1;1)=dx^2+8dxdy+3dy^2$.

Формула Тейлора имеет вид: $f(x,y)-f(1;1)=df(1;1)+$ $+\frac{d^2f(1,1)}{2!}+o(\rho^2)$. Отсюда $f(x,y)=1+(x-1)+2(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+$ $+4(x-1)(y-1)+\frac{3}{2}(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2)$.

III способ «использование стандартных разложений».[2] Сделаем замену: $u=x-1=dx$, $v=y-1=dy$. Тогда $f(x,y)=$ $=f(u+1,v+1)=g(u,v)=(v+1)e^{2uv+u+v}=e^{2uv+u+v}+ve^{2uv+u+v}=$

$=1+(2uv+u+v)+\frac{1}{2}(u^2+2uv+v^2)+o(\rho^2)+(v+uv+v^2+o(\rho^2))=$ $=1+u+2v+\frac{1}{2}u^2+4uv+\frac{3}{2}v^2+o(\rho^2)$, где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$. Таким образом,

$f(x,y)=1+(x-1)+2(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+4(x-1)(y-1)+\frac{3}{2}(y-1)^2+$

[2] Использование этого метода не является логически строгим, так как на лекциях не доказывается в случае функций многих переменных единственность приближения функции многочленом нужной степени с нужной точностью. В одномерном случае именно из этой леммы (теоремы) единственности вытекало, что полученный при помощи подстановки в основные разложения многочлен является многочленом Тейлора нужного порядка. Подробные объяснения использования о-символики для функций нескольких переменных см. в [5], [6].

$+o((x-1)^2+(y-1)^2)$ – искомое тейлоровское разложение, откуда также видно, что $df(1;1) = dx+2dy$, $d^2f(1;1) = dx^2+8dxdy+3dy^2$.

IV способ «логарифмическое дифференцирование». Логарифмируя тождество $f = ye^{2xy-x-y}$, находим $\ln f = \ln y + 2xy - x - y$ (1). Формально дифференцируя тождество (1), находим $\frac{df}{f} = \frac{dy}{y} + 2ydx + 2xdy - dx - dy$ (2). Подставляя $x = 1$, $y = 1$, $f = f(D) = f(1;1) = 1$, находим $df(1;1) = dx + 2dy$.

Формально дифференцируя тождество (2), считая dx и dy постоянными, находим $\frac{fd^2f-(df)^2}{f^2} = -\frac{dy^2}{y^2}+4dxdy$. Подставляя $x = 1$, $y = 1$, $f = 1$, $df = dx + 2dy$, находим
$d^2f(1,1) = (dx + 2dy)^2 - dy^2 + 4dxdy = dx^2 + 8dxdy + 3dy^2$.

Формула Тейлора имеет вид: $f(x,y) - f(1,1) = df(1,1) + \frac{d^2f(1,1)}{2!} + o(\rho^2)$. Учитывая, что $dx = (x-1)$, $dy = (y-1)$, $\rho^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$, находим $f(x,y) = 1 + (x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

Этот способ в данном примере упрощает вычисления при формальном дифференцировании.

Ответ: $df(D) = dx + 2dy$; $d^2f(D) = dx^2 + 8dxdy + 3dy^2$;
$f(x,y) = 1 + (x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^2 + +o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

З а м е ч а н и е. Второй дифференциал не содержит ни линейных, ни свободного членов. Второй дифференциал является квадратичной формой и содержит, таким образом, только квадратичные члены.

З а м е ч а н и е. Формула Тейлора для функции одной или нескольких переменных с остаточным членом в форме Пеано может быть представлена в следующем виде: $\Delta f = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{d^kf}{k!} + o(\rho^n)$. В частности, для функции двух аргументов в точке $M(x_0,y_0)$:
$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0),\ d^kf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x_0,y_0)$,
$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},\ \Delta x = x - x_0 = dx,\ \Delta y = y - y_0 = dy$. Для функции двух аргументов формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в точке $M(x_0,y_0)$ может быть представлена в виде: $\Delta f = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{d^kf(x_0,y_0)}{k!} + \frac{d^{n+1}f(\xi,\eta)}{(n+1)!}$. Точка (ξ,η) делит отрезок

с концами (x_0, y_0) и (x, y) в отношении $\theta : (1-\theta)$. Применяя формулы из аналитической геометрии о делении отрезка в заданном отношении, находим $\xi = \theta x_0 + (1-\theta)x$, $\eta = \theta y_0 + (1-\theta)y$, $\theta \in (0; 1)$.

З а м е ч а н и е. В следующей задаче для упрощения вычислений в отличие от способа IV применяется не логарифмирование, а, напротив, потенцирование с последующим дифференцированием.

Задача 1.2. Найти первый и второй дифференциалы в точке $A(1, 0)$ функции $f(x, y) = \ln(\operatorname{sh}\frac{y}{x} + 3)$. Разложить данную функцию по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 0)$ до $o((x-1)^2 + y^2)$.

Решение. Потенцируя f, находим: $e^f = \left(\operatorname{sh}\frac{y}{x} + 3\right)$ (1). Формально дифференцируя тождество (1), находим:
$e^f df = \operatorname{ch}\frac{y}{x} \cdot \frac{dy \cdot x - y dx}{x^2}$ (2). Подставляя $x = 1$, $y = 0$, $f = f(A) = = f(1, 0) = \ln 3$, находим $3df = dy$, $df = \frac{1}{3}dy$. Логарифмируя (2), находим: $f + \ln df = \ln\operatorname{ch}\frac{y}{x} + \ln(xdy - ydx) - 2\ln x$ (3). Формально дифференцируя тождество (3), находим: $df + \frac{d^2 f}{df} = = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{y}{x}} \cdot \operatorname{sh}\frac{y}{x} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} - \frac{2dx}{x}$ (4). Подставляя в (4) $x = 1$, $y = 0$, $df = \frac{1}{3}dy$, находим $d^2 f = -\frac{2}{3}dxdy - \frac{1}{9}dy^2$.

Формула Тейлора имеет вид: $\triangle f = df + \frac{d^2 f}{2!} + o(\rho^2)$. Учитывая, что $dx = (x-1)$, $dy = (y-0)$, $\triangle f(1, 0) = f(x, y) - f(1, 0) = = f(x, y) - \ln 3$, $\rho^2 = (x-1)^2 + y^2$, находим $f(x, y) = = \ln 3 + \frac{1}{3}(y-0) - \frac{1}{3}(x-1)(y-0) - \frac{1}{18}(y-0)^2 + o((x-1)^2 + y^2)$.

Ответ: $df(A) = \frac{1}{3}dy$; $d^2 f(A) = -\frac{2}{3}dxdy - \frac{1}{9}dy^2$;
$f(x, y) = \ln 3 + \frac{1}{3}(y-0) - \frac{1}{3}(x-1)(y-0) - \frac{1}{18}(y-0)^2 + o((x-1)^2 + y^2)$.

Задача 1.3. Найти первый и второй дифференциалы в точке $A(1, 1, 1)$ функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $\frac{\pi}{4} + z - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg} z = 0$.

Решение. Формально дифференцируя тождество $\frac{\pi}{4} + z - \frac{x^2}{2} - -\frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg} z = 0$, находим $dz - xdx - ydy - \frac{dz}{1+z^2} = 0$ (1). Подставляя $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, находим $dz = 2dx + 2dy$ (2).

Формально дифференцируя (1) и считая dx и dy постоянными, находим $d^2 z - dx^2 - dy^2 - \frac{d^2 z \cdot (1+z^2) - 2z dz^2}{(1+z^2)^2} = 0$. Подставляя $x = 1$,

$y = 1$, $z = 1$, находим $d^2z = 2dx^2 + 2dy^2 - dz^2$. Подставляя вместо dz сумму $2dx + 2dy$ из (2), находим $d^2z = -2dx^2 - 8dxdy - 2dy^2$.

Ответ: $dz(A) = 2dx + 2dy$, $d^2z(A) = -2dx^2 - 8dxdy - 2dy^2$.

Задача 1.4. Найти первый и второй дифференциалы в точке $M(0, 1)$ функции $f(x, y)$, если $f(x, y) = \ln(1 + y \sin x)$. Разложить функцию $f(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M(0, 1)$ до $o(x^2 + (y - 1)^2)$.

Решение. Пусть $u = x - 0,\ v = y - 1$. Тогда $f(x, y) =$ $= f(u, v+1) = g(u, v) = \ln(1+(v+1)\sin u) = \ln(1+\sin u+v\sin u) =$ $= \ln(1+u+uv+o(\rho^2)) = u+uv-\frac{1}{2}u^2+o(\rho^2)$, где $\rho^2 = x^2+(y-1)^2$. Таким образом, $f(x, y) = x + x(y - 1) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2 + (y - 1)^2)$ есть искомое тейлоровское разложение, откуда видно, что
$df(0, 1) = dx,\ d^2f(0, 1) = -dx^2 + 2dxdy$.

Ответ: $df(M) = dx$; $d^2f(M) = -dx^2 + 2dxdy$;
$f(x, y) = x + x(y - 1) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2 + (y - 1)^2)$.

