

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
(государственный университет)

---

**М.Е. БОГОВСКИЙ**

**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

*Учебное пособие*

**Москва**  
**2019**

УДК 517.95

ББК

Б74

Б74 М.Е. Боговский  
Уравнения математической физики. Учебное пособие.  
М.Е. Боговский. – Москва: МФТИ, 2019 – 1?? с.

В учебном пособии представлен обновленный семестровый курс *Уравнений математической физики* с элементами современных функционально-аналитических подходов к решению краевых и начально-краевых задач математической физики для дифференциальных уравнений в частных производных. Главное внимание уделяется простоте и ясности изложения материала, традиционно считавшегося доступным лишь для студентов математических специальностей. При этом студенты нематематических специальностей были фактически лишены возможности получить адекватное представление об имеющихся более эффективных подходах к решению классических задач математической физики, значительно расширяющих и усиливающих арсенал методики решения классических задач. Известный своей сложностью материал впервые излагается на уровне, доступном для студентов бакалавриата нематематических специальностей, что несомненно оценят студенты магистратуры, аспиранты, и даже научные работники, интересующиеся более современными и более эффективными подходами к старым и новым задачам математической физики.

Илл. 1. Библ. 18 назв.

УДК 517.95

ББК

© Боговский М.Е., 2019



# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>Список обозначений</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Введение</b>	<b>8</b>
1.1. Постановка задач математической физики . . . . .	8
1.2. Классические и слабые решения краевых задач . . . . .	8
<b>Глава 2. Элементы анализа дифференциальных уравнений математической физики</b>	<b>11</b>
2.1. Общая классификация ДУЧП . . . . .	11
2.2. Канонический вид ДУЧП второго порядка . . . . .	11
2.3. Элементы спектральной теории дифференциальных операторов	13
2.4. Разделение переменных методом Фурье . . . . .	19
<b>Глава 3. Волновое уравнение</b>	<b>28</b>
3.1. Классическое решение задачи Коши . . . . .	28
3.2. Слабое решение задачи Коши . . . . .	31
3.3. Начально-краевые задачи на полуоси . . . . .	36
3.4. Начально-краевые задачи на конечном отрезке . . . . .	41
<b>Глава 4. Уравнение теплопроводности</b>	<b>42</b>
4.1. Задача Коши . . . . .	42
4.2. Классические и слабые решения начально-краевых задач . .	51

4.3. Принцип максимума для уравнений теплопроводности . . . . .	51
<b>Глава 5. Эллиптические краевые задачи</b>	<b>55</b>
5.1. Метод Фурье для классических и слабых решений . . . . .	55
5.2. Зональные сферические гармоники в методе Фурье для уравнения Пуассона . . . . .	76
5.3. Свойства решений уравнений Лапласа и Пуассона . . . . .	82
<b>Приложения:</b>	<b>92</b>
<b>А Некоторые справочные сведения</b>	<b>92</b>
А.1. Лемма ДюБуа-Реймонда . . . . .	92
А.2. Операция усреднения . . . . .	92
А.3. Срезающие функции и разбиение единицы . . . . .	92
А.4. Полезные неравенства . . . . .	92
А.5. Другие примеры задач математической физики . . . . .	95
<b>В Некоторые методические рекомендации</b>	<b>96</b>
В.1. Метод интегральных преобразований . . . . .	96
В.2. Метод искусственного параметра в задаче Коши . . . . .	96
В.3. Интегрирование ДУЧП первого порядка . . . . .	97
В.4. Как найти класс единственности для краевой задачи . . . . .	97
<b>С Примеры решения задач методом Фурье</b>	<b>98</b>
С.1. Начально-краевые задачи . . . . .	98
С.2. Краевые задачи . . . . .	100
<b>Интернет-ресурсы</b>	<b>101</b>
<b>Литература</b>	<b>103</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>105</b>

# Предисловие

Основной целью учебного пособия является подготовка студентов к письменному и устному экзаменам по учебному курсу «*Уравнения математической физики*» ...

Курс состоит из пяти глав и трех приложений. В первой главе ...

Во второй главе в рамках ...

Третья глава посвящена решению ...

Четвертая глава посвящена методам ...

Пятая глава ...

Список литературы ...

Интернет ресурсы ...

Приложения А ...

Приложения В ...

Приложения С ...

Навигация по PDF файлу учебного пособия ...

# Список обозначений

$\mathbb{R}$  — вещественная ось;

$\mathbb{C}$  — комплексная плоскость;

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное вещественное евклидово пространство;

$\mathbb{C}^n$  —  $n$ -мерное комплексное евклидово пространство (комплексной размерности  $n \geq 2$  или вещественной  $2n$ );

$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) : x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$  — полупространство в  $\mathbb{R}^n$ ;

$S_n = \{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^n$ ;

$A \times B$  — прямое (декартово) произведение множеств  $A$  и  $B$ , т. е. множество всех упорядоченных пар  $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ;

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  — алгебраическая сумма множеств  $A$  и  $B$ ;

$\overline{A}$  — замыкание множества  $A$ ;

$\text{Int } A$  — подмножество всех внутренних точек множества  $A$ ;

$\partial A$  — множество всех граничных точек множества  $A$ ;

$\text{supp } f$  — носитель функции  $f$ , т. е. замыкание множества  $\{x : f(x) \neq 0\}$ ;

$\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , т. е. открытое связное множество в  $\mathbb{R}^n$ ;

$Q_T = \Omega \times (0, T)$  — цилиндр в  $\mathbb{R}^{n+1}$  высоты  $T > 0$  с основанием  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ;

$X \times Y$  — линейное пространство упорядоченных пар  $\{u, v\}$ ,  $u \in X$ ,  $v \in Y$  с покомпонентным сложением и умножением на скаляры;

$X(\Omega)$  — пространство функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой (полунормой)  $\|f\|_{X(\Omega)}$ ;

$X(\Omega; \mathbb{R}^n)$  — пространство вектор-функций  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой (полунормой)  $\|\mathbf{v}\|_{X(\Omega; \mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^n \|v_j\|_{X(\Omega)}$ ;

$X((0, T); Y)$  — пространство функций  $u : (0, T) \rightarrow Y$ , принимающих значения в линейном пространстве  $Y$ ;

$C^l(\Omega)$  — пространство  $l$  раз непрерывно дифференцируемых в  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  функций;

$\mathring{C}^m(\Omega)$  — пространство  $m$  раз непрерывно дифференцируемых в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  функций, обращающихся в ноль на границе  $\partial\Omega$  вместе со всеми своими производными до порядка  $m$  включительно;

$\mathring{C}^\infty(\Omega)$  — пространство бесконечно дифференцируемых и финитных в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  функций.



# Глава 1

## Введение

### 1.1. Постановка задач математической физики

1.1.1. Вывод уравнение теплопроводности.

1.1.2. Постановки задач для уравнения теплопроводности.

### 1.2. Классические и слабые решения краевых задач

Классическим решением краевой задачи, а также задачи Коши, начально-краевой и прочих задач для дифференциальных уравнений, принято называть решения, обладающие минимальной классической гладкостью, достаточной для проверки выполнения уравнений, а также краевых и прочих заданных условий. Например, для краевой задачи

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

при заданной  $f \in C[0, \pi]$  классической будет гладкость решения  $u \in C^2[0, \pi]$  с оператором классического дифференцирования  $L = \frac{d^2}{dx^2} : D_L \subset L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$ , имеющим область определения

$$D_L = \{\psi \in C^2[0, \pi] : \psi(0) = \psi(\pi) = 0\},$$

всюду плотную в  $L_2(0, \pi)$ . Краевая задача (1.2.1) имеет единственное решение

$$u(x) = \int_0^x (x-y)f(y)dy - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\pi-y)f(y)dy$$

для любой части  $f \in C[0, \pi]$ .

На примере этой простой краевой задачи поясним теперь в чем заключается понятие обобщенного (слабого) решения краевой задачи. Умножая уравнение (1.2.1) скалярно в  $L_2(0, l)$  на  $v \in D_L$  и интегрируя два раза по частям, получаем

$$(u, Lv) = (f, v) \quad \forall v \in D_L. \quad (1.2.2)$$

Равенство (1.2.2) является интегральным тождеством, т. е.

$$\int_0^\pi uv'' dx = \int_0^\pi fv dx \quad \forall v \in D_L. \quad (1.2.3)$$

При этом функцию  $u \in L_p(0, \pi)$ , удовлетворяющую тождеству (1.2.2) или (1.2.3), называют обобщенным (слабым) решением краевой задачи (1.2.1) класса  $L_p(0, \pi)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Подчеркнем, что от обобщенного (слабого) решения класса  $L_p(0, \pi)$  не требуется никакой дифференцируемости, тогда как решение задачи (1.2.1) в классическом смысле должно быть, по определению, дважды непрерывно дифференцируемой  $[0, \pi]$  функцией, т. е. в обобщенной (слабой) постановке (1.2.3) задачи (1.2.1) принципиально ослаблены требования к гладкости решения по сравнению с классической постановкой задачи (1.2.1).

Тождество (1.2.3) было получено из (1.2.1), поэтому всякое классическое решение (1.2.1) будет обобщенным (слабым) решением в смысле (1.2.3). Обратное, вообще говоря неверно. Однако, если обобщенное (слабое) решение (1.2.3) окажется дважды непрерывно дифференцируемым, точнее, если  $u \in C^2[0, \pi]$ , то это обобщенное (слабое) решение  $u(x)$  будет классическим решением краевой задачи (1.2.1). Действительно, из тождества (1.2.3) находим, интегрируя по частям,

$$(Lu, v) + u(\pi)\bar{v}'(\pi) - u(0)\bar{v}'(0) = (f, v) \quad \forall v \in D_L. \quad (1.2.4)$$

В частности,

$$(Lu, v) = (f, v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}^\infty(0, l) \subset D_L,$$

откуда и из леммы ДюБуа-Реймонда<sup>1</sup> следует, что

$$Lu(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Осталось выяснить, удовлетворяет ли такая  $u \in C^2[0, \pi]$  краевым условиям

$$u(0) = u(\pi) = 0.$$

Так как  $Lu = f$ , из (4) получаем

$$u(\pi)\bar{v}'(\pi) - u(0)\bar{v}'(0) = 0 \quad \forall v \in D_L. \quad (1.2.5)$$

Выбирая  $v \in D_L$  в (5) таким образом, что  $v'(\pi) = 1$ ,  $v'(0) = 0$ , находим  $u(\pi) = 0$ . А выбирая  $v \in D_L$  так, чтобы  $v'(\pi) = 0$ ,  $v'(0) = 1$ , находим  $u(0) = 0$ . Следовательно,  $u(0) = u(\pi) = 0$ . Это означает, что обобщенная постановка (1.2.3) краевой задачи (1.2.1) неявно содержит в себе краевые условия на обобщенное решение, если обобщенное решение является достаточно гладкой функцией. Нетрудно убедиться, что обобщенное (слабое) решение (1.2.3) будет классическим решением краевой задачи (1.2.1), если правая часть  $f \in C[0, \pi]$ .

Отметим, что слабые решения составляют регулярную часть широкого класса обобщенных решений, формально представленных функционалами на пространствах соответствующих основных функций, например,  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  и  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Однако, в отличие от собственно обобщенных функций, слабые решения уже сами по себе являются элементами пространств интегрируемых функций.

---

<sup>1</sup>см. §5.6 учебника: Владимирова В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.

## Глава 2

# Элементы анализа дифференциальных уравнений математической физики

Классическая альтернативная схема включена в список литературы, обязательной для чтения, и предлагается студентам для самостоятельного изучения.

### 2.1. Общая классификация ДУЧП

2.1.1. Эллиптические уравнения.

2.1.2. Гиперболические уравнения.

2.1.3. Параболические уравнения.

Технически решение краевой задачи

### 2.2. Канонический вид ДУЧП второго порядка

Раздел посвящен классификации и приведению к каноническому виду ДУЧП второго порядка с вещественными коэффициентами. Для переменных коэффициентов задача приведения уравнения к каноническому виду решается только в случае двух переменных, а в случае  $n \geq 3$  переменных рассматриваются только уравнения с постоянными коэффициентами.

- 2.2.1. Гиперболические уравнения с переменными коэффициентами в случае двух переменных.**
- 2.2.2. Эллиптические уравнения с переменными коэффициентами в случае двух переменных.**
- 2.2.3. Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае  $n \geq 3$  переменных.**

Квадратичная характеристическая форма уравнения выделением полных квадратов приводится к каноническому виду некоторым невырожденным преобразованием, с помощью которого строится замена переменных, приводящая к каноническому виду само уравнение.

Поскольку к каноническому виду приводится только главная часть уравнения, без какой бы то ни было потери общности рассмотрим невырожденное линейное уравнение второго порядка с вещественными постоянными коэффициентами

$$\sum_{k,m=1}^n a_{km} u_{x_k x_m}(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3. \quad (2.2.1)$$

По определению, каноническим видом уравнения (2.2.1) называют его невырожденный вид

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j u_{x_j x_j}(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2.2)$$

с коэффициентами  $\lambda_j$  принимающими только три допустимых значения:  $\lambda_j = 0$  и  $\lambda_j = \pm 1$ .

Для приведения уравнения (2.2.1) к каноническому виду (2.2.2) рассмотрим характеристическую форму уравнения (2.2.1), т. е. квадратичную форму

$$Q(\xi) = \sum_{k,m=1}^n a_{km} \xi_k \xi_m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.2.3)$$

## 2.3. Элементы спектральной теории дифференциальных операторов

В этом параграфе для обыкновенного дифференциального оператора на конечном отрезке определяются сопряженные и самосопряженные краевые условия. Приводятся примеры симметричных дифференциальных операторов с несамосопряженными краевыми условиями. Самосопряженность краевых условий гарантирует полноту системы собственных функций обыкновенного дифференциального оператора, т. е. означают существование ортогонального базиса из собственных функций такого оператора.

### 2.3.1. Обыкновенные дифференциальные операторы

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор порядка  $l \geq 1$  с постоянными комплексными коэффициентами

$$L = \sum_{k=0}^l a_k \frac{d^k}{dx^k}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad a_l \neq 0, \quad (2.3.1)$$

имеющий область определения

$$D_L(0, 1) = \{u \in C^l[0, 1] : B_j^0 u = 0, j = 1, \dots, m_0; B_j^1 u = 0, j = 1, \dots, m_1\}, \quad (2.3.2)$$

где  $\{B_j^0\}_{j=1}^{m_0}$  и  $\{B_j^1\}_{j=1}^{m_1}$  — какие-либо наборы граничных операторов с комплексными коэффициентами, которые задают однородные краевые условия порядка  $\leq m - 1$  в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ , соответственно. Для таких областей определения выполнено важное условие  $\mathring{C}^\infty(0, 1) \subset D_L$ , где через  $\mathring{C}^\infty(0, 1)$  обозначено пространство финитных<sup>2</sup> бесконечно дифференцируемых на  $(0, 1)$  функций.

Через  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  обозначим комплексное линейное пространство квадра-

---

<sup>2</sup>Определенную и непрерывную на  $(0, 1)$  функцию называют финитной на  $(0, 1)$ , если она равна нулю вне некоторого отрезка  $[a, b] \subset (0, 1)$ , т. е. финитная на  $(0, 1)$  будет тождественно равна нулю в некоторой окрестности концов интервала  $(0, 1)$ .

точно интегрируемых по Риману на  $(0, 1)$  функций<sup>3</sup> со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^1 u\bar{v} dx,$$

которое порождает норму

$$\|u\| = \left( \int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Дифференциальный оператор (2.3.1) рассматривается как действующий из  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  с целью построения базиса из собственных функций оператора при разделении переменных для уравнений в частных производных. Точнее, оператор  $L$  рассматривается как

$$L: D_L \subset \mathcal{L}_2(0, 1) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, 1), \quad (2.3.3)$$

т. е. вопросы непрерывности линейных операций на  $D_L$  решаются в метрике  $\mathcal{L}_2(0, 1)$ , что делает оператор  $L$  неограниченным. Например, ограниченную в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  последовательность  $\{u_n(x) = \sin(n\pi x)\}$  оператор

$$L = \frac{d^2}{dx^2}: D_L \subset \mathcal{L}_2(0, 1) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, 1) \quad (2.3.4)$$

с областью определения

$$D_L(0, 1) = \{u \in C^2[0, 1]: u(0) = u(1) = 0\}, \quad (2.3.5)$$

переводит в последовательность  $\{Lu_n(x) = -n^2\pi^2 \sin(n\pi x)\}$ , неограниченную в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$ .

**Определение 2.3.1.** Оператор (2.3.3) называют симметричным (или симметрическим), если

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad \forall u, v \in D_L. \quad (2.3.6)$$

---

<sup>3</sup>Точнее, элементами пространства  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  являются не сами функции, а классы эквивалентных на  $(0, 1)$  функций, т. е. совпадающих на  $(0, 1)$ , за исключением подмножества меры Жордана ноль. Нулевым элементом в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  служит класс функций, эквивалентных нулю на  $(0, 1)$ . Такое определение позволяет избежать нарушения одной из аксиом скалярного произведения и порождаемой им нормы.

Например, симметричным будет оператор (2.3.4) с областью определения (2.3.5).

**Определение 2.3.2.** Формально сопряженным к оператору  $L$  вида (2.3.1) называют оператор

$$\tilde{L} = \sum_{k=0}^l (-1)^k \bar{a}_k \frac{d^k}{dx^k},$$

возникающий при интегрировании по частям в тождестве

$$(Lu, v) = (u, \tilde{L}v) \quad \forall u, v \in \mathring{C}^\infty(0, 1).$$

В случае  $\tilde{L} = L$  оператор  $L$  называют формально самосопряженным.

Отождествляя краевые условия оператора  $L$  с его областью определения  $D_L$ , сформулируем определение сопряженных краевых условий, которые будем условно обозначать символом  $D_L^*$ .

**Определение 2.3.3.** Для оператора  $L$  порядка  $l$  с областью определения  $D_L$  сопряженными краевыми условиями  $D_L^*$  называют краевые условия на функцию  $v \in C^l[0, 1]$  такие, что

$$(Lu, v) = (u, \tilde{L}v) \quad \forall u \in D_L \tag{2.3.7}$$

В случае  $D_L^* = D_L$  краевые условия  $D_L$  называют самосопряженными.

Важную прикладную роль играет следующая фундаментальная теорема об ортогональном базисе из собственных функций дифференциального оператора  $L$  вида (2.3.1).

**Теорема** (без доказательства). Система собственных функций формально самосопряженного оператора (2.3.3) с самосопряженными краевыми условиями образует ортогональный базис в пространстве  $\mathcal{L}_2(0, 1)$ .

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим простейший пример оператора первого порядка

$$L = i \frac{d}{dx}; \quad D_L \subset \mathcal{L}_2(0, 1) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, 1)$$

с областями определения вида:



1.  $D_L = \{u \in C^1[0, 1]: u(0) = u(1)\};$
2.  $D_L = \{u \in C^1[0, 1]: u(0) = 0\};$
3.  $D_L = \{u \in C^1[0, 1]: u(1) = 0\};$
4.  $D_L = \{u \in C^1[0, 1]: u(0) = u(1) = 0\};$
5.  $D_L = \{u \in C^1[0, 1]\}.$

Оператор  $L$  формально самосопряженный, так как  $\tilde{L} = -\bar{i} \frac{d}{dx} = L$ . Осталось вычислить сопряженные краевые условия для функции  $v \in C^1[0, 1]$  в каждом из пяти случаев:

1.  $(Lu, v) = (u, Lv) \forall u \in D_L \Rightarrow \int_0^1 iu'\bar{v} dx = \int_0^1 iu'\bar{v} dx \forall u \in D_L \Rightarrow iu\bar{v}|_0^1 = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow u(1)(\bar{v}(1) - \bar{v}(0)) = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow \{v(0) = v(1)\}$   
— самосопр. кр. условия (1);
2.  $(Lu, v) = (u, Lv) \forall u \in D_L \Rightarrow \int_0^1 iu'\bar{v} dx = \int_0^1 iu'\bar{v} dx \forall u \in D_L \Rightarrow iu\bar{v}|_0^1 = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow u(1)\bar{v}(1) = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow \{v(1) = 0\}$  — несамосопр. кр. условия (3);
3.  $(Lu, v) = (u, Lv) \forall u \in D_L \Rightarrow \int_0^1 iu'\bar{v} dx = \int_0^1 iu'\bar{v} dx \forall u \in D_L \Rightarrow iu\bar{v}|_0^1 = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow u(0)\bar{v}(0) = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow \{v(0) = 0\}$  — несамосопр. кр. условия (2);
4.  $(Lu, v) = (u, Lv) \forall u \in D_L \Rightarrow \int_0^1 iu'\bar{v} dx = \int_0^1 iu'\bar{v} dx \forall u \in D_L \Rightarrow iu\bar{v}|_0^1 = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \emptyset$  — несамосопр. кр. условия (5);
5.  $(Lu, v) = (u, Lv) \forall u \in D_L \Rightarrow \int_0^1 iu'\bar{v} dx = \int_0^1 iu'\bar{v} dx \forall u \in D_L \Rightarrow iu\bar{v}|_0^1 = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow u(1)\bar{v}(1) - u(0)\bar{v}(0) = 0 \forall u \in D_L \Rightarrow \{v(0) = v(1) = 0\}$   
— несамосопр. кр. условия (4).

Самым простым примером симметричного оператора с несамосопряженными краевыми условиями служит оператор с краевыми условиями (4).

Более сложным примером симметричного оператора с несамосопряженными краевыми условиями служит, например, формально самосопряженный дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^2}{dx^2}: D_L \subset \mathcal{L}_2(0, 1) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, 1)$$

с областью определения

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1]: u(0) = u(1) = 0, u'(0) = u'(1)\}.$$

Сопряженными к  $D_L$  краевыми условиями будут условия

$$D_L^* = \{v \in C^2[0, 1]: v(0) = v(1)\}.$$

### 2.3.2. Оператор Лапласа

Если ограниченная область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  имеет кусочно-гладкую границу  $\partial\Omega$ , а функции  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , то справедлива первая формула Грина

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds. \quad (1)$$

где  $\nu$  — единичная внешняя нормаль. Действительно, используя формулу Остроградского–Гаусса, находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u \, dx &= \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] dx = \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds. \end{aligned}$$

Меняя местами функции  $u$  и  $v$ , получаем еще одну первую формулу Грина

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds. \quad (2)$$

Вычитая из (2) из (1), получаем вторую формулу Грина

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \, ds.$$

### 2.3.3. Оператор Лапласа с краевыми условиями Дирихле и Неймана

Рассмотрим оператор Лапласа  $L = \Delta$  с областью определения

$$D_L \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\} \subset C(\bar{\Omega}) \quad (4)$$

с краевым условием Дирихле. Оператор Лапласа будем рассматривать как

$$L = \Delta : D_L \subset C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}), \quad (5)$$

т.е. как действующий из  $C(\bar{\Omega})$  в  $C(\bar{\Omega})$ . При этом пространство  $C(\bar{\Omega})$  непрерывных в замыкании ограниченной области  $\Omega$  функций рассматривается как предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Отметим, что скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$  порождает на  $C(\bar{\Omega})$  норму

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (6)$$

с которой пространство  $C(\bar{\Omega})$  не будет полным. Пополнение пространства  $C(\bar{\Omega})$  с этой нормой приводит к интегралу Лебега и пространству Лебега  $L_2(\Omega)$ . Однако рассматриваемые здесь свойства собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа не требуют полноты пространства  $C(\bar{\Omega})$ .

**Определение 2.3.4.** Оператор  $L : D_L \subset C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  называют симметричным, если  $(Lu, v) = (u, Lv) \forall u, v \in D_L$ .

Из второй формулы Грина следует, что оператор Лапласа (5) является симметричным.

**Определение 2.3.5.** Нетривиальное решение  $u \in D_L$  уравнения  $Lu = \lambda u$  с некоторым числом  $\lambda \in \mathbb{C}$  называют собственной функцией оператора  $L$ , а соответствующее  $\lambda$  называют его собственным числом.

**Лемма 2.3.1.** *Собственное число оператора Лапласа (5) является вещественным.*

*Доказательство.* Действительно, пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$  — собственное число оператора (5). Это означает существование нетривиального решения  $u \in D_L$  уравнения  $Lu = \lambda u$ . А тогда

$$\lambda \|u\|^2 = \lambda(u, u) = (\lambda u, u) = (Lu, u) = (u, Lu) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, u) = \bar{\lambda} \|u\|^2,$$

откуда в силу условия  $\|u\| \neq 0$  следует равенство  $\bar{\lambda} = \lambda$ .  $\square$

**Лемма 2.3.2.** *Собственные функции оператора Лапласа (5), соответствующие разным собственным числам, ортогональны.*

*Доказательство.* Действительно, пусть  $u_1, u_2 \in D_L$  — собственные функции оператора Лапласа (5), соответствующие собственным числам  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, u_2) = (Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2) = (u_1, \lambda_2 u_2) = \lambda_2(u_1, u_2),$$

откуда сразу же находим  $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0 \implies (u_1, u_2) = 0$ .  $\square$

## 2.4. Разделение переменных методом Фурье

Разница между классической и современной схемами метода Фурье состоит в том, что классическая схема позволяет строить только классические решения и только при завышенных требованиях к исходным данным, тогда как современная схема позволяет строить обобщенные (слабые) решения при минимально возможных (а точнее, необходимых и достаточных) требованиях к данным задачи. В этом параграфе излагается вариант современной<sup>4</sup> схемы метода Фурье, наиболее удобный для применения на практике.

---

<sup>4</sup>Точнее, образца второй половины XX века.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \mathcal{P}_n u(x, t) = \mathcal{L}u(x, t) + f(x, t) & x \in (0, l), t \in (0, T), \\ u(x, t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}} & \forall t \in (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right|_{t=0} = u_m(x), \quad 0 \leq m \leq n - 1. \quad (2)$$

Краевые условия неявно содержатся в (1), так как в область определения дифференциального оператора  $\mathcal{L}$  всегда входят краевые условия. Символом  $\Pi_T$  обозначим прямоугольник  $\Pi_T = (0, l) \times (0, T)$ , где  $T$  — произвольное наперед заданное положительное число. Предполагается, что в задаче (6), (2)

$$f(x, t) \in L_2(\Pi_T), \quad u_m(x) \in L_2(0, l), \quad 0 \leq m \leq n - 1.$$

В классической постановке задачи (1), (2) предполагается такая гладкость решения  $u(x, t)$ , что

$$\mathcal{L}u(x, t) \in C(\bar{\Pi}_T), \quad \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) \in C(\bar{\Pi}_T).$$

Чтобы получить обобщенную постановку задачи (1), (2) умножим уравнение (1) скалярно в  $L_2(\Pi_T)$  на функцию  $v(x, t) \in V_n$ , где

$$V_n = \left\{ v(x, t) : \frac{\partial^n v}{\partial t^n} \in C(\bar{\Pi}_T), \mathcal{L}v \in C(\bar{\Pi}_T), v \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \forall t \in (0, T) \right\}.$$

В случае  $n = 1$ , интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_T} (a_1 u \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + a_0 u \bar{v}) dx dt &= a_1 \int_0^l u_0(x) \bar{v}(x, 0) dx + \\ &+ \int_{\Pi_T} u \mathcal{L} \bar{v} dx dt + \int_{\Pi_T} f \bar{v} dx dt \quad \forall v \in V_1 : v(x, T) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При  $n = 1$  обобщенным решением задачи (1), (2) будем называть функцию  $u(x, t) \in L_2(\Pi_T)$ , удовлетворяющую тождеству (3). В случае  $n = 2$ ,

интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_T} (a_2 u \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - a_1 u \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + a_0 u \bar{v}) dx dt &= \int_0^l [a_2 u_1(x) \bar{v}(x, 0) dx - \\ &- a_2 u_0(x) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(x, 0) + a_1 u_0(x) \bar{v}(x, 0)] dx + \int_{\Pi_T} u \mathcal{L} \bar{v} dx dt + \\ &+ \int_{\Pi_T} f \bar{v} dx dt \quad \forall v \in V_2 : v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $n = 2$  обобщенным решением задачи (1), (2) будем называть функцию  $u(x, t) \in L_2(\Pi_T)$ , удовлетворяющую тождеству (4). В тождествах (3), (4) неявно содержатся начальные и краевые условия на  $u(x, t)$ , если  $u(x, t)$  обладает достаточной гладкостью.

Относительно операторов  $\mathcal{P}_n$  и  $\mathcal{L}$  в задаче (1), (2) будем предполагать, что

(а) краевые условия  $\mathcal{L}\mathcal{L}$  самосопряженные;

(б) за исключением, возможно, конечного набора собственных чисел  $\lambda$  оператора  $\mathcal{L}$ , все корни характеристического уравнения  $\mathcal{P}_n(s) = \lambda$  удовлетворяют условию  $Re s \leq 0$ .

Из предположения (а) следует существование ортогонального базиса  $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  из собственных функций оператора  $\mathcal{L}$ . Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — система собственных чисел оператора  $\mathcal{L}$ . В силу (а) оператор  $\mathcal{L}$  симметричен, т. е. все его собственные числа  $\lambda_k$  вещественные. Из предположения (б) следует существование такого номера  $N \geq 1$ , что все корни характеристического уравнения  $\mathcal{P}_n(s) = \lambda_k$  удовлетворяют условию

$$Re s \leq 0 \quad \forall k \geq N. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала случай  $n = 1$ . Выберем  $v(x, t) = X_k(x)\varphi(t)$  в (3) для  $k \geq 1$ , где

$$\varphi(t) \in \Phi_n = \{\varphi(t) : \varphi \in C^n[0, T], \varphi^{(m)}(T) = 0, 0 \leq m \leq n - 1.\}$$

Для  $t \in (0, T)$  обозначим

$$T_k(t) = \frac{(u(x, t), X_k(x))}{\|X_k\|^2}, \quad k \geq 1, \quad (6)$$

т. е.  $T_k(t)$  - коэффициенты разложения  $u(x, t)$  в ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \quad (7)$$

Тогда из (3) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^T (-a_1 T_k \bar{\varphi}' + a_0 T_k \bar{\varphi}) dt &= a_1 \alpha_k \varphi(0) + \\ &+ \lambda_k \int_0^T T_k \bar{\varphi} dt + \int_0^T c_k \bar{\varphi} dt \quad \forall \varphi \in \Phi_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $c_k$  — коэффициенты разложения  $f(x, t)$ , т. е.

$$c_k(t) = \frac{(f(x, t), X_k(x))}{\|X_k\|^2}, \quad k \geq 1,$$

и  $\alpha_k$  — коэффициенты разложения  $u_0(x)$ , т. е.

$$\alpha_k = \frac{(u_0, X_k)}{\|X_k\|^2}, \quad k \geq 1, \quad (9)$$

Поскольку  $\dot{C}^\infty(0, T) \in \Phi_1$ , то из (8) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^T (-a_1 T_k \bar{\varphi}' + a_0 T_k \bar{\varphi}) dt &= \\ &= \int_0^T (\lambda_k T_k + c_k) \bar{\varphi} dt \quad \forall \varphi \in \Phi_1. \end{aligned} \quad (10)$$

По предположению, обобщенное решение  $u(x, t) \in L_2(\Pi_T)$ , поэтому  $T_k(t) \in L_2(\Pi_T)$ . Рассматривая  $T_k(t)$  как регулярную обобщенную функцию в комплексном  $\mathcal{D}'(0, T)$ , перепишем (10) в виде

$$-a_1 \langle T_k, \varphi' \rangle + a_0 \langle T_k, \varphi \rangle = \lambda_k \langle T_k, \varphi \rangle + \langle c_k, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \dot{C}^\infty(0, T) = \mathcal{D}(0, T),$$

отсюда находим

$$\langle a_1 T_k' + a_0 T_k, \varphi \rangle = \langle \lambda_k T_k + c_k, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T),$$

т. е. приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для обобщенной функции  $T_k \in \mathcal{D}'(0, T)$ , а именно

$$a_1 T_k' + a_0 T_k = c_k, \quad k \geq 1 \quad (11)$$

Общий вид решения уравнения (11) находится умножением на интегрирующий множитель

$$e^{(a_0 - \lambda_k) \frac{t}{a_1}} \in \dot{C}^\infty[0, T].$$

При этом  $T_k$  оказывается регулярной обобщенной функцией вида

$$T_k(t) = A_k e^{(\lambda_k - a_0) \frac{t}{a_1}} + \frac{1}{a_1} \int_0^t e^{\frac{\lambda_k - a_0}{a_1}(t-\tau)} c_k(\tau) d\tau, \quad (12)$$

где  $A_k$  — произвольная постоянная, т. е.  $T_k$  снова можно рассматривать как обычную функцию,  $k \geq 1$ .

Интегрируя теперь в (8) по частям и пользуясь (11), получим

$$T_k(0) \bar{\varphi}(0) = \alpha_k \bar{\varphi}(0) \quad \forall \varphi \in \Phi_1,$$

что эквивалентно начальному условию

$$T_k(0) = \alpha_k, \quad k \geq 1, \quad (13)$$

где  $\alpha_k$  имеют вид (9). Следует обратить внимание на то, что равенство (13) формально (но только формально) можно получить из (6) предельным переходом при  $t \rightarrow 0$ . Из (12), (13) находим

$$T_k(t) = \alpha_k e^{s_k t} + \frac{1}{a_1} \int_0^t e^{s_k(t-\tau)} c_k(\tau) d\tau \quad k \geq 1, \quad (14)$$

где  $s_k = \frac{(\lambda_k - a_0)}{a_1}$  — корень характеристического уравнения  $\mathcal{P}_1(s) = \lambda_k$ . По предположению,  $Re s_k \leq 0$ , начиная с некоторого номера  $k = N$ . Поэтому

$$|T_k(t)| \leq |\alpha_k| + \frac{1}{|a_1|} \int_0^T |c_k(\tau)| d\tau \leq |\alpha_k| + \frac{\sqrt{T}}{|a_1|} \|c_k\|_{L_2(0, T)} \quad \forall t \in (0, T), \quad k \geq 1,$$



откуда получаем

$$\|T_k\|_{L_2(0,T)}^2 \leq 2T[|\alpha_k|^2 + \frac{T}{|a_1|^2}\|c_k\|_{L_2(0,T)}^2], \quad k \geq 1 \quad (15)$$

Из (7) следует, что

$$\|u\|_{L_2(\Pi_T)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|_{L_2(0,T)}^2 \|X_k\|_{L_2(0,l)}^2,$$

так как  $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  — ортогональный базис в  $L_2(0,l)$ . А тогда из (15) находим

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(\Pi_T)}^2 &\leq 2T \sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k\|^2 \|X_k\|_{L_2(0,l)}^2 + \frac{2T^2}{|a_1|^2} \sum_{k=1}^{\infty} \|c_k\|_{L_2(0,T)}^2 \|X_k\|_{L_2(0,l)}^2 = \\ &= 2T \|u_0\|_{L_2(0,l)}^2 + \frac{2T}{|a_1|^2} \|f\|_{L_2(\Pi_T)}^2, \end{aligned} \quad (16)$$

так как ввиду ортогональности базиса  $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k\|^2 \|X_k\|_{L_2(0,l)}^2 &= \|u_0\|_{L_2(0,l)}^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \|c_k\|_{L_2(0,T)}^2 \|X_k\|_{L_2(0,l)}^2 &= \|f\|_{L_2(\Pi_T)}^2. \end{aligned}$$

В силу (16) построенная в виде ряда (7) с коэффициентами (14) функция  $u(x,t)$  будет элементом  $L_2(\Pi_T)$ . Поскольку  $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  — ортогональный базис в  $L_2(0,l)$  и  $\Phi_i$  — всюду плотное в  $L_2(0,T)$  подпространство, то  $u(x,t)$  удовлетворяет (3), т. е.  $u(x,t)$  является обобщенным решением задачи (1), (2). Тем самым доказано существование обобщенного решения задачи (1), (2) при  $f(x,t) \in L_2(\Pi_T)$  и  $u_0(x) \in L_2(0,l)$ . Единственность обобщенного решения задачи (1), (2) следует из единственности решений задач Коши (11), (13).

Таким образом, в случае  $n = 1$  обобщенное решение задачи (1), (2) раскладывается в ряд Фурье (7) по ортогональному базису  $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  состоящему из собственных функций оператора  $\mathcal{L}$ . Коэффициенты разложения

$T_k(t)$  определяются из задач Коши (11), (13). Следует обратить внимание на то, что в случае существования классического решения задачи (1), (2) обоснование метода Фурье по классической схеме частично упрощается, а частично усложняется. Действительно, пусть существует классическое решение задачи (1), (2). Разложим его в ряд Фурье (7), при этом коэффициенты разложения будут иметь вид (6). Умножая уравнение (1) скалярно на  $L_2(0, l)$  на собственную функцию  $X_k(x)$ , получим для всех  $t \in (0, T)$

$$(\mathcal{P}_1 u(x, t), X_k(x)) = (\mathcal{L}u(x, t), X_k(x)) + (f(x, t), X_k(x)).$$

Поскольку  $u(x, t)$  — классическое решение (т. е.  $u(x, t)$  обладает соответствующей гладкостью), то

$$(\mathcal{P}_1 u(x, t), X_k(x)) = \mathcal{P}_1(u(x, t), X_k(x)), \quad t \in (0, T),$$

так как скалярное произведение в  $L_2(0, l)$  — это интеграл по  $x$ ,

$$(u(x, t), X_k(x)) = \int_0^l u(x, t) \overline{X_k(x)} dx, \quad t \in (0, T).$$

Ввиду симметричности оператора  $\mathcal{L}$  имеем

$$(\mathcal{L}u(x, t), X_k(x)) = (u(x, t), \mathcal{L}X_k(x)), \quad t \in (0, T).$$

Но  $X_k(x)$  — собственная функция симметричного оператора  $\mathcal{L}$ , поэтому

$$(\mathcal{L}u(x, t), X_k(x)) = \lambda_k(u(x, t), X_k(x)), \quad t \in (0, T).$$

А тогда для всех  $t \in (0, T)$

$$\mathcal{P}_1(u(x, t), X_k(x)) = \lambda_k(u(x, t), X_k(x)) + (f(x, t), X_k(x)).$$

Разделив обе части последнего равенства на  $\|X_k\|^2$  и воспользовавшись (6), получим уравнение

$$\mathcal{P}_1 T_k = \lambda_k T_k + \frac{(f(x, t), X_k(x))}{\|X_k\|^2}, \quad t \in (0, T),$$

которое совпадает с уравнением (11). Поскольку  $u(x, t)$  предполагается классическим решением, то в (6) можно перейти к пределу при  $t \rightarrow 0$ . Тогда

$$T_k(0) = \frac{(u_0, X_k)}{\|X_k\|^2} = \alpha_k, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, для коэффициентов разложения классического решения получены те же задачи Коши (11), (13), что и для коэффициентов разложения обобщенного (слабого) решения. Этот факт, сам по себе, очевиден — ведь классическое решение всегда будет обобщенным, а для коэффициентов разложения обобщенных решений задач Коши (11), (13) были уже получены.

Изложенный только что подход к построению классического решения задачи (1), (2) представляет собой наиболее распространенный вариант классической схемы метода Фурье. При таком подходе упрощается процедура получения задач Коши (11), (13) для коэффициентов разложения решения, но зато усложняется оставшаяся часть обоснования метода Фурье. Остается доказать, что сумма ряда Фурье обладает соответствующей гладкостью. Именно в этом месте обоснования классической схемы и предъявляются обычно завышенные требования к исходным данным  $f(x, t)$  и  $u_0(x)$  — с целью обеспечить почленную дифференцируемость ряда Фурье.

При построении же обобщенного решения незначительно усложняется процедура получения задач Коши (11), (13) для коэффициентов разложения решения, но зато становится тривиальной основная часть обоснования метода Фурье — доказательство сходимости ряда Фурье в  $L_2(\Pi_T)$ . Так что, в целом, обоснование метода Фурье для обобщенных решений (т. е. современная схема метода Фурье) выглядит проще. Это не главное преимущество современной схемы. Наиболее ценным ее преимуществом является отсутствие лишних требований к исходным данным задачи.

Вернемся к обобщенному решению задачи (1), (2). При  $n = 2$  обобщенное решение  $u(x, t)$  раскладывается в ряд (7). Изложенные выше рассуждения приводят к уравнению для коэффициентов разложения (эти рассуждения

проведите самостоятельно):

$$a_2 T_k'' + a_1 T_k' + (a_0 - \lambda_k) T_k = c_k(t), \quad k \geq 1 \quad (17)$$

с начальными условиями

$$T_k(0) = \frac{(u_0, X_k)}{\|X_k\|^2}, \quad T_k'(0) = \frac{(u_1, X_k)}{\|X_k\|^2}, \quad k \geq 1 \quad (18)$$

Решая задачи Коши (17), (18), определяем коэффициенты ряда (7) для функции  $u(x, t)$ , которая оказывается единственным обобщенным решением задачи (1), (2) при  $n = 2$ .

## Глава 3

# Волновое уравнение

В этой главе детально исследуются все основные постановки задач математической физики для волнового уравнения в случае одной пространственной переменной.

### 3.1. Классическое решение задачи Коши

В первом параграфе выводится элементарная формула Даламбера, дающая представление классического решения задачи Коши для однородного волнового уравнения на вещественной оси. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения строится затем с помощью универсального принципа Дюамеля, который применим не только к задаче Коши для волнового уравнения в рассматриваемом случае одной пространственной переменной, но и к любой другой корректно поставленной линейной эволюционной начально-краевой задаче в пространственно-временном цилиндре с любым числом пространственных переменных.