4. Задача 2. Геометрические приложения определённого интеграла

Задача 2.1. Найти длину дуги кривой $x = \cos^4 t$,
$y = \sin^4 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Длина дуги кривой
$l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-4\cos^3 t \sin t)^2 + (4\sin^3 t \cos t)^2}dt =$

$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^4 t + \cos^4 t}dt$. Так как $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x +$ $+ \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, то $4\int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^4 t + \cos^4 t}dt =$

$= 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t}dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 2t}d\cos 2t =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(z + \sqrt{1 + z^2})\right)\Big|_{-1}^{1} = 1 +$
$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2})$.

З а м е ч а н и е.[3] При $a \neq 0$ выполняется:

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{|a|} + C,$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad (|x|>|a|),$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C,$
$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C,$
$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad (|x|>|a|),$
$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C, \quad (|x|<|a|).$

Задача 2.2. Найти длину дуги кривой
$y = \ln(1+\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

Решение. Длина дуги кривой $l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+y'^2}dx =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)^2}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos\frac{x}{2}} = 2\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dy}{\cos y} = 2\int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\sin y}{1-\sin^2 y} =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{1-t^2} = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

Задача 2.3. Найти длину дуги кривой:
$y = \frac{1}{2}(\ln\cos x + \ln\sin x), \quad \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}.$

Решение. Длина дуги кривой $l = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+y'^2}\ dx$. Поскольку

$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\cos 2x}{2\sin x\cos x}$, $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\, 2x} =$

$= \frac{1}{\sin 2x}$, то $l = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dy}{\sin y} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\cos y}{1-\cos^2 y} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} =$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Задача 2.4. Найти площадь боковой поверхности, образованной вращением кривой $x = 2\sin t$, $y = 2\cos^2 t$ вокруг оси Oy, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Искóмая площадь боковой поверхности

$\sigma = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} |x|\sqrt{x'^2+y'^2}dt =$

[3] См. также [8].

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} 2\sin t\sqrt{4\cos^2 t + 16\cos^2 t\sin^2 t}dt =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^{\pi/2} 2\sin t\cos t\sqrt{1 + 4\sin^2 t}dt =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{1 + 2(1 - \cos 2t)}dt =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{3 - 2\cos 2t}d(3 - 2\cos 2t) =$$

$$= \pi \int\limits_1^{5} \sqrt{u}du = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

Задача 2.5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x \sin x$, $\ y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Решение. Дважды интегрируя по частям, находим $I = \int e^x \sin x dx = -\int e^x d\cos x = -e^x \cos x + \int \cos x de^x = -e^x \cos x + \int e^x d\sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) - I \ \Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$. Искомая площадь $S = \int\limits_0^{\pi/4} e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$.

Задача 2.6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, если $x \in [0; 1]$.

Решение. По формуле $V = \pi \int\limits_0^1 y^2 dx$, полагая $x = \operatorname{sh} t$, $a = \operatorname{arsh} 1$, замечая, что $\operatorname{sh} a = 1$, $\operatorname{ch} a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 a} = \sqrt{2}$, $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $\operatorname{arsh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2})$, и интегрируя по частям, находим:

$$V = \pi \int\limits_0^1 \operatorname{arsh}^2 x\, dx = \pi \int\limits_0^a t^2 d\operatorname{sh} t = \pi \left(t^2 \operatorname{sh} t\Big|_0^a - 2\int\limits_0^a t\operatorname{sh} t dt \right) =$$

$$= \pi \left(a^2 - 2\int\limits_0^a t d\operatorname{ch} t \right) = \pi(a^2 - 2t\operatorname{ch} t + 2\operatorname{sh} t)\Big|_0^a = \pi(a^2 - 2\sqrt{2}a + 2) =$$

$$= \pi(a - \sqrt{2})^2.$$

Ответ: $V = \pi \left(\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \right)^2$.

Задача 2.7.[4] Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Решение. По формуле
$$V = -\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t)x'(t)dt = -\pi y^2(t)x(t)\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x2yy'_t dt =$$
$$= 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xyy'_t dt = 2\pi a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t \cdot a\cos t dt =$$
$$= 2\pi a^3 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^4 t d\cos t = 2\pi a^3 \int\limits_0^1 u^4 du = 2\pi a^3 \cdot \frac{u^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2\pi a^3}{5}.$$

5. Задача 3. Разложить функцию в ряд Тейлора. Найти радиус сходимости

Задача 3.1. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ функцию $y = \operatorname{arcctg} \frac{2x^2-12x+19}{6x-x^2-7}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Пусть $t = x - 3$. Тогда $x = t + 3$; $y(x) =$
$= y(t+3) = z(t) = \operatorname{arcctg} \frac{2t^2+1}{2-t^2}$; $z'(t) = \frac{-2t}{1+t^4} = -2t \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} =$
$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1} t^{4n+1}$. Поскольку радиус сходимости основного разложения $\frac{1}{1+u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n$ равен 1, то полученный для $z'(t)$ ряд абсолютно сходится, если $|t^4| < 1$, то есть при $|t| < 1$, и расходится, если $|t^4| > 1$, то есть при $|t| > 1$. Значит, радиус сходимости ряда для $z'(t)$ равен 1. $z(t) = z(0) + \int\limits_{\tau=0}^{t} z'(\tau)d\tau =$
$= \operatorname{arcctg} \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} t^{4n+2}$. При почленном интегрировании степенного ряда радиус сходимости не меняется. Поэтому $R = 1$. Произведя обратную замену переменной, получаем ответ:
$y(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}(x-3)^{4n+2}$, $R = 1$.

[4] См. [10], том 2, стр. 153, пример 3.

З а м е ч а н и е. Радиус сходимости для $z'(t)$ можно найти по формуле Коши—Адамара:
$\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4n+1]{|2(-1)^{n+1}|} = 1$. Следовательно, $R = 1$.

Ошибочным является нахождение радиуса сходимости для $z'(t)$ по формуле $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2(-1)^{n+1}|} = 1$ или по формуле $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{2(-1)^{n+2}}{2(-1)^{n+1}}\right| = 1$, поскольку разложение в данном случае имеет место по степеням t^{4n+1}, а не по степеням t^n. К подобным формулам нужно относиться с осторожностью, ведь в других случаях действуя так, можно получить неправильный ответ.

Контрпример[5]: $\ln(1+2t^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} t^{2n}$. Ошибочное вычисление по формуле $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n}{(n+1)2^n} = 2$ приводит к неправильному ответу: $R = \frac{1}{2}$. Во избежание ошибок можно рассуждать, например, так: по признаку Даламбера указанный ряд абсолютно сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1}t^{2n+2}n}{(n+1)2^n t^{2n}}\right| = 2t^2 < 1$, а если $2t^2 > 1$, то абсолютной сходимости нет. Тогда радиус сходимости находится из условия: $2t^2 < 1$, откуда $|t| < \frac{1}{\sqrt{2}} = R$. Ошибочное вычисление по формуле $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2$ приводит к неправильному ответу $R = \frac{1}{2}$. По признаку Коши радиус сходимости определяется из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n t^{2n}}{n}\right|} = 2t^2 < 1$, откуда $|t| < \frac{1}{\sqrt{2}} = R$. Значит, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Радиус сходимости можно найти по формуле Коши—Адамара: $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\right|} = \sqrt{2}$. Следовательно, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим два степенных ряда A и B с центрами в одной точке x_0 и радиусами сходимости R и r соответственно. Если $R \neq r$, то радиус сходимости их линейной комбинации с отличными от нуля коэффициентами (обозначим её C), в частности их суммы или разности, есть $\min\{R, r\}$. В самом деле, если, например, $r < R$, то ряд C сходится при $|x - x_0| < r$ и

[5]Выбор слова *контрпример* обусловлен [12]. Рекомендуем читателю эту книгу.

расходится при $|x-x_0| \in (r, R) \subset \mathbb{R}$. Учитывая структуру множества точек сходимости степенного ряда, мы видим, что радиусом сходимости ряда C может быть только r. Если оба радиуса бесконечны, то, очевидно, и радиус указанной линейной комбинации бесконечен. Нетривиальный случай, если радиусы конечны и равны ($R = r$). В этом случае если один из рядов не сходится в некоторой точке на границе круга сходимости, а другой сходится, то их сумма не сходится в этой точке, и радиус сходимости ряда C по теореме Абеля будет R. Если же оба ряда имеют одну и ту же область сходимости, то радиус сходимости ряда C может оказаться больше, чем R, и здесь требуется исследование. При оформлении решения желательно ссылаться на используемые теоремы. Отметим, что *умножение ряда на ненулевой многочлен не уменьшает радиус сходимости, но может увеличить его; умножение ряда на ненулевой одночлен не меняет радиус сходимости.* Многочлен, даже нулевой степени, расписанный по возрастанию степеней $(x - x_0)^n$, представляет собой степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости.

Задача 3.2. Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{2x^2}{\sqrt{9 - 4x^4}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение.
$f'(x) = -\frac{4}{3}x\left(1 - \frac{4}{9}x^4\right)^{-1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n_{-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{3^{2n+1}} x^{4n+1}$. Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $\left|\frac{4}{9}x^4\right| < 1$, откуда $|x| < \sqrt{\frac{3}{2}} = R$. Тогда $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt = \frac{\pi}{2} +$ $+ \sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n_{-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{(4n+2)\cdot 3^{2n+1}} x^{4n+2}$. При почленном интегрировании степенного ряда радиус сходимости не меняется. Поэтому $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

З а м е ч а н и е. $C^n_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right) =$ $= \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(n!)} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ для всех натуральных n; $C^0_{-\frac{1}{2}} = 1$. Но эти преобразования делать не обязательно: C^n_α – стандартный символ.

Задача 3.3. Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \arccos \frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение.
$f'(x) = \frac{-4x}{4+x^4} = \frac{-x}{1+\frac{x^4}{4}} = -x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n+1}}{4^n}$. Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $\left|\frac{x^4}{4}\right| < 1$, откуда $|x| < \sqrt{2} = R$. $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n+2}}{4^n(4n+2)}$. При почленном интегрировании степенного ряда радиус сходимости не меняется. Поэтому $R = \sqrt{2}$.

Задача 3.4. Разложить функцию

$$y(x) = (x+2)\ln(2x^2+8x+9)$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Пусть $t = x+2$. Тогда $x = t-2$ и $y(x) = y(t-2) = f(t) = t\ln(1+2t^2) = t\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} t^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} t^{2n+1}$. Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $|2t^2| < 1$, откуда $|t| < \frac{1}{\sqrt{2}} = R$. Произведя обратную замену переменной, находим ответ: $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}(x+2)^{2n+1}$; $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 3.5. Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = x^4 \operatorname{arcctg} \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Разложим в ряд по степеням x функцию $g(x) = \operatorname{arcctg} \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$. Производная $g'(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}} = -3(1-9x^2)^{-1/2} = -3\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^n (-9)^n x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^n (-1)^{n+1} 3^{2n+1} x^{2n}$. Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $|-9x^2| < 1$, откуда $|x| < \frac{1}{3} = R$. $g(x) = \operatorname{arcctg} 0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n}(-1)^{n+1}3^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Тогда $f(x) = x^4 g(x) = \frac{\pi x^4}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n}(-1)^{n+1}3^{2n+1}\frac{x^{2n+5}}{2n+1}$. При почленном интегрировании степенного ряда и умножении на ненулевой одночлен радиус сходимости не меняется, поэтому $R = \frac{1}{3}$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi x^4}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-1/2}^{n}(-1)^{n+1}3^{2n+1}x^{2n+5}}{2n+1}$, $R = \frac{1}{3}$.

Задача 3.6. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2} + \frac{x^2+1}{\sqrt[4]{16+x^2}}$$

в ряд Тейлора по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Ряд $\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}}$ имеет радиус сходимости $R_1 = \sqrt{2}$. Ряд $\frac{x^2+1}{\sqrt[4]{16+x^2}} = \frac{1}{2}(x^2+1)\left(1+\frac{x^2}{2^4}\right)^{-\frac{1}{4}} =$
$= \frac{1}{2}(x^2+1)\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{-1/4}^{n}\frac{x^{2n}}{2^{4n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-1/4}^{n}}{2^{4n+1}}x^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-1/4}^{n}}{2^{4n+1}}x^{2(n+1)} = \frac{1}{2} +$
$+ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-1/4}^{n}}{2^{4n+1}}x^{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-1/4}^{n-1}}{2^{4n-3}}x^{2n} = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{-1/4}^{n}}{2^{4n+1}} + \frac{C_{-1/4}^{n-1}}{2^{4n-3}}\right)x^{2n}$ имеет радиус сходимости $R_2 \geqslant 4$, так как умножение на многочлен, в данном случае на двучлен, не уменьшает радиус сходимости. Поэтому ряд $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{-1/4}^{n}}{2^{4n+1}} + \frac{C_{-1/4}^{n-1}}{2^{4n-3}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^{2n}$ имеет радиус сходимости $R = \min\{R_1, R_2\} = \sqrt{2}$.

6. Задача 4. Исследовать числовой ряд на сходимость

Задача 4.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2(n-1)^n)^n}{n^{(n^2)}}$.

Решение. $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2(n-1)^n}{n^n} = 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{2}{e} < 1$, $n \to \infty$. По признаку Коши ряд сходится.

З а м е ч а н и е. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. При оформлении письменной работы этот факт можно считать известным.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+\frac{n}{3}}\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.

Решение.

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{3n^2}}\cdot n\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2} =$

$= \left[\left(1+\frac{1}{9n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-n^2} =$

$= \left(1-\frac{1}{18n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-n^2} = e^{-n^2\ln\left(1-\frac{1}{18n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$

$= e^{\frac{1}{18}+o(1)} \to e^{\frac{1}{18}} > 1, n\to\infty.$

По признаку Коши ряд расходится.

Ошибочным является рассуждение: поскольку $n\sin\frac{1}{n}\sim 1$, $n\to\infty$, то $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{3n^2}}\cdot n\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \sim$ $\sim \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{3n^2}}\right)^{-n^2} \sim \left(1+\frac{1}{9n^2}\right)^{-n^2} \to e^{-\frac{1}{9}} < 1, n\to\infty$. По признаку Коши ряд сходится. Вывод:

при нахождении пределов показательно-степенной функции нельзя в общем случае заменять основание степени на эквивалентную величину!

Задача 4.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}.$$

Решение.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{\frac{(3n+3)!(2n)^{3n}}{(2n+2)^{3n+3}(3n)!}} = \sqrt{\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(2n+2)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}}} \to \sqrt{\frac{27}{8e^3}} < 1,$

$n\to\infty$. По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 4.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{sh}^2 n.$$

Решение. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}((n+1)!)^3(3n)!}{(3n+3)!2^n(n!)^3} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2(n+1)}{\operatorname{sh}^2 n} = \frac{2(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2(n+1)}{\operatorname{sh}^2 n} \to \frac{2e^2}{27} < 1,\ n \to \infty$. По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 4.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+1)^n}.$$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}2^n n!} = = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(n+2)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$. По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 4.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(n!)^4}{(3n)!(n+1)!}$.

Решение. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = = \frac{3^{2n+2}(n+1)!^4}{(3n+3)!(n+2)!} \cdot \frac{(3n)!(n+1)!}{3^{2n}(n!)^4} = \frac{9(n+1)^4}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+2)} \to \frac{9}{27} < 1,\ n \to \infty$. По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 4.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \ln\left(n^{\sin\frac{1}{n}}\right)\right)^n$.

Решение. При всех достаточно больших n общий член ряда $a_n = \left(1 - \ln\left(n^{\sin\frac{1}{n}}\right)\right)^n > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, признаки Коши и Даламбера неприменимы, но $a_n = e^{n\ln\left(1-\left(\sin\frac{1}{n}\right)\ln n\right)} = e^{n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{-\ln n + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)} \sim \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$. Общий член ряда эквивалентен общему члену расходящегося гармонического ряда. Ряд расходится по признаку сравнения.

Задача 4.7. При всех $\alpha \in \mathbb{R}$ исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[2021]{\frac{n-1}{1+n}}\right)^{\alpha}$.

Решение. Так как $\sqrt[2021]{\frac{n-1}{1+n}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2021} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2021} = = \left(1 - \frac{1}{2021n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2021n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{2}{2021n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, то общий член ряда $0 < a_n = \left(1 - \sqrt[2021]{\frac{n-1}{1+n}}\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{2}{2021n}\right)^{\alpha},\ n \to \infty$.

По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$ (эталон).

7. Задача 5. Исследовать сходимость несобственного интеграла от знакопостоянной функции

Задача 5.1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x - e^{\sin x}}{(\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 x)^\alpha}\, dx.$$

Решение. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_0^{1} f(x)dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 – в нижнем пределе, а I_2 – в верхнем пределе интегрирования.

При $x > 0 \hookrightarrow f(x) = \frac{e^x - e^{\sin x}}{(\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 x)^\alpha} \geqslant 0$. При $x \to 0$ имеем: $e^x - e^{\sin x} = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim$
$\sim \frac{x^3}{6}$, $\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 x = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2$, $f(x) \sim \frac{C}{x^{2\alpha-3}}$. По признаку сравнения интеграл I_1 сходится $\Leftrightarrow 2\alpha - 3 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$. Так как $f(x) \sim \frac{C}{e^{(2\alpha-1)x}}$ при $x \to +\infty$, то по признаку сравнения интеграл I_2 сходится $\Leftrightarrow 2\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$. Интеграл I сходится $\Leftrightarrow$ интеграл I_1 сходится и интеграл I_2 сходится $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 2$. Сходимость абсолютная.

Замечание. Признак сравнения для несобственных интегралов $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ и $\tilde{I} = \int\limits_a^b g(x)dx$ с единственной особенностью, например в верхнем пределе интегрирования, можно сформулировать следующим образом:

если $\forall\, b' \in (a,b)$ $f, g \in R[a,b']$ *и* $\exists\, a' \geqslant a$ $\forall\, x \in [a', b)$ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *то из сходимости интеграла* $\tilde{I}$ *следует сходимость интеграла* I, *а из расходимости* I *следует расходимость* $\tilde{I}$. *В частности, если* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to b - 0$ *или*

$\exists \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, *то интегралы* I *и* $\tilde{I}$ *сходятся или расходятся одновременно.* Здесь $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; запись $x \to b-0$ при $b = +\infty$ нужно понимать как $x \to +\infty$.