#### 3.1.1. Формула Даламбера и принцип Дюамеля.

#### 3.1.2. Области зависимости, влияния, единственности.

Начнем с описания важных качественных свойств решения одномерного волнового уравнения, характеризующихся как области зависимости, влияния, единственности, и представленных одним нижеизложенным рисунком.

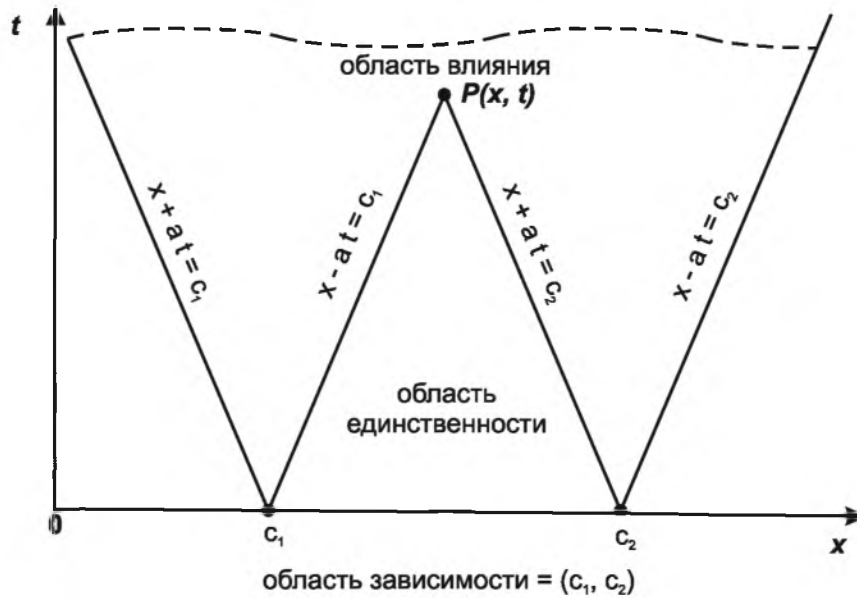


Рис. 1. Области зависимости, влияния, единственности.

**Определение 3.1.1.** Для однородного волнового уравнения в случае одной пространственной переменной *областью зависимости* классического решения  $u = u(x, t)$  в пространственно-временной точке  $P(x_0, t_0)$  с координатами  $x_0 > 0$  и  $t_0 > 0$  называют такой пространственный интервал  $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$  начальной оси  $t = 0$ , на дополнении  $\mathbb{R} \setminus [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  к замыканию которого любая гладкая вариация данных задачи никак не влияет на значение  $u(x_0, t_0)$ , принимаемое решением в точке  $P(x_0, t_0)$ .

Для однородного волнового уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  данные задачи — это данные Коши. Формула Даламбера показывает, что решение задачи Коши зависит только от значений начальных данных на основании характеристического треугольника с вершиной в точке  $P(x, t)$  — см. рисунок, для которого областью зависимости служит интервал  $(c_1, c_2)$  оси  $t = 0$ , отсекаемый от оси  $t = 0$  двумя характеристиками  $x - at = c_1$  и  $x + at = c_2$ , проведенными через точку  $P(x, t)$ .

Свойства решений волнового уравнения:

- *конечная область зависимости;*
- *распространение возмущений с конечной скоростью  $a > 0$ .*

**Определение 3.1.2.** *Областью влияния* начальных данных, заданных на некотором интервале  $(c_1, c_2)$  начальной оси  $t = 0$ , называют неограниченную подобласть пространственно-временной полуплоскости  $t > 0$ , значения решения в точках которой зависят от значений, принимаемых начальными данными в точках интервала  $(c_1, c_2)$ .

Формула Даламбера показывает, что область влияния начальных данных, заданных на интервале  $(c_1, c_2)$  начальной оси  $t = 0$ , ограничена самим интервалом  $(c_1, c_2)$  и расходящимися от его концов вверх характеристиками — см. рисунок, на котором граница неограниченной области влияния состоит из отрезка  $[c_1, c_2]$  и двух полубесконечных отрезков характеристик  $x + at = c_1$  и  $x - at = c_2$ .

**Определение 3.1.3.** Для однородного волнового уравнения, выполняющегося на пространственно-временной полуплоскости  $t > 0$ , с данными Коши, заданными на каком-либо интервале  $(c_1, c_2)$  начальной оси  $t = 0$ , *областью единственности* называют наибольшую подобласть полуплоскости  $t > 0$ , во всех точках которой классическое решение задачи Коши однозначно определено своими данными с интервала  $(c_1, c_2)$ .

Формула Даламбера показывает, что решение задачи Коши для однородного или неоднородного волнового уравнения с начальными данными, заданными на интервале  $(c_1, c_2)$  оси  $t = 0$ , будет однозначно определено в пространственно-временной области, ограниченной характеристическим треугольником с основанием  $(c_1, c_2)$  и вершиной  $P(x, t)$  — см. рисунок, где областью единственности служит внутренность равнобедренного треугольника, основание  $(c_1, c_2)$  которого соединяется с его вершиной  $P(x, t)$  двумя отрезками характеристик:  $x - at = c_1$  и  $x + at = c_2$ . Нетрудно убедиться, что принадлежность указанного характеристического треугольника как открытого подмножества к какой-либо заданной пространственно-временной области, во всех точках которой выполняется однородное или даже неоднородное волновое уравнение с какой-либо заданной правой частью, будет

необходимым и достаточным условием единственности классического решения задачи Коши для заданной пространственно-временной области.

### 3.2. Слабое решение задачи Коши

Этот параграф посвящен слабым решениям задачи Коши для волнового уравнения. Простейшим и наиважнейшим примером слабого решения волнового уравнения служит разрывное кусочно-гладкое решение. Выводится формула Даламбера для слабых решений, свидетельствующая о распространении разрывов слабых решений вдоль характеристик.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения с одной пространственной переменной

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Классическим решением задачи Коши (4.1.1) называют функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ , удовлетворяющую уравнению и начальным условиям (1).

В слабой постановке задачи Коши участвуют начальные данные, заданные на границе полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = \times [0, \infty)$ , в связи с чем возникает необходимость в лемме ДюБуа-Реймонда для прямой  $t = 0$ , и по этой причине носители пробных функций в интегральном тождестве должны пересекаться с прямой  $t = 0$ . С другой стороны, одним из наиболее эффективных инструментов при построении слабых решений задачи Коши (4.1.1) стала двойственная задача для пробных функций на полуплоскости  $t < T$  с нулевыми данными Коши при  $t = T > 0$ .

Для полосы  $\Pi_T \stackrel{\text{def}}{=} \times [0, T]$  слабым решением задачи Коши (4.1.1) класса  $L_1$  будем называть функцию  $u \in L_1(\Pi_T)$ <sup>5</sup>, удовлетворяющую интегрально-

---

<sup>5</sup>Т. е., функцию, (несобственно) абсолютно интегрируемую по Риману на  $\Pi_T$ .



му тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, t)(v_{tt} - a^2 v_{xx}) dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)v(x, 0) dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)v_t(x, 0) dx$$

$$\forall v \in \dot{C}^\infty \mathbb{R}^2: v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0.$$
(3.2.2)

Проверим **корректность определения слабого решения** рассматриваемой задачи Коши (4.1.1).

1. Умножим уравнение (4.1.1) на пробную функцию  $v$  и проинтегрируем по частям, используя условия Коши  $v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0$ . Получим интегральное тождество (4.1.2);
2. Пусть слабое решение имеет гладкость классического. Подставляя в интегральное тождество пробные функции с носителем, лежащем в полосе  $\Pi_T$ , получим после интегрирования по частям

$$\int_{\Pi_T} (u_{tt} - a^2 u_{xx})v(x, t) dx dt = 0 \quad \forall v \in \dot{C}^\infty \Pi_T,$$

откуда и из леммы ДюБуа-Реймонда ввиду предполагаемой классической гладкости решения следует поточечное выполнение уравнения (4.1.1) в полосе  $\Pi_T$ . Остается извлечь из тождества (4.1.2) начальные условия. Для этого снова интегрируем в тождестве (4.1.2) по частям, но на этот раз с пробными функциями

$$v \in \dot{C}^\infty \mathbb{R}^2: v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0.$$

Пользуясь тем, что выполнение уравнения уже доказано, получим оставшуюся часть тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_t(x, 0) - u_1(x))v(x, 0) dx - \int_{-\infty}^{\infty} (u_0(x) - u(x, 0))v_t(x, 0) dx = 0$$

$$\forall v \in \dot{C}^\infty \mathbb{R}^2: v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0$$
(3.2.3)

Замечая, что значения  $v(x, 0)$  и  $v_t(x, 0)$  могут быть любыми элементами пространства  $\mathring{C}^\infty\mathbb{R}$  и пользуясь леммой ДюБуа-Реймонда, заключаем, что

$$u(x, 0) - u_0(x) = u_t(x, 0) - u_1(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

т. е. слабое решение, имеющее классическую гладкость, удовлетворяет заданным начальным условиям, извлеченным таким образом из интегрального тождества (4.1.2).

Осталось найти еще и само слабое решение. Если бы оно имело классическую гладкость, то выписывалось бы по формуле Даламбера. А что делать когда начальные данные не дифференцируемы, имеют разрывы, или не более чем локально интегрируемы? Попробовать использовать общий вид решения с прошлой лекции? А как проверить выполнение начальных условий для локально интегрируемой функции? Ответы на все эти вопросы также содержатся в интегральном тождестве (4.1.2), которое определяет слабое решение и его свойства.

Оказывается явное представление искомого локально интегрируемого слабого решения задачи Коши для волнового уравнения легко извлекается из того же интегрального тождества (4.1.2). И оказывается, что это уже знакомая нам формула Даламбера. Точнее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.2.1.** *При любых заданных  $u_0$  и  $u_1$  из  $L_1(\Pi_T)$  существует единственное слабое решение  $u \in L_1(\Pi_T)$  задачи Коши (4.1.1) в смысле интегрального тождества (4.1.2). Для этого решения справедлива формула Даламбера.*

*Доказательство.* Считая функцию  $f$  произвольным заданным элементом  $\mathring{C}^\infty\Pi_T$ , представим её в виде  $f(x, t) = v_{tt} - a^2v_{xx}$ , определив функцию

$v: \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}$  как классическое решение вспомогательной задачи Коши

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T, \\ v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

С помощью принципа Дюамеля (см. Лекцию 06) и замены  $t$  на  $T - t$  классическое решение вспомогательной задачи Коши (3.2.4) можно представить в виде

$$v(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{T-t} d\tau \int_{x-a(T-t-\tau)}^{x+a(T-t-\tau)} f(y, T - \tau) dy. \quad (3.2.5)$$

Важно, что при любых  $f \in \mathring{C}^\infty \Pi_T$  решения (3.2.5) задачи (3.2.4) сохраняют свойства

$$v \in \mathring{C}^\infty \mathbb{R}^2: v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0,$$

а значит, могут использоваться как пробные функции в интегральном тождестве (4.1.2).

Чтобы подставить  $v$  вида (3.2.5) в тождество (4.1.2), вычислим  $v(x, 0)$  и  $v_t(x, 0)$ . Как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \frac{1}{2a} \int_0^T d\tau \int_{x-a(T-\tau)}^{x+a(T-\tau)} f(y, T - \tau) dy, \\ v_t(x, 0) &= -\frac{1}{2} \int_0^T [f(x + a(T - \tau), T - \tau) + f(x - a(T - \tau), T - \tau)] d\tau, \end{aligned}$$

а сделав замену  $T - \tau = t$ , получаем

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \frac{1}{2a} \int_0^T dt \int_{x-at}^{x+at} f(y, t) dy, \\ v_t(x, 0) &= -\frac{1}{2} \int_0^T [f(x + at, t) + f(x - at, t)] dt, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Подставляя (4.1.4) и  $v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t)$  в (4.1.2), находим

$$\int_{\Pi_T} u f dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x) v(x, 0) dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) v_t(x, 0) dx \quad \forall f \in \mathring{C}^\infty \Pi_T \quad (3.2.7)$$

В силу (4.1.4) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)v(x,0) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x) dx \int_0^T dt \int_{x-at}^{x+at} f(y,t) dy = \\
&= \frac{1}{2a} \int_0^T dt \int_{-at}^{+at} dy \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)f(x+y,t) dx = \\
&= \frac{1}{2a} \int_0^T dt \int_{-at}^{+at} dy \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x-y)f(x,t) dx = \\
&= \frac{1}{2a} \int_{\Pi_T} f(x,t) dxdt \int_{-at}^{+at} u_1(x-y) dy = \\
&= \frac{1}{2a} \int_{\Pi_T} f(x,t) dxdt \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)v(x,0) dx = \frac{1}{2a} \int_{\Pi_T} f(x,t) dxdt \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (3.2.8)$$

В силу (4.1.4) имеем также

$$\begin{aligned}
- \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)v_t(x,0) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx \int_0^T [f(x+at,t) + f(x-at,t)] dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)[f(x+at,t) + f(x-at,t)] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)f(x+at,t) dx + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)f(x-at,t) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-at)f(x,t) dx + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x+at)f(x,t) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Pi_T} [u_0(x-at) + u_0(x+at)] f(x,t) dxdt
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$- \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)v_t(x,0) dx = \frac{1}{2} \int_{\Pi_T} [u_0(x-at) + u_0(x+at)] f(x,t) dxdt. \quad (3.2.9)$$

Подставляя (4.1.6) и (4.1.7) в (4.1.5), получаем

$$\int_{\Pi_T} \left[ u(x,t) - \frac{1}{2}(u_0(x-at) + u_0(x+at)) - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi \right] f(x,t) dxdt = 0 \quad \forall f \in \dot{C}^\infty \Pi_T,$$

откуда и из леммы ДюБуа-Реймонда следует формула Даламбера для слабых решений задачи Коши. Важно, что одновременно доказано, что формула Даламбера справедлива для всякого слабого решения. Отсюда, в частности, следует, что одновременно доказана еще и единственность слабого решения  $u \in L_1(\Pi_T)$ , означающая единственность с точностью до нулевого элемента пространства  $L_1(\Pi_T)$ <sup>6</sup>.

Таким образом, с точностью до нулевого элемента пространства  $L_1(\Pi_T)$  слабое решение  $u \in L_1(\Pi_T)$  задачи Коши (4.1.1) в смысле интегрального тождества (4.1.2) имеет на  $\Pi_T$  вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - at) + u_0(x + at)) - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (3.2.10)$$

Теорема доказана. □

**2. Разрывные решения. Распространение особенностей слабых решений вдоль характеристик.** (На основе анализа формулы Даламбера)

*Упражнение.* Пусть  $u_1 = 0$ . Начиная с простейших, перечислить достаточные условия на  $u_0 \in L_1(\mathbb{R})$ , при которых слабое решение  $u \in L_1(\Pi_T)$  имеет вид (4.1.8) с точностью до множества Жордановой меры ноль.

*Пример.* Пусть  $u \in L_1(\Pi_T)$  — слабое решение задачи Коши с начальными данными

$$u_0(x) = \text{sign}(x^3 - 3x^2 + 2x); \quad u_1 = 0.$$

Описать распространение разрывов слабого решения при  $t > 0$ .

### 3.3. Начально-краевые задачи на полуоси

Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на полуоси. Представление решения. Условия согласования начальных и граничных данных. Непрерывная зависимость решения от данных задачи.

---

<sup>6</sup>Подробности см. на с. 401 учебника: Бесов О.В. Лекции по мат. анализу – М.: Физматлит, 2014.

Рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения на полуоси с краевым условием Дирихле

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0; \\ u|_{x=0} = \varphi(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Классическим решением начально-краевой задачи (3.3.1) называют решение, имеющее классическую гладкость  $u \in C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$ , которая позволяет проверить выполнение уравнения на открытом множестве  $(0, \infty) \times (0, \infty)$ , а краевого и начальных условий — на замкнутых множествах  $[0, \infty)$ . Обеспечить гладкость классического решения  $u \in C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$  позволяют начальные данные  $u_0 \in C^2[0, \infty)$ ,  $u_1 \in C^1[0, \infty)$  и граничные данные  $\varphi \in C^2[0, \infty)$ , удовлетворяющие соответствующим условиям согласования.

Переходя к характеристическим переменным

$$\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at, \end{cases}$$

нетрудно убедиться, что для любой односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  всякое решение  $u \in C^2(\Omega)$  однородного волнового уравнения (3.3.1) может быть записано в виде

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at). \quad (3.3.2)$$

Полагая  $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} (0, \infty) \times (0, \infty)$ , из начальных условий (3.3.1) получаем

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x), \\ af'(x) - ag'(x) = u_1(x), \end{cases} \quad \forall x \geq 0$$

откуда находим вид функций  $f$  и  $g$  при неотрицательных значениях аргу-

мента

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(\xi) d\xi + C, \\ g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(\xi) d\xi - C, \end{cases} \quad \forall x \geq 0 \quad (3.3.3)$$

Таким образом, в представлении искомого решения (3.3.2) вид функции  $f$  уже известен, а для функции  $g$  осталось найти ее вид при отрицательных значениях аргумента. С этой целью воспользуемся краевым условием (3.3.1), из которого следует

$$f(at) + g(-at) = \varphi(t) \quad \forall t \geq 0,$$

откуда и получим определение функции  $g$  при отрицательных значениях аргумента

$$g(s) = \varphi\left(-\frac{s}{a}\right) - f(-s) \quad \forall s < 0,$$

где вид функции  $f$  для положительных значений аргумента уже известен, т. е., имеем

$$g(s) = \varphi\left(-\frac{s}{a}\right) - \frac{1}{2}u_0(-s) - \frac{1}{2a} \int_0^{-s} u_1(\xi) d\xi - C \quad \forall s < 0. \quad (3.3.4)$$

Осталось проверить выполнение условий согласования заданных начальных и граничных условий (3.3.1). Невыполнение условий согласования в точке пересечения полуоси начальных данных  $\{x \geq 0\}$  с полуосью граничных данных  $\{t \geq 0\}$  создает разрывы решения и его производных в точке пересечения граничных полуосей, через которую проходит характеристика  $x - at = 0$ , переносящая эти разрывы внутрь пространственно-временного квадранта  $(0, \infty) \times (0, \infty)$ . Такой пространственно-временной эффект переноса разрывов<sup>7</sup> называют *распространением разрывов вдоль характеристик*.

<sup>7</sup>Для классических решений такой эффект возникает только в результате несогласованности начальных и граничных данных, тогда как для слабых решений их разрывы вдоль характеристик могут оказаться следствием разрывов еще и у самих начальных и граничных данных, помимо их возможной несогласованности.

Сама по себе гладкость начальных и граничных данных гарантирует лишь кусочную гладкость функции  $g$ , которая может иметь разрывы в точке смены знака аргумента, т. е. в нуле. Отсутствие разрывов решения вдоль характеристик эквивалентно выполнению условий:

$$\begin{cases} g(-0) = g(+0), \\ g'(-0) = g'( +0), \\ g''(-0) = g''(+0). \end{cases} \quad (3.3.5)$$

которые останутся необходимыми и достаточными условиями  $C^2$ -гладкости искомого решения внутри квадранта  $(0, \infty) \times (0, \infty)$  даже при сколь угодно гладких данных  $u_0, u_1, \varphi$ .

Вычисляя левые части (3.3.5) с помощью (3.3.4), а правые — с помощью (3.3.3), находим

$$\begin{cases} \varphi(0) - \frac{1}{2}u_0(0) - C = \frac{1}{2}u_0(0) - C, \\ -\frac{1}{a}\varphi'(0) + \frac{1}{2}u_0'(0) + \frac{1}{2a}u_1(0) = \frac{1}{2}u_0'(0) - \frac{1}{2a}u_1(0), \\ \frac{1}{a^2}\varphi''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0) = \frac{1}{2}u_0''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0), \end{cases}$$

откуда получаем условия согласования начальных и граничных данных

$$\begin{cases} \varphi(0) = u_0(0), \\ \varphi'(0) = u_1(0), \\ \varphi''(0) = a^2u_0''(0), \end{cases} \quad (3.3.6)$$

необходимые и достаточные для существования классического решения начально-краевой задачи (3.3.4).

Подставляя (3.3.3) и (3.3.4) в (3.3.2) получаем искомого классического ре-



шение

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x+at) + \begin{cases} \frac{1}{2}u_0(x-at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, & x \geq at, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}u_0(at-x) + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} u_1(\xi) d\xi, & x < at, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

начально-краевой задачи (3.3.1). Единственность классического решения (3.3.7) задачи (3.3.1) вытекает из построения решения как общего решения волнового уравнения (3.3.7), удовлетворяющего краевому и начальным условиям (3.3.7).