Метод исследования на сходимость несобственного интеграла от знакопостоянной функции с единственной особенностью в каком-либо из пределов интегрирования состоит в том, чтобы заменить подынтегральную функцию на эквивалентную в окрестности особой точки более простую, ещё лучше, «эталонную» функцию. Эталонами являются следующие интегралы ($C \neq 0$):

$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha}\, dx$ – сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$;

$I_2 = \int\limits_0^{1} \frac{C}{x^\alpha}\, dx$ – сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geqslant 1$;

$I_3 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha \ln^\beta x}\, dx$ – сходится, если $\alpha > 1$ при любом β; если $\alpha = 1$, сходится при $\beta > 1$; во всех остальных случаях – расходится;

$I_4 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{C}{x^\alpha |\ln x|^\beta}\, dx$ – сходится, если $\alpha < 1$ при любом β; если $\alpha = 1$, сходится при $\beta > 1$; во всех остальных случаях – расходится;

$I_5 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{C}{x^\beta e^{\alpha x}}\, dx$ – сходится, если $\alpha > 0$ при любом β; если $\alpha = 0$, сходится при $\beta > 1$; во всех остальных случаях – расходится.

З а м е ч а н и е. При $c \in (a, b)$ интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ с единственной особенностью в верхнем пределе интегрирования сходятся или расходятся одновременно, и интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^c f(x)dx$ с единственной особенностью в нижнем пределе интегрирования сходятся или расходятся одновременно.

Задача 5.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x}+x^3)^\alpha}{(x^{17}+2)\arcsin\frac{x^2}{x^2+2}}\,dx.$$

Решение. $f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x}+x^3)^\alpha}{(x^{17}+2)\arcsin\frac{x^2}{x^2+2}} \geqslant 0$ при $x > 0$. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx =$ $= \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 – в нижнем пределе, а I_2 – в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся признаком сравнения. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{2-\frac{\alpha}{3}}}$ при $x \to 0$, то I_1 сходится $\Leftrightarrow 2 - \frac{\alpha}{3} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 3$. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{17-3\alpha}}$ при $x \to +\infty$, то I_2 сходится $\Leftrightarrow 17 - 3\alpha > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha < \frac{16}{3}$. Интеграл I сходится $\Leftrightarrow$ интеграл I_1 сходится и интеграл I_2 сходится $\Leftrightarrow 3 < \alpha < \frac{16}{3}$. Сходимость абсолютная.

Задача 5.3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x - 1 - \ln(1+\frac{x^2}{2})}{(e^x-1-x)(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x})^\alpha}\,dx$.

Решение. $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1 - \ln(1+\frac{x^2}{2})}{(e^x-1-x)(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x})^\alpha} \geqslant 0$ при $x > 0$. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx =$ $= \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже ровно одну особенность: I_1 – в нижнем, а I_2 – в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся признаком сравнения. Так как при $x \to 0$ имеем $\operatorname{ch} x - 1 - \ln(1+\frac{x^2}{2}) = \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$, $e^x - 1 - x =$ $= \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sqrt{x} + \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x} + o(\sqrt[6]{x})$, то $f(x) \sim \frac{C}{x^{\frac{\alpha}{6}-2}}$, $x \to 0$. Поэтому I_1 сходится $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{6} - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 18$. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{\frac{\alpha}{2}}}$ при $x \to +\infty$, то I_2 сходится $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$. Интеграл I сходится $\Leftrightarrow I_1$ сходится и I_2 сходится $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 18$. Сходимость абсолютная.

Задача 5.4. Исследовать абсолютную и условную сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(1+x^2)}{\sqrt{\sqrt{x}+x^4}}\, dx.$$

Решение. $f(x) = \frac{\ln^\alpha(1+x^2)}{\sqrt{\sqrt{x}+x^4}} \geqslant 0$ для $x > 0$ и всех α. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx =$ $= \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 – в нижнем пределе, а I_2 – в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся признаком сравнения. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{\frac{1}{4}-2\alpha}}$ при $x \to 0$, то I_1 сходится $\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 2\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{3}{8}$. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^2 \ln^{-\alpha} x}$ при $x \to +\infty$, то I_2 сходится при всех α из $\mathbb{R}$. Интеграл I сходится $\Leftrightarrow$ I_1 сходится и I_2 сходится $\Leftrightarrow \alpha > -\frac{3}{8}$. Сходимость абсолютная.

Задача 5.5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{e^x(x-\sqrt[3]{x})^\alpha}\, dx$.

Решение. Заменой $t = x - 1$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{e^t(1+t-\sqrt[3]{1+t})^\alpha}\, dt$. Подынтегральная функция $f(t) = \frac{\operatorname{arctg} t}{e^t(1+t-\sqrt[3]{1+t})^\alpha} \geqslant 0$ при $t > 0$ и всех α из $\mathbb{R}$. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_0^1 f(t)dt +$ $+ \int\limits_1^{+\infty} f(t)dt = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 – в нижнем пределе, а I_2 – в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся признаком сравнения. Так как $f(t) \sim \frac{C}{t^{\alpha-1}}$ при $t \to 0$, то интеграл I_1 сходится $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$. Так как $f(t) \sim \frac{C}{e^t t^\alpha}$ при $t \to +\infty$, то I_2 сходится при всех α из

$\mathbb{R}$. Интеграл I сходится $\Leftrightarrow$ I_1 сходится и I_2 сходится $\Leftrightarrow$ $\alpha < 2$. Сходимость абсолютная.

8. Задача 6. Исследовать абсолютную и условную сходимость несобственного интеграла от знакопеременной функции

Задача 6.1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \left(\operatorname{sh}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\cos\sqrt{x}\; dx.$$

Решение. Заменой $t = \sqrt{x}$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла

$$I = \int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} t^{2\alpha+1}\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)\cos t\; dt = \int_1^{+\infty} g(t)\cos t dt,$$

где $g(t) = t^{2\alpha+1}\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)$.

Ясно, что $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{2\alpha-5}}{6} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 5 < 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{5}{2}$. Покажем, что при $\alpha < \frac{5}{2}$ интеграл I сходится по признаку Дирихле, а при $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$ расходится по критерию Коши.

I) Сходимость. $g(t) = t^{2\alpha-5}t^6\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)$. При $\alpha < \frac{5}{2}$ функция $\varphi(t) = t^{2\alpha-5} \downdownarrows$ на луче $[1;+\infty)$. Функция $h(t) = t^6\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) \downdownarrows$ на луче $[t_0,+\infty)$ для некоторого $t_0 \geqslant 1$, так как производная $h'(t) = 2t^3\left[3t^2\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) - \left(\operatorname{ch}\frac{1}{t^2} - 1\right)\right] = -\frac{2}{t^5}\left(\frac{2}{120} + o(1)\right) < 0$ при достаточно больших t, поскольку $|o(1)| < \frac{1}{120}$ при достаточно больших t. Таким образом, 1) $g(t) \downdownarrows 0$ на луче $[t_0,+\infty)$, 2) $\forall\, \xi \in [1;+\infty)$ $\left|\int\limits_1^\xi \cos t\; dt\right| = |\sin\xi - \sin 1| \leqslant 2$. По признаку Дирихле интеграл I сходится при всех $\alpha < \frac{5}{2}$.

II) Р а с х о д и м о с т ь. $\forall\ \alpha > \frac{5}{2}$ $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, при $\alpha = \frac{5}{2}$ $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \frac{1}{6}$. Тогда при $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$ $\exists\ t_0 \geqslant 1$ $\forall\ t \geqslant t_0$ $g(t) \geqslant \frac{1}{12}$. Значит, $\forall\ \alpha \geqslant \frac{5}{2}$ $\exists\ t_0 \geqslant 1$ $\forall\ \delta > t_0$ $\exists\ n = \left[\frac{\delta}{2\pi}\right] + 1 > \frac{\delta}{2\pi}$ $\exists\ \xi' = 2\pi n > \delta$, $\exists\ \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta :$ $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| =$

$= \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(t)\cos t\ dt \geqslant \frac{1}{12}\int\limits_{\xi'}^{\xi''} \cos t\ dt = \frac{1}{12}$. Итак,

$\forall\ \alpha \geqslant \frac{5}{2}$ $\exists\ \varepsilon_0 = \frac{1}{12} > 0$ $\forall\ \delta > 1$ $\exists\ \xi' > \delta$ $\exists\ \xi'' > \delta :$ $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| \geqslant \varepsilon_0$. Справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла $I = \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\ dt$. По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$.