Другой, более наглядный способ доказать единственность решения линейной задачи — это установить, что однородная<sup>8</sup> задача имеет только тривиальное решение<sup>9</sup>. Для этого достаточно продолжить классическое решение однородной задачи (3.3.1) нечетным образом с квадранта  $[0, \infty) \times [0, \infty)$  на полуплоскость  $R \times [0, \infty)$  и заметить, что такое продолжение будет классическим решением однородной задачи Коши, которое тривиально ввиду ранее уже установленной единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.3.1.** *Для любых  $u_0 \in C^2[0, \infty)$ ,  $u_1 \in C^1[0, \infty)$  и  $\varphi \in C^2[0, \infty)$ , удовлетворяющих необходимому и достаточным условиям согласования (3.3.6), существует единственное классическое решение  $u \in C^2[0, \infty)$  начально-краевой задачи (3.3.1). Это решение имеет вид (3.3.7).*

<sup>8</sup>Однородной называют задачу с нулевыми данными.

<sup>9</sup>Тривиальным называют нулевое решение.

**3.3.1. Непрерывная зависимость решения от данных задачи.**

Из явного представления классического решения (3.3.7) начально-краевой задачи (3.3.1) следует очевидная оценка

$$\|u\|_{C([0,\ell]\times[0,T])} \leq \|\varphi\|_{C[0,T]} + \|u_0\|_{C[0,\ell+aT]} + T\|u_1\|_{C[0,\ell+aT]}, \quad (3.3.8)$$

для любых положительных  $\ell$  и  $T$ , где  $C$  — пространства равномерно непрерывных функций на соответствующих компактах с соответствующими макс-нормами. Оценка (3.3.8) означает непрерывную зависимость решения от данных задачи, т. е. равномерную сходимость последовательности решений  $\{u^n\}$  на любом наперед заданном компакте  $[0, \ell] \times [0, T]$  при условии равномерной сходимости последовательностей соответствующих граничных и начальных данных  $\{\varphi^n\}$  и  $\{u_0^n\}, \{u_1^n\}$  на отрезках  $[0, T]$  и  $[0, \ell + aT]$ .

**3.4. Начально-краевые задачи на конечном отрезке**

## Глава 4

# Уравнение теплопроводности

### 4.1. Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Классическим решением задачи Коши (4.1.1) называют функцию

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)),$$

удовлетворяющую уравнению и начальному условию (4.1.1), где через  $C_{x,t}^{2,1}$  обозначено анизотропное пространство непрерывно дифференцируемых функций<sup>10</sup> — дважды по  $x$  и один раз по  $t$ . Искомое решение построим методом преобразования Фурье, т. е., предполагая всё, что может потребоваться, найдем явное представление искомого решения, после чего убедимся в том, найденное решение является искомым классическим решением задачи Коши (4.1.1).

Применим к задаче (4.1.1) преобразование Фурье

$$\hat{u}(\xi, t) \stackrel{\text{def}}{=} F[u(x, t)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-i(x, \xi)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq 0,$$

---

<sup>10</sup>Анизотропная гладкость — это разная гладкость по разным направлениям.

где круглые скобки  $(\cdot, \cdot)$  означают скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Пользуясь свойством преобразования Фурье производной

$$F[\partial_x^\alpha u] = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi, t)$$

порядка  $\alpha$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — мультииндекс, т. е. вектор с целыми неотрицательными компонентами, получим простейшую задачу Коши для ОДУ

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -|\xi|^2 \hat{u}, & \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, n \geq 1. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

для преобразования Фурье  $\hat{u} = \hat{u}(\xi, t)$  искомого решения задачи (4.1.1), где  $\hat{u}_0 \stackrel{\text{def}}{=} F[u_0]$  — преобразование Фурье начальных данных  $u_0 = u_0(x)$ .

Нетрудно убедиться, что единственное решение простейшей задачи Коши (4.1.2) для ОДУ имеет вид

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, n \geq 1. \quad (4.1.3)$$

А тогда искомое решение задачи Коши (4.1.1) представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\xi) e^{i(x, \xi) - t|\xi|^2} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (4.1.4)$$

Осталось упростить найденный явный вид искомого решения задачи Коши (4.1.1).

Поскольку преобразование Фурье начальных данных  $\hat{u}_0$  представлено интегралом

$$\hat{u}_0(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-i(y, \xi)} dy, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то в силу (4.1.4) имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi) - t|\xi|^2} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-i(y, \xi)} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

откуда, меняя порядок интегрирования и вводя обозначение

$$\mathcal{P}_n(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi) - t|\xi|^2} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, n \geq 1, \quad (4.1.5)$$

находим интегральное представление искомого решения задачи Коши (4.1.1) в виде свертки

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}_n(x - y, t) u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad n \geq 1. \quad (4.1.6)$$

Такое интегральное представление называют формулой Пуассона, а функцию  $\mathcal{P}_n$  вида (4.1.5) — ядром Пуассона.

Осталось еще упростить представление ядра Пуассона (4.1.5). Для этого заметим, что

$$\mathcal{P}_n(x, t) = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}_1(x_j, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad n \geq 1, \quad (4.1.7)$$

и рассмотрим ядро Пуассона, соответствующее одной пространственной переменной

$$\mathcal{P}_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi - t\xi^2} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.1.8)$$

Для вычисления интеграла (4.1.8) используем ТФКП. А именно, выделяя в показателе экспоненты полный квадрат, находим

$$\mathcal{P}_1(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t + i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\xi - \frac{ix}{2t})^2 - \frac{x^2}{4t}} d\xi = e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\xi - \frac{ix}{2t})^2} d\xi.$$

Рассмотрим интеграл  $\int_{\Gamma} e^{-t\eta^2} d\eta$  на комплексной плоскости  $\eta = \xi + i\sigma$ , где контур  $\Gamma$  состоит из отрезка действительной оси  $-N \leq \xi \leq N$ , отрезка прямой  $\text{Im } \eta = \sigma = -\frac{x}{2t}$  и отрезков прямых  $\text{Re } \eta = \xi = N$  и  $\text{Re } \eta = \xi = -N$ . Воспользуемся теоремой Коши, согласно которой  $\int_{\Gamma} e^{-t\eta^2} d\eta = 0$ . Тогда получим

$$\int_{-N}^N e^{-t(\xi - \frac{ix}{2t})^2} d\xi = \int_{-N}^N e^{-t\xi^2} d\xi - \int_{-\frac{x}{2t}}^0 e^{-t(N+i\sigma)^2} d\sigma + \int_{-\frac{x}{2t}}^0 e^{-t(-N+i\sigma)^2} d\sigma.$$

Так как два последние интеграла стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , то в результате замены

$$\sqrt{t}\xi = s, \quad d\xi = \frac{ds}{\sqrt{t}}$$

получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\xi - \frac{ix}{2t})^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}.$$

Таким образом установлено, что в случае одной пространственной переменной ядро Пуассона имеет вид

$$\mathcal{P}_1(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.1.9)$$

откуда и из (4.1.5) находим вид ядра Пуассона для общего случая  $n \geq 1$  пространственных переменных

$$\mathcal{P}_n(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (4.1.10)$$

В случае  $n = 1$  непосредственной подстановкой (4.1.8) или (4.1.9) легко проверить, что ядро Пуассона  $\mathcal{P}_1$  удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности при  $t > 0$ . А благодаря очевидному разделению пространственных переменных в представлении (4.1.7), нетрудно убедиться, что ядро Пуассона  $\mathcal{P}_n$  удовлетворяет уравнению теплопроводности при  $t > 0$  и в случае любого числа переменных  $n \geq 2$ .

А тогда в силу (4.1.6) искомое решение задачи Коши (4.1.1) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad (4.1.11)$$

что завершает вывод классической формулы Пуассона для уравнения теплопроводности.

На примере задачи Коши для уравнения теплопроводности проявляются замечательная особенность метода преобразования Фурье, позволяющая

строить явные решения в функциональных классах, существенно более широких чем те, в которых применение преобразования Фурье строго обосновано, например, в пространстве Шварца  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  обобщенных функций медленного роста. В частности, полученная с помощью преобразования Фурье формула Пуассона (4.1.11) дает явное интегральное представление решения задачи Коши (4.1.1) для быстро растущих на бесконечности начальных данных  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ , удовлетворяющих условию:

$$\exists M > 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ |u_0(x)| e^{-M|x|^2} \right\} < \infty. \quad (4.1.12)$$

**Теорема 4.1.1.** Пусть  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет условию (4.1.12), и пусть  $4MT < 1$ ,  $n \geq 1$ . Тогда функция  $u = u(x, t)$  вида (4.1.11) имеет гладкость

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$$

и является классическим решением задачи Коши (4.1.1), т. е. удовлетворяет уравнению на любом компакте в  $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ , а начальному условию — на любом компакте в  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Обозначим  $\varphi(x) = u_0(x)e^{-M|x|^2}$  и заметим, что в силу условия (4.1.12) функция  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$  ограничена на  $\mathbb{R}^n$ . При этом (4.1.11) примет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{M|y|^2 - \frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy \quad (4.1.13)$$

Чтобы оценить показатель экспоненты, заметим, что

$$M|y|^2 - \frac{|x-y|^2}{4t} \leq M|y|^2 - \frac{|x-y|^2}{4T} \leq -\frac{1}{4T} \left( (1-4MT)|y|^2 - |x|^2 + 2(x, y) \right), \quad (4.1.14)$$

где круглые скобки  $(\cdot, \cdot)$  означают скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . А в силу неравенства Коши  $|(x, y)| \leq |x||y| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  и очевидного неравенства

$2ab \leq a^2 + b^2 \forall a, b \geq 0$  имеем

$$\begin{aligned} |x|^2 - 2(x, y) &\leq |x|^2 + 2|x||y| = |x|^2 + 2 \frac{|x|\sqrt{2}}{\sqrt{1-4MT}} \cdot \frac{|y|\sqrt{1-4MT}}{\sqrt{2}} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{2}{1-4MT}\right) |x|^2 + \frac{1-4MT}{2} |y|^2, \end{aligned}$$

откуда и из (4.1.14) находим

$$M|y|^2 - \frac{|x-y|^2}{4t} \leq -\frac{1-4MT}{8T} |y|^2 + \left(1 + \frac{2}{1-4MT}\right) |x|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \forall t \in (0, T]. \quad (4.1.15)$$

Ввиду ограниченности на  $\mathbb{R}^n$  функции  $\varphi$ , неравенство (4.1.15) гарантирует гладкость

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T])$$

для функции  $u = u(x, t)$  вида (4.1.11), которая будет удовлетворять на любом компакте в  $\mathbb{R}^n \times (0, T]$  уравнению теплопроводности (4.1.1), так как при  $t > 0$  уравнению (4.1.1) удовлетворяет ядро Пуассона  $\mathcal{P}_n(x-y, t)$ . Для проверки начального условия (4.1.1) заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}_n(x, t) dx = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = 1, \quad t > 0, n \geq 1.$$

Поэтому для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $t > 0$  имеем

$$u(x, t) - u_0(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} [u_0(x-y) - u_0(x)] e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy,$$

и делая замену  $y = z\sqrt{t}$ , находим

$$u(x, t) - u_0(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} [u_0(x - z\sqrt{t}) - u_0(x)] e^{-|z|^2} dz, \quad (4.1.16)$$

где допустимый рост  $u_0$  на бесконечности ограничивается условием (4.1.12).

А так как  $t \rightarrow +0$ , то значения  $t$  можно ограничить сколь угодно малым интервалом  $(0, \sigma)$ . Не ограничивая общности, будем считать, что  $2M\sigma = 1$ .

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — произвольный компакт в  $\mathbb{R}^n$ . Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} [u(x, t) - u_0(x)] = 0 \quad (4.1.17)$$



равномерно по  $x \in K$ . Повторяя рассуждения, использованные выше при выводе оценок (4.1.14)–(4.1.15), заметим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon = R_\varepsilon(M, K) > 0 : \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{|z| > R_\varepsilon} (|u_0(x - z\sqrt{t})| + |u_0(x)|) e^{-|z|^2} dz < \varepsilon/2 \quad (4.1.18)$$

для всех  $x \in K$  и  $t \in (0, \sigma)$ . Заметим теперь, что в силу непрерывности  $u_0$  найдется такое  $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(K) \in (0, \sigma)$ , что

$$\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left| \int_{|z| < R_\varepsilon} [u_0(x - z\sqrt{t}) - u_0(x)] e^{-|z|^2} dz \right| < \varepsilon/2 \quad \forall t \in (0, \delta_\varepsilon). \quad (4.1.19)$$

И наконец, подводя итог, заключаем, что в силу (4.1.16) из (4.1.18) и (4.1.19) следует (4.1.17). В свою очередь, выполнение (4.1.17) равномерно по  $x \in K$  на любом компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$  означает, что построенное решение  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Теорема доказана.  $\square$

При выполнении условия

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\{ |u_0(x)| e^{-m|x|^2} \right\} = 0 \quad \forall m > 0 \quad (4.1.20)$$

из доказанной теоремы вытекает очевидное

**Следствие.** Пусть  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет условию (4.1.20),  $n \geq 1$ . Тогда функция вида (4.1.11) имеет гладкость

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$$

и является классическим решением задачи Коши (4.1.1), т. е. удовлетворяет уравнению на любом компакте в  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ , а начальному условию — на любом компакте в  $\mathbb{R}^n$ .

Точность условий теоремы 4.1.1 и следствия подтверждается следующим примером классического решения, разрушающегося за конечное время.

*Пример.* Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{|x|^2}, & x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1. \end{cases} \quad (4.1.21)$$

Подставляя начальные данные  $u_0(x) = e^{|x|^2}$  в формулу Пуассона (4.1.11), вычисляя интеграл стандартным выделением полного квадрата в показателе экспоненты, находим классическое решение задачи Коши (4.1.21) вида

$$u(x, t) = \frac{e^{\frac{|x|^2}{1-4t}}}{(1-4t)^{n/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1/4) \quad (4.1.22)$$

с конечным временем существования  $T = 1/4$ , гарантированным теоремой 4.1.1, что в точности соответствует значению параметра  $M = 1$ . Это решение разрушается в момент времени  $t = 1/4$  (претерпевает blowup).

#### 4.1.1. Принцип Дюамеля.

Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1. \end{cases} \quad (4.1.23)$$

легко строится с помощью формулы Пуассона (4.1.11) по принципу Дюамеля. А именно, рассмотрим однопараметрическое семейство вспомогательных задач Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} v_t = \Delta v, & x \in \mathbb{R}^n, t > \tau, \\ v|_{t=\tau} = f(x, \tau), & x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, \end{cases} \quad (4.1.24)$$

с решениями  $v = v(x, t, \tau)$ , зависящими от параметра  $\tau \geq 0$ .

Для каждого значения параметра  $\tau \geq 0$  решение задачи Коши (4.1.24) определяется по «сдвинутой» формуле Пуассона

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} dy, \quad (4.1.25)$$

и нетрудно убедиться, что искомым решением задачи (4.1.24) будет функция

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau. \quad (4.1.26)$$

Действительно, дифференцируя интеграл (4.1.26), находим

$$u_t - \Delta u = v(x, t, t) + \int_0^t (v_t - \Delta v) d\tau = f(x, t).$$

Выполнение начального условия  $u|_{t=0} = 0$  очевидно. Из (4.1.25)–(4.1.26) получаем представление искомого решения задачи Коши

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} f(y, \tau) dy d\tau.$$

#### 4.1.2. Условие на бесконечности и класс единственности растущих решений.

Рассмотрим однородную задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1. \end{cases} \quad (4.1.27)$$

в классической постановке. Обозначим  $v(x) = \max_{0 \leq t \leq T} |u(x, t)|$ . Предполагается, что растущее на бесконечности классическое решение задачи Коши (4.1.27) удовлетворяет условию:

$$\exists M > 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ |v(x)| e^{-M|x|^2} \right\} < \infty. \quad (4.1.28)$$

**Теорема 4.1.2** (А.Н. Тихонов – без доказательства). *Классическое решение задачи Коши (4.1.27), удовлетворяющее условию на бесконечности (4.1.28), единственно, т. е. тривиально.*

## 4.2. Классические и слабые решения начально-краевых задач на конечном отрезке

Для однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных

### 4.3. Принцип максимума

Для ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и заданного числа  $T$  обозначим через  $Q_T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, T]$  цилиндр с «основанием»  $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, t = 0\}$ , «боковой поверхностью»  $S \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega \times (0, T]$  и «верхней крышкой»  $S_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, t = T\}$ . Через  $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} S \cup \bar{S}_0$  обозначим так называемую «параболическую границу» цилиндра  $Q_T$  и заметим, что замыкание цилиндра  $\bar{Q}_T = Q_T \cup \Gamma$ . Символом  $C_{x,t}^{2,1}(Q_T)$  обозначим анизотропное пространство непрерывно дифференцируемых функций, которые определены на замыкании  $\bar{Q}_T$  и непрерывно дифференцируемы во всех внутренних точках  $Q_T$ , причем дважды по  $x$  и один раз по  $t$ .

Классическим решением уравнения теплопроводности в цилиндре  $Q_T$  будем называть функцию  $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ , удовлетворяющую уравнению

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in Q_T.$$

**Теорема 4.3.1.** *Классическое решение уравнения теплопроводности в цилиндре  $Q_T$  не принимает в  $Q_T$  значений как больших его наибольшего значения на  $\Gamma$ , так и меньших его наименьшего значения на  $\Gamma$ , т. е.*

$$\min_{\Gamma} u \leq u(x, t) \leq \max_{\Gamma} u \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

*Доказательство.* Введем обозначения для минимума и максимума по параболической границе  $\Gamma$ :

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\Gamma} u, \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\Gamma} u. \quad (4.3.1)$$

Предположим, что найдется такая точка  $(x^\delta, t^\delta) \in Q_T$ , что

$$u(x^\delta, t^\delta) = M + \delta \quad (4.3.2)$$

с некоторым положительным  $\delta$ . Вводя параметр  $\varepsilon \in (0, \delta)$ , обозначим через  $\eta_\varepsilon$  однопараметрическую функцию вида

$$\eta_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq M + \varepsilon, \\ (\xi - M - \varepsilon)^2, & \xi > M + \varepsilon, \end{cases} \quad (4.3.3)$$

с неотрицательной первой производной

$$\eta'_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq M + \varepsilon, \\ 2(\xi - M - \varepsilon), & \xi > M + \varepsilon, \end{cases} \quad (4.3.4)$$

и неотрицательной кусочно-постоянной второй производной

$$\eta''_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq M + \varepsilon, \\ 2, & \xi > M + \varepsilon, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

и заметим, что  $\eta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  для каждого значения параметра  $\varepsilon \in (0, \delta)$ . При этом для каждого  $\varepsilon \in (0, \delta)$  функция  $\eta_\varepsilon(u)$  будет тождественно равна нулю в некоторой окрестности параболической границы  $\Gamma$  в силу определения (4.3.1) числа  $M$ .

Умножив равенство  $u_t - \Delta u = 0$  на  $\eta'_\varepsilon(u)$ , после интегрирования по цилиндру  $Q_\tau$  при произвольном  $\tau \in (0, T]$  с использованием первой формулы Грина в интеграле по  $x \in \Omega$ , получим

$$\int_{Q_\tau} (\eta_\varepsilon(u))_t dxdt + \int_{Q_\tau} \eta''_\varepsilon(u(x, t)) |\nabla_x u(x, t)|^2 dxdt = 0 \quad \forall \tau \in (0, T], \quad (4.3.6)$$

где интеграл по части боковой поверхности  $\partial\Omega \times (0, \tau) \subset S$  цилиндра  $Q_T$  отсутствует поскольку равен нулю при любом значении  $\varepsilon \in (0, \delta)$  из-за того, что функция  $\eta_\varepsilon(u)$  тождественно равна нулю в некоторой окрестности параболической границы  $\Gamma$ . По той же причине имеем

$$\int_{Q_\tau} (\eta_\varepsilon(u))_t dxdt = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(u(x, \tau)) dx \quad \forall \tau \in (0, T], \quad (4.3.7)$$

так как основание  $S_0$  цилиндра  $Q_T$  является частью параболической границы  $\Gamma$ .

Замечая, что функция  $\eta_\varepsilon$  и ее вторая производная  $\eta_\varepsilon''$  принимают лишь неотрицательные значения, из (4.3.6)–(4.3.7) находим

$$\eta_\varepsilon(u(x, \tau)) = 0 \quad \forall (x, \tau) \in Q_T,$$

откуда и из явного вида (5.3.3) функции  $\eta_\varepsilon$  следует неравенство

$$u(x, t) \leq M + \varepsilon \quad \forall (x, t) \in Q_T \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta),$$

что противоречит предположению (5.3.12). Таким образом, неравенство

$$u(x, t) \leq \max_{\Gamma} u \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T \quad (4.3.8)$$

доказано. Для доказательства неравенства

$$\min_{\Gamma} u \leq u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T \quad (4.3.9)$$

достаточно заметить, что справедливость неравенства (5.3.7) вытекает из уже доказанного неравенства (5.3.6) при замене  $u$  на  $-u$ . Теорема доказана.  $\square$

Из доказанной теоремы вытекают следующие три следствия.