III) А б с о л ю т н а я с х о д и м о с т ь. Интеграл I может абсолютно сходиться лишь при тех значениях α, при которых он сходится. При $\alpha < \frac{5}{2}$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} g(t)\cos 2t\ dt$ сходится по признаку Дирихле. Тогда по признаку сравнения из цепочки неравенств $\int\limits_{1}^{+\infty} g(t)\ dt \geqslant \int\limits_{1}^{+\infty} g(t)|\cos t|\ dt \geqslant \int\limits_{1}^{+\infty} g(t)\cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} g(t)\ dt +$ $+ \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} g(t)\cos 2t\ dt \geqslant 0$ следует, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} |f(t)|\ dt =$ $= \int\limits_{1}^{+\infty} g(t)|\cos t|\ dt$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} g(t)\ dt$ сходится $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{C}{t^{5-2\alpha}}\ dt$ сходится $\Leftrightarrow 5 - 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$.

В ы в о д. Результаты исследования позволяют сделать следующий вывод: данный в условии задачи несобственный интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < \frac{5}{2}$, и абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 2$. Этот результат можно сформулировать по-другому: интеграл сходится абсолютно, если $\alpha < 2$; сходится условно, если $2 \leqslant \alpha < \frac{5}{2}$, и расходится, если $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$.

З а м е ч а н и е. Если $h'(x) \sim \varphi'(x) < 0$ при $x \to +\infty$, то в некоторой окрестности $+\infty$ $h'(x) < 0$. Если $h'(x) \sim \varphi'(x) > 0$ при $x \to +\infty$, то в некоторой окрестности $+\infty$ $h'(x) > 0$. В задаче 6.1 $h'(t) \sim -\frac{1}{30t^5} < 0$ при $t \to +\infty$. Значит, $h(t) \downdownarrows$ при $t \to +\infty$.

З а м е ч а н и е. При нахождении эквивалентной функции необходимо учитывать, что в общем случае сумма функций не эквивалентна сумме эквивалентных им функций. Например, $\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - \sqrt{1-\frac{2}{t}} = \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \sim$
$\sim \frac{1}{t}$ при $t \to +\infty$, но $\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - \sqrt{1-\frac{2}{t}} \not\sim \left(1+\frac{1}{t^2}\right) - 1$ при $t \to +\infty$.

З а м е ч а н и е. Поскольку $I = \int\limits_1^{+\infty} t^{2\alpha+1}\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)\cos t\, dt =$
$= \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{5-2\alpha}}\, t^6\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) dt$, а функция $h(t) = t^6\left(\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) \downdownarrows \frac{1}{6} \neq$
$\neq 0$ при $t \geqslant t_0$, то по следствию из признака Абеля[6] задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $\tilde{I} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{5-2\alpha}}\, dt$, который, как известно, сходится абсолютно, если $5 - 2\alpha > 1$, сходится условно, если $0 < 5 - 2\alpha \leqslant 1$, и расходится, если $5 - 2\alpha \leqslant 0$. Следствие из признака Абеля заключается в следующем.

Т е о р е м а. *Пусть для некоторого* $a \in \mathbb{R}$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на любом отрезке* $[a, \xi]$, *а функция* $g(x)$ *монотонна на промежутке* $[a, +\infty)$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = k \neq 0$. *Тогда несобственные интегралы* $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *и* $\tilde{I} = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся и абсолютно сходятся одновременно.*

Заключение теоремы означает, что несобственные интегралы I и $\tilde{I}$ либо оба сходятся абсолютно, либо оба сходятся условно, либо оба расходятся.

[6] П р и з н а к А б е л я. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, \xi]$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а функция $g(x)$ монотонна и ограничена на промежутке $[a, +\infty)$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ тоже сходится [4].

Заключение теоремы остаётся верным, если функция $g(x)$ монотонна на луче $[x_0, +\infty)$ для некоторого $x_0 > a$, а функция $f(x)g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, x_0]$.

Доказательство. Согласно условию теоремы и свойствам интегрируемых по Риману функций, функции $g(x)$, $f(x)g(x), |f(x)|$, $|f(x)g(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a, \xi]$.

Поскольку $k \neq 0$, в некоторой окрестности $+\infty$ справедливы неравенства $0 < |k| - \frac{|k|}{2} \leqslant |g(x)| \leqslant |k| + \frac{|k|}{2}$, откуда вытекает, что монотонная функция $g(x)$ в выбранной окрестности $+\infty$ сохраняет знак. Тогда в этой окрестности функции $g(x)$, $|g(x)|$, $\frac{1}{g(x)}$, $\frac{1}{|g(x)|}$ определены, ограничены и монотонны.

Так как несобственные интегралы I и $\widetilde{I}$ имеют единственную особенность $+\infty$, то без ограничения общности[7] полагаем, что a принадлежит выбранной окрестности $+\infty$. Замечая, что $f(x) = (f(x)g(x))\frac{1}{g(x)}$, по признаку Абеля [4, 11] получаем заключение теоремы.

В самом деле, если интеграл $\widetilde{I} = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то интеграл $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится по признаку Абеля. Обратно, если интеграл $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится, то интеграл $\widetilde{I} = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} (f(x)g(x)) \cdot \frac{1}{g(x)}dx$ сходится по признаку Абеля. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)g(x)|dx = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)||g(x)|dx$ сходится по признаку Абеля. Обратно, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)g(x)|dx$ сходится, то интеграл

[7] При $c \in (a, b)$ интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ с единственной особенностью в верхнем пределе интегрирования сходятся и абсолютно сходятся одновременно и интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^c f(x)dx$ с единственной особенностью в нижнем пределе интегрирования сходятся и абсолютно сходятся одновременно.

$\widetilde{I} = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)g(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)|}dx$ сходится по признаку Абеля.

Следствием из признака Абеля можно пользоваться в письменной работе без доказательства лишь в том случае, если эта теорема была доказана на лекциях.

З а м е ч а н и е. Если под знаком sin или cos в условии задачи находится не линейная функция, рекомендуется делать замену переменной. Заменять подынтегральную функцию на эквивалентную в окрестности единственной особой точки нельзя, поскольку она не знакопостоянна, и в общем случае такая замена не приводит к эквивалентному в смысле сходимости несобственному интегралу. Например, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \cos x}dx$ сходится условно, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}dx$ расходится. В каждом из этих случаев подынтегральная функция эквивалентна функции $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$, и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится условно (см. [7]). Этот пример также показывает, что от условия монотонности в признаке Дирихле нельзя отказаться.

Из стремления подынтегральной функции к нулю не следует сходимость несобственного интеграла, равно как из неограниченности (даже всюду положительной и непрерывной) подынтегральной функции не следует расходимость несобственного интеграла. Из эквивалентности данной функции некоторой монотонной функции при $x \to a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, не следует монотонность исходной функции в некоторой окрестности a. Эталонами можно считать интегралы, которые рассматривались на лекциях.

При $\omega \neq 0$ интегралы

$$I_6 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\omega x + \varphi)}{x^\alpha}\, dx, \;\; I_7 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(\omega x + \varphi)}{x^\alpha}\, dx$$

сходятся абсолютно, если $\alpha > 1$; сходятся условно,
если $0 < \alpha \leqslant 1$, и расходятся, если $\alpha \leqslant 0$.

З а м е ч а н и е. Считая интегралы I_6, I_7 эталонами, можно в задаче 6.1 исследовать абсолютную сходимость следующим образом: так как $|f(t)| = g(t)|\cos t| \sim \frac{C|\cos t|}{t^{5-2\alpha}}$ при $t \to +\infty$, то по признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |f(t)|\, dt$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{C|\cos t|}{t^{5-2\alpha}}\, dt$ сходится $\Leftrightarrow 5 - 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$.

Тригонометрический признак сходимости. Пусть функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на луче $[a; +\infty)$ и $g(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$. Тогда $\forall\ k \neq 0, \forall\ p$ интегралы $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\sin(kx+p)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\cos(kx+p)dx$ сходятся.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $\sin(kx+p)$ и $\cos(kx+p)$ имеют ограниченные первообразные. Осталось воспользоваться признаком Дирихле.

Тригонометрический признак абсолютной сходимости. Пусть функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на луче $[a; +\infty)$ и $g(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$. Тогда $\forall\ k \neq 0, \forall\ p$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g(x)\sin(kx+p)|dx$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g(x)\cos(kx+p)|dx$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{g(x)}{2}\cos(2kx+2p)dx$ сходится по тригонометрическому признаку сходимости. Тогда по признаку сравнения из цепочек неравенств $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \geqslant$

$\geqslant \int\limits_a^{+\infty} |g(x)\sin(kx+p)|dx \geqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\sin^2(kx+p)dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{g(x)}{2}dx -$
$- \int\limits_a^{+\infty} \frac{g(x)}{2}\cos(2kx+2p)dx \geqslant 0$ и
$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \geqslant \int\limits_a^{+\infty} |g(x)\cos(kx+p)|dx \geqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\cos^2(kx+p)dx =$
$= \int\limits_a^{+\infty} \frac{g(x)}{2}dx + \int\limits_a^{+\infty} \frac{g(x)}{2}\cos(2kx+2p)dx \geqslant 0$ следует заключение теоремы.