**Следствие 4.3.1.** Классическое решение уравнения теплопроводности  $u = u(x, t)$  в цилиндре  $Q_T$  с ограниченным основанием удовлетворяет неравенству

$$\max_{\overline{Q}_T} |u| \leq \max_{\Gamma} |u| \quad (4.3.10)$$

**Следствие 4.3.2.** Классическое решение  $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$  первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности единственно.

*Доказательство.* Пусть имеется два решения  $u_1$  и  $u_2$  с одинаковыми данными задачи. Тогда их разность  $v = u_1 - u_2$  удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности с нулевыми условиями на параболической границе  $\Gamma$ . В силу следствия 5.3.1 эта разность будет тождественным нулем в  $\overline{Q}_T$ , т. е.  $u_1 = u_2$  в  $\overline{Q}_T$ .  $\square$

**Следствие 4.3.3.** Классическое решение первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности непрерывно зависит от начальных и граничных данных задачи.

*Доказательство.* Действительно, пусть  $u_1$  и  $u_2$  — какие-либо два решения задачи  $\Omega$ . Согласно следствию 5.3.1 максимум  $|u_1 - u_2|$  по  $\overline{Q_T}$  не превышает соответствующих максимумов по  $\Gamma$  для разностей данных задачи.  $\square$

## Глава 5

### Эллиптические краевые задачи

#### 5.1. Метод Фурье для классических и слабых решений

##### 5.1.1. Метод Фурье решения краевых задач для оператора Лапласа в полосе. Условие на бесконечности и класс единственности решений.

Классическим решением задачи Дирихле для оператора Лапласа в полосе

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in \Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 < y < \pi/2\}; \\ u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi/2} = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

называют функцию  $u \in C^2(\Pi) \cap C^1(\bar{\Pi})$ , удовлетворяющую уравнению и краевым условиям (5.1.39). Требуется также, чтобы классическое решение удовлетворяло еще и некоторым условиям на бесконечности, которые ограничивают поведение решения при  $|x| \rightarrow \infty$ , гарантируя единственность решения. Чем сильнее такие ограничения, тем «лучше» для единственности, но «хуже» для разрешимости, так как усиление ограничений может привести к потере существования решения. Корректная постановка краевой задачи требует отыскания некоторого идеального баланса требований к решению, гарантирующих единственность решения, но не препятствующих его существованию. Именно по этой причине важно найти самый «широкий» класс, гарантирующий единственность. Такой класс и называют «классом единственности». Для эллиптической краевой задачи в неограни-



ченной области, помимо уравнения и краевых условий, искомый класс единственности зависит, как правило, еще и от геометрии области в окрестности бесконечности. Отличительной особенностью рассматриваемой краевой задачи является наличие у неограниченной области  $\Pi \subset \mathbb{R}^2$  двух *выходов на бесконечность*, что приводит к возникновению двух независимых условий на бесконечности: «условие на  $+\infty$ » и «условие на  $-\infty$ ». В общем случае число выходов на бесконечность может оказаться даже бесконечным.

В краевых задачах вида (5.1.39) условия на бесконечности проще всего задаются в терминах символов Ландау «*о-маленькое*» и «*О-большое*» при  $|x| \rightarrow \infty$ . А именно, для краевой задачи (5.1.39) классом единственности будем называть *самый широкий класс* вида

$$\{u: u(x, y) = o(\varphi(x)) \text{ при } |x| \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2]\}, \quad (5.1.2)$$

в котором линейная краевая задача (5.1.39) имеет единственное решение, и где для разных выходов на бесконечность соответствующие функции  $\varphi$  могут оказаться разными. При этом по определению под *самым широким классом* подразумевается тот из всех гарантирующих единственность вариантов выбора функции  $\varphi$  в (5.1.40), при котором замена «*о-маленького*» на «*О-большое*» приводит к потере единственности, что тут же подтверждается примером нетривиального решения однородной задачи или увеличением размерности подпространства решений однородной задачи в случае нескольких выходов на бесконечность. Принятие такого определения класса единственности однозначно решает проблему наилучшего выбора функции  $\varphi$  в условии (5.1.40) для краевой задачи (5.1.39), что означает корректность принятого определения класса единственности.

## МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Метод Фурье для классических решений краевой задачи (5.1.39) опирается

на задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} Y'' = \lambda Y, & 0 < y < \pi/2; \\ Y(0) = Y'(\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Поскольку краевые условия в (5.1.41) являются самосопряженными, то собственные функции

$$\begin{cases} Y_n(y) = \sin(2n + 1)y, \\ \lambda_n = -(2n + 1)^2, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

задачи Штурма-Лиувилля (5.1.41) образуют ортогональный базис в пространстве  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  квадратично интегрируемых по Риману на  $(0, \pi/2)$  функций<sup>11</sup> со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^{\pi/2} uv \, dx \, dy,$$

которое порождает норму

$$\|u\| = \left( \int_0^{\pi/2} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Разложим искомое классическое решение краевой задачи (5.1.39) в ряд Фурье по ортогональному базису из найденных собственных функций  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ :

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \sin(2n + 1)y \quad (5.1.5)$$

с коэффициентами Фурье

$$X_n(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(x, y) \sin(2n + 1)y \, dy. \quad (5.1.6)$$

<sup>11</sup>Точнее, элементами пространства  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  являются не сами функции, а классы эквивалентных на  $(0, \pi/2)$  функций, т. е. совпадающих на  $(0, \pi/2)$ , за исключением подмножества меры Жордана ноль. Нулевым элементом в  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  служит класс функций, эквивалентных нулю на  $(0, \pi/2)$ . Такое определение позволяет избежать нарушения одной из аксиом скалярного произведения и порождаемой им нормы.

Умножим теперь уравнение Пуассона (5.1.39) скалярно в  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  на собственную функцию  $Y_n$  с нормирующим коэффициентом  $4/\pi$ , и пользуясь классической гладкостью искомого решения, вынесем производные по  $x$  за знак одного интеграла по  $y$  и проинтегрируем дважды по частям по  $y$  в другом. При этом получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X_n'' - (2n + 1)^2 X_n = f_n(x), \quad x > 0, \quad n \geq 0, \quad (5.1.7)$$

с правой частью

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x, y) \sin(2n + 1)y \, dy, \quad x > 0, \quad n \geq 0.$$

Найдем класс единственности в краевой задаче (5.1.39). Для этого нужно сначала при каждом  $n \geq 0$  найти класс единственности в краевой задаче

$$\begin{cases} X_n'' - (2n + 1)^2 X_n = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ X_n(0) = 0, & n \geq 0. \end{cases} \quad (5.1.8)$$

Из общего вида решения такой задачи

$$X_n(x) = C_1 e^{(2n+1)x} + C_2 e^{-(2n+1)x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0, \quad (5.1.9)$$

следует, что искомое «условие на  $+\infty$ » имеет вид

$$X_n(x) = o(e^{(2n+1)x}) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad (5.1.10)$$

тогда как искомым «условием на  $-\infty$ » будет

$$X_n(x) = o(-e^{(2n+1)x}) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad (5.1.11)$$

Действительно, из (5.1.10) следует, что  $C_1 = 0$ , тогда как из (5.1.11) следует, что  $C_2 = 0$ , т. е. на пересечении

$$X_n(x) = o(e^{(2n+1)|x|}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (5.1.12)$$

классов (5.1.10) и (5.1.11) однородная краевая задача (5.1.47) имеет только тривиальное решение. При этом замена *o-маленького* на *O-большое* хотя

бы в одном из условий (5.1.10)–(5.1.11) приводит к потере единственности, в чем легко убедиться, положив сначала  $\{C_1 = 1, C_2 = 0\}$ , а затем  $\{C_1 = 0, C_2 = 1\}$  в представлении (5.1.36), и получив в итоге два линейно независимых решения одной и той же однородной задачи (5.1.47). Таким образом, условие (5.1.50) определяет класс единственности решений для краевой задачи (5.1.47).

В силу определения коэффициентов Фурье (5.1.44) классом единственности для краевой задачи (5.1.39) будет пересечение всех классов (5.1.50). Это означает, что искомым классом единственности для краевой задачи (5.1.39) имеет вид

$$u(x, y) = o(e^{|x|}) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2], \quad (5.1.13)$$

где при замене «*о-маленького*» на «*О-большое*», как и требуется, получаем примеры двух линейно независимых решений  $\{u = e^x \sin y, u = e^{-x} \sin y\}$  одной и той же однородной краевой задачи (5.1.39), т.е. задачи (5.1.39) с нулевой правой частью.

Осталось выписать решение неоднородного уравнения

$$X_n'' - (2n + 1)^2 X_n = f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0. \quad (5.1.14)$$

в уже найденном классе единственности (5.1.38). Чтобы получить представление решения дифференциального уравнения (5.1.34), не используя явного вида правой части  $f_n$ , нужно либо построить функцию Грина для задачи (5.1.34), либо использовать преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\xi) = F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx,$$

применив которое к дифференциальному уравнению (5.1.34), получим простое алгебраическое уравнение

$$-[\xi^2 + (2n + 1)^2] \hat{X}_n = \hat{f}_n(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

откуда сразу же находим

$$\hat{X}_n = -\frac{\hat{f}_n(\xi)}{\xi^2 + (2n+1)^2}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

а тогда по теореме о свертке для преобразования Фурье получаем интегральное представление коэффициентов Фурье искомого решения

$$X_n(x) = -K_n * f_n = -\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x-z)f_n(z) dz, \quad (5.1.15)$$

где интегральное ядро

$$K_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} F\left[\frac{1}{\xi^2 + (2n+1)^2}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\xi^2 + (2n+1)^2} d\xi$$

легко вычисляется с помощью теории вычетов и леммы Жордана. Более короткий путь использует простоту вычисления преобразования Фурье экспоненты  $e^{-(2n+1)|x|}$ . Точнее,

$$F[e^{-(2n+1)|x|}] = \frac{2(2n+1)}{\xi^2 + (2n+1)^2} \Rightarrow F^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2 + (2n+1)^2}\right] = \frac{e^{-(2n+1)|x|}}{2(2n+1)} = K_n(x), \quad n \geq 0$$

где первое равенство почти очевидно. Таким образом, для краевой задачи (5.1.39) искомое решение имеет вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2n+1)|x-z|} f_n(z) dz, \quad (5.1.16)$$

Требования следующих двух теорем значительно завышены ради упрощения доказательств.

**Теорема 5.1.1.** Пусть  $f \in C(\bar{\Pi})$  и найдется такое  $\delta \in (0, 1)$ , что

$$\sup_{\Pi} (e^{-\delta|x|} |f(x, y)|) < \infty. \quad (5.1.17)$$

Для существования классического решения  $u \in C^2(\bar{\Pi})$  задачи (5.1.39) в классе единственности (5.1.38) достаточно, чтобы число ненулевых коэффициентов Фурье  $f_n$  было конечным.

**Теорема 5.1.2.** Пусть  $f, f_{yy} \in C(\bar{\Pi})$  и найдется такое  $\delta \in (0, 1)$ , что

$$\sup_{\Pi} [e^{-\delta|x|} (|f(x, y)| + |f_{yy}(x, y)|)] < \infty. \quad (5.1.18)$$

Тогда существует классическое решение  $u \in C^2(\bar{\Pi})$  задачи (5.1.39), принадлежащее классу единственности (5.1.38).

Для доказательства теорем достаточно заметить, что найдется постоянная  $M_\delta > 0$  такая, что выполняется неравенство

$$|f(x, y)| \leq M_\delta e^{\delta|x|} \quad \forall (x, y) \in \Pi \quad (5.1.19)$$

в первой теореме, или неравенство

$$|f(x, y)| + |f_{yy}(x, y)| \leq M_\delta e^{\delta|x|} \quad \forall (x, y) \in \Pi \quad (5.1.20)$$

во второй теореме. При этом неравенство (5.1.19) обеспечивает принадлежность решения к классу единственности в обеих теоремах, что легко устанавливается с помощью оценки

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2n+1)|x-z|} |f_n(z)| dz &\leq 2M_\delta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2n+1)|x-z|} e^{\delta|z|} dz = 2M_\delta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2n+1)|z|} e^{\delta|x-z|} dz \leq \\ &\leq 2M_\delta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2n+1)|z|} e^{\delta|x|+\delta|z|} dz = 2M_\delta e^{\delta|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2n+1-\delta)|z|} dz = \frac{2M_\delta e^{\delta|x|}}{(2n+1-\delta)} \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Неравенство (5.1.20) используется только во второй теореме, чтобы доказать принадлежность суммы бесконечного ряда  $u \in C^2(\bar{\Pi})$ , тогда как в первой теореме классическая гладкость решения гарантирована всего лишь принадлежностью правой части  $f \in C^2(\bar{\Pi})$ , поскольку ряд Фурье в первой теореме содержит не более чем конечное число ненулевых членов.

### 5.1.2. Метод Фурье решения краевых задач для оператора Лапласа в полуполосе. Условие на бесконечности и класс единственности решений.

Классическим решением задачи Дирихле для оператора Лапласа в полуполосе

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Pi_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, 0 < y < \pi/2\}; \\ u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi/2} = 0, \quad x \geq 0; \\ u|_{x=0} = a(y), \quad 0 \leq y \leq \pi/2; \end{array} \right. \quad (5.1.21)$$

называют функцию  $u \in C^2(\Pi_+) \cap C^1(\bar{\Pi}_+)$ , удовлетворяющую уравнению и краевым условиям (5.1.39). Требуется также, чтобы классическое решение удовлетворяло еще и некоторому условию на бесконечности, которое ограничивает поведение решения при  $x \rightarrow \infty$ , гарантируя единственность решения. Чем сильнее такое ограничение, тем «лучше» для единственности, но «хуже» для разрешимости, так как усиление ограничения может привести к потере существования решения. Корректная постановка краевой задачи требует отыскания некоторого идеального баланса требований к решению, гарантирующих единственность решения, но не препятствующих его существованию. Именно по этой причине важно найти самый «широкий» класс, гарантирующий единственность. Такой класс и называют «классом единственности». Для эллиптической краевой задачи в неограниченной области, помимо уравнения и краевых условий, искомый класс единственности зависит, как правило, еще и от геометрии области в окрестности бесконечности.

В краевых задачах вида (5.1.39) условия на бесконечности проще всего задаются в терминах символов Ландау «*o*-маленькое» и «*O*-большое» при  $|x| \rightarrow \infty$ . А именно, для краевой задачи (5.1.39) классом единственности будем называть *самый широкий класс* вида

$$\{u: u(x, y) = o(\varphi(x)) \text{ при } |x| \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2]\}, \quad (5.1.22)$$

в котором линейная краевая задача (5.1.39) имеет единственное решение.

При этом по определению под *самым широким классом* подразумевается тот из всех гарантирующих единственность вариантов выбора функции  $\varphi$  в (5.1.40), при котором замена «*о-маленького*» на «*О-большое*» приводит к потере единственности, что тут же подтверждается примером нетривиального решения однородной задачи. Принятие такого определения класса единственности однозначно решает проблему наилучшего выбора функции  $\varphi$  в условии (5.1.40) для краевой задачи (5.1.39), что означает корректность принятого определения класса единственности.

Обозначим через  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  вещественное пространство квадратично интегрируемых по Риману функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx \, dy,$$

которое порождает норму

$$\|u\| = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Для положительных  $r > 0$  обозначим через  $\Pi_r$  прямоугольник

$$\Pi_r \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < r, 0 < y < \pi/2\} \subset \Pi_+.$$

Для краевой задачи (5.1.39) слабым решением класса  $\mathcal{L}_2$  будем называть функцию

$u \in \mathcal{L}_2(\Pi_r) \forall r > 0$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Pi_+} u(x, y) \Delta v(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} a(y) v_x(0, y) \, dy$$

$$\forall v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2): v|_{x=0} = 0, 0 \leq y < \leq \pi/2; \quad v|_{y=0} = v_y|_{y=\pi/2} = 0, x \geq 0.$$

(5.1.23)

**Лемма 5.1.1.** *Если слабое решение класса  $\mathcal{L}_2$  краевой задачи (5.1.39), имеет классическую гладкость, т.е.  $u \in C^2(\Pi_+) \cap C^1(\bar{\Pi}_+)$ , то оно является классическим.*



*Доказательство.* Выбирая, в частности, в тождестве (5.1.23) пробные функции  $v \in \dot{C}^\infty(\Pi_+)$  и интегрируя по частям (т.е. используя формулу Грина), получим

$$\int_{\Pi_+} \Delta u(x, y) v(x, y) dx dy = 0 \quad \forall v \in \dot{C}^\infty(\Pi_+),$$

откуда и из леммы Дю Буа-Реймонда следует выполнение уравнения

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Pi_+. \quad (5.1.24)$$

Возвращаясь к тождеству (5.1.23), применяя формулу Грина для всех допустимых в (5.1.23) пробных функций и пользуясь уже установленным равенством (5.1.24), находим

$$\begin{aligned} & -\int_0^\infty u_y(x, \pi/2) v(x, \pi/2) dx - \int_0^\infty u(x, 0) v_y(x, 0) dx = \\ & = \int_0^{\pi/2} (a(y) - u(0, y)) v_x(0, y) dy \\ & \forall v \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2): \quad v|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi/2; \quad v|_{y=0} = v_y|_{y=\pi/2} = 0, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Теперь, выбирая в тождестве (5.1.25) такие допустимые пробные функции, что

$$v_y(x, 0) = v(x, \pi/2) = 0, \quad v_x(0, y) = \psi(y) \quad \forall \psi \in \dot{C}^\infty(0, \pi/2),$$

получим тождество

$$\int_0^{\pi/2} (a(y) - u(0, y)) \psi(y) dy = 0 \quad \forall \psi \in \dot{C}^\infty(0, \pi/2),$$

которое в силу леммы Дю Буа-Реймонда означает выполнение краевого условия

$$u|_{x=0} = a(y), \quad y \in [0, \pi/2]. \quad (5.1.26)$$

Чтобы установить выполнение краевых условий

$$u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi/2} = 0, \quad x \geq 0, \quad (5.1.27)$$

подставим (5.1.26) в (5.1.25) а затем, выбирая последовательно такие допустимые пробные функции, что

$$v_y(x, 0) = \psi(x), \quad v(x, \pi/2) = 0 \quad \forall \psi \in \dot{C}^\infty(0, \infty),$$

и наоборот,

$$v_y(x, 0) = 0, \quad v(x, \pi/2) = \psi(x) \quad \forall \psi \in \dot{C}^\infty(0, \infty),$$

закключаем, что

$$\int_0^\infty u(x, 0) \psi(x) dx = \int_0^\infty u_y(x, \pi/2) \psi(x) dx = 0 \quad \forall \psi \in \dot{C}^\infty(0, \infty),$$

откуда следует выполнение оставшихся краевых условий (5.1.27). Таким образом, для краевой задачи (5.1.39) наличие у слабого решения классической гладкости  $u \in C^2(\Pi_+) \cap C^1(\bar{\Pi}_+)$  означает, что такое слабое решение на самом деле будет классическим, т.е. будет удовлетворять уравнению (5.1.24) и краевым условиям (5.1.26), (5.1.27), которые неявно содержатся в интегральном тождестве (5.1.23). Лемма доказана.  $\square$

*Замечание.* Доказательство леммы 5.1.1 фактически является принципиально важной частью стандартной процедуры проверки корректности определения слабого решения. При этом под корректностью определения слабого решения краевой задачи<sup>12</sup> подразумевается следующее свойство определения: **всякое классическое решение является слабым, а всякое слабое решение, имеющее классическую гладкость, является классическим.** Доказательство леммы 5.1.1 можно охарактеризовать как стандартную процедуру извлечения уравнения и краевых условий из интегрального тождества, определяющего слабое решение краевой задачи (5.1.39).

<sup>12</sup>Не путать корректность *определения* слабого решения краевой задачи с корректностью её *постановки* как задачи математической физики!

## МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Метод Фурье для классических и слабых решений краевой задачи (5.1.39) опирается на одну и ту же задачу Штурма-Лиувилля, а именно,

$$\begin{cases} Y'' = \lambda Y, & 0 < y < \pi/2; \\ Y(0) = Y'(\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (5.1.28)$$

Поскольку краевые условия в (5.1.41) являются самосопряженными, то собственные функции

$$\begin{cases} Y_n(y) = \sin(2n + 1)y, \\ \lambda_n = -(2n + 1)^2, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (5.1.29)$$

задачи Штурма-Лиувилля (5.1.41) образуют ортогональный базис в  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$ .

Разложим теперь искомое слабое решение краевой задачи (5.1.39) в ряд Фурье по ортогональному базису  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ :

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \sin(2n + 1)y \quad (5.1.30)$$

с искомыми коэффициентами Фурье

$$X_n(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(x, y) \sin(2n + 1)y dy. \quad (5.1.31)$$

Чтобы получить краевые задачи для искоемых коэффициентов Фурье, достаточно в интегральном тождестве (5.1.23) выбрать пробные функции вида

$$v(x, y) = \psi(x) \sin(2n + 1)y \quad \forall n \geq 0, \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n): \psi(0) = 0. \quad (5.1.32)$$

Действительно, подставляя в интегральное тождество (5.1.23) пробные функции (5.1.32) и учитывая вид коэффициентов Фурье (5.1.44), получим семейство интегральных тождеств

$$\int_0^{\infty} [X_n(x)\psi''(x) - (2n + 1)^2 X_n(x)\psi(x)] dx = a_n \psi(0) \quad (5.1.33)$$

$$\forall \psi \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n): \psi(0) = 0, \quad n \geq 0,$$

где числа  $\{a_n\}$  являются коэффициентами Фурье граничных данных:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} a(y) \sin(2n+1)y \, dy, \quad n \geq 0.$$

Заметим, что интегральные тождества (5.1.33) являются обобщенными (слабыми) постановками краевых задач для искомых коэффициентов Фурье:

$$\begin{cases} X_n'' - (2n+1)^2 X_n = 0, & x > 0, \\ X_n(0) = a_n & n \geq 0. \end{cases} \quad (5.1.34)$$

Точнее, справедлива следующая

**Лемма 5.1.2.** Пусть функция  $X_n \in \mathcal{L}_2(\Pi_r) \forall r > 0$  и удовлетворяет интегральному тождеству (5.1.33). Тогда функция  $X_n \in C^\infty[0, \infty)$  и является классическим решением краевой задачи (5.1.34).

*Доказательство.* Выбирая, в частности, в (5.1.33) пробные функции  $\psi \in \mathring{C}^\infty(0, \pi/2)$ , получим интегральное тождество

$$\int_0^\infty X_n(x) \psi''(x) \, dx = (2n+1)^2 \int_0^\infty X_n(x) \psi(x) \, dx \quad \forall \psi \in \mathring{C}^\infty(0, \pi/2), \quad (5.1.35)$$

совпадающее с определением слабой производной  $X_n''$ , согласно которому слабая производная  $X_n''$  существует и равна  $(2n+1)^2 X_n$ . В силу интегрального представления

$$X_n(x) = C_1 x + C_2 + \int_0^x (x-y) X_n''(y) \, dy \quad \forall x > 0$$

функции  $X_n$  на  $(0, \pi/2)$  через ее слабую производную  $X_n''$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые постоянные<sup>13</sup>, функция  $X_n$  представима на  $(0, \pi/2)$  в виде

$$X_n(x) = C_1 x + C_2 + (2n+1)^2 \int_0^x (x-y) X_n(y) \, dy \quad \forall x > 0,$$

<sup>13</sup>Элементарный вывод интегрального представления функции  $X$  через её слабую производную  $X''$  приводится ниже в разделе Дополнение 1.

из которого после соответствующего переопределения  $X_n$  на множестве меры ноль сразу же вытекает её бесконечная дифференцируемость:  $X_n \in C^\infty[0, \infty)$ .

Таким образом, слабое решение  $X_n$  краевой задачи (5.1.34) в смысле интегрального тождества (5.1.33) имеет классическую гладкость, а следовательно является<sup>14</sup> классическим решением краевой задачи (5.1.34). Лемма доказана.  $\square$

Найдем класс единственности в краевой задаче (5.1.39). Для этого нужно при каждом  $n \geq 0$  найти класс единственности в краевой задаче (5.1.34). С этой целью рассмотрим однородную краевую задачу (5.1.39), т.е. уравнение (5.1.39) с краевым условием  $X_n(0) = 0$ . Из общего вида решения такой задачи

$$X_n(x) = C \cdot (e^{(2n+1)x} - e^{-(2n+1)x}), \quad x \geq 0, \quad n \geq 0, \quad (5.1.36)$$

следует, что искомое условие на бесконечности имеет вид

$$X_n(x) = o(e^{(2n+1)x}) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (5.1.37)$$

Действительно, из (5.1.50) сразу же следует, что  $C = 0$ , т.е. однородная краевая задача (5.1.34) имеет в классе (5.1.50) только тривиальное решение. При этом замена *o-маленького* на *O-большое* в условии (5.1.50) приводит к потере единственности, в чем легко убедиться, полагая  $C = 1$  в представлении (5.1.36). Таким образом, условие (5.1.50) определяет класс единственности решений краевой задачи (5.1.34) для каждого индекса  $n \geq 0$ .

В силу определения коэффициентов Фурье (5.1.44) классом единственности в краевой задаче (5.1.39) будет пересечение всех классов (5.1.50). Это означает, что искомый класс единственности для краевой задачи (5.1.39) имеет вид

$$u(x, y) = o(e^x) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2], \quad (5.1.38)$$

<sup>14</sup>Для ОДУ тот фундаментальный факт, что слабое решение краевой задачи, имеющее классическую гладкость, является классическим, устанавливается еще проще чем для ДУЧП — подробности см. ниже в разделе Дополнение 2.

где при замене «*о-маленького*» на «*О-большое*», как и требуется, получаем пример нетривиального решения  $u = \operatorname{sh} x \sin y$  однородной краевой задачи (5.1.39), т.е. задачи (5.1.39) с краевым условием  $u|_{x=0} = 0$ .

Осталось выписать решение неоднородной краевой задачи (5.1.39) в классе единственности (5.1.38). Для этого достаточно заметить, что при каждом  $n \geq 0$  решение неоднородной краевой задачи (5.1.34) в классе единственности имеет вид

$$X_n(x) = a_n e^{-(2n+1)x}, \quad x \geq 0, \quad n \geq 0.$$

Поэтому единственное в классе (5.1.38) решение краевой задачи (5.1.39) имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(2n+1)x} \sin(2n+1)y, \quad x \geq 0.$$

#### ДОПОЛНЕНИЕ 1. Интегральное представление функции через ее слабые производные.

В этом разделе устанавливаются интегральные представления функций через их слабые производные. Н

#### ДОПОЛНЕНИЕ 2. Проверка корректности определения слабого решения.

### 5.1.3. Метод Фурье решения краевых задач для однородного уравнения Гельмгольца в полуполосе. Условия на бесконечности и класс единственности решений.

Для однородного уравнения Гельмгольца в полуполосе классическим решением краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0, \quad (x, y) \in \Pi_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, 0 < y < \pi/2\}; \\ u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi/2} = 0, \quad x \geq 0; \\ u|_{x=0} = a(y), \quad 0 \leq y \leq \pi/2; \end{array} \right. \quad (5.1.39)$$

называют функцию  $u \in C^2(\Pi_+) \cap C^1(\bar{\Pi}_+)$ , удовлетворяющую уравнению и краевым условиям (5.1.39)<sup>15</sup> Требуется также, чтобы классическое решение удовлетворяло еще и некоторым условиям на бесконечности, которые ограничивают поведение решения при  $x \rightarrow \infty$ , гарантируя единственность решения. Чем сильнее ограничение, тем «лучше» для единственности, но «хуже» для разрешимости, так как усиление ограничения может привести к потере существования решения. Корректная постановка краевой задачи требует отыскания некоторого идеального баланса требований к решению, гарантирующих единственность решения, но не препятствующих его существованию. Именно по этой причине важно найти самый «широкий» класс, гарантирующий единственность. Такой класс и называют «классом единственности». Для уравнения Гельмгольца в полосе и полуполосе затухание всех гармоник на бесконечности оказывается недопустимо грубым условием, приводящим к потере физически осмысленных решений, удовлетворяющих на бесконечности так называемым «условиям излучения».

В краевых задачах вида (5.1.39) условия на бесконечности проще всего задаются в терминах символов Ландау «*o-маленькое*» и «*O-большое*» при  $x \rightarrow \infty$ , т. е. для краевой задачи в полуполосе класс единственности следует искать как *самый широкий класс* вида

$$\{u: u(x, y) = o(\varphi(x)) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2]\}, \quad (5.1.40)$$

в котором линейная краевая задача (5.1.39) имеет единственное решение. При этом по определению под *самым широким классом* подразумевается тот из всех гарантирующих единственность вариантов выбора функции  $\varphi$  в (5.1.40), при котором замена «*o-маленького*» на «*O-большое*» приводит к потере единственности, что тут же подтверждается примером нетривиального решения однородной задачи. Принятие такого определения класса единственности однозначно решит проблему наилучшего выбора функции  $\varphi$  в условии (5.1.40) для краевой задачи (5.1.39), что будет означать кор-

<sup>15</sup>Такие краевые задачи используются для расчета планарных оптических волноводов.

ректность принятого определения класса единственности.

### МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ.

Метод Фурье для классических решений краевой задачи (5.1.39) опирается на задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} Y'' = \lambda Y, & 0 < y < \pi/2; \\ Y(0) = Y'(\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (5.1.41)$$

Поскольку краевые условия в (5.1.41) являются самосопряженными, то собственные функции

$$\begin{cases} Y_n(y) = \sin(2n + 1)y, \\ \lambda_n = -(2n + 1)^2, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (5.1.42)$$

задачи Штурма-Лиувилля (5.1.41) образуют ортогональный базис в пространстве  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  квадратично интегрируемых по Риману на  $(0, \pi/2)$  функций<sup>16</sup> со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^{\pi/2} u\bar{v} dy,$$

которое порождает норму

$$\|u\| = \left( \int_0^{\pi/2} |u|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Разложим искомое классическое решение краевой задачи (5.1.39) в ряд Фурье по ортогональному базису из найденных собственных функций  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ :

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \sin(2n + 1)y \quad (5.1.43)$$

<sup>16</sup>Точнее, элементами пространства  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  являются не сами функции, а классы эквивалентных на  $(0, \pi/2)$  функций, т. е. совпадающих на  $(0, \pi/2)$ , за исключением подмножества меры Жордана ноль. Нулевым элементом в  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  служит класс функций, эквивалентных нулю на  $(0, \pi/2)$ . Такое определение позволяет избежать нарушения одной из аксиом скалярного произведения и порождаемой им нормы.



с коэффициентами Фурье

$$X_n(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(x, y) \sin(2n+1)y \, dy. \quad (5.1.44)$$

Умножим теперь уравнение Гельмгольца (5.1.39) скалярно в  $\mathcal{L}_2(0, \pi/2)$  на собственную функцию  $Y_n$  с нормирующим коэффициентом  $4/\pi$ , и пользуясь классической гладкостью искомого решения, вынесем производные по  $x$  за знак одного интеграла по  $y$  и проинтегрируем дважды по частям по  $y$  в другом. При этом получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X_n'' - [(2n+1)^2 - 2]X_n = 0, \quad x > 0, \quad n \geq 0. \quad (5.1.45)$$

А переходя в (5.1.44) к пределу при  $x \rightarrow 0$ , получим краевые условия для коэффициентов Фурье  $X_n$  искомого решения

$$X_n(0) = a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} a(y) \sin(2n+1)y \, dy, \quad x > 0, \quad n \geq 0. \quad (5.1.46)$$

КЛАСС ЕДИНСТВЕННОСТИ.

Найдем класс единственности в краевой задаче (5.1.39). Для этого нужно сначала при каждом  $n \geq 0$  найти класс единственности в краевой задаче

$$\begin{cases} X_n'' - [(2n+1)^2 - 2]X_n = 0, & x > 0, \\ X_n(0) = 0, \end{cases} \quad (5.1.47)$$

с коэффициентом  $(2n+1)^2 - 2 = 4n(n+1) - 1$ .

Случай  $n = 0$  и  $n \geq 1$  рассматриваются отдельно. Случай  $n \geq 1$  проще из-за разницы в характере поведения при  $x \rightarrow \infty$  решений фундаментальной системы  $\{e^{\mu_n x}, e^{-\mu_n x}\}$  для уравнения  $X_n'' - \mu_n^2 X_n = 0$  с коэффициентом  $\mu_n = \sqrt{4n(n+1) - 1} > 0$ . Точнее, для краевой задачи

$$\begin{cases} X_n'' - \mu_n^2 X_n = 0, & x > 0, \\ X_n(0) = 0, & n \geq 1, \end{cases} \quad (5.1.48)$$

с общим видом решения

$$X_n(x) = C_n \cdot (e^{\mu_n x} - e^{-\mu_n x}), \quad x \geq 0, \quad n \geq 1, \quad (5.1.49)$$

для каждого  $n \geq 1$  искомое условие на бесконечности имеет вид

$$X_n(x) = o(e^{\mu_n x}) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (5.1.50)$$

Действительно, из (5.1.50) сразу же следует, что  $C_n = 0$ , т.е. однородная краевая задача (5.1.48) имеет в классе (5.1.50) только тривиальное решение. При этом замена в (5.1.50) *o-маленького* на *O-большое* приводит к потере единственности, в чем легко убедиться, полагая  $C_n = 1$ . Таким образом, условие (5.1.50) определяет класс единственности решений краевой задачи (5.1.48) для каждого  $n \geq 1$ .

Случай  $n = 0$  сложнее из-за одинакового характера поведения при  $x \rightarrow \infty$  решений фундаментальной системы  $\{e^{ix}, e^{-ix}\}$  для уравнения  $X_0'' + \mu_0^2 X_0 = 0$  с коэффициентом  $\mu_0 = 1$ , так как любое из двух условий

$$\{X_0 = o(e^{ix}), \quad x \rightarrow \infty\} \quad \text{или} \quad \{X_0 = o(e^{-ix}), \quad x \rightarrow \infty\}$$

«обнуляет» значения сразу обеих констант общего вида решения

$$X_0(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} \quad (5.1.51)$$

уравнения  $X_0'' + X_0 = 0$ , причем без участия однородного краевого условия  $X_0(0) = 0$ , что приводит к потере разрешимости в общем случае неоднородных данных задачи. В такой ситуации, во избежание потери разрешимости, в качестве условия на бесконечности для уравнения  $X_0'' + X_0 = 0$  обычно используют одно из условий излучения

$$\begin{cases} X_0' - iX_0 = o(1), & x \rightarrow \infty, \\ X_0' + iX_0 = o(1), & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Чаще всего из этих двух условий выбирают<sup>17</sup> первое

$$X_0' - iX_0 = o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (5.1.52)$$

<sup>17</sup>Руководствуясь физическими соображениями.

которое «обнуляет» постоянную  $\beta$  в (5.1.51), не затрагивая  $\alpha$ . При этом из краевого условия  $X_0(0) = 0$  будет следовать, что  $\alpha = 0$ , т. е.  $X_0 = 0$ , тогда как замена *о-маленького* на *О-большое* в условии (5.1.52) приведет к потере единственности, в чем легко убедиться, полагая  $\alpha = 1$  в общем решении

$$X_0(x) = \alpha \cdot (e^{ix} - e^{-ix})$$

уравнения  $X_0'' + X_0 = 0$  с краевым условием  $X_0(0) = 0$ .

Замечая теперь, что на решениях уравнений  $\{e^{\mu_n x}, e^{-\mu_n x}\}$  при  $n \geq 1$  ограничения вида (5.1.52), т. е. условия излучения

$$X_n' - iX_n = o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

оказываются сильнее ограничений (5.1.50), заключаем, что искомым классом единственности в краевой задаче (5.1.39) будет класс

$$u_x(x, y) - iu(x, y) = o(1) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2], \quad (5.1.53)$$

где при замене «*о-маленького*» на «*О-большое*», как и требуется, получается пример нетривиального решения  $u = \sin x \sin y$  однородной краевой задачи (5.1.39), т. е. задачи (5.1.39) с краевым условием  $u|_{x=0} = 0$ .

Таким образом, решения неоднородных краевых задач

$$\begin{cases} X_n'' - \mu_n^2 X_n = 0, & x > 0, \\ X_n(0) = a_n, & n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} X_0'' + X_0 = 0, & x > 0, \\ X_0(0) = a_0 \end{cases}$$

в уже найденных классах единственности (5.1.50) и (5.1.52) имеют вид

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n e^{-\mu_n x}, & x \geq 0, \quad n \geq 1, \\ a_0 e^{ix}, & x \geq 0, \quad n = 0. \end{cases} \quad (5.1.54)$$

Подставляя коэффициенты (5.1.54) в ряд Фурье (5.1.43), получаем единственное в классе (5.1.53) искомое решение

$$u(x, y) = a_0 e^{ix} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n x} \sin(2n+1)y, \quad x \geq 0.$$

неоднородной краевой задачи (5.1.39), где  $\mu_n = \sqrt{4n(n+1) - 1}$  и  $a_n$  — коэффициенты Фурье (5.1.46) граничных данных задачи (5.1.39).

ДОПОЛНЕНИЕ. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ОБЩЕГО ВИДА.

Рассмотрим ту же краевую задачу в полуполосе для однородного уравнения Гельмгольца общего вида

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \mu^2 u = 0, & (x, y) \in \Pi_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, 0 < y < \pi/2\}; \\ u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi/2} = 0, & x \geq 0; \\ u|_{x=0} = a(y), & 0 \leq y \leq \pi/2; \end{cases} \quad (5.1.55)$$

с вещественным коэффициентом  $\mu > 0$ . Уравнение (5.1.39) является частным случаем значения  $\mu = \sqrt{2}$ . Без каких-либо изменений изложенная выше схема решения методом Фурье задачи (5.1.39) применима к задаче (5.1.55) для любых других значений  $\mu \in (0, 3)$ . При этом случаи  $0 < \mu < 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $1 < \mu < 3$  должны рассматриваться отдельно.

**Случай  $0 < \mu < 1$ .**

Во всех трех случаях решение задачи (5.1.55) раскладывается в ряд (5.1.43) с коэффициентами Фурье (5.1.44), удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X_n'' - \mu_n^2 X_n = 0, \quad x > 0, \quad n \geq 0, \quad (5.1.56)$$

с вещественными коэффициентами  $\mu_n = \sqrt{(2n+1)^2 - \mu^2} > 0$ . Класс единственности в задаче (5.1.55) задается условием

$$u(x, y) = o(e^{\mu_0 x}) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2], \quad (5.1.57)$$

с коэффициентом  $\mu_0 = \sqrt{1 - \mu^2} > 0$ . Решение задачи (5.1.55) в классе (5.1.57) имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\mu_n x} \sin(2n+1)y, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq \pi/2.$$

**Случай  $\mu = 1$ .**

В обозначениях случая  $0 < \mu < 1$  имеем  $\mu_0 = 0$  и  $\mu_n = 2\sqrt{n(n+1)} > 0$ ,  $n \geq 1$ . Классом единственности в задаче для коэффициента Фурье  $X_n$  при  $n \geq 1$  будет класс (5.1.50), тогда как классом единственности в задаче

$$\begin{cases} X_0'' = 0, & x > 0, \\ X(0) = 0, \end{cases}$$

будет класс

$$X_n(x) = o(x) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (5.1.58)$$

Пересечением всех классов (5.1.50) с классом (5.1.58) будет класс (5.1.58) как самое сильное из всех ограничений (5.1.50), (5.1.58). Поэтому в рассматриваемом случае  $\mu = 1$  классом единственности в задаче (5.1.55) будет класс

$$u(x, y) = o(x) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in [0, \pi/2]. \quad (5.1.59)$$

Решение задачи (5.1.55) в классе (5.1.59) имеет вид

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n x} \sin(2n+1)y, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq \pi/2.$$

**Случай  $1 < \mu < 3$ .**

Для задачи (5.1.55) при любых значениях  $\mu \in (1, 3)$  класс единственности и решение в нем будут теми же, что и в подробно разобранном выше частном случае  $\mu = \sqrt{2}$ .

## 5.2. Зональные сферические гармоника в методе Фурье для уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона  $\Delta u = f$  в сферических координатах

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, & y &= r \sin \varphi \sin \theta, & z &= r \cos \theta, \\ r &\in [0, \infty), & \varphi &\in [0, 2\pi], & \theta &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

в случае азимутальной симметрии принимает вид

$$(Rtu_r)_r + \frac{(\sin \theta u_\theta)_\theta}{\sin \theta} = Rtf, \quad (5.2.1)$$

где решение  $u = u(r, \theta)$  и правая часть  $f = f(r, \theta)$  не зависят от  $\varphi$ . В таком случае метод Фурье основывается на использовании базиса из собственных функций дифференциального оператора<sup>18</sup>

$$L = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta}, \quad (5.2.2)$$

для построения которого решается задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} Lw = \lambda w, & \theta \in (0, \pi), \\ w(\theta) = \mathcal{O}(1), & \theta \rightarrow 0, \pi, \end{cases} \quad (5.2.3)$$

в классической постановке, т. е. в классе решений  $w \in C^2(0, \pi)$ . При этом условие ограниченности  $w = w(\theta)$  в окрестности концов интервала  $(0, \pi)$  объясняется тем, что уравнение Пуассона  $\Delta u = f$  считается изначально записанным в декартовых координатах для решений класса  $C^2$  в области, содержащей интервалы полуосей  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Поэтому можно уточнить область определения  $D_L$  дифференциального оператора (5.2.2), заметив, что

$$\begin{aligned} u_\theta &= u_x \cos \theta \cos \varphi + u_y \cos \theta \sin \varphi - u_z \sin \theta \\ u_{\theta\theta} &= u_{xx} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + u_{yy} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + u_{zz} \sin^2 \theta + \\ &+ u_{xy} \cos^2 \theta \sin 2\varphi - u_{xz} \sin 2\theta \cos \varphi - u_{yz} \sin 2\theta \sin \varphi \end{aligned}$$

А именно, исходя из классической  $C^2$ -гладкости решения в декартовых координатах во всех внутренних точках области, содержащей, в частности, интервалы полуосей  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , можно выбрать область определения  $D_L = C^2[0, \pi]$ .

Заменой переменной  $\xi = \cos \theta$  дифференциальное уравнение (5.2.3) сводится к уравнению Лежандра, поэтому ограниченные на  $[0, \pi]$  нетривиальные решения  $w \in C^2(0, \pi)$  уравнения (5.2.3) существуют тогда и только

<sup>18</sup>Оператор (5.2.2) является зональной составляющей оператора Лапласа–Бельтрами, который, в свою очередь, определяется как сферическая составляющая оператора Лапласа на единичной сфере в  $\mathbb{R}^3$ .

тогда, когда  $\lambda = -n(n+1)$  при целых  $n \geq 0$ . При этом в задаче Штурма–Лиувилля (5.2.3) собственными функциями оператора  $L$ , соответствующими собственным числам  $\lambda_n = -n(n+1)$ , будут тригонометрические многочлены  $w_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$  с многочленами Лежандра  $P_n = P_n(\xi)$ . Собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами называют сферическими гармониками, и поэтому собственные функции зональной составляющей (5.2.2) оператора Лапласа–Бельтрами естественно назвать зональными сферическими гармониками.

В вещественном пространстве  $L_2(-1, 1)$  квадратично интегрируемых по Риману функций со скалярным произведением<sup>19</sup>

$$(F, G) = \int_{-1}^1 F(\xi)G(\xi) d\xi \quad (5.2.4)$$

процесс ортогонализации Грама–Шмидта при подходящем выборе нормировки превращает систему степеней  $\{\xi^n\}_{n=0}^{\infty}$  в систему многочленов Лежандра  $\{P_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ , что означает полноту последней в  $L_2(-1, 1)$  ввиду полноты в  $C[-1, 1]$  системы  $\{\xi^n\}_{n=0}^{\infty}$  согласно теореме Вейерштрасса. Полная ортогональная система  $\{P_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$  образует в  $L_2(-1, 1)$  ортогональный базис. Принятое для ортогональных многочленов условие стандартизации  $P_n(1) = 1$ ,  $n \geq 0$ , означает, в частности, что

$$\|P_n\|^2 = \int_0^1 |P_n(\xi)|^2 d\xi = \frac{2}{2n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

Обозначим через  $L_{2, \sin \theta}(0, \pi)$  вещественное пространство квадратично интегрируемых по Риману функций с весом  $\sin \theta$ , наделенное веовым ска-

<sup>19</sup>По определению, пространство  $L_2(-1, 1)$  состоит из классов эквивалентности, т. е. классов функций, попарно отличающихся только на множествах меры Жордана ноль. Нулем для  $L_2(-1, 1)$  служит класс функций эквивалентных нулю. При таком определении  $L_2(-1, 1)$  для билинейной формы (5.2.4) выполнены все аксиомы скалярного произведения, а для функционала  $\|F\| = \sqrt{(F, F)}$  — все аксиомы нормы.

лярным произведением и весовой нормой

$$(f, g)_{\sin \theta} = \int_0^{\pi} f(\theta)g(\theta) \sin \theta d\theta, \quad \|f\|_{\sin \theta} = \sqrt{(f, f)_{\sin \theta}}.$$

Система зональных гармоник  $\{P_n(\cos \theta)\}_{n=0}^{\infty}$  образует в весовом пространстве  $L_{2, \sin \theta}(0, \pi)$  ортогональный базис. При этом

$$\|P_n(\cos \theta)\|_{\sin \theta}^2 = \int_0^{\pi} |P_n(\cos \theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

Ряд Фурье по ортогональному базису из сферических гармоник иногда называют рядом Лапласа. В частности всякую функцию  $f \in L_{2, \sin \theta}(0, \pi)$  можно разложить в ряд по зональным гармоникам

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta), \quad (5.2.5)$$

сходящийся в  $L_{2, \sin \theta}(0, \pi)$ , что по умолчанию означает сходимость в норме  $L_{2, \sin \theta}(0, \pi)$ . Коэффициенты  $c_n$  ортогонального разложения (5.2.5) определяются как коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{(f, P_n(\cos \theta))_{\sin \theta}}{\|P_n(\cos \theta)\|_{\sin \theta}^2} = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n \geq 0. \quad (5.2.6)$$

Таким образом, имеются все предпосылки для реализации стандартной схемы метода Фурье при решении краевых задач для уравнения (5.2.1) в таких областях со сферическими границами, как *шар*, *внешность шара* и *сферический концентрический слой*<sup>20</sup> с любым из трех типов краевых условий на каждой из граничных сфер.

Займемся теперь вопросами реализация метода Фурье для уравнения Пуассона с использованием зональных гармоник. Заметим, что дифференциальный оператор  $L$  вида (5.2.2), рассматриваемый как

$$L: D_L = C^2[0, \pi] \subset L_{2, \sin \theta}(0, \pi) \rightarrow L_{2, \sin \theta}(0, \pi)$$

<sup>20</sup>Чаще используется сокращенное название: *сферический слой*.



является симметричным оператором. Действительно,

$$\begin{aligned} (Lv, w)_{\sin \theta} &= \int_0^{\pi} (\sin \theta v'(\theta))' w(\theta) d\theta = \sin \theta v'(\theta) w(\theta) \Big|_0^{\pi} - \sin \theta v(\theta) w'(\theta) \Big|_0^{\pi} + \\ &+ \int_0^{\pi} v(\theta) (\sin \theta w'(\theta))' d\theta = (v, Lw)_{\sin \theta} \quad \forall v, w \in C^2[0, \pi] \end{aligned}$$

Пусть  $I$  — конечный или полубесконечный открытый интервал какого-либо одного из трех возможных видов:  $I = (R_1, R_2)$  или  $I = (0, R)$ ,  $I = (R, \infty)$  с некоторыми положительными заданными  $R_1, R_2, R$ . Классическое решение  $u = u(r, \theta)$  уравнения (5.2.1) попадает в область определения  $D_L = C^2[0, \pi]$  при любых значениях переменной  $r \in I$ , поэтому его коэффициенты Фурье

$$u_n(r) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} u(r, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n \geq 0, \quad (5.2.7)$$

по ортогональному базису  $\{P_n(\cos \theta)\}_{n=0}^{\infty}$ , имея гладкость  $u_n \in C^2(I)$ , удовлетворяют в силу (5.2.1) уравнениям

$$(Rtu'_n)' + \frac{2n+1}{2} (Lu, P_n(\cos \theta))_{\sin \theta} = Rtf_n(r), \quad r \in I, \quad n \geq 0, \quad (5.2.8)$$

где через  $f_n = f_n(r)$  обозначены коэффициенты Фурье

$$f_n(r) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(r, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n \geq 0,$$

правой части  $f = f(r, \theta)$  уравнения (5.2.1). А так как оператор  $L$  симметричен и

$$LP_n(\cos \theta) = \lambda_n P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta), \quad n \geq 0,$$

то в силу (5.2.7) уравнение (5.2.8) превращается в неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение Эйлера

$$Rtu''_n + 2ru'_n - n(n+1)u_n = Rtf_n(r), \quad r \in I, \quad n \geq 0.$$

Рассмотрим простейший частный случай степенной правой части  $f_n(r) = r^\mu$ , т. е. уравнение Эйлера

$$Rtu_n'' + 2ru_n' - n(n+1)u_n = r^{\mu+2}, \quad r \in I. \quad (5.2.9)$$

Замечая, что любая степенная функция будет собственной функцией оператора Эйлера

$$E_n = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} - n(n+1),$$

закключаем, что степенная собственная функция с нулевым собственным числом будет решением однородного уравнения Эйлера. Для каждого  $n \geq 0$  такими решениями будут  $r^n$  и  $r^{-n-1}$ , и для целых  $n$  эти решения линейно независимы. Поэтому общее решение однородного уравнения Эйлера

$$Rt\psi'' + 2r\psi' - n(n+1)\psi = 0, \quad r \in I,$$

имеет вид

$$\psi(r) = ar^n + \frac{b}{r^{n+1}}, \quad r \in I,$$

с произвольными постоянными  $a, b$ .

В случае, когда степень  $r^{\mu+2}$  не является решением однородного уравнения Эйлера, частное решение неоднородного уравнения (5.2.9) ищется в виде  $\psi(r) = cr^{\mu+2}$ , т. е. имеет вид

$$\psi(r) = \frac{r^{\mu+2}}{(\mu+2)(\mu+3) - n(n+1)}.$$

А в случае, когда степень  $r^{\mu+2}$  будет решением однородного уравнения Эйлера, вспоминая, что замена переменной  $r = e^t$  преобразует уравнение Эйлера в уравнение с постоянными коэффициентами, и при этом правая часть оказывается экспоненциальным решением однородного уравнения второго порядка, т. е. частное решение ищется в виде все того же экспоненциального решения, но умноженного на  $t$ . Это означает, что в рассматриваемом случае частное решение следует искать в виде  $cr^{\mu+2} \ln r$ .

### 5.3. Свойства решений уравнений Лапласа и Пуассона

Одним из наиболее важных свойств решений уравнения Лапласа является принцип максимума, который выполняется как в слабой, так и в сильной форме (*слабый и строгий принципы максимума*). Начнем со слабого принципа максимума для ограниченной области.

**Определение 5.3.1.** Функцию  $u \in C^2(\Omega)$  называют гармонической в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , если она удовлетворяет в  $\Omega$  уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ .

#### 5.3.1. Слабый принцип максимума

Для ограниченной области без каких бы то ни было требований к гладкости границы справедлив так называемый слабый принцип максимума

**Теорема 5.3.1** (слабый принцип максимума). *Для любой ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , гармоническая в  $\Omega$  функция  $u \in C(\bar{\Omega})$  не принимает во внутренних точках  $\Omega$  значений как больших ее наибольшего значения на границе, так и меньших ее наименьшего значения на границе, т. е.,*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

*Доказательство.* Введем обозначения для минимума и максимума по границе  $\partial\Omega$ :

$$m = \min_{\partial\Omega} u, \quad M = \max_{\partial\Omega} u. \quad (5.3.1)$$

Предположим, что найдется такая точка  $x^\delta \in \Omega$ , что

$$u(x^\delta) = M + \delta \quad (5.3.2)$$

с некоторым положительным  $\delta$ . Вводя параметр  $\varepsilon \in (0, \delta)$ , обозначим через  $\eta_\varepsilon$  однопараметрическую функцию вида

$$\eta_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq M + \varepsilon, \\ (\xi - M - \varepsilon)^2, & \xi > M + \varepsilon, \end{cases} \quad (5.3.3)$$

и заметим, что  $\eta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  для каждого значения параметра  $\varepsilon \in (0, \delta)$ , при этом функция  $\eta_\varepsilon(u)$  будет финитной<sup>21</sup> в области  $\Omega$  в силу определения (5.3.1) числа  $M$ .

Умножив равенство  $\Delta u = 0$  на  $\eta_\varepsilon(u)$ , после интегрирования по  $\Omega$  с помощью формулы Грина получим

$$0 = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(u) \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \eta_\varepsilon(u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, ds - \int_{\Omega} \eta'_\varepsilon(u(x)) |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ , а интеграл по  $\partial\Omega$  равен нулю ввиду финитности функции  $\eta_\varepsilon(u)$  в области  $\Omega$  при  $\varepsilon \in (0, \delta)$ . Поэтому

$$\int_{\Omega} \eta'_\varepsilon(u(x)) |\nabla u(x)|^2 \, dx = 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta), \quad (5.3.4)$$

откуда находим

$$\eta'_\varepsilon(u(x)) |\nabla u(x)|^2 = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta),$$

так как  $\eta'_\varepsilon \geq 0$ . А умножая последнее равенство на  $\eta'_\varepsilon$  получаем

$$|\eta'_\varepsilon(u(x)) \nabla u(x)|^2 = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta),$$

что эквивалентно равенству

$$|\nabla \eta_\varepsilon(u(x))|^2 = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta),$$

которое означает существование для каждого значения  $\varepsilon \in (0, \delta)$  такой постоянной  $C_\varepsilon$ , что  $\eta_\varepsilon(u(x)) = C_\varepsilon \quad \forall x \in \Omega$ , откуда в силу непрерывности функции  $\eta_\varepsilon(u)$  в замыкании  $\bar{\Omega}$  и ее финитности в области  $\Omega$  следует равенство

$$\eta_\varepsilon(u(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta). \quad (5.3.5)$$

На основании тождества (5.3.5) и явного вида (5.3.3) функции  $\eta_\varepsilon$  заключаем, что гармоническая функция удовлетворяет неравенству

$$u(x) \leq M + \varepsilon \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta),$$

<sup>21</sup>Напомним, что функцию  $f \in C(\Omega)$  называют финитной в области  $\Omega$ , если  $f = 0$  вне некоторого компакта  $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Поскольку, по определению, компакт — это ограниченное замкнутое множество, а область — это открытое связное множество, то  $\text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$  и поэтому каждая финитная в области  $\Omega$  функция тождественно равна нулю в некоторой окрестности границы  $\partial\Omega$ .

что противоречит предположению (5.3.12). Таким образом, неравенство

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (5.3.6)$$

доказано. Для доказательства неравенства

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (5.3.7)$$

достаточно заметить, что справедливость неравенства (5.3.7) вытекает из уже доказанного неравенства (5.3.6) при замене  $u$  на  $-u$ . Теорема доказана.  $\square$

*Замечание 1.* Для неограниченных областей  $\Omega$  теорема, вообще говоря, неверна. Так, для области  $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ , пример задачи Дирихле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{x_n=0} = 0$  с решением  $u(x) = x_n$  показывает, что неравенство (5.3.6) не выполняется ни в одной точке области  $\Omega$ .

Из доказанной теоремы вытекают три следствия.

**Следствие 5.3.1.** Гармоническая в ограниченной области  $\Omega$  функция  $u = u(x)$  удовлетворяет неравенству

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad (5.3.8)$$

**Следствие 5.3.2.** Гармоническая функция, непрерывная вплоть до границы и равная нулю на границе ограниченной области  $\Omega$ , тождественно равна нулю во всей области.

**Следствие 5.3.3.** Классическое решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \psi, \end{cases}$$

единственно в любой ограниченной области  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  без каких бы то ни было предположений о гладкости границы  $\partial\Omega$ .

*Доказательство.* Пусть имеется два решения  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда их разность  $v = u_1 - u_2$  есть гармоническая функция с нулевыми условиями на границе:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,  $v \equiv 0$  в  $\Omega$ , т. е.  $u_1 \equiv u_2$  в  $\Omega$ . □

**Следствие 5.3.4.** Из принципа максимума вытекает непрерывная зависимость решения задачи Дирихле от граничных данных для произвольной ограниченной области  $\Omega$ .

*Доказательство.* Действительно, пусть  $u_1$  и  $u_2$  — какие-либо два решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области  $\Omega$  с граничными данными  $u_1|_{\partial\Omega} = \psi_1$  и  $u_2|_{\partial\Omega} = \psi_2$ , с оценкой разности  $|\psi_1 - \psi_2| < \varepsilon$  по границе  $\partial\Omega$ . Согласно следствию 5.3.1 имеем оценку разности решений  $|u_1 - u_2| < \varepsilon$  по области  $\Omega$ , что и требовалось доказать. □

**Следствие 5.3.5.** Если последовательность функций  $u_n(x)$ , гармонических в ограниченной области  $\Omega$  и непрерывных вплоть до границы, равномерно сходится на границе  $\partial\Omega$ , то она равномерно сходится и в замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$ .

*Доказательство.* Для доказательства рассмотрим последовательность гармонических функций  $\{u_n(x)\}$ , и пусть  $\{\psi_n\}$  — их граничные значения на  $\partial\Omega$ . По предположению, последовательность  $\{\psi_n\}$  равномерно сходится на  $\partial\Omega$ . По критерию Коши это значит, что  $\forall \varepsilon > 0$  существует номер  $N$ , что при  $m, n > N$  всюду на  $\partial\Omega$ :  $|\psi_n - \psi_m| < \varepsilon$ . Но тогда из принципа максимума для этих  $n$  и  $m$  будет следовать, что  $|u_n - u_m| < \varepsilon$  всюду в  $\bar{\Omega}$ . Но тогда опять же по критерию Коши заключаем, что последовательность  $\{u_n\}$  равномерно сходится в  $\bar{\Omega}$ . □

### 5.3.2. Теоремы о среднем для гармонических функций по сфере и шару.

Функцию  $u \in C^2(\Omega)$  называют гармонической в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , если она удовлетворяет в  $\Omega$  уравнению Лапласа. Обозначим через  $B_\rho(x^\circ)$  открытый шар радиуса  $\rho > 0$  с центром в точке  $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ , т. е.  $B_\rho(x^\circ) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x - x^\circ| < \rho\}$ . Символом  $\omega_n$  обозначим площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ , т. е.

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad n \geq 2,$$

где  $\Gamma$  — это гамма-функция, т. е.  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ .

**Теорема 5.3.2** (о среднем по сфере). *Функция  $u \in C^2(B_R(x^\circ))$ , гармоническая в шаре  $B_R(x^\circ)$ ,  $R > 0$ , удовлетворяет равенству*

$$u(x^\circ) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x^\circ)} u(x) ds \quad \forall \rho \in (0, R). \quad (5.3.9)$$

*Доказательство.* Для гармонической в  $B_R(x^\circ)$  функции  $u$  обозначим через  $M_n(\rho)$  ее среднее значение по единичной сфере  $\{x \in \mathbb{R}^n: |x - x^\circ| = 1\}$ , т. е.

$$M_n(\rho) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} u(x^\circ + \rho y) ds_y \quad \forall \rho \in (0, R), \quad (5.3.10)$$

и заметим, что в силу предполагаемой гладкости  $u$  производная

$$M'_n(\rho) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} (\nabla u(x^\circ + \rho y), y) ds_y \quad \forall \rho \in (0, R),$$

откуда, переходя к интегралу по сфере  $|y| = \rho$ , находим

$$M'_n(\rho) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|y|=\rho} (\nabla u(x^\circ + y), \mathbf{n}_y) ds_y \quad \forall \rho \in (0, R),$$

где  $\mathbf{n}_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{|y|}$ . Воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса, получим

$$M'_n(\rho) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|y|<\rho} \Delta u(x^\circ + y) dy = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{B_\rho(x^\circ)} \Delta u(x) dx = 0 \quad \forall \rho \in (0, R),$$

т. е. производная  $M'_n = 0$  на  $(0, R)$  и поэтому существует такая постоянная  $C$ , что среднее по единичной сфере  $M_n = C$  на  $(0, R)$ . А тогда, переходя в (5.3.10) к пределу при  $\rho \rightarrow 0$ , заключаем, что  $C = M_n(0) = u(x^\circ)$ .

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 5.3.6** (о среднем по шару). Для функции, гармонической в шаре  $B_R(x^\circ)$ , ее значение в центре шара равно среднему арифметическому по шару, т. е.

$$u(x^\circ) = \frac{n}{\omega_n \rho^n} \int_{B_\rho(x^\circ)} u(x) dx \quad \forall \rho \in (0, R). \quad (5.3.11)$$

Для доказательства достаточно умножить обе части равенства (5.3.9) на  $\omega_n \rho^{n-1}$  и проинтегрировать по  $\rho$ , что сразу же приводит к равенству (5.3.11).

### 5.3.3. Строгий принцип максимума для гармонических функций и его следствия.

Утверждение следующей теоремы принято называть строгим принципом максимума для гармонических функций. Важно, что строгий принцип максимума не нуждается в требовании ограниченности области.

**Теорема 5.3.3.** Пусть  $\Omega$  — любая область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Тогда гармоническая в  $\Omega$  функция, отличная от тождественной постоянной, не принимает ни в одной внутренней точке  $\Omega$  значений своих верхней и нижней граней.

*Доказательство.* Предположим противное, а именно, пусть найдется точка  $x^\circ \in \Omega$ , в которой

$$u(x^\circ) = \sup_{\Omega} u. \quad (5.3.12)$$



Не ограничивая общности<sup>22</sup>, будем считать, что  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ . Поэтому найдется такое число  $\rho \in (0, \infty)$ , что  $\rho = \text{dist}(x^\circ, \partial\Omega)$ . Рассмотрим открытый шар

$$B_\rho(x^\circ) = \{x \in \Omega: |x - x^\circ| < \rho\}.$$

Из определения гармонической функции следует ее непрерывность в шаре  $B_\rho(x^\circ)$ . А тогда наличие в этом шаре точек со значениями строго меньше чем  $u(x^\circ)$  означало бы, что Жорданова мера множества таких точек строго положительна, что противоречило бы теореме о среднем по шару  $B_\rho(x^\circ)$ . Поэтому таких точек в шаре  $B_\rho(x^\circ)$  нет. А тогда рассматриваемая гармоническая функция  $u \equiv u(x^\circ)$  в шаре  $B_\rho(x^\circ)$ .

Используя те же рассуждения, можно добраться до любой точки  $x \in \Omega$  по конечной цепочке пересекающихся шаров, в каждом из которых рассматриваемая гармоническая функция  $u \equiv u(x^\circ)$ . Тем самым будет доказано, что для гармонической функции, отличной от тождественной постоянной, предположение (5.3.12) неверно. Таким образом, доказано, что гармоническая функция, отличная от тождественной постоянной, не принимает ни в одной внутренней точке  $\Omega$  значение своей верхней грани. Чтобы доказать справедливость утверждения теоремы для значения нижней грани, достаточно сослаться на уже доказанное утверждение теоремы для верхней грани, заменив функцию  $u$  на  $-u$ .

Теорема доказана □

*Замечание 2.* Если  $\Omega$  — ограниченная область,  $u \in C(\bar{\Omega})$ , то, верхняя и нижняя грани значений функции  $u = u(x)$  в  $\Omega$  совпадают, соответственно, с ее максимальным и минимальным значениями в  $\bar{\Omega}$ .

**Следствие 5.3.1.** Отличная от тождественной постоянной гармоническая в ограниченной области  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  функция  $u \in C(\bar{\Omega})$  принимает свое наибольшее и наименьшее значение только на  $\partial\Omega$ .

---

<sup>22</sup>Случай  $\Omega = \mathbb{R}^n$  не представляет интереса ввиду наличия теорем Лиувилля, которые исключают существование ограниченных или даже полуограниченных гармонических функций, отличных от тождественных постоянных.

**Следствие 5.3.2.** Если гармоническая в ограниченной области функция  $u \in C(\bar{\Omega})$  принимает свое наибольшее или наименьшее значение внутри области, то она тождественно равна постоянной.

### 5.3.4. Потенциалы простого и двойного слоя

Рассмотрим классическое решение  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(x) \quad (1)$$

в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей.

**Лемма 5.3.1.** Для любой точки  $x^\circ \in \Omega$  имеет место представление:

$$u(x^\circ) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} f(x) dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_x, \quad (2)$$

где  $r \stackrel{\text{def}}{=} |x - x^\circ|$ ,  $n$  — единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ , а  $f = f(x) \in C(\Omega)$  такова, что первый интеграл в правой части (2) существует, например,  $f \in C(\bar{\Omega})$ .

*Доказательство.* Вырежем точку  $x^\circ \in \Omega$  шаром  $B_\varepsilon(x^\circ)$  достаточно малого радиуса  $\varepsilon$  и используем вторую формулу Грина, в которой в качестве функции  $v = v(x)$  выберем  $v(x) = -1/r$ , где  $r = |x - x^\circ|$ . Очевидно,  $\Delta \frac{1}{r} = 0$  в  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x^\circ)$ . При этом из второй формулы Грина находим

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x^\circ)} \frac{1}{r} \Delta u dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x^\circ)} \left( -\frac{1}{r} \Delta u + u \Delta \frac{1}{r} \right) dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_x + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_x. \end{aligned}$$

Рассмотрим предел последнего слагаемого при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для единичной внешней нормали к сфере радиуса  $\varepsilon$  выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds_x &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} u(x) ds_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} [u(x) - u(x^\circ)] ds_x + \frac{1}{\varepsilon^2} u(x^\circ) \int_{\partial B_\varepsilon} ds_x = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} [u(x) - u(x^\circ)] ds_x + 4\pi u(x^\circ). \end{aligned}$$

А так как  $u(x) \in C(\bar{\Omega})$ , то  $|u(x) - u(x^\circ)| \leq \varepsilon_1$  при  $|x - x^\circ| \leq \varepsilon$ , откуда находим

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} [u(x) - u(x^\circ)] ds_x \right| \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi \varepsilon_1.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} u(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds_x = 4\pi u(x^\circ).$$

В силу ограниченности  $|\frac{\partial u}{\partial n}| \leq M$  в  $\bar{\Omega}$ , имеем

$$\left| - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds_x \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M}{\varepsilon} \cdot 4\pi \varepsilon^2 = 0.$$

Подставляя значения рассмотренных пределов в (3), получаем:

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx = 4\pi u(x^\circ) + \int_{\partial \Omega} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds_x,$$

Откуда, заменяя  $-\Delta u$  на  $f(x)$ , получаем формулу (2). Лемма доказана.  $\square$

Если бы были известны одновременно граничные данные  $u|_{\partial \Omega}$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial \Omega}$  для решения уравнения (1), то формула (2) давала бы явное представление решения краевой задачи для уравнения Пуассона (1) в произвольной ограниченной области. Однако, мы не можем произвольно задать  $u|_{\partial \Omega} = \varphi_1(x)$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial \Omega} = \varphi_2(x)$  (в данном случае можно задать или  $u|_{\partial \Omega}$ , или  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial \Omega}$ ), и поэтому формула (2) не дает решения краевой задачи. Тем не менее, формулу (2) используют для представления решения краевой задачи через функцию Грина. Интегралы же, входящие в (2), имеют непосредственный физический смысл. Так, первый из интегралов в правой части (2) называется

ньютоновским потенциалом с плотностью  $f = f(x)$ . Интеграл  $\int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \varphi_2(x) ds_x$  называется потенциалом простого слоя с плотностью  $\varphi_2(x)$ , а интеграл  $\int_{\partial\Omega} \varphi_1(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds_x$  называется потенциалом двойного слоя с плотностью  $\varphi_1(x)$ . С помощью потенциалов простого и двойного слоя можно строить решения задач Неймана и Дирихле для уравнений Лапласа (и Пуассона), сводя эти задачи к интегральным уравнениям.

**Следствие 5.3.3** (о бесконечной дифференцируемости гармонических функций). Гармоническая в  $\Omega$  функция  $u(x)$  имеет в каждой точке внутри области  $\Omega$  непрерывные производные любого порядка.

Доказательство следует из интегрального представления (5) гармонической функции в виде потенциалов, так как стоящие в правой части интегралы можно дифференцировать по параметру  $x^\circ$  любое число раз во всякой подобласти  $\omega \subset \bar{\Omega}$  такой, что  $\bar{\omega} \subset \Omega$  (т.е. когда  $\text{dist}(\omega, \partial\Omega) = h \gg 0$ ), ввиду бесконечной дифференцируемости по  $x^\circ \in \Omega$  при  $|x - x^\circ| \geq h_0 > 0$  функции

$$\mathcal{E}_3(x, x^\circ) = -\frac{1}{4\pi|x - x^\circ|},$$

которую называют фундаментальным решением оператора Лапласа.

# Приложение А

## Некоторые справочные сведения

### А.1. Лемма ДюБуа-Реймонда

### А.2. Операция усреднения

### А.3. Срезающие функции и разбиение единицы

### А.4. Полезные неравенства

Inequalities, most frequently used throughout the text, are presented in this Chapter without proofs just for the reference in order to make reading the text easier and to avoid making additional comments.

#### А.4.1. Young's Inequality

For real-valued functions  $\varphi, \psi \in C[0, \infty)$ , denote

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(t) dt \quad \forall x \geq 0,$$

where  $\varphi$  is strictly increasing such that  $\varphi(0) = 0$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$  while  $\psi = \varphi^{-1}$ . The Young's inequality

$$a \cdot b \leq \Phi(a) + \Psi(b)$$

is valid for all  $a, b \in [0, \infty)$  with equality taking place if and only if  $b = \varphi(a)$ .

The standard proof of the Young's inequality can be found in [?] or elsewhere. Choosing  $\varphi(t) = t^{p-1}$  for  $p \in (1, \infty)$ , we arrive at the most widely known special case of the Young's inequality

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall a, b \in [0, \infty)$$

where  $p' = p/(p-1)$ . Equality holds here if and only if  $a^p = b^{p'}$ . Exponents  $p$  and  $p'$  are called conjugate.

#### A.4.2. Hölder's Inequality

Given any domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , let functions  $f \in L_p(\Omega)$  and  $g \in L_{p'}(\Omega)$ , where exponents  $p \in (1, \infty)$  and  $p' = p/(p-1)$  are called conjugate. Then  $f \cdot g \in L_1(\Omega)$  and the Hölder's inequality holds

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

A rather trivial standard proof of the Hölder's inequality, which reduces to applying the Young's inequality, can be found in [?] or elsewhere. In special case of  $p = p' = 2$ , the Hölder's inequality is often called Cauchy's inequality, or Cauchy–Bunyakovskii's inequality, or Cauchy–Schwarz's inequality, and sometimes even Cauchy–Bunyakovskii–Schwarz's inequality.

#### A.4.3. Generalized Hölder's Inequality

Given any domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , let functions  $f_j \in L_{p_j}(\Omega)$  where  $p_j \in (1, \infty)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 2$ , with the sum

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} = 1.$$

Then the product

$$\prod_{j=1}^m f_j \in L_1(\Omega),$$

and the generalized Hölder's inequality holds

$$\left| \int_{\Omega} \prod_{j=1}^m f_j(x) dx \right| \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L_{p_j}(\Omega)}.$$

The generalized Hölder's Inequality is a rather obvious corollary of its special case  $m = 2$ , *i.e.* the Hölder's inequality itself.

#### A.4.4. Minkowski's Inequalities for Sums

1. TRIANGLE INEQUALITY. Let  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ , and  $p \in [1, \infty)$ . Then the triangle inequality holds for the sums

$$\left( \sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

with  $m$  being finite or infinite. The proof can be found in [?].

2. HÖLDER'S TYPE INEQUALITY. Let  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ . Then the Hölder's type inequality holds for the sum

$$\sum_{k=1}^m |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

with conjugate exponents  $p \in [1, \infty)$  and  $p' = p/(p - 1)$ , where  $s$  is finite or infinite. The proof can be found in [?].

#### A.4.5. Cauchy's Estimates for Holomorphic Functions

Let  $f: G \mapsto B$  be a holomorphic function in domain  $G \subset \mathbb{C}$  taking values in Banach space  $B$ . For real positive  $r > 0$ , denote

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - a| < r\}$$

an open disc in the complex plane  $\mathbb{C}$  centered at some point  $a \in G$  such that  $\text{dist}(a, \partial G) > r$ . Inequalities

$$\frac{r^n}{n!} \cdot \|f^{(n)}(a)\|_B \leq \max_{|z-a|=r} \|f(z)\|_B \quad \forall n \geq 1$$

are called the Cauchy's estimates for holomorphic function  $f$  in the disc  $D(a, r)$ , where notation  $f^{(n)}$  stands for the  $n$ -th order  $\mathbb{C}$ -derivative of  $f$ . For further details and proofs see Ch. VII in [?].

## **A.5. Другие примеры задач математической физики**

### **A.5.1. Телеграфные уравнения**

### **A.5.2. Уравнение поперечных колебаний балки**

### **A.5.3. Уравнение Гельмгольца в теории оптических волноводов**



# Приложение В

## Некоторые методические рекомендации

### В.1. Метод интегральных преобразований

### В.2. Метод искусственного параметра в задаче Коши

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = x \sin(x + y + z), & u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2.1})$$

**Решение.**

Вместо задачи (B.2.1) рассмотрим вспомогательную задачу с искусственным параметром  $p$ :

$$\begin{cases} v_{tt} = \Delta v, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ v|_{t=0} = -\cos(px + y + z), & v_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2.2})$$

Очевидно, функция  $F(x, y, z, p) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(px + y + z)$  будет собственной функцией оператора Лапласа

$$\Delta F = -(p^2 + 2)F = \lambda(p)F$$

с собственным числом  $\lambda(p) = -(p^2 + 2)$ .

Решение задачи Коши (B.2.2) ищется в виде

$$v(x, y, z, t, p) = \varphi(t)F(x, y, z, p) = \varphi(t) \cos(px + y + z), \quad (\text{B.2.3})$$

функция  $\varphi$  определяется как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \varphi''(t) + (p^2 + 2)\varphi(t) = 0, & t > 0, \\ \varphi(0) = -1, \quad \varphi'(0) = 0, \end{cases}$$

которое имеет вид

$$\varphi(t) = -\cos\left(t\sqrt{p^2 + 2}\right),$$

откуда и из (В.2.3) находим решение вспомогательной задачи (В.2.3):

$$v(x, y, z, t, p) = -\cos\left(t\sqrt{p^2 + 2}\right) \cos(px + y + z).$$

А теперь, полагая  $u(x, y, z, t) \stackrel{\text{def}}{=} v_p|_{p=1}$ , заметим, что

$$u|_{t=0} = x \sin(x + y + z), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

При этом, в силу построения, функция  $u$  удовлетворяет волновому уравнению

$$u_{tt} = \Delta u,$$

что завершает решение задачи (В.2.3).

**Ответ:**  $u(x, y, z, t) = x \sin(x + y + z) \cos(t\sqrt{3}) + \frac{2t}{\sqrt{3}} \sin(t\sqrt{3}) \cos(px + y + z).$

### В.3. Интегрирование ДУЧП первого порядка

### В.4. Как найти класс единственности для краевой задачи

# Приложение С

## Примеры решения задач методом Фурье

### С.1. Начально-краевые задачи

*Пример 1.* Решим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi, & 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = 1, & u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Оператор  $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$  с областью определения

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{\psi(x) : \psi \in C^2[0, \pi], \psi(0) = \psi(\pi) = 0\}$$

симметричен (см. пример 1). Поэтому все его собственные числа вещественные. Так как  $\mathcal{L}$  — неположительно определенный оператор, все его собственные числа неположительные. Задачу (1) перепишем в виде

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно два случая:  $\lambda = 0$  и  $\lambda < 0$ .

1. Если  $\lambda = 0$ , то  $X''(x) = 0$  и  $X(x) = C_1x + C_2$ . Из краевых условий следует, что  $C_1 = C_2 = 0$ , т. е.  $X(x) \equiv 0$ . Следовательно,  $\lambda = 0$  не является собственным числом.

2. Если  $\lambda < 0$  переобозначим  $\lambda$  полагая  $\lambda = -\mu^2$ , где  $\mu \neq 0$  - вещественное число. Тогда  $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$  и  $X = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$ . Из краевых условий находим  $C_1 = 0$  и  $C_2 \sin \mu \pi = 0$ . Нетривиальные решения будут существовать тогда и только тогда, когда  $\sin \mu \pi = 0$ , т.е.  $\mu = k$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ . А чтобы решения были линейно независимые, следует взять  $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом, найдены все собственные функции и собственные числа оператора  $\mathcal{L}$ :

$$\begin{cases} X_k(x) = \sin kx, \\ \lambda_k = -k^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Постоянная  $C_2$  выбрана равной единице, поскольку решение задачи (1) можно нормировать ненулевым множителем.

Согласно [5], [6] система  $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$  полна в  $L_2(0, \pi)$ . А так как оператор  $\mathcal{L}$  симметричен и все его собственные числа простые, система  $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$  образует ортогональный базис в  $L_2(0, \pi)$ . Разложим обобщенное решение задачи (1) в ряд по полученному ортогональному базису:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \quad (2)$$

Для коэффициентов разложения  $T_k(t)$  получаем задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) = \lambda_k T_k(t), \quad 0 < t < T, \\ T_k(0) = \frac{(1, \sin kx)}{\|\sin kx\|^2}, \quad T_k'(0) = 0, \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что  $\|\sin kx\|^2 = \pi/2 \quad \forall k \geq 1$  и

$$\begin{aligned} (1, \sin kx) &= \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{1}{k}(1 - \cos k\pi) = \\ &= \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} \frac{2}{2m+1}, & k = 2m+1, \\ 0, & k = 2m, \end{cases} \end{aligned}$$

т. е. при  $k = 2m$  ноль будет решением задачи (3), а других решений при  $k = 2m$  не будет ввиду единственности решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Таким образом,  $T_{2m}(t) \equiv 0$ , а при  $k = 2m + 1$  имеем

$$T_{2m+1}(t) = A_m \cos(2m + 1)t + B_m \sin(2m + 1)t,$$

где постоянные  $A_m, B_m$  определяются из условий

$$T_{2m+1}(0) = \frac{4}{\pi(2m + 1)}, \quad T'_{2m+1}(0) = 0, \quad m \geq 0,$$

т. е.  $A_m = \frac{4}{\pi(2m+1)}$ ,  $B_m = 0$ ,  $m \geq 0$ . Следовательно

$$T_{2m+1}(t) = \frac{4}{\pi(2m + 1)} \cos(2m + 1)t, \quad m \geq 0. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получаем

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m + 1)t}{2m + 1} \sin(2m + 1)x. \quad (5)$$

Обобщенное решение задачи (1) найдено и имеет вид (5). Ряд (5) сходится в  $L_2(\Pi_T)$  и поточечно в  $\Pi_T$ . Равномерно в  $\Pi_T$  ряд (5) не сходится. Классическое решение задачи (1) не существует, поскольку начальное условие  $u|_{t=0} = 1$  не удовлетворяет необходимым условиям согласования. А классическая схема метода Фурье к задаче (3) не применима, так как ряд (5) нельзя дифференцировать почленно.

## С.2. Краевые задачи

# Популярные Интернет-ресурсы

1. Веб-сайт **EqWorld** «Мир математических уравнений» — многоязычный общеобразовательный и справочный Интернет-ресурс по линейным и нелинейным дифференциальным и функциональным уравнениям. Имеется библиотека с книгами по математике, механике, физике, а также ссылки как на отдельные книги, так и на библиотеки, размещенные в Интернете:

<http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm/>

2. **Математическая энциклопедия** — энциклопедия в 5 томах под редакцией И.М. Виноградова — М., *Советская энциклопедия*, 1977:

[http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc\\_mathematics/](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/)

3. Интерактивный веб-сайт **Wolfram Alpha** — инновационный подход к приобретению знаний и поиску ответов на вопросы из любого раздела математики, основываясь не на обыденном поиске в сети *Интернет*, а на динамических вычислениях, использующих обширную коллекцию встроенных данных, алгоритмов и методов:

<http://www.wolframalpha.com/>

4. Интерактивный веб-сайт **Mathematics Stack Exchange** в стиле Q&A (=Question-and-Answer), т. е. в стиле вопрос-ответ, является частью обширной сети Stack Exchange, охватывающей более 170 веб-сайтов. **Mathematics Stack Exchange** является эффективным образовательным ресурсом для изучающих любой раздел математики на любом уровне — от начинающего до профессионала:

<http://math.stackexchange.com>



# Литература

- [1] *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — М.: Физматлит, 2014.
- [2] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — М.: Наука, 1988.
- [3] *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., переработанное и дополненное. — М.: Физматлит, 2016.
- [4] *Демидович Б. П.* Простое доказательство теоремы о среднем значении для гармонических функций. — УМН, 1954, Т. 9, вып. 3(61), С. 213—214
- [5] *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001.
- [6] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. — М.: Наука, 1988.
- [7] *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 2-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
- [8] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1997.
- [9] *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — М.: ИФ Яуза, 1998.
- [10] *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. *Университетская серия.* — Т. 7. — Новосибирск: «Тамара Рожковская», 2003.



Дополнительная литература

- [11] *Арнольд В.И.* Лекции об уравнениях с частными производными. 2-е изд. — М.: Фазис, 1997.
- [12] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
- [13] *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
- [14] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
- [15] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969.
- [16] *Axler A., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic functions theory. 2<sup>nd</sup> ed. — N.Y.: Springer, 2001.
- [17] *Brezis H.* Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. *Universitext*. — N.Y.: Springer, 2011.
- [18] *Evans L.* Partial differential equations. Second edition. *Graduate Studies in Mathematics*. — Vol. 19. — Providence, RI: AMS, 2010.

# Предметный указатель

краевые — условия

- сопряженные, ??
- самосопряженные, ??

лемма

- ДюБуа–Реймонда, ??

неравенство

- Гёльдера, ??
- Коши, ??
- Коши–Буняковского, ??
- Минковского, ??
- Юнга, ??

производная

- классическая, ??
- слабая, ??

пространство

- Лебега, ??
- Шварца, ??
- Соболева, ??

решение

- классическое, ??
- обобщенное, ??, ??
- сильное, ??, ??
- слабое, ??

теорема

- Гильберта–Шмидта
- Ковалевской, ??, ??, ??
- Коши, ??
- Коши–Ковалевской, ??

уравнение

- волновое, ??
- гиперболическое, ??
- параболическое, ??
- эллиптическое, ??

Фурье

- метод, ??,
- преобразование, ??, ??, ??