Тригонометрический признак расходимости. Пусть функция $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b]$, $b>a$, причём $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=C>0$ или $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Тогда $\forall\ k\neq 0, \forall\ p$ интегралы
$\int\limits_a^{+\infty} g(x)\sin(kx+p)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\cos(kx+p)dx$ расходятся.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=C$. Так как $\exists\ x_0\geqslant a\ \forall\ x\geqslant x_0\ g(x)\geqslant\frac{C}{2}>0$, то $\forall\ k>0\ \exists\ x_0\geqslant a$ $\forall\ \delta>x_0\ \exists\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ \xi'=\frac{2\pi n-p}{k}>\delta$, $\exists\ \xi''=\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n-p}{k}>\delta$: $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)\sin(kx+p)\ dx\right| \geqslant \frac{C}{2}\int\limits_{\xi'}^{\xi''}\sin(kx+p)\ dx\geqslant\frac{C}{2k}>0$ и $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)\cos(kx+p)\ dx\right|\geqslant\frac{C}{2}\int\limits_{\xi'}^{\xi''}\cos(kx+p)\ dx\geqslant\frac{C}{2k}>0$. Из критерия Коши для $k>0$ следует заключение теоремы. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, полагаем $C=1$.

Пользоваться тригонометрическими признаками в письменной работе без доказательства можно только в том случае, если они были доказаны на лекциях.

Пример *громоздкой задачи*[8]. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_3^{+\infty}\frac{\cos(2x^2+1)}{(x\ln^2 x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}dx$.

Решение. $\int\limits_3^{+\infty}\frac{\cos(2x^2+1)}{(x\ln^2 x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}dx=\frac{1}{2}\int\limits_9^{+\infty} g(t)\cos(2t+1)dt$, где $t=x^2$, $dx=\frac{1}{2}t^{-1/2}dt$, $g(t)=\frac{1}{t^{1/2}(t^{1/2}\ln^2\sqrt{t}-\operatorname{arctg}\sqrt{t})^\alpha}=$
$=\frac{4^\alpha}{t^{1/2}(t^{1/2}\ln^2 t-4\operatorname{arctg}\sqrt{t})^\alpha}=\frac{C}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}\left(1-\frac{4\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}\ln^2 t}\right)^\alpha}$. Функция $\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)\downdownarrows$ при $t\to+\infty$, поскольку её производная $\frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(\frac{\sqrt{t}}{1+t}-\operatorname{arctg}\sqrt{t}\right)<0$ при достаточно больших t. Тогда функция $\varphi(t)=\left(1-\frac{4\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}\ln^2 t}\right)^{-1}\downdownarrows$ при $t\to+\infty$.

[8]Тригонометрические признаки и пример громоздкой задачи взяты из лекций по математическому анализу А. Ю. Петровича.

Функция $h(t) = (\varphi(t))^\alpha$ монотонна при любом значении α как композиция монотонных функций[9]. $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 1 \neq 0$. По следствию из признака Абеля задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость интеграла $I = \int\limits_9^{+\infty} \frac{\cos(2t+1)}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}} dt$.

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}} = 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$ и при $\alpha > -1$ производная $\left(t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}\right)' > 0$ при всех достаточно больших t, то интеграл I сходится при всех $\alpha > -1$ и расходится при всех $\alpha \leqslant -1$ по тригонометрическим признакам сходимости и расходимости.

По тригонометрическому признаку абсолютной сходимости интеграл $\int\limits_9^{+\infty} \left|\frac{\cos(2t+1)}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}}\right| dt$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_9^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}} dt$ сходится $\Leftrightarrow \alpha \geqslant 1$ (эталон).

Ответ: абсолютно сходится при $\alpha \geqslant 1$, условно сходится при $-1 < \alpha < 1$, расходится при $\alpha \leqslant -1$.

Пример. В задаче 6.1 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{2\alpha-5}}{6} = 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{5}{2}$ и при $\alpha < \frac{5}{2}$ функция $g(t) \downdownarrows 0$ на луче $[t_0, +\infty)$. По тригонометрическим признакам сходимости, расходимости и абсолютной сходимости находим, что интеграл I сходится при $\alpha < \frac{5}{2}$, расходится при $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$ и абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $5 - 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$.

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при $\omega \neq 0$ интегралы

$$I_8 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin(\omega x + \varphi)}{x^\alpha \ln^\beta x} dx, \quad I_9 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos(\omega x + \varphi)}{x^\alpha \ln^\beta x} dx.$$

Решение. Пусть $g(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0,\ \forall\ \beta \\ \alpha = 0,\ \beta > 0 \end{array} \right.$. Для каждой пары значений α и β из полученных для α и β значений найдётся такое $x_0 > 2$, что для всех

[9] Композиция монотонных функций монотонна. Если, например, $f\uparrow$, а $g\downarrow$ на $[a, +\infty)$ и $h = f \circ g$, то из $x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) \leqslant g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \leqslant f(g(x_2)) \Rightarrow h(x_1) \leqslant h(x_2)$. Значит, $h\downarrow$ на $[a, +\infty)$. Аналогично рассматриваются другие случаи.

$x \geqslant x_0$ производная
$g'(x) = \frac{-1}{(x^\alpha \ln^\beta x)^2}(x^{\alpha-1}\ln^{\beta-1} x)(\alpha \ln x + \beta) < 0$. Значит, функция $g(x)$ монотонна на луче $[x_0, +\infty)$. По тригонометрическим признакам интегралы $I_8,\ I_9$ сходятся $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0,\ \forall\ \beta \\ \alpha = 0,\ \beta > 0 \end{array} \right.$ и абсолютно сходятся $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 1,\ \forall\ \beta \\ \alpha = 1,\ \beta > 1 \end{array} \right.$.

Пример.[10] Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$.

Решение. Пусть $z = z(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = 0$, $\sin z = = \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + o(z^5)$ при $z \to 0$, $I = \int\limits_1^{+\infty} \sin z dx = \int\limits_1^{+\infty} \left(z - \frac{z^3}{6}\right) dx + + \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{z^5}{120} + o(z^5)\right) dx = I_1 + I_2$. Докажем абсолютную сходимость интеграла I_2. Поскольку для всех *достаточно малых* z (для всех *достаточно больших* x) справедливо, что

$$\left|\frac{z^5}{120} + o(z^5)\right| = |z|^5 \left|\frac{1}{120} + o(1)\right| \leqslant |z|^5 = \frac{|\sin x|^5}{x^{5/3}} \leqslant \frac{1}{x^{5/3}}$$

и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$ сходится (эталон), то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{z^5}{120} + o(z^5)\right| dx$ сходится по признаку сравнения. Итак, интеграл I_2 сходится (и даже абсолютно). Докажем сходимость интеграла $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \left(z - \frac{z^3}{6}\right) dx = \int\limits_1^{+\infty} z dx - \frac{1}{6} \int\limits_1^{+\infty} z^3 dx$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} z dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле:
1) $\forall\ \xi \in [1; +\infty)$ $\left|\int\limits_1^{\xi} \sin x dx\right| = |\cos 1 - \cos \xi| \leqslant 2$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$;
3) функция $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ монотонно убывает при $x > 1$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} z^3 dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле:

[10] Это важный пример другого класса экзаменационных задач на эту тему.

1) $\forall\,\xi\in[1;+\infty)$ $\left|\int\limits_1^{\xi}\sin^3 x dx\right| = \left|\left(\frac{\cos^3\xi}{3}-\cos\xi\right)-\left(\frac{\cos^3 1}{3}-\cos 1\right)\right| \leqslant$ $\leqslant 4$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$; 3) функция $\psi(x)=\frac{1}{x}$ монотонно убывает при $x>1$. Сходимость I_1 доказана. Из сходимости интегралов I_1 и I_2 следует сходимость интеграла $I=I_1+I_2$. Абсолютной сходимости нет. Действительно, $|\sin z(x)|\sim|z(x)|$ при $x\to+\infty$, поэтому интеграл $\int\limits_1^{+\infty}|\sin z(x)|dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty}|z|dx$ сходится. Но $\int\limits_1^{+\infty}|z|dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt[3]{x}}dx\geqslant\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}}dx\geqslant 0$, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ расходится (эталон), а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходится по признаку Дирихле: 1) $\forall\,\xi\in[1;+\infty)$ $\left|\int\limits_1^{\xi}\cos 2x dx\right|\leqslant$ $\leqslant 2$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$; 3) функция $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ монотонно убывает при $x>1$. Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}|z|\,dx$ оценивается снизу расходящимся к $+\infty$ интегралом и расходится по признаку сравнения.

Ответ: интеграл I сходится условно.

З а м е ч а н и е. Порядок малости в разложении $\sin z$ выбирался таким образом, чтобы интеграл I_2 сходился абсолютно. Достаточно выбрать наименьший такой порядок.

З а м е ч а н и е. Так как $I=I_1+I_2$ и интеграл I_2 сходится абсолютно, то интегралы I и I_1 сходятся и абсолютно сходятся одновременно. Это утверждение следует из признака сравнения и означает, что итегралы I и I_1 эквивалентны в смысле сходимости: они либо оба сходятся абсолютно, либо оба сходятся условно, либо оба расходятся.

П р е д л о ж е н и е.[11] Непрерывная нечётная периодическая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на любом луче $[a,+\infty)$ имеет ограниченную первообразную.

[11]Как упражнение это предложение иногда обосновывается на семинарских занятиях, но пользоваться им в письменной работе без доказательства можно только в том случае, если оно было доказано на лекциях.

Доказательство. В силу непрерывности функция f интегрируема по Риману на любом отрезке. Пусть $T > 0$ – период функции f. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)dt =$ $= \int\limits_{0}^{a} f(t)dt$. Тогда $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dx +$ $+ \int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx$. Полагая $a = -\frac{T}{2}$, в силу нечётности f имеем: $\int\limits_{0}^{T} f(x)dx = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{-\frac{T}{2}} f(-x)d(-x) + \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)dx =$ $-\int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0$. Значит, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = 0$. По индукции $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\int\limits_{a}^{a+nT} f(x)dx = 0$. Далее, $\forall\, b > a$ $\exists\, n = \left[\frac{b-a}{T}\right] : n \leqslant \frac{b-a}{T} < n+1$. Тогда $0 \leqslant b-a-Tn < T$ и $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{a+nT} f(x)dx + \int\limits_{a+nT}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\beta}^{b} f(x)dx$, где $\beta = a+nT$, $0 \leqslant b-\beta < T$. Так как $\forall\, x_0$ $\exists\, n = \left[\frac{x_0}{T}\right] \in \mathbb{Z} : n \leqslant \frac{x_0}{T} < n+1$, $0 \leqslant$ $\leqslant x_0 - nT < T$, то $f(x_0) = f(x_0-nT) \leqslant M = \sup\{f(x) : x \in [0;T]\}$ и $f(x_0) = f(x_0-nT) \geqslant \mu = \inf\{f(x) : x \in [0;T]\}$. Числа M и μ существуют по теореме Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях. Значит, $\exists\, C = |M|+|\mu|+1 > 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| < C$. Тогда $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\forall\, b > a$ верно, что $\left|\int\limits_{a}^{b} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\beta}^{b} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{\beta}^{b} |f(x)|dx$ $\leqslant CT$. Предложение доказано.

Опираясь на это предложение, можно мгновенно заключить, что первообразные функций $\sin x$ и $\sin^3 x$ из предыдущего примера ограничены.

Упражнение. Исследовать абсолютную и условную сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{6}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x \cdot \ln(x+x^2)}{\sqrt[9]{x^4}}\right) dx$.

Ответ: сходится условно.

Задача 6.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3\ dx}{(x+\cos\ln x)^\alpha}.$$

Решение. Заменой $t = x^3$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I = \int\limits_1^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_1^{+\infty} g(t)\sin t dt$, где $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}\left(1+\frac{\cos\ln\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}\right)^\alpha} > 0$. Ясно, что $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2+\alpha}{3} > 0 \Leftrightarrow \alpha > -2$. Покажем, что при $\alpha > -2$ интеграл сходится по признаку Дирихле, а при $\alpha \leqslant -2$ – расходится по критерию Коши.

I) С х о д и м о с т ь. 1) $\forall\ \xi \in [1;+\infty)\ \left|\int\limits_1^\xi \sin t\ dt\right| \leqslant 2.$

2) Проверим, что $g(t) \downdownarrows 0$ при $t \geqslant t_0$ и $\alpha > -2$. Достаточно доказать, что $h(t) = \frac{1}{g(t)} \upuparrows$ при $t \geqslant t_0$ и $\alpha > -2$, а это вытекает из следующего утверждения: $\forall\ \alpha\ >\ -2$
$\exists\ t_0 \geqslant 1\ \forall\ t \geqslant t_0\ h'(t) = \left(\frac{2+\alpha}{3}\right) t^{\frac{\alpha-2}{3}} \left(1+\frac{\cos\ln\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}\right)^\alpha \times$
$\times\ \left[\sqrt[3]{t} - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2+\alpha}\left(1+\frac{\cos\ln\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}\right)^{-1} \sin\left(\ln\sqrt[3]{t}+\frac{\pi}{4}\right)\right] > 0$, поскольку функция в квадратных скобках стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$.

Из 1) – 2) по признаку Дирихле заключаем, что при $\alpha > -2$ интеграл I сходится.

II) Р а с х о д и м о с т ь. Так как $\forall\ \alpha \leqslant -2\ \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) \geqslant 1$, то $\forall\ \alpha \leqslant -2\ \exists\ t_0 \geqslant 1\ \forall\ t \geqslant t_0\ g(t) \geqslant \frac{1}{2}$. Значит, $\forall\ \alpha \leqslant -2\ \exists\ t_0 \geqslant 1$ $\forall\ \delta > t_0\ \exists\ n = \left[\frac{\delta}{2\pi}\right] + 1 > \frac{\delta}{2\pi}\ \exists\ \xi' = 2\pi n > \delta,\ \exists\ \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta:$ $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| = \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(t)\sin t\ dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\xi'}^{\xi''} \sin t\ dt = \frac{1}{2}$. Итак,

$\forall\ \alpha \leqslant -2\ \exists\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0\ \forall\ \delta > 1\ \exists\ \xi' > \delta\ \exists\ \xi'' > \delta : \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| \geqslant \varepsilon_0.$
По критерию Коши интеграл I расходится при $\alpha \leqslant -2$.

III) А б с о л ю т н а я с х о д и м о с т ь. Интеграл I может абсолютно сходиться лишь при тех значениях α, при которых он сходится. При $\alpha > -2$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(t)\cos 2t\,dt$ сходится по признаку Дирихле. Тогда по признаку сравнения из цепочки неравенств $\int\limits_1^{+\infty} g(t)\ dt \geqslant \int\limits_1^{+\infty} g(t)|\sin t|\ dt \geqslant \int\limits_1^{+\infty} g(t)\sin^2 t\ dt =$ $= \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} g(t)\ dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} g(t)\cos 2t\ dt \geqslant 0$ следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |f(t)|\ dt = \int\limits_1^{+\infty} g(t)|\sin t|\ dt$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(t)\ dt$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{C}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}}\ dt$ сходится $\Leftrightarrow \frac{2+\alpha}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Ответ: сходится абсолютно, если $\alpha > 1$; сходится условно, если $-2 < \alpha \leqslant 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant -2$.

Задача 6.3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\sin(2x+3)dx.$$

Решение.[12] $I = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\sin(2x+3)dx =$ $= \int\limits_1^{+\infty} g(x)\sin(2x+3)dx$, где $g(x) = \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}$.

I) Абсолютная сходимость. $|f(x)| \leqslant \left|\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\right| \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ при $x \to +\infty$. По признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, если интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ сходится. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ сходится $\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$. Таким образом, если $\alpha > 2$, то интеграл I сходится абсолютно.

II) Сходимость. Воспользуемся признаком Дирихле.

[12] В решении приводится т. н. схема из четырёх ступенек (т. е. этапов или пунктов исследования). Последовательность этих пунктов можно определённым образом менять. Удобно, например, вначале исследовать сходимость и расходимость, а затем абсолютную и условную сходимость (см. [2]). В предыдущих параграфах применялась схема из трёх ступенек.

1) $\forall\ \xi \in [1;+\infty)\ \left|\int\limits_1^{\xi} \sin(2x+3)\ dx\right| \leqslant 1.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{x^{\alpha-1}} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1.$

3) $\forall\ \alpha > 1\ \exists\ x_0 \geqslant 1\ \forall\ x \geqslant x_0\ g'(x) =$
$= x^{-\alpha}\left[\frac{\alpha \operatorname{arctg} x}{x} - \frac{1}{1+x^2} - (\alpha-1)\right] = x^{-\alpha}(1-\alpha+o(1)) < 0$ и, таким образом, $g(x) \downdownarrows$ при $x \in [x_0, +\infty)$.

Из 1) – 3) по признаку Дирихле находим, что $\forall\ \alpha > 1$ интеграл I сходится.

III) Условная сходимость. Покажем, что $\forall\ \alpha \in (1;2]$ интеграл I сходится условно. Так как сходимость I в указанном промежутке значений параметра α установлена, достаточно доказать отсутствие абсолютной сходимости интеграла I, то есть расходимость несобственного интеграла $\hat{I} = \int\limits_1^{+\infty} |f(x)|\ dx$ при $\alpha \in (1;2]$. Согласно свойствам монотонности и линейности несобственного интеграла,

$\hat{I} = \int\limits_1^{+\infty} g(x)|\sin(2x+3)|\ dx \geqslant \int\limits_1^{+\infty} g(x)\sin^2(2x+3)\ dx =$
$= \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} g(x)\ dx - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} g(x)\cos 2(2x+3)\ dx \geqslant 0.$ Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\ dx$ расходится при $\alpha \in (1;2]$. Это установлено в пункте (I). Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\cos 2(2x+3)\ dx$ сходится по признаку Дирихле, так как в пункте (II) установлено, что $g(x) \downdownarrows 0$ при $x \geqslant x_0$, и, кроме того, $\forall\ \xi \in [1;+\infty)\ \left|\int\limits_1^{\xi} \cos 2(2x+3)\ dx\right| \leqslant 1$. Таким образом, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\sin^2(2x+3)\ dx$ расходится как линейная комбинация с отличными от нуля коэффициентами сходящегося и расходящегося интегралов в одних и тех же пределах интегрирования. Интеграл $\hat{I}$ расходится по признаку сравнения.

IV) Расходимость. Пользуясь критерием Коши, докажем расходимость интеграла I при всех $\alpha \leqslant 1$. Так как $\forall\ \alpha \leqslant 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \geqslant 1$, то $\forall\ \alpha \leqslant 1\ \exists\ x_0 \geqslant 1\ \forall\ x \geqslant x_0\ g(x) \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда $\forall\ \alpha \leqslant 1\ \exists\ x_0 \geqslant 1\ \forall\ \delta > x_0\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ \xi' = \frac{2\pi n-3}{2} > \delta$, $\exists\ \xi'' = \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n-3}{2} > \delta$: $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)\ dx\right| = \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)\sin(2x+3)\ dx \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\xi'}^{\xi''} \sin(2x+3)\ dx = \frac{1}{4}$. Таким образом, $\forall\ \alpha \leqslant 1\ \exists\ \varepsilon_0 = \frac{1}{4} > 0$ $\forall\ \delta > 1\ \exists\ \xi' > \delta\ \exists\ \xi'' > \delta : \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)\ dx\right| \geqslant \varepsilon_0$ – справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла $I = \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\ dx$. По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha \leqslant 1$.

З а м е ч а н и е. ξ' и ξ'' для критерия Коши выбирались таким образом, чтобы для всех $x \in [\xi', \xi'']$ выполнялось двойное неравенство $2\pi n \leqslant (2x+3) \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

ξ' и ξ'' находятся из условий $2\pi n = 2\xi' + 3$, $2\xi'' + 3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: сходится абсолютно, если $\alpha > 2$; сходится условно, если $1 < \alpha \leqslant 2$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$.

Задача 6.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{\alpha \operatorname{ctg} x} \cos(\operatorname{ctg} x)\ dx.$$

Решение. Заменой $t = \operatorname{ctg} x$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I = \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}\cos t}{1+t^2}\ dt = \int\limits_{1}^{+\infty} g(t)\cos t\ dt$, где $g(t) = \frac{e^{\alpha t}}{1+t^2}$. $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha \leqslant 0$. Покажем, что интеграл I сходится абсолютно при $\alpha \leqslant 0$ по признаку сравнения и расходится при $\alpha > 0$ по критерию Коши.

А б с о л ю т н а я с х о д и м о с т ь. $\forall\, \alpha \leqslant 0\, \forall\, t \geqslant 1\ |f(t)| \leqslant \frac{e^{\alpha t}}{1+t^2} \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{t^2}$. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ сходится (эталон). По признаку сравнения интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} |f(t)|dt$ сходится.

Расходимость. Так как $\forall\ \alpha > 0\ \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, то $\forall\ \alpha > 0\ \exists\ t_0 \geqslant 1\ \forall\ t \geqslant t_0\ g(t) \geqslant 1$. Поэтому $\forall\ \alpha > 0\ \exists\ t_0 \geqslant 1$ $\forall\ \delta > t_0\ \exists\ n = \left[\frac{\delta}{2\pi}\right] + 1 > \frac{\delta}{2\pi}\ \exists\ \xi' = 2\pi n > \delta$, $\exists\ \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta$: $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| = \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(t)\cos t\ dt \geqslant \int\limits_{\xi'}^{\xi''} \cos t\ dt = 1$. Таким образом, $\forall\ \alpha > 0\ \exists\ \varepsilon_0 = 1 > 0\ \forall\ \delta > 1\ \exists\ \xi' > \delta\ \exists\ \xi'' > \delta : \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| \geqslant \varepsilon_0$ – справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла $I = \int\limits_1^{+\infty} f(t)\ dt$. По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha > 0$.

Ответ: абсолютно сходится, если $\alpha \leqslant 0$, и расходится, если $\alpha > 0$.

Задача 6.5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \ln^\alpha\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sin x^3\ dx$.

Решение. Заменой $t = x^3$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I = \int\limits_1^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_1^{+\infty} g(t)\sin t dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2/3}}\ln^\alpha\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)\sin t\ dt$. $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}} = 0 \Leftrightarrow \alpha > -2$. Докажем, что при $\alpha > -2$ интеграл I сходится по признаку Дирихле, а при $\alpha \leqslant -2$ расходится по критерию Коши.

I) Сходимость. При $\alpha > -2$ производная
$g'(t) = -\frac{2}{3}t^{-5/3}\ln^\alpha(1 + t^{-1/3}) + \frac{t^{-2/3}\alpha\ln^{\alpha-1}(1+t^{-1/3})}{(1+t^{-1/3})}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)t^{-4/3} =$
$= -\frac{1}{3}t^{-2}\ln^{\alpha-1}(1 + t^{-1/3})\left(2t^{1/3}\ln(1 + t^{-1/3}) + \frac{\alpha}{(1+t^{-1/3})}\right) =$
$= -\frac{1}{3}t^{-2}\ln^{\alpha-1}(1 + t^{-1/3})(2 + \alpha + o(1)) \sim -\frac{2+\alpha}{3}t^{-2}\ln^{\alpha-1}(1 +$
$+t^{-1/3}) < 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, 1) $g(t) \downdownarrows 0$ при $t \to +\infty$, 2) $\forall\ \xi \in [1, +\infty)$ $\left|\int\limits_1^{\xi} \sin t dt\right| = |-\cos\xi + \cos 1| \leqslant 2$. По признаку Дирихле интеграл I сходится при всех $\alpha > -2$.

II) Р а с х о д и м о с т ь. $\forall\ \alpha < 2\ \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, при $\alpha = -2\ \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 1$. Тогда $\forall\ \alpha \geqslant -2\ \exists\ t_0 \geqslant 1\ \forall\ t \geqslant t_0\ g(t) \geqslant \frac{1}{2}$. Значит, $\forall\, \alpha \geqslant -2\, \exists\, t_0 \geqslant 1\, \forall\, \delta > t_0\, \exists\, n = \left[\frac{\delta}{2\pi}\right] + 1 > \frac{\delta}{2\pi}\, \exists\, \xi' = 2\pi n > \delta$, $\exists\ \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta : \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| = \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(t) \sin t\ dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\xi'}^{\xi''} \sin t\ dt = \frac{1}{2}$. Итак, $\forall\ \alpha \geqslant -2\ \exists\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0\ \forall\ \delta > 1\ \exists\ \xi' > \delta\ \exists\ \xi'' > \delta : \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(t)\ dt\right| \geqslant \varepsilon_0$. Справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла $I = \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\ dt$. По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha \geqslant -2$.

III) А б с о л ю т н а я с х о д и м о с т ь. Воспользуемся признаком сравнения. Так как $|f(t)| \sim \frac{|\sin t|}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}}$ при $t \to +\infty$, то интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} |f(t)| dt$ сходится $\Leftrightarrow$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}} dt$ сходится $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2+\alpha}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$ (эталон).

Ответ: абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $-2 < \alpha \leqslant 1$; расходится при $\alpha \leqslant 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. I. – Москва : МФТИ, 2004.
2. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. I. – Москва : МФТИ, 2000, 2004.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – Москва : Наука, 1988; Москва : МФТИ, 1997; Москва : Физматлит, 2003.
4. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математичекому анализу. Ч. 1. – Москва : Физматлит, 2004.
5. *Петрович А.Ю.* Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных : учеб.-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2007. – Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/da6/petrovic-arph0dxlxmm.pdf
6. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу: учебное пособие. В трёх частях. Ч. II. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. – Изд. 2-е, испр. и дополн. / А.Ю. Петрович – Москва : МФТИ, 2017. – 270 с.
7. *Кожевников П.А.* Исследование сходимости несобственных интегралов : учеб.-метод. пособие. Москва : МФТИ, 2007. – Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/kozhevnikov-arph0dybmbp.pdf
8. *Головко А.Ю.* Методическое пособие по теме: «Неопределённый интеграл». – Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: https://mipt.ru/upload/Golovko.pdf
9. *Иванова С.В.* Формула Тейлора и её применение при вычислении пределов функций: учеб.-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2011.
10. Сборник задач по математическому анализу /под ред. Л.Д. Кудрявцева. Т. 1–3. – 2-е изд. – Москва : Физматлит, 2003.
11. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – Москва : Дрофа, 2003.
12. *Гельбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе / пер. Б.И. Голубов.[13] – Волгоград : Изд-во «Платон», 1997.

[13] Борис Иванович Голубов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ.

Учебное издание

Консультация по курсу Многомерный анализ, интегралы и ряды для студентов 2-го семестра I-го курса. Часть I

Учебно-методическое пособие

по курсу *Многомерный анализ, интегралы и ряды*

Автор **Бурцев** Алексей Анатольевич

Редактор *Н.Е. Кобзева.* Корректор *Л.В. Себова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 19.04.2021. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 200 экз. Заказ № 17.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок