Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Г. Г. Амосов

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЯМ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2019

УДК 519.216;517.98;530.145(075)
ББК 22.162;22.171;22.314я73
А61

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, заведующий отделом
Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН *Ю. Н. Орлов*

Профессор РАН, доктор физико-математических наук
ведущий научный сотрудник Математического института
им. В.А. Стеклова РАН *М. Е. Широков*

Амосов, Григорий Геннадьевич

А61 Лекции по математическим основаниям квантовой механики : учебное пособие / Г. Г. Амосов. – Москва : МФТИ, 2019. – 92 с.

ISBN 978-5-7417-0719-7

Предлагаемое учебное пособие основано на лекциях по курсам «Математические основания квантовой механики» и «Классические и квантовые случайные процессы», читаемых автором в течение ряда лет студентам МФТИ.

Предназначено для бакалавров и магистров МФТИ, изучающих математические задачи, возникающие в квантовой механике, квантовую вероятность и квантовую информатику.

УДК 519.216;517.98;530.145(075)
ББК 22.162;22.171;22.314я73

ISBN 978-5-7417-0719-7

Оглавление

Введение

Квантовой механике посвящено обширное количество учебников и монографий. Тем не менее они часто построены по принципу или изложению: *физика для физиков* или *математика для математиков.*

Доказательство А. С. Холево и независимо Б. Шумахером и М. Вестморелендом *квантовой теоремы кодирования* в 1996 г. привело к бурному развитию новой дисциплины – *квантовой теории вероятностей*, требующей особого синтетического взгляда, неразрывно связывающего математику и физику.

Прекрасные книги А. С. Холево, вышедшие и переизданные в последние годы, конечно, заслужили всеобщее признание среди профессионалов, занимающихся квантовой теорией вероятностей. Между тем в них были опущены некоторые важные части теории, касающиеся, например, действия преобразования Фурье на канонические наблюдаемые, квантовой томографии и квантовых случайных процессов в пространстве Фока.

В предлагаемых лекциях, тоже не претендующих на полноту, восполнены эти пробелы. Изложение построено, начиная с азов теории, восходящей к пионерским работам Дж. фон Неймана.

Автор выражает благодарность Ивану Сергееву, студенту ФОПФ МФТИ, за составление электронного конспекта, который лег в основу этой книги.

Список обозначений

$\mathfrak{A}$ – множество наблюдаемых

$\mathfrak{S}$ – множество состояний

P_A^ρ – распределение вероятностей на прямой, отвечающее $A \in \mathfrak{A}$, $\rho \in \mathfrak{S}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – алгебра борелевских множеств на прямой

q, p – наблюдаемые координаты и импульса

$\langle\psi|$, $|\psi\rangle$ – векторы бра и кет

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в контексте квантовой механики

$(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в абстрактном гильбертовом пространстве

$\mathcal{D}(A)$ – область определения оператора A

$Spect(A)$ – спектр оператора A

$||f||_\infty = \sup\limits_x |f(x)|$ – равномерная норма функции f

$||A||$ – спектральная норма оператора A

$span(X_j)$ – линейная оболочка элементов X_j

$F(H)$ – симметричное (бозонное) пространство Фока над одночастичным сепарабельным гильбертовым пространством H

Лекция 1

1.1. Аксиомы Макки

Знаменитый американский математик Джордж Макки прочитал в 1960 году в Гарвардском университете курс лекций по математическим основаниям квантовой механики. Эти лекции были изданы на английском языке в 1963 году, а в скором времени переведены и на русский язык [7]. В книге Макки были впервые математически точно сформулированы аксиомы квантовой механики.

Имеется два множества: $\mathfrak{A}$, элементы которого называются *наблюдаемыми*, и $\mathfrak{S}$ – *множество состояний*. Для любой наблюдаемой $A \in \mathfrak{A}$ и для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}$ на алгебре борелевских подмножеств вещественной прямой $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ определена функция $P_A^\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$, обладающая следующими свойствами:

1) $P_A^\rho(\emptyset) = 0$;

2) $P_A^\rho(\mathbb{R}) = 1$;

3) $P_A^\rho\left(\bigcup\limits_k B_k\right) = \sum\limits_k P_A^\rho(B_k)$, если множества $B_j \cap B_k = \emptyset$ для любых $j \neq k$.

Величина $P_A^\rho(B)$ равна вероятности того, что наблюдаемая A примет значение из множества B, если состояние системы ρ.

Аксиома 1.1. *1) Если $P_A^\rho(B) = P_{\tilde{A}}^\rho(B)$, тогда $A = \tilde{A}$.*

2) Если $P_A^\rho(B) = P_A^{\tilde{\rho}}(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и всех $A \in \mathfrak{A}$, тогда $\rho = \tilde{\rho}$.

Аксиома 1.2. *Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевская функция, то есть $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда существует единственная наблюдаемая $A^f \in \mathfrak{A}$ такая, что $P_{A^f}^\rho(B) = P_A^\rho\left(f^{-1}(B)\right)$. Эту наблюдаемую будем обозначать $f(A)$.*

Аксиома 1.3. *Пусть $\rho_k \in \mathfrak{S}$ – набор состояний, $\pi_k \geq 0 : \sum\limits_k \pi_k = 1$ – дискретное распределение вероятностей. Тогда $\overline{\rho} = \sum\limits_k \pi_k \rho_k \in \mathfrak{S}$, при этом $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ вероятность $P_A^{\overline{\rho}}(B) = \sum\limits_k \pi_k P_A^{\rho_k}(B)$. состояние $\overline{\rho}$ называется* ***смесью*** *или* ***смешанным состоянием****.*

Замечание 1.1 (к аксиоме 1.2)**.** Если понимать наблюдаемые как измерения, то п. 2) аксиомы 1.1 можно переформулировать следующим образом: *если все измерения для двух состояний совпадают, то эти состояния совпадают.*

Замечание 1.2. В связи с аксиомой 1.2 возникают вопросы о существовании полного набора измерений и полного набора состояний. В качестве примера полного набора наблюдаемых (измерений) можно привести линейные комбинации операторов координаты и импульса, а также операторов проекции спина на всевозможные направления. Такой тематикой занимается *квантовая томография* [33]. Примером полного набора состояний служат *когерентные состояния*, широко применяющиеся в *квантовой оптике*, возникшей благодаря пионерским работам [30, 45].

Определение 1.1. Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевская функция. Тогда среднее значение функции от наблюдаемой определяется по формуле

$$\langle f(A) \rangle_\rho = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, dP_A^\rho(x),$$

где интегрирование ведётся по вероятностной мере P_A^ρ.

Нашей ближайшей задачей будет поиск конкретных множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{S}$, для которых выполняются аксиомы Макки.

1.2. Подходы Шрёдингера и Гейзенберга к квантовой механике

1.2.1. Волновая механика (Шрёдингер)

Будем считать, что состояния представляют собой единичные векторы ψ гильбертова пространства $H = L^2(\mathbb{R})$.

Определим стандартные наблюдаемые – координату и импульс:

$$q : (q\psi)(x) = x\psi(x),$$
$$p : (p\psi)(x) = -i\psi'(x),$$

где функции $\psi \in S(\mathbb{R})$ принадлежат всюду плотному в H пространству Шварца $S(\mathbb{R})$, на котором корректно заданы всевозможные полиномы от q и p. Функция $\psi(x) \equiv < x, \psi >$ называется *волновой функцией состояния ψ в координатном представлении.*

Замечание 1.3. В квантовой механике в качестве наблюдаемых обычно используются линейные самосопряженные операторы A, для которых определены функции $f(A)$, где f как минимум может быть любым полиномом от A, так что считается, что пересечение областей определения всех степеней A^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, плотно в H. Операторы координаты и импульса представляют собой канонический пример наблюдаемых, обладающих таким свойством.

По формуле Борна квадрат модуля волновой функции $|\psi(x)|^2$ представляет собой плотность распределения вероятностей наблюдаемой q в состоянии $\psi \in H$, то есть в обозначениях Макки:

$$P_q^{\psi}(B) = \int\limits_B |\psi(x)|^2 \, dx. \tag{1.1}$$

Следовательно, среднее значение от координаты

$$\langle f(q) \rangle_{\psi} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) |\psi(x)|^2 \, dx. \tag{1.2}$$

Если использовать импульсное представление волновой функции

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipx} \psi(x) \, dx, \tag{1.3}$$

тогда

$$\langle f(p) \rangle_{\psi} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(p) |\psi(p)|^2 \, dp, \tag{1.4}$$

$$P_p^{\psi}(B) = \int\limits_B |\psi(p)|^2 \, dp. \tag{1.5}$$

Вопрос 1.1 (В. Паули [41]). *Однозначно ли плотности распределения вероятностей волновой функции в координатном и импульсном представлениях $|\psi(x)|^2$ и $|\psi(p)|^2$ задают волновую функцию ψ?*

Утверждение. Можно привести конкретные примеры, из которых следует отрицательный ответ на вопрос Паули. Волновая функция представляется в виде

$$\psi(x) = |\psi(x)| \, e^{i\alpha(x)}. \tag{1.6}$$

Функция $\alpha(x)$ называется *фазой волновой функции*. Фаза волновой функции может быть выбрана произвольно, поэтому сама волновая функция не восстанавливается однозначно по плотностям вероятности.

Замечание 1.4. В представлении квантовой механики Вигнера–Мойала интегрирование ведётся по двум переменным:

$$\langle f(q,\, p) \rangle_\rho = \iint W(q,\, p)\, f(q,\, p)\, dqdp. \tag{1.7}$$

Функция $W(q,\, p)$ называется *функцией Вигнера* [47]. При этом $f(q) = f(q)$, если у функции Вигнера отсутствует зависимость от p, и $f(p) = f(p)$, если отсутствует зависимость от q. Мойал показал [39], что произвольная наблюдаемая задается некоторой функцией от координаты и импульса: $f = f(q,\, p)$, которую естественно назвать *символом наблюдаемой*.

1.2.2. Матричная механика (Гейзенберг)

Будем считать, что наблюдаемыми являются линейные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

Пусть H – гильбертово пространство. Обозначим $\langle \cdot,\, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ скалярное произведение в H, то есть антилинейную по первому и линейную по второму аргументу функцию такую, что для любых $f,\, g,\, h \in H$ и $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$ выполнены следующие равенства:

$$\langle \alpha f + \beta g,\, h \rangle = \overline{\alpha} \langle f,\, g \rangle + \overline{\beta} \langle g,\, h \rangle\,, \tag{1.8}$$

$$\overline{\langle f,\, g \rangle} = \langle g,\, f \rangle\,. \tag{1.9}$$

Определение 1.2. Пусть $A: H \to H$, $A^*: H \to H$ – некоторые операторы в H с областями определения $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(A^*)$ соответственно.

Оператор A^* называется *сопряженным к оператору* A, если $\forall f \in \mathcal{D}(A)$ $\forall g \in \mathcal{D}(A^*)$ выполнено $\langle Af,\, g \rangle = \langle f,\, A^* g \rangle$.

Оператор A называется *симметричным*, если $\forall f,\, g \in \mathcal{D}(A)$, выполнено $\langle Af,\, g \rangle = \langle f,\, Ag \rangle$

Оператор A называется *самосопряженным*, если A симметричный, и $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

Замечание 1.5. Все ограниченные симметричные операторы автоматически являются самосопряженными.

Пример 1.1. Пусть оператор A определен по формуле $(Af)(x) = -if'(x)$, и его область определения $\mathcal{D}(A) = \left\{ f \mid f' \in L^2(\mathbb{R}_+),\, f(0) = 0 \right\}$. Тогда сопряженный к нему оператор A^* задается формулой $(A^* f)(x) = -if'(x)$, причем его область определения $\mathcal{D}(A^*) = \left\{ f \mid f' \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\} \supsetneq \mathcal{D}(A)$. Следовательно, A – симметричный, но не самосопряженный оператор.

Пусть $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в H. Любому оператору A в этом базисе можно сопоставить матрицу $a_{nm} = \langle e_n, Ae_m\rangle$. Предположим, что оператор A является самосопряженным, тогда его матрица будет эрмитовой $a_{nm} = \overline{a_{mn}}$. В конечномерном случае все эрмитовы матрицы имеют полный набор ортогональных собственных векторов (число векторов равно размерности пространства). Пусть у матрицы (a_{nm}), подобно конечномерному случаю, существует базис из собственных векторов. Обозначим собственные значения: $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и нормированные собственные векторы: $f_n \in H$. Любой вектор $f \in H$ можно разложить по базису: f_n: $f = \sum\limits_n c_n f_n$. Тогда

$$\langle A\rangle_f = \langle f, Af\rangle = \sum_n \lambda_n |c_n|^2. \tag{1.10}$$

По аналогии для функции

$$\langle F(A)\rangle_f = \sum_n F(\lambda_n)|c_n|^2. \tag{1.11}$$

Введём дискретное распределение вероятностей:

$$P_A^f(\{n\}) = |c_n|^2. \tag{1.12}$$

Тогда выражение для среднего значения A в состоянии f можно записать в виде

$$\langle F(A)\rangle_f = \sum_n F(\lambda_n) P_A^f(\{n\}). \tag{1.13}$$

Лекция 2

2.1. Связь подходов Шрёдингера и Гейзенберга

Наша цель – связать подходы Шрёдингера и Гейзенберга. Для этого мы должны построить пространство наблюдаемых $\mathfrak{A}$, пространство состояний $\mathfrak{S}$ и функцию $0 \le P_A^{\rho}(B) \le 1\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ для всех $A \in \mathfrak{A}$, $\rho \in \mathfrak{S}$. Мы взяли самосопряжённые операторы $A = A^*$ в качестве наблюдаемых и единичные векторы гильбертова пространства $\psi \in H$: $||\psi|| = 1$ в качестве состояний. В аксиоме 1.3 Макки используются выпуклые линейные комбинации состояний, поэтому брать только единичные векторы в качестве состояний недостаточно.

Введём обозначения Дирака.

Определение 2.1. Пусть $\psi, \varphi \in H$. Тогда $|\psi\rangle \langle\varphi| f = \langle\varphi, f\rangle \psi$, где $f \in H$. В дальнейшем будем называть $|\psi\rangle \langle\varphi|$ *операторами ранга один.*

Следствие 2.1. $|\psi\rangle \langle\psi|$ *– проектор на линейную оболочку, натянутую на вектор* ψ, $||\psi|| = 1$.

Потребуем, чтобы в число состояний входили проекторы $|\psi\rangle \langle\psi|$. Тогда из аксиомы 1.3 следует, что пространство состояний $\mathfrak{S}$ состоит из проекторов и их выпуклых комбинаций вида $\sum\limits_j \pi_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j|$, где $\pi_j \ge$ ≥ 0, $\sum\limits_j \pi_j = 1$.

Таким образом, определены множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{S}$. Осталось определить вероятностную меру.

2.2. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов

Пусть A – линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H. Будем считать, что пересечение областей определения всех степеней A^n образует плотное множество в H. Нашей целью является определение функций от оператора A.

Определение 2.2. Пусть $A : H \to H$ – оператор и $P(x) = a_n x^n +$ $+ \cdots + a_0$ – полином. Тогда $P(A) = a_n A^n + \cdots + a_0$.

Замечание 2.1. Если A – ограниченный оператор, тогда и $P(A)$ – ограниченный оператор, причем можно показать, что $||f(A)|| \le ||f||_\infty \cdot$ $||A||$, где $||f||_\infty = \sup\limits_x |f(x)|$ – равномерная норма.

Определение 2.3. Говорят, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит спектру оператора $\lambda \in \operatorname{Spect} A$, если $\nexists (A - \lambda I)^{-1}$. Обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, если уравнение $(A - \lambda I) f = g$ имеет единственное решение $f \in H$ для любой правой части $g \in H$, и не существует в обратном случае.

Замечание 2.2. В следствие теоремы Лиувилля $\operatorname{Spect} A \neq \emptyset$.

Теорема 2.1 (о полиномиальном отображении спектра)**.** *Пусть A – самосопряженный оператор. В этом случае, $\lambda \in \operatorname{Spect} A$ тогда и только тогда, когда $P(\lambda) \in \operatorname{Spect}(P(A))$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \operatorname{Spect} A$. Рассмотрим многочлен $F(x) = P(x) - P(\lambda)$. Заметим: $F(\lambda) = P(\lambda) - P(\lambda) = 0$, то есть $x = \lambda$ – корень многочлена $F(x)$. По теореме Безу существует многочлен $Q(x)$ такой, что $F(x) = P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda) Q(x)$. Следовательно, оператор $F(A)$ можно представить в виде: $F(A) = P(A) - P(\lambda) I = (A - \lambda I) Q(A)$. По условию $\lambda \in \operatorname{Spect} A$, то есть $\nexists (A - \lambda I)^{-1}$. Следовательно, $\nexists (P(A) - P(\lambda) I)^{-1}$, то есть $P(\lambda) \in \operatorname{Spect}(P(A))$. Таким образом, мы доказали, что из $\lambda \in \operatorname{Spect} A$ следует $P(\lambda) \in \operatorname{Spect}(P(A))$.

Пусть $\mu \in \operatorname{Spect}(P(A))$. Рассмотрим многочлен $F(x) = P(x) - \mu$. Разложим его на множители: $F(x) = P(x) - \mu = a \cdot \prod\limits_j (x - \lambda_j)$. Следовательно, $F(A) = P(A) - \mu I = a \cdot \prod\limits_j (A - \lambda_j I)$. По условию $\mu \in \operatorname{Spect}(P(A))$, то есть $\nexists (P(A) - \mu I)^{-1}$. Таким образом, $\nexists \left(A - \lambda_{j_0} I^{-1}\right)$, то есть $\lambda_{j_0} \in \operatorname{Spect} A$ для некоторого номера j_0. Заметим $F(\lambda_{j_0}) = P(\lambda_{j_0}) - \mu = 0$. Следовательно, $\mu = P(\lambda_{j_0})$ для $\lambda_{j_0} \in \operatorname{Spect} A$. Таким образом, мы доказали, что из $\mu \in \operatorname{Spect}(P(A))$ следует $\mu = P(\lambda_{j_0})$, где $\lambda_{j_0} \in \operatorname{Spect} A$. $\square$

Определение 2.4. *Спектральным радиусом ограниченного оператора A* называется $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \operatorname{Spect} A} |\lambda|$.

Пример 2.1. Пусть $H = L^2([0, 1])$. Рассмотрим оператор A, определенный по формуле

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt. \tag{2.1}$$

Оператор A называется *оператором Вольтерры*. Найдём спектр оператора Вольтерры: $\operatorname{Spect} A$. Рассмотрим уравнение $(A - \lambda I) f = g$ относительно $f \in H$, где $g \in H$:

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x)\,. \tag{2.2}$$

Положив $x = 0$ в (2.2), имеем $-\lambda f(0) = g(0)$. Будем считать, что f и g – дифференцируемые функции. В результате дифференцирования (2.2) получим

$$f(x) - \lambda f'(x) = g'(x)\,. \tag{2.3}$$

Решим дифференциальное уравнение (2.3) методом вариации постоянной. Решение однородного уравнения $f(x) - \lambda f'(x) = 0$ – семейство функций вида $f(x) = C \cdot \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, где $C = \mathrm{const}$. Подставим $f(x) = C(x) \cdot \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ в (2.3):

$$-\lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) C'(x) = g'(x)\,. \tag{2.4}$$

Решим полученное дифференциальное уравнение относительно $C(x)$:

$$C(x) = C(0) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) g'(t)\,dt. \tag{2.5}$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$C(x) = C(0) - \frac{1}{\lambda}\left[\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) g(x) - g(0)\right] - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) g(t)\,dt. \tag{2.6}$$

Используя $-\lambda f(0) = g(0)$ и $f(x) = C(x) \cdot \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, найдём $C(0) = -\frac{1}{\lambda} g(0)$. Следовательно,

$$C(x) = -\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) g(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) g(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Таким образом, для всех $\lambda \neq 0$ мы доказали $\exists\,(A - \lambda I)^{-1}$. Следовательно, $\operatorname{Spect} A = \{0\}$.

Оператор Вольтерры не является самосопряженным, сопряженный к нему оператор имеет вид

$$(A^* f)(x) = \int\limits_x^1 f(t)\,dt. \tag{2.8}$$

Теорема 2.2 (теорема о спектральном радиусе)**.** *Пусть* $A = A^*$*. Тогда* $||A|| = r\,(A)$.

Доказательство. Используем ряд Неймана:

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n}. \tag{2.9}$$

Этот ряд сходится и $\exists\,(A - \lambda I)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $|\lambda| > ||A||$. Следовательно, $r\,(A) \leq ||A||$.

Заметим, что если $A\psi \neq 0$, то выполнено неравенство

$$\left|\left(A\psi,\, \frac{A\psi}{||A\psi||}\right)\right| = \frac{|(A\psi,\, A\psi)|}{||A\psi||} = \frac{||A\psi||^2}{||A\psi||} = ||A\psi||\,. \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\sup_{||\varphi||=1} |(A\psi,\, \varphi)| \geq \left|\left(A\psi,\, \frac{A\psi}{||A\psi||}\right)\right| = ||A\psi||\,. \tag{2.11}$$

Таким образом,

$$||A|| = \sup_{||\psi||=1} ||A\psi|| \leq \sup_{||\psi||=||\varphi||=1} |(A\psi,\, \varphi)|\,. \tag{2.12}$$

Заметим, что

$$(A\,(\psi + \varphi)\,,\, \psi + \varphi) - (A\,(\psi - \varphi)\,,\, \psi - \varphi) =$$

$$= (A\psi,\, \psi) + (A\psi,\, \varphi) + (A\varphi,\, \psi) + (A\varphi,\, \varphi) -$$

$$- \left[(A\psi,\, \psi) - (A\psi,\, \varphi) - (A\varphi,\, \psi) + (A\varphi,\, \varphi)\right] =$$

$$= 2\,(A\psi,\, \varphi) + 2\,(A\psi,\, \varphi) = 4\,(A\psi,\, \varphi)\,.$$

Пусть $\xi = \psi \pm \varphi \neq 0$, где $||\psi|| = ||\varphi|| = 1$, тогда

$$0 < ||\xi||^2 = (\psi \pm \varphi,\, \psi \pm \varphi) = ||\psi||^2 + ||\varphi||^2 \pm 2\mathrm{Re}\,[(\psi,\, \varphi)] = 2 \pm 2\mathrm{Re}\,[(\psi,\, \varphi)]\,. \tag{2.13}$$

Следовательно,

$$|(A\xi,\, \xi)| = ||\xi||^2 \left|\left(A\frac{\xi}{||\xi||},\, \frac{\xi}{||\xi||}\right)\right| \leq (2 \pm 2\mathrm{Re}\,[(\psi,\, \varphi)]) \left|\left(A\frac{\xi}{||\xi||},\, \frac{\xi}{||\xi||}\right)\right|. \tag{2.14}$$

Для $\xi = 0$ имеем $(A\xi, \xi) = 0$, следовательно, неравенство верно для всех $\xi \in H$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
|(A\psi, \varphi)| = \frac{1}{4} &|(A(\psi+\varphi), \psi+\varphi) - (A(\psi-\varphi), \psi-\varphi)| \le \\
&\le \frac{1}{4}\left[|(A(\psi+\varphi), \psi+\varphi)| + |(A(\psi-\varphi), \psi-\varphi)|\right] \le \\
&\le \frac{1}{2}\left[\left|\left(A\frac{\psi+\varphi}{||\psi+\varphi||}, \frac{\psi+\varphi}{||\psi+\varphi||}\right)\right| + \left|\left(A\frac{\psi-\varphi}{||\psi-\varphi||}, \frac{\psi-\varphi}{||\psi-\varphi||}\right)\right|\right].
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$||A|| \le \sup_{||\psi||=||\varphi||=1} |(A\psi, \varphi)| \le \sup_{||\eta||=1} |(A\eta, \eta)| = r(A). \tag{2.15}$$

Откуда вытекает $||A|| \le r(A) \le ||A||$, то есть $||A|| = r(A)$. □

Из теорем 2.1 и 2.2 немедленно следует

Следствие 2.2.

$$||P(A)|| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Spect}(P(A))} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Spect}\, A} |P(\lambda)| = ||P||_\infty. \tag{2.16}$$

Договоримся отождествлять функции f и g, если они совпадают на спектре, то есть $||f-g||_\infty = 0$.

Утверждение 2.1. Пусть ψ_0 – единичный циклический вектор для самосопряжённого оператора A, то есть $||\psi_0|| = 1$, и векторы $A^n\psi_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, порождают H. Тогда оператор A изоморфен оператору умножения на координату в некотором гильбертовом пространстве $H = L^2(\mu)$ с мерой μ.

Замечание 2.3. Для наблюдаемой координаты $A = q$ циклическим вектором является $\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ – волновая функция основного состояния квантового осциллятора.

Поскольку множество всех полиномов плотно в пространстве непрерывных функций $C(K)$ на любом компактном множестве K, из следствия 2.2 немедленно вытекает, что функция $f(A)$ определена для любого $f \in C(K)$ и компактного множества $K \subset \mathrm{Spect}(A)$. Рассмотрим $f \in C_c(\mathrm{Spect}\, A)$ и определим функционал

$$\ell_A^{\psi_0}(f) = (\psi_0, f(A)\psi_0). \tag{2.17}$$

Здесь и ниже мы обозначаем $C_c(X)$ пространство непрерывных функций с компактным носителем на пространстве X. Это положительный функционал, то есть для любой неотрицательной функции $f \geq 0$ значение функционала $\ell_A^{\psi_0}(f) \geq 0$. Заметим, что $\left|\ell_A^{\psi_0}(f)\right| \leq ||f(A)|| \leq$ $\leq ||f||_\infty \cdot ||A||$, то есть $\ell_A^{\psi_0}(f)$ – непрерывный функционал. Пространство X называется *хаусдорфовым*, если любые его две точки обладают непересекающимися окрестностями. Спектр $\mathrm{Spect}(A)$ является примером локально компактного хаусдорфова пространства, следовательно для него применима следующая теорема.

Теорема 2.3 (Рисс–Марков–Какутани [10, 42])**.** *Любой положительный функционал на пространстве $C_c(X)$ представляется в виде*

$$\ell_A^{\psi}(f) = \int\limits_X f(x)\, d\mu_A^{\psi}(x), \tag{2.18}$$

где μ_A^{ψ} – некоторая мера, нормированная условием $\mu(X) = 1$.

Для случая $X = \mathrm{Spect}(A)$ теорему Рисса–Маркова–Какутани можно использовать для определения непрерывных функций от оператора A. Рассмотрим сначала случай, когда вектор ψ_0 циклический для оператора A, то есть замыкание линейной оболочки векторов $A^n\psi_0$ совпадает со всем пространством.

Теорема 2.4 (спектральная теорема)**.** *Пусть самосопряженный оператор A обладает циклическим вектором ψ_0. Тогда оператор $U : H \to$ $\to L^2(\mu)$, заданный формулой*

$$U\psi_0 = 1,\ \ (UA^n\psi_0)(x) = x^n,\ \ n = 1, 2, 3, \dots,$$

является унитарным, причём

$$UAU^* = M_x,$$

где M_x – оператор умножения на x в пространстве $L^2(\mu)$.

Замечание 2.4. Мы будем называть M_x *представлением оператора* A в $L^2(\mu)$. Функцию $\psi_A(x) = (U\psi)(x)$ будем называть *волновой функцией состояния* ψ в представлении, связанном с наблюдаемой A.

Доказательство. Заметим, что

$$(UA^n\psi_0, A^m\psi_0)_{L_2(\mu)} = \int\limits_{Spect(A)} x^{n+m} d\mu(x) = (\psi_0, A^{n+m}\psi_0)$$

и

$$(x^n, UAU^* x^m)_{L^2(\mu)} = (A^n\psi_0, AA^m\psi_0).$$

□

Определение 2.5. Унитарный оператор U переводит любое чистое состояние $\psi \in H$ в функцию $\psi_A(x) = (U\psi)(x),\ x \in Spect(A)$ в пространстве $L^2(\mu)$. Функция ψ_A называется *волновой функцией состояния* ψ в пространстве $L^2(\mu)$, ассоциированном с наблюдаемой A.

Следствие 2.3. *Для любой функции* $f \in L^{\infty}(\mathrm{Spect}(A))$ *определена функция* $f(A)$*, причём выполнено неравенство*

$$||f(A)|| \leq ||f||_{\infty}||A||.$$

Доказательство. Для начала предположим, что пространство H сепарабельное. Если $\psi_0 \in H$ не является циклическим вектором, то замыкание $H_0 \subset H$ линейной оболочки $A^n\psi_0$ является гильбертовым подпространством и $H = H_0 \oplus H_1$, причём ψ_0 является циклическим вектором для сужения $A|_{H_0}$. Аналогично для $\psi_1 \in H$ замыкание $H_2 \subset H_1$ линейной оболочки $A^n\psi_1$ определяет сужение $A|_{H_2}$, для которого ψ_1 является циклическим вектором. Повторяя процесс по индукции получаем разложение $H = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} H_{2n}$ для которого любое сужение $A|_{H_{2n}}$ обладает циклическим вектором. В случае несепарабельного гильбертова пространства H нужно использовать аксиому выбора.

В силу теоремы 2.4 любое сужение $A|_{H_{2n}} \equiv A_n = U^*M_xU$. Определим оператор $f(A_n)$ по формуле

$$f(A_n) = U^*f(M_x)U, \tag{2.19}$$

где

$$(f(M_x)\xi)(x) = f(x)\xi(x), \tag{2.20}$$

$\xi \in L^2(\mu)$. Для всего оператора A положим

$$f(A) = \oplus_n f(A_n).$$

Из (2.19) и (2.20) немедленно вытекает утверждение теоремы.

□

Определение 2.6. Пусть $f : X \to [0,\,1]$, $V \subset X$, – открытое подмножество, $K \subset X$ – компактное подмножество. Будем писать $f \prec V$ или $V \succ f$, если $\operatorname{supp} f \subset V$. Будем писать $f \succ K$ или $K \prec f$, если $\forall x \in K$ выполнено $f\,(x) = 1$.

Лемма 2.1 (Урысон)**.** *Пусть* X *– локально компактное хаусдорфово пространство и* K *– компактное множество,* V *– открытое множество,* $K \subset V$*. Тогда* $\exists f : X \to [0,\,1]$ *– непрерывная на* X *функция такая, что* $K \prec f \prec V$*.*

Идея доказательства теоремы 2.3. Пусть $\ell : X \to \mathbb{C}$. Определим меру $\mu(V) = \sup\{\ell(f) : f \prec V\}$ на открытых подмножествах $V \subset X$ и меру $\nu(K) = \inf\{\ell(f) : K \prec f\}$ на компактных подмножествах $K \subset \subset X$, продолжим их на всё пространство X. Если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(X)$ выполнено $\mu(B) = \nu(B)$, то определённая таким образом функция будет искомой мерой на X. Для доказательства равенства μ и ν следует воспользоваться леммой Урысона. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть $A = A^*$ – самосопряженный оператор и f – функция такая, что $\operatorname{Im} f = \{0, 1\}$. Тогда $f(A) = f^*(A) = f^2(A)$, то есть $f(A)$ является ортогональным проектором.*

Доказательство. Из $\operatorname{Im} f = \{0, 1\}$ следует, что функцию f можно представить в виде $f(x) = \chi_B(x)$, где B – множество точек, в которых функция f принимает значение 1, то есть $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in B$ и в остальных точках $f(x) = 0$.

Из следствия 2.3 получаем, что $f(A)$ корректно определена. Более того, оператор $f(A)$ унитарно эквивалентен оператору $\oplus_n f(M_x^n)$, где операторы умножения на независимую переменную M_x^n действуют в пространствах $L^2(\mu_n)$. Тогда для любого $\psi_n \in L^2(\mu_n)$ имеем

$$(f(M_x^n)\psi_n)(x) = f(x)\psi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x), & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \tag{2.21}$$

Легко видеть, что операторы $f(M_x^n)$ являются ортогональными проекторами. Таким образом, $f(A)$ униарно эквивалентен ортогональной сумме проекторов $f(M_x^n)$ в пространствах $L^2(\mu_n)$. $\square$

Для борелевского множества $B \subset \mathit{Spect}(A)$ определим операторозначную функцию E по формуле $E(B) = \chi_B(A)$. По теореме 2.5 это проектор, то есть $E(B) = E^*(B) = E^2(B)$.

Теорема 2.6. *Проекторозначная функция $B \to E(B)$ обладает свойствами:*

1) $E(B) = E^*(B) = E^2(B)$;

2) $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{R}) = I$;

3) $E\left(\bigcup\limits_j B_j\right) = \sum\limits_j E(B_j)$, *если множества $B_j \cap B_k = \emptyset$, а сходимость ряда понимается в смысле сильной операторной топологии и называется* ***спектральной мерой самосопряженного оператора*** *A.*

Доказательство. В следствие теоремы 2.4 оператор A унитарно эквивалентен ортогональной сумме операторов умножения M_x^n в пространствах $L^2(\mu_n)$. В этих пространствах $\chi_B(M_x^n)$ представляет собой оператор умножения на индикаторную функцию $\chi_B(x)$ множества B. □

Определение 2.7. Для пары $A \in \mathfrak{A}$, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathfrak{S}$ положим

$$P_A^\rho(B) = \langle\psi, E(B)\psi\rangle.$$

Следствие 2.4. *Возьмём произвольный набор единичных векторов $\psi_j \in H$. По аксиоме 1.3 Макки для выпуклых комбинаций*

$$\rho = \sum_j \pi_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| = \sum_j \pi_j \rho_j, \tag{2.22}$$

$\pi_j \geq 0$, $\sum\limits_j \pi_j = 1$, вероятность должна вычисляться по формуле

$$P_A^\rho\left(B\right) = \sum_j \pi_j P_A^{\rho_j}\left(B\right) = \sum_j \pi_j \left\langle\psi_j,\, E\left(B\right)\psi_j\right\rangle. \tag{2.23}$$

Поскольку $0 \leq \langle\psi_j, E(B)\psi_j\rangle \leq 1$ и $\pi_j \geq 0$, $\sum\limits_j \pi_j = 1$, формулы (2.22) и (2.23) корректно определены.

Замечание 2.5 (связь подходов Шрёдингера и Гейзенберга)**.** Пусть самосопряженный оператор A обладает циклическим вектором, как это имеет место для наблюдаемых координаты и импульса q и p, и пусть $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ – чистое состояние. Рассмотрим проекторозначную меру (2.6) и представление A в пространстве $L^2(\mu)$, определённое в теореме 2.4. Тогда вероятностная мера на борелевских подмножествах $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, отвечающая паре (ρ, A), определяется формулой

$$P_A^{|\psi\rangle\langle\psi|}(B) = \langle\psi, E(B)\psi\rangle \tag{2.24}$$

при подходе Гейзенберга и формулой Борна:

$$P_A^{|\psi\rangle\langle\psi|} = \int\limits_B \left|\psi_A(x)\right|^2 d\mu(x) \tag{2.25}$$

при подходе Шрёдингера. Функции, определённые формулами (2.24) и (2.25) совпадают в силу теоремы 2.4.

Вопрос 2.1. *Верно ли, что пространство наблюдаемых $\mathfrak{A}$ состоит только из самосопряженных операторов?*

Утверждение. Пространство наблюдаемых $\mathfrak{A}$ можно расширить до множества положительных операторозначных мер [13].

Вопрос 2.2 (Макки). *Можно ли расширить выпуклое множество состояний $\mathfrak{S}$?*

Утверждение. На этот вопрос отвечает теорема Глизона [31] – выпуклое множество состояний $\mathfrak{S}$ расширить нельзя.

2.3. Ядерные операторы

Мы научились строить семейство распределений вероятностей P_A^ρ для того случая, когда $A \in \mathfrak{A}$ – множеству самосопряженных операторов, а $\rho \in \mathfrak{S}$, где

$$\mathfrak{S} = \left\{ \sum_j \pi_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| : \pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1, ||\psi_j|| = 1 \right\}. \tag{2.26}$$

Получим абстрактное описание множества (2.26). Элементы (2.26) мы будем называть *квантовыми состояниями* или просто *состояниями.*

Определение 2.8. Оператор $\rho : H \to H$ называется *компактным*, если для любого ограниченного подмножества $B \subset H$ его образ $\rho(B)$ – предкомпактное множество (замыкание компактно).

Определение 2.9. Оператор $\rho : H \to H$ называется *компактным*, если для любой ограниченной последовательности $\{f_n\}$, $||f_n|| \leq C$, существует сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{\rho f_n\}$.

Утверждение 2.2. Определения 2.8 и 2.9 эквивалентны.

Поскольку проекторы являются самосопряженными операторами, $\mathfrak{S}$ состоит из самосопряженных операторов. Более того, проекторы – компактные операторы, так что состояния $\rho \in \mathfrak{S}$ компактны, так как являются пределом сходящейся по норме последовательности компактных операторов. Таким образом, любое состояние $\rho \in \mathfrak{S}$ является самосопряженным компактным оператором.

Теорема 2.7. *Любой самосопряженный компактный оператор ρ : $H \to H$ можно представить в виде*

$$\rho = \sum_j \lambda_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right|, \tag{2.27}$$

где $\langle\psi_j,\,\psi_k\rangle = \delta_{jk}$, $\rho\psi_j = \lambda_j\psi_j$, *?°* $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$, *причём если множество* $\{\lambda_n\}$ *бесконечно, тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 2.2:

$$||\rho|| = \sup_{\lambda\in\mathrm{Spect}\,\rho} |\lambda| = |\lambda_1|\,. \tag{2.28}$$

По определению нормы оператора существует последовательность $\{f_n\}$, $||f_n|| = 1$, такая, что $||\rho f_n|| \to ||\rho||$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{f_n\}$ является ограниченной, ρ – компактный оператор, следовательно существует сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{\rho f_n\}$. Таким образом, существует собственный вектор ψ_1 оператора ρ, отвечающий собственному значению λ_1. Обозначим $H_1 = \{\mathbb{C}\psi_1\}$, $\rho_1 = \rho|_{H_1}$, и рассмотрим сужение $\rho_1^{\perp} = \rho|_{H\ominus H_1}$. Оператор $\rho_1^{\perp}$ является самосопряженным компактным оператором. Повторяя рассуждение по индукции, получаем, что $\rho = \oplus_j\rho_j$ относительно ортогонального разложения $H = \oplus_j H_j$, причём $\rho\psi_j = \lambda_j\psi_j$ для любого $\psi_j \in H_j$. □

Определение 2.10. Оператор $A:\,H \to H$ называется *положительным* (обозначается $A > 0$), если для любого элемента $\psi \in H$ выполнено $(\psi,\,A\psi) \geq 0$.

Оператор A^*A – самосопряженный и положительный, следовательно функция $f\,(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на $Spect(A)$ и оператор $f\,(A^*A)$ корректно задан.

Определение 2.11. *Модулем оператора* A называется оператор $|A| = \sqrt{A^*A}$.

Определение 2.12. Пусть A – компактный оператор. *Сингулярными собственными значениями оператора* A называются собственные значения положительного оператора $|A|$:

$$s_j\,(A) = \lambda_j\,|A|\,. \tag{2.29}$$

Замечание 2.6. Оператор A – компактный, следовательно оператор A^*A – компактный. Более того, он положительный и самосопряженный, следовательно по теореме 2.7 у него существует полный набор собственных векторов и собственных значений.

Определение 2.13. Оператор A называется ядерным, если

$$\sum_j s_j\,(A) < +\infty. \tag{2.30}$$

Теорема 2.8 ([5]). *Оператор $A : H \to H$ является ядерным тогда и только тогда, когда для любого выбора ортонормированного базиса (e_j) в H сумма*

$$\sum_j \langle e_j, Ae_j \rangle < +\infty. \tag{2.31}$$

В этом случае сумма (2.31) не зависит от выбора базиса и называется следом $\mathrm{Tr}(A)$ *оператора A.*

Пример 2.2. Сумма (2.31) может существовать для некоторого базиса (e_j), но оператор при этом не будет ядерным. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Определим изометрический оператор $S : H \to H$ на элементах базиса по формуле $S(e_j) = e_{j+1}$ и продолжим действие S, называемого *оператором сдвига*, на всё пространство H. Заметим, что в базисе $\{e_n\}$ ряд $\sum\limits_j \langle e_j, Se_j \rangle$ сходится, и его сумма равна нулю. Однако в ортонормированном базисе $\{f_j\}$, где $f_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_{j+1})$, ряд $\sum\limits_j \langle f_j, Sf_j \rangle$ расходится, поскольку $\langle f_j, Sf_j \rangle = \frac{1}{2}$ для любого j. Из теоремы 2.10 следует, что S не является ядерным оператором.

Определение 2.14. *Спектральным следом* оператора A называется сумма его собственных значений:

$$\text{Спектральный след} = \sum_j \lambda_j. \tag{2.32}$$

Теорема 2.9. *Пусть A – матрица размера $n \times n$, и $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{n}$ – собственные значения A (корни характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

с учётом кратности). Тогда справедливо тождество

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A), \tag{2.33}$$

то есть след оператора в конечномерном гильбертовом пространстве H, $dimH < +\infty$, совпадает с его спектральным следом.

Доказательство. Заметим, что для любого унитарного оператора U (матрицы перехода к другому ортонормированному базису) выполнено

$$\det(U(A - \lambda E)U^*) = \det(A - \lambda E) = 0, \tag{2.34}$$

то есть характеристический многочлен – инвариант – не зависит от выбора базиса.

Существует базис, в котором матрица A имеет жорданову нормальную форму $A \simeq \bigoplus_j A_j$, где A_j – жорданова клетка, отвечающая собственному значению λ_j:

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

В этом базисе $\operatorname{Tr} A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (A)$, а определитель

$$\det(A - \lambda E) = \det A + \dots + (-1)^{n-1} \left(\sum_j \lambda_j \right) \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n. \tag{2.36}$$

Один из коэффициентов характеристического многочлена, с точностью до знака, равен спектральному следу. В произвольном базисе этот коэффициент равен $\operatorname{Tr} A$. В силу инвариантности характеристического многочлена относительно выбора базиса получаем утверждение теоремы. □

Замечание 2.7. В бесконечномерном пространстве H может не существовать собственных векторов $A\psi = \lambda\psi$, как в случае оператора Вольтерры (пример 2.1).

Теорема 2.10 (В.Б. Лидский [6, 5]). *Пусть A – ядерный оператор. Тогда след совпадает со спектральным следом:*

$$Tr(A) = \sum_j \lambda_j (A).$$

Таким образом мы получили формальное описание множества (2.26).

Теорема 2.11. *Пространство квантовых состояний $\mathfrak{S}$ состоит из положительных ядерных состояний с единичным следом.*

Доказательство. Пусть (ψ_j) и (π_j) – произвольный набор единичных векторов в H и произвольное дискретное распределение вероятностей соответственно. Рассмотрим состояние

$$\rho = \sum_j \pi_j \, |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \, .$$

Для произвольного ортонормированного базиса (e_k) в H получаем

$$\sum_k \langle e_k, \rho e_k\rangle = \sum_{j,k,l} \pi_j \langle e_k, \psi_j\rangle\langle\psi_j, e_l\rangle = \sum_j \pi_j = 1.$$

Таким образом, ρ – ядерный оператор с единичным следом по теореме 2.8. $\square$

2.4. Дальнейшие свойства ядерных операторов

Обозначим $\mathfrak{S}_1(H)$ линейное пространство ядерных операторов в гильбертовом пространстве H. Таким образом, выпуклое множество квантовых состояний $\mathfrak{S}$ состоит из положительных ядерных операторов с единичным следом.

Определение 2.15. Оператор U называется *частично изометрическим*, если для некоторого разложения $H = K \oplus K^\perp$ выполнено $Uh = 0$ для любого $h \in K^\perp$ и $(Uf, Ug) = (f, g)$ для любых $f, g \in K$. При этом проектор $P_K = U^*U$ называется *начальным*, а проектор $P_{\tilde{K}} = UU^*$, где $\tilde{K} = UK$, – *финальным*.

Теорема 2.12 (о полярном разложении). *Для любого ограниченного оператора A существует частично изометрический оператор U такой, что $A = U\,|A|$.*

Доказательство. Обозначим K подпространство H, представляющее собой замыкание образа $|A|H$. Определим действие оператора U формулами $U\left(|A|\, f\right) = Af$ и $U|_{K^\perp} = 0$. Тогда

$$\langle U\,|A|\, f,\, U\,|A|\, g\rangle = \langle Af,\, Ag\rangle = \langle f,\, A^*Ag\rangle = \langle f,\, |A|\cdot|A|\, g\rangle = \langle |A|\, f,\, |A|\, g\rangle \, . \tag{2.37}$$

Следовательно, U – частично изометрический оператор, и $A = U\,|A|$. $\square$

Теорема 2.13. *Оператор $A \in \mathfrak{S}_1(H)$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $A = \sum\limits_j |\xi_j\rangle\,\langle\eta_j|$, где $\sum\limits_j ||\xi_j||\cdot||\eta_j|| < +\infty$, причём*

$$\operatorname{Tr} A = \sum_j \langle\eta_j,\, \xi_j\rangle \, .$$

Доказательство. Используем полярное разложение $A = U\,|A|$. Оператор $|A|$ можно представить в виде $|A| = \sum\limits_j s_j\,|\psi_j\rangle\,\langle\psi_j|$, где $\{\psi_j\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов $|A|$; сингулярные собственные значения A таковы, что $s_j \geq 0$, причём $\sum\limits_j s_j < +\infty$. Обозначим $\xi_j = U\psi_j$. В силу частичной изометричности оператора U получаем $||\xi_j|| \leq ||\psi_j||$. Следовательно, оператор A можно представить в виде: $A = \sum\limits_j s_j\,|\xi_j\rangle\,\langle\psi_j|$. Обозначим $\eta_j = s_j\psi_j$. Тогда $A = \sum\limits_j |\xi_j\rangle\,\langle\eta_j|$. При этом

$$\sum_j ||\xi_j|| \cdot ||\eta_j|| \leq \sum_j s_j\,||\psi_j||^2 = \sum_j s_j < +\infty. \tag{2.38}$$

Согласно теореме 2.8 след ядерного оператора не зависит от выбора ортонормированного базиса, в котором он вычисляется. Найдём след оператора A в ортонормированном базисе $\{\psi_j\}$, состоящем из собственных векторов $|A|$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} A = \sum_j \langle\psi_j,\, A\psi_j\rangle = \sum_j \langle\psi_j,\, U\,|A|\,\psi_j\rangle = \\ = \sum_j s_j\,\langle\psi_j,\, U\psi_j\rangle = \sum_j \langle\eta_j,\, \xi_j\rangle\,.\end{aligned}$$

Пусть теперь наоборот: оператор A представим в виде: $A{=}\sum\limits_j |\xi_j\rangle\langle\eta_j|$. Операторы ранга один $|\xi_j\rangle\,\langle\eta_j| \in \mathfrak{S}_1(H)$, а ряд сходится по норме. Следовательно, $A \in \mathfrak{S}_1(H)$. □

Следствие 2.5. *Пусть C – ограниченный оператор и $\rho \in \mathfrak{S}_1(H)$. Тогда $\rho C \in \mathfrak{S}_1(H)$.*

Доказательство. По теореме 2.13 ρ можно представить в виде: $\rho = \sum\limits_j |\eta_j\rangle\,\langle\xi_j|$, где $\sum\limits_j ||\xi_j||||\eta_j|| < +\infty$. Следовательно, $\rho C = \sum\limits_j \pi_j\,|\eta_j\rangle\,\langle\psi_j|$, где $\psi_j = C\xi_j$, причём, в силу ограниченности оператора C, выполнено неравенство $||\psi_j|| \leq ||C|| \cdot ||\xi_j||$. Применяя ещё раз теорему 2.13, получаем ρC доказываемое утверждение. □

Теорема 2.14. *Для сопряженного пространства имеет место равенство $\mathfrak{S}_1^*(H) = B(H)$ (алгебра всех ограниченных операторов в H).*

Доказательство. Пусть $A \in B\left(H\right)$. Докажем, что $A \in \mathfrak{S}_1^*\left(H\right)$. Рассмотрим любой элемент $\rho \in \mathfrak{S}_1\left(H\right)$. Обозначим $f_A\left(\rho\right) = \operatorname{Tr}\left(\rho A\right)$. Заметим, что $\left|f_A\left(\rho\right)\right| \leq \left|\left|A\right|\right|_{B(H)} \cdot \left|\left|\rho\right|\right|_1 < +\infty$, то есть f_A – ограниченный линейный функционал на пространстве $\mathfrak{S}_1\left(H\right)$, то есть $f_A \in \mathfrak{S}_1(H)^*$.

Наоборот, возьмём функционал $f \in \mathfrak{S}_1^*\left(H\right)$. Докажем, что существует оператор $A \in B\left(H\right)$, для которого $f\left(\rho\right) = \operatorname{Tr}\left(\rho A\right)$ на всех $\rho \in \mathfrak{S}_1\left(H\right)$. По теореме 2.13 любой элемент $\rho\mathfrak{S}_1(H)$ представим в виде суммы операторов ранга один. Заметим, что действие функционала f на операторы ранга один $f\left(\left|\xi\right\rangle\left\langle\eta\right|\right)$ определяет функционал, линейный по η и антилинейный по ξ. По теореме Рисса–Фреше существует единственный $A \in B(H)$ такой, что $f\left(\left|\xi\right\rangle\left\langle\eta\right|\right) = \langle\xi,\, A\eta\rangle$. Поскольку любой $\rho \in \mathfrak{S}_1(H)$ представим в виде сходящегося по норме ряда из операторов ранга один, и $A \in B(H)$, действие f продолжается по линейности на всё $\mathfrak{S}_1(H)$. $\square$

Лекция 3

3.1. Положительные операторозначные меры

Согласно теореме 2.6 любой самосопряженный оператор A определяет проекторозначную меру E на спектре $Spect(A) \subset \mathbb{R}$, которая участвует в определении распределения вероятностей:

$$P_A^\rho(B) \equiv P_E^\rho = Tr(\rho E(B)),$$

отвечающего паре $A \in \mathbb{A},\ \rho \in \mathfrak{S}$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – произвольное борелевское множество. Меру E можно расширить на всю действительную прямую, положив её равной нулю на множествах $B,\ B \cap Spect(A) = \emptyset$. Следующее определение даёт естественное обобщение проекторозначных мер.

Определение 3.1. *Положительной операторозначной мерой* называется функция $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to B(H)$ для которой выполнены следующие условия:

1) $M\left(B\right) \geq 0$ – положительный оператор;

2) $M\left(\emptyset\right) = 0$ – нулевой оператор, $M\left(\mathbb{R}\right) = I$ тождественный оператор;

3) $M\left(\bigcup\limits_j B_j\right) = \sum\limits_j M\left(B_j\right)$, если множества $B_j \cap B_k = \emptyset$ для любых $j \neq k$, где сходимость операторного ряда понимается в смысле сильной операторной топологии.

Определим функцию борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по формуле

$$P_M^\rho\left(B\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho M\left(B\right)\right). \tag{3.1}$$

Формула (3.1) корректно определяет некоторую вероятностную меру на прямой. Нашей целью будет выяснить, можно ли использовать проекторозначные меры для нового определения множества наблюдаемых $\mathfrak{A}$.

3.2. Теорема Холево

Вопрос 3.1. *Пусть выполнена аксиома 1.3 Макки* $P_E^{\sum \pi_j \rho_j} = \sum\limits_j \pi_j P_E^{\rho_j}$. *Обязательно ли брать в качестве множества наблюдаемых $\mathfrak{A}$ самосопряженные операторы A, определяющие проекторозначные меры E? Иными словами, можно ли расширить множество наблюдаемых?*

Теорема 3.1 (А.С. Холево [13]). *Пусть для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}$ определён набор вероятностных мер $\{P^{\rho}\}$, удовлетворяющих аксиоме 1.3 Макки. Тогда существует отображение $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to B(H)$ из алгебры борелевских множеств на прямой $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ в алгебру ограниченных операторов $B(H)$, являющееся положительной операторозначной мерой в смысле определения 3.1, такое, что $P^{\rho}(B) = \mathrm{Tr}(\rho M(B))$.*

Набросок доказательства теоремы 3.1. Представим состояние в виде: $\rho = \mathrm{Re}\,\rho + i \cdot \mathrm{Im}\,\rho$, где $\mathrm{Re}\,\rho = \frac{1}{2}(\rho + \rho^*)$, $\mathrm{Im}\,\rho = \frac{1}{2i}(\rho - \rho^*)$ – самосопряженные операторы. Для самосопряженных $\rho = \rho^*$ справедливо представление: $\rho = \rho_+ - \rho_-$, где

$$\rho_+ = \chi_+(\rho),\ \chi_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

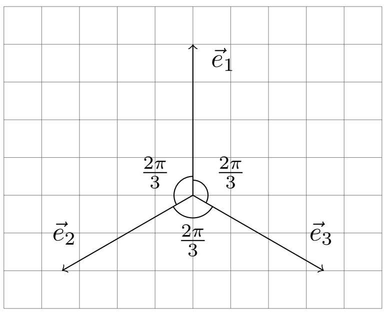
$$\rho_- = \chi_-(\rho),\ \chi_-(x) = \begin{cases} 0, & x \ge 0; \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Определим $f \in \mathfrak{S}_1^*(H)$ по формуле

$$f\left(\frac{\rho_\pm}{\mathrm{Tr}\,\rho_\pm}\right)(B) = P^{\frac{\rho_\pm}{\mathrm{Tr}\,\rho_\pm}}(B) \tag{3.2}$$

и продолжим по линейности на всё $\mathfrak{S}_1(H)$. Согласно теореме 2.14 $\mathfrak{S}_1^*(H) = \mathfrak{B}(H)$, следовательно существует единственный оператор $M(B)$ для которого $f(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho M(B))$. $\square$

Пример 3.1. Рассмотрим три вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, составляющие углы $\frac{2\pi}{3}$ друг с другом на плоскости.



Проектор на направление $\vec{e} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}^T$, где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, имеет вид

$$|\vec{e}\rangle\langle\vec{e}| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\overline{\beta} \\ \overline{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

В нашем случае

$$\sum_{j=1}^{3} |e_j\rangle \langle e_j| = \frac{3}{2} I. \tag{3.4}$$

Следовательно,

$$M_j = \frac{2}{3} |e_j\rangle \langle e_j| \,. \tag{3.5}$$

Тогда для любого разбиения действительной оси на четыре борелевских множества $\mathbb{R} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ можно определить положительную операторозначную меру по формуле

$$M(B_j) = \begin{cases} \frac{2}{3} |e_j\rangle \langle e_j| \,, & j \in \overline{1,\, 3}; \\ 0, & j = 4. \end{cases} \tag{3.6}$$

Из теоремы 3.1 немедленно вытекает

Следствие 3.1. *Вместо множества самосопряженных операторов $\mathfrak{A}$ в качестве наблюдаемых можно взять множество положительных операторозначных мер $\mathfrak{M}$. При этом распределение вероятностей, отвечающее паре $M \in \mathfrak{M}$, $\rho \in \mathfrak{S}$, задаётся формулой*

$$P_M^\rho(B) = Tr(\rho M(B)), \tag{3.7}$$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Поскольку M является счётно-аддитивной мерой, это свойство наследуется P_M^ρ. Остаётся проверить выполнение аксиомы 1.2. Порложим

$$P_{M^f}^\rho(B) = P_M^\rho(f^{-1}(B)) = Tr(\rho M(f^{-1}(B))), \tag{3.8}$$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Условие $B \cap C = \emptyset$ влечёт $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$ для $B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Следовательно, (3.8) корректно определяет распределение вероятностей. □

Следующая теорема проясняет структуру положительных операторозначных мер.

Теорема 3.2 (М.А. Наймарк [8]). *Для любой положительной операторозначной меры $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to B(H)$ существует гильбертово пространство K, в которое H изометрически вложено, и проекторозначная мера $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to B(K)$ такая, что $M(B) = (P_H E(B))|_H$.*

Доказательство. Рассмотрим простые функции $f,\, g : \mathbb{R} \to H$, то есть такие, что $f(t) = \sum\limits_j f_j \chi_{B_j}(t)$, $g(t) = \sum\limits_k g_k \chi_{C_k}(t)$, где $\chi_B(t) = $ $= \begin{cases} 1, & t \in B; \\ 0, & t \notin B. \end{cases}$ Определим скалярное произведение по формуле

$$(f,\, g)_K = \sum_{j,\, k} \langle f_j,\, M(B_j \cap C_k)\, g_k \rangle_H\,. \tag{3.9}$$

Гильбертово пространство K получим с помощью замыкания линейной оболочки простых функций по норме $\|\cdot\|_K = \sqrt{(\cdot,\, \cdot)_K}$. Любому элементу $f \in H$ соответствует элемент $f\chi_{\mathbb{R}}(t) \in K$, при этом $(f\chi_{\mathbb{R}},\, g\chi_{\mathbb{R}})_K = \langle f,\, M(\mathbb{R})\, g \rangle_H = \langle f,\, g \rangle_H$, то есть пространство H изометрически вложено в пространство K.

Для любого элемента $\xi \in K$ определим проектор

$$(E(B)\,\xi)(t) = \begin{cases} \xi(t)\,, & t \in B; \\ 0, & t \notin B. \end{cases} \tag{3.10}$$

Заметим, что

$$E(B)\, g\chi_{\mathbb{R}} = \begin{cases} g, & t \in B; \\ 0, & t \notin B. \end{cases} \tag{3.11}$$

Следовательно, $(f\chi_{\mathbb{R}},\, E(B)\, g\chi_{\mathbb{R}})_K = \langle f,\, M(B)\, g \rangle_H$. Таким образом, $M(B) = (P_H E(B))|_H$. $\square$

3.3. Классическая и квантовая теории вероятностей

3.3.1. Классическая теория вероятностей

Рассмотрим знаменитую тройку Колмогорова $(\Omega,\, \Sigma,\, P)$, где Ω – пространство элементарных событий, Σ – сигма-алгебра событий, $P : \Sigma \to$ $\to [0,\, 1]$ – вероятностная мера [35].

Случайная величина ξ – измеримая функция $\Omega \to \mathbb{R}$, то есть для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено $\xi^{-1}(B) \in \Sigma$. Задать случайную величину ξ – значит определить вероятности: $P\left(\xi^{-1}(B)\right)$.

Важную роль играют следующие два частных случая.

Пример 3.2 (случайная величина с дискретным распределением). Возьмём набор непересекающихся борелевских множеств $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, действительные числа $\lambda_k \in \mathbb{R}$, и определим дискретную случайную величину по формуле

$$\xi(\omega) = \sum_k \lambda_k \chi_{B_k}(\omega), \tag{3.12}$$

$\omega \in \Omega$, где χ_{B_k} – индикаторная функция подмножества B_k. Со случайной величиной (3.12) ассоциировано распределение вероятностей:

$$Pr(\xi = \lambda_k) = P(B_k). \tag{3.13}$$

Для случайной величины ξ можно определить математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi)$ и дисперсию $\mathbb{V}ar(\xi)$ по формулам

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_k \lambda_k Pr(\xi = \lambda_k) = \sum_k \lambda_k P(B_k),$$

$$\mathbb{V}ar(\xi) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2) = \sum_k (\lambda_k - \mathbb{E}(\xi)^2 P(B_k).$$

Пример 3.3 (случайная величина с абсолютно непрерывным распределением)**.** Предположим, что существует такая функция $p_\xi(x)$, называемая *плотностью распределения* $Pr(\xi \in B)$, что

$$Pr(\xi \in B) = \int_B p_\xi(x)dx, \;\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Тогда говорят, что распределение *абсолютно непрерывно.* В этом случае, математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi)$ и дисперсия $\mathbb{V}ar(\xi)$ определяются формулами

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x p_\xi(x)dx,$$

$$\mathbb{V}ar(\xi) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(\xi))^2 p_\xi dx.$$

3.3.2. Квантовая теория вероятностей

Попробуем построить некоторое подобие аксиоматики квантовой теории вероятностей. По аналогии с тройкой Колмогорова, рассмотрим тройку $(H, \mathfrak{P}, \mu)$, где H – гильбертово пространство, $\mathfrak{P}$ – множество всех ортогональных проекторов в H и $\mu : \mathfrak{P} \to [0,1]$ – некоторая функция, сопоставляющая каждому $P \in \mathfrak{P}$ число $0 \leq \mu(P) \leq 1$.

Определение 3.2. Элементы $\xi \in H,\ ||\xi|| = 1$, которые можно отождествить с одномерными проекторами $|\xi\rangle\langle\xi|$, будем называть *элементарными событиями.* Если квантовая система приготовлена в некотором чистом состоянии $\xi, ||\xi|| = 1$, будем говорить, что элементарное событие произошло. Элементы $\mathfrak{P}$ будем называть *событиями.* Если квантовая система находится в состоянии ξ будем считать, что событие $P \in \mathfrak{P}$ произошло, если $\xi \in H_P = PH$.

Определение 3.3. *Наименьшей общей гранью* $P \vee Q$ называется ортогональный проектор на пересечение подпространств $H_P \cap H_Q$. *Наибольшей общей гранью* $P \wedge Q$ называется ортогональный проектор на подпространство, порождённое $H_P \cup H_Q$.

Замечание 3.1. Наименьшая $P \vee Q$ и наибольшая $P \wedge Q$ грани всегда определены, поскольку $H_P \cap H_Q$ содержит как минимум нулевой вектор, а $H_P \cup H_Q$ принадлежит H. Множество, для любого набора элементов которого определены точная нижняя и точная верхняя грани, называется *решёткой.* Таким образом, множество проекторов является решёткой.

Определение 3.4. События $P_k \in \mathfrak{P},\ 1 \leq k \leq N$, называются *совместимыми*, если они попарно коммутируют $[P_k, P_m] = 0$. Отметим, что для совместимых событий любое их произведение также является событием $P_{k_1} P_{k_2} \dots P_{k_n} \in \mathfrak{P},\ 1 \leq k_s \leq N$.

Определение 3.5. Будем называть функцию $\mu : \mathfrak{P} \to [0, 1]$ *вероятностной мерой*, если

1) $\mu(0) = 0,\ \mu(I) = 1$;

2) $\mu\left(\vee_j P_j\right) = \sum\limits_j \mu(P_j)$, если $P_j \wedge P_k = 0$ для $j \neq k$.

Определение 3.6. Будем говорить, что тройка $(H, \mathfrak{P}, \mu)$ задаёт квантовое вероятностное пространство, если H – гильбертово пространство элементарных событий, $\mathfrak{P}$ – решётка проекторов, элемнты которой – события, и μ – вероятностная мера на $\mathfrak{P}$.

Вопрос 3.2. *Как задать меру μ на $\mathcal{P}$?*

Теорема 3.3 (Э. Глизон, 1957 [31]). *Пусть μ – мера на $\mathcal{P}$ и $\dim H > 2$. Тогда существует единственное $\rho \in \mathfrak{S}$ такое, что $\mu(P) = \mathrm{Tr}\,(\rho P)$.*

Замечание 3.2. Условие $\dim H > 2$ существенно. Рассмотрим случай $\dim H = 2$. Фиксируем $H_0 \subset H$, $\dim H_0 = 1$. Зададим меру μ на проекторах P_K на всевозможные подпространства $K \subset H$. Если $K \neq H_0$, положим $\mu(P_K) = 1$ или 0 по желанию (произвольно) и установим $\mu(P_{K^\perp}) = \mu(I - P_K) = 1 - \mu(K)$. Зададим $\mu(P_{H_0}) = \mu\left(P_{H_0^\perp}\right) = \frac{1}{2}$. Эта мера не представима в виде $\mu(P) = \mathrm{Tr}(\rho P)$ ни для какого состояния ρ. Указанные меры не нашли применение в квантовой механике. С другой стороны, в двумерном пространстве H формула $\mu(P) = Tr(\rho P)$ корректно задаёт меру для любого фиксированного $\rho \in \mathfrak{S}$.

Для начала, будем считать, что множество наблюдаемых $\mathfrak{A}$ состоит из самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H, то есть, согласно теореме 2.6, $A \in \mathfrak{A}$ сопоставлена проекторозначная функция E. По аналогии с классической теорией вероятностей будем называть элементы $\mathfrak{A}$ *квантовыми случайными величинами*, поскольку проекторозначная мера E задаёт распределение вероятностей на прямой $\mathbb{R}$ по формуле

$$Pr(A \in B) = \mu(E(B)) = \mathrm{Tr}(\rho E(B)),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{3.14}$$

где левая часть равенства (3.14) интерпретируется как вероятность того, что квантовая случайная величина A принимает значение из множества B.

Определение 3.7. *Математическим ожиданием* $\mathbb{E}_\rho(A)$ и *дисперсией* $\mathbb{V}ar_\rho(A)$ *квантовой случайной величины* A называются величины:

$$\mathbb{E}_\rho(A) = \mathrm{Tr}(\rho A),\ \mathbb{V}ar_\rho(A) = \mathbb{E}_\rho((A - \mathrm{Tr}(\rho A))^2).$$

Для попарно коммутирующих квантовых случайных величин $A_k \in \in \mathfrak{A}$, $[A_k, A_m] = 0,\ 1 \le k, m \le N,\ k \ne m$, их проекторозначные меры, определённые формулой $E_k(B) = \chi_B(A_k),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ 1 \le k \le N$, также коммутируют. Следовательно, проекторы $P_k = E_k(B_k) \in \mathfrak{P}$ являются совместимыми событиями в смысле определения 3.4, и можно ввести совместное распределение вероятностей:

$$Pr(A_{k_1} \in B_1, \dots A_{k_n} \in B_n) = \mathrm{Tr}(\rho E_{k_1}(B_1) \dots E_{k_n}(B_n)), \tag{3.15}$$

$B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ 1 \le k, k_n \le N$.

По аналогии с классической теорией вероятностей рассмотрим два примера.

Пример 3.4 (квантовая случайная величина с дискретным распределением)**.** Положим $A = \sum\limits_j \lambda_j P_j \in \mathfrak{A}$, где $P_j \wedge P_k = \emptyset$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, и события $P_j \in \mathfrak{P}$ образуют полный набор ортогональных проекторов

$\sum\limits_j P_j = I$. Тогда дискретная квантовая случайная величина определяется распределением вероятностей $Pr\,(A = \lambda_j) = \mu\,(P_j) = \mathrm{Tr}(\rho P_j)$, где μ – мера на $\mathcal{P}$, определяемая состоянием $\rho \in \mathfrak{S}$.

Тогда математическое ожидание $\mathbb{E}_\rho(A)$ и дисперсия $\mathbb{V}ar_\rho(A)$ определяются по формуле

$$\mathbb{E}_\rho(A) = \sum_j \lambda_j \mu(P_j),$$

$$\mathbb{V}ar_\rho(A) = \sum_j (\lambda_j - \mathrm{Tr}(\rho A))^2 \mu(P_j).$$

Пример 3.5 (квантовая случайная величина с абсолютно непрерывным распределением)**.** Предположим, что найдётся функция $p_A(x)$, называемая *плотностью распределения* $Pr(A \in B)$, такая, что $Pr(A \in B) = \int\limits_{\mathbb{R}} x p_A(x) dx$, тогда говорят, что A имеет абсолютно непрерывное распределение. В этом случае, математическое ожидание $\mathbb{E}_\rho(A)$ и дисперсия $\mathbb{V}ar_\rho(A)$ даются формулами

$$\mathbb{E}_\rho(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} x p_A(x),$$

$$\mathbb{V}ar_\rho(A) = \mathbb{E}_\rho((A - \mathrm{Tr}(\rho A))^2).$$

3.4. Квантовые случайные величины (наблюдаемые) на примере квантового гармонического осциллятора

Рассмотрим гамильтониан квантового гармонического осциллятора:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}. \tag{3.16}$$

Решим задачу о собственных числах и собственных значениях H:

$$H\psi = \lambda\psi. \tag{3.17}$$

Введём вспомогательные операторы, называемые *операторами рождения* и *уничтожения*, по формуле

$$a^+ = \frac{q - ip}{\sqrt{2}},\ a = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}. \tag{3.18}$$

Операторы (3.18) удовлетворяют коммутационному соотношению:

$$[a, a^+] = \mathrm{I}. \tag{3.19}$$

Выражая p и q через (3.18) и подставляя соответствующие выражения в (3.16) получаем

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{I} + a^+ a. \tag{3.20}$$

Нормированное решение уравнения:

$$a|0> = 0 \tag{3.21}$$

удовлетворяет уравнению (3.17) с $\lambda = \frac{1}{2}$, называется *основным состоянием квантового гармонического осциллятора* и имеет волновую функцию:

$$< x|0> = \frac{1}{\pi^{1/4}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{3.22}$$

Положим

$$|n> = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0>, \tag{3.23}$$

тогда, в силу коммутационного соотношения (3.19), $|n>$ удовлетворяет уравнению (3.17) с $\lambda = \frac{1}{2} + n$, называется *$n$-м возбуждённым состоянием осциллятора* и имеет волновую функцию:

$$< x|n> = \frac{1}{\pi^{1/4} n! 2^n} H_n(x) exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{3.24}$$

где

$$H_n(x) = (-1)^n exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}(exp(-x^2))$$

– полиномы Эрмита. В квантовой оптике важную роль играют когерентные состояния $|\alpha>,\ \alpha \in \mathbb{C}$, являющиеся решением уравнения

$$a|\alpha> = \alpha|\alpha> \tag{3.25}$$

и имеющие волновые функции:

$$< x|\alpha> = \frac{1}{\pi^{1/4}} exp\left(-\frac{(x - \sqrt{2}Re(\alpha))^2}{2} + i\sqrt{2}Im(\alpha)x\right). \tag{3.26}$$

Также полезно выражение когерентного состояния через возбуждённые состояния:

$$|\alpha> = exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n>. \tag{3.27}$$

Для математического ожидания и дисперсии наблюдаемых q и p в когерентных состояниях получаем

$$\mathbb{E}_{|\alpha\rangle}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\alpha|(a^+ + a)|\alpha\rangle = \sqrt{2}Re(\alpha),$$

$$\mathbb{E}_{|\alpha\rangle}(p) = \frac{i}{\sqrt{2}}\langle\alpha|(a^+ - a)|\alpha\rangle = \sqrt{2}Im(\alpha),$$

$$\mathbb{V}ar_{|\alpha\rangle}(q) = \frac{1}{2}\langle\alpha|(a^+ + a)^2|\alpha\rangle - 2Re(\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{\alpha}^2 + \alpha^2 + 1 - 2|\alpha|^2) - 2Re(\alpha)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{V}ar_{|\alpha\rangle}(p) = \frac{1}{2}\langle\alpha| - (a^+ - a)^2|\alpha\rangle - 2Im(\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(-\overline{\alpha}^2 - \alpha^2 + 1 - 2|\alpha|^2) - 2Im(\alpha)^2 = \frac{1}{2}.$$

Фиксируем $\gamma \neq 0$ и введём операторы

$$b = \frac{\gamma q + i\frac{1}{\gamma}p}{\sqrt{2}},\ b^+ = \frac{\gamma q - i\frac{1}{\gamma}p}{\sqrt{2}}. \tag{3.28}$$

Операторы (3.28), как и операторы (3.18), удовлетворяют соотношению

$$[b, b^+] = \mathrm{I}.$$

Отметим, что операторы (3.28) связаны с операторами (3.18) соотношениями

$$b = \mathrm{ch}(\alpha)a + \mathrm{sh}(\alpha)a^+,\ b^+ = \mathrm{sh}(\alpha)a + \mathrm{ch}(\alpha)a^+, \tag{3.29}$$

$\alpha = ln(\gamma)$ при $\gamma > 0$. Соотношения (3.29) называются *преобразованием Боголюбова.* Нормированными решениями уравнения

$$b\psi_{\gamma,\alpha} = \alpha|\psi_{\gamma,\alpha}\rangle$$

будут функции

$$\langle x|\psi_{\gamma,\alpha}\rangle = \frac{\sqrt{|\gamma|}}{\pi^{1/4}}exp\left(-\frac{\gamma^2(x - \sqrt{2}Re\alpha)^2}{2} + i\sqrt{2}\gamma Im(\alpha)x\right). \tag{3.30}$$

Выразим канонические наблюдаемые через операторы рождения и уничтожения b^+, b:

$$q = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(b^+ + b),\ p = \frac{i}{\gamma\sqrt{2}}(b^+ - b). \tag{3.31}$$

Принимая во внимание (3.31), получаем аналогично случаю когерентных состояний:

$$\mathbb{E}_{\psi_{\gamma,\alpha}}(q) = \sqrt{2}Re(\alpha),\ \mathbb{E}_{\psi_{\gamma,\alpha}}(p) = \sqrt{2}Im(\alpha),$$

$$\mathbb{V}ar_{\psi_{\gamma,\alpha}}(q) = \frac{\gamma^2}{2},\ \mathbb{V}ar_{\psi_{\gamma,\alpha}}(p) = \frac{1}{2\gamma^2}.$$

Состояния $\psi_{\gamma,\alpha}$ при $\gamma \neq 1$ принято называть *сжатыми когерентными состояниями*. Состояние $\psi_{\gamma,0}$ при $\gamma \neq 1$ называется *сжатым вакуумом*.

Предположим теперь, что некоторые абстрактные алгебраические элементы A^+ и A удовлетворяют соотношению $[A, A^+] = 1$. Построим их представление в качестве линейных неограниченных операторов в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $(f_n,\ n = 0, 1, 2, \dots)$ по формуле

$$A^+ f_n = \sqrt{n+1} f_{n+1},$$

$$A f_n = \sqrt{n} f_{n-1},\ n > 0,\ A f_0 = 0. \tag{3.32}$$

Получаем, что операторы A^+ и A унитарно эквивалентны операторам рождения и уничтожения a^+ и a. Следовательно, все полиномиальные функции от них также будут унитарно эквивалентны. Таким образом, если рассматриваемые два оператора удовлетворяют соотношению (3.19) мы всегда можем думать о них как об операторах рождения и уничтожения в модели квантового гармонического осциллятора.

3.4.1. Распределение Пуассона

$$B = a^+ a.$$

Найдём распределение вероятностей, отвечающее квантовой случайной величине (наблюдаемой) B в когерентном состоянии $|\alpha >$. Поскольку спектральное разложение имеет вид

$$B = \sum_{n=0}^{+\infty} n |n >< n|, \tag{3.33}$$

получаем

$$Pr(B = n) =< \alpha||n >< n||\alpha >= |< n|\alpha >|^2 = exp(-|\alpha|^2)\frac{|\alpha|^2}{n!}. \tag{3.34}$$

Нетрудно видеть, что (3.34) представляет собой распределение Пуассона с параметром $|\alpha|^2$, то есть

$$\mathbb{E}_{|\alpha>}(B) = \mathbb{V}ar_{|\alpha>}(B) = |\alpha|^2.$$

Немного видоизменим задачу (это пригодится нам при конструкции пуассоновского случайного процесса). Фиксируем $\lambda > 0$ и положим

$$B_1 = b^+ b,$$

где

$$b = a + \sqrt{\lambda}\mathrm{I}. \tag{3.35}$$

Тогда

$$[b, b^+] = \mathrm{I}$$

и спектр B_1 совпадает со спектром B, но B_1 имеет другие собственные векторы. Решим уравнение

$$b|0'\rangle = 0. \tag{3.36}$$

Подставляя (3.35) в (3.36), получаем, что решением уравнения будет когерентное состояние:

$$|0'\rangle = |-\sqrt{\lambda}\rangle.$$

Остальные собственные векторы вычисляются по формуле

$$|n'\rangle = \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}}|0'\rangle.$$

Теперь мы готовы вычислить распределение вероятностей, связанное с парой $(B_1, |0\rangle)$:

$$Pr(B_1 = n) = \left|\langle 0 \left| \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}} \right| 0'\rangle\right|^2 = \frac{1}{n!}\left|\langle (a + \sqrt{\lambda}\mathrm{I})^n 0| - \sqrt{\lambda}\rangle\right|^2 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Таким образом, мы получили распределение Пуассона с параметром λ.

3.4.2. Гауссовское распределение

$$C = a^+ + a.$$

Найдём распределение вероятностей квантовой случайной величины (наблюдаемой) C в когерентном состоянии $|\alpha>$. Поскольку $C = \sqrt{2}q$ и спектральная мера наблюдаемой q представляет собой оператор умножения на индикаторную функцию χ_B множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, получаем

$$Pr(C \in B) = \langle \alpha \left| \chi_{\sqrt{2}B} \right| \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{2}B} exp(-(x - \sqrt{2}Re(\alpha))^2)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{B} exp\left(-\frac{(x - 2Re(\alpha))^2}{2}\right)dx. \qquad (3.37)$$

Таким образом, (3.37) представляет собой гауссовское распределение с параметрами

$$\mathbb{E}_{|\alpha>}(C) = 2Re(\alpha), \ \mathbb{V}ar_{|\alpha>}(C) = 1.$$

3.5. Рандомизация

В классической теории вероятностей рандомизированная случайная величина ξ принимает на элементарном событии ω не одно, а целый ряд значений $\xi(\omega) \in \{\xi_j, \ 1 \leq j \leq n\}$ с некоторыми вероятностями $p_j, \ 1 \leq j \leq n$ [4]. В квантовой теории вероятностей роль рандомизированных случайных величин играют положительные операторозначные меры [13].

Пример 3.6. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ – квантовая случайная величина, то есть $A = A^*$, и ей отвечает пректорозначная мера E. Роль элементарного события в квантовой теории вероятностей играет одномерный проектор $|\xi\rangle\langle\xi|, \ \xi \in H, \ ||\xi|| = 1$. Каково бы ни было борелевское множество $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, всегда найдётся такое элементарное событие $\xi \in E(B)H$, что

$$P_A^{\xi}(B) = \langle \xi, E(B)\xi \rangle = 1.$$

Таким образом, ξ задана точно.

Пусть теперь $M \in \mathfrak{M}$ – обобщённая квантовая наблюдаемая (положительная операторозначная мера). Тогда для любого элементарного события $\xi \in H$:

$$P_M^{\xi}(B) = \langle \xi, M(B)\xi \rangle < 1,$$

поскольку скалярное произведение может равняться единице только в случае, когда $M(B)$ – проектор. Но в последнем случае M будет являться проекторозначной мерой.

По теореме 3.2 (Наймарка) $M(B) = P_H E(B)|_H$, $H \subset K$, где E – проекторозначная мера. Рандомизированные квантовые случайные величины можно интерпретировать следующим образом. Исходная квантовая система H является открытой. Если добавить к ней резервуар (расширить пространство состояний до $K \supset H$), тогда значение квантовой случайной величины будет чётко определено. Значение квантовой случайной величины являлось нечётким, поскольку часть информации «теряется» в резервуаре.

3.6. Соотношение неопределённостей

Пусть A, B – два самосопряженных оператора (наблюдаемых), и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$0 \leq ||(A - i\lambda B)\,\psi||^2 = \langle A\psi,\, A\psi\rangle - i\lambda\,\langle A\psi,\, B\psi\rangle + \\ + i\lambda\,\langle B\psi,\, A\psi\rangle + \lambda^2\,\langle B\psi,\, B\psi\rangle\,. \tag{3.38}$$

Используем следующие соотношения:

$$\langle A\psi,\, B\psi\rangle = \langle \psi,\, AB\psi\rangle\,, \tag{3.39}$$

$$\langle B\psi,\, A\psi\rangle = \langle \psi,\, BA\psi\rangle = \overline{\langle \psi,\, AB\psi\rangle}, \tag{3.40}$$

$$2\mathrm{Re}\,(-i\lambda\,\langle A\psi,\, B\psi\rangle) = 2\lambda\mathrm{Im}\,(\langle A\psi,\, B\psi\rangle) = \frac{2\lambda}{2i}\,\langle \psi,\, (AB - BA)\,\psi\rangle\,. \tag{3.41}$$

Следовательно, неравенство (3.38) выполнено для любого ψ при условии

$$\frac{\mathcal{D}}{4} = (\mathrm{Im}\,\langle A\psi,\, B\psi\rangle)^2 - \langle A\psi,\, A\psi\rangle\,\langle B\psi,\, B\psi\rangle \leq 0. \tag{3.42}$$

Таким образом,

$$(\mathrm{Im}\,\langle A\psi,\, B\psi\rangle)^2 \leq \left\langle \psi,\, A^2\psi\right\rangle \left\langle \psi,\, B^2\psi\right\rangle \tag{3.43}$$

Получаем неравенство

$$\left\langle \psi,\, A^2\psi\right\rangle \left\langle \psi,\, B^2\psi\right\rangle \geq \frac{1}{4}\,|\langle \psi,\, [A,\, B]\,\psi\rangle|^2\,. \tag{3.44}$$

Произведём замену $A \mapsto A - \mathbb{E}_\psi\,(A)\,I$, $B \mapsto B - \mathbb{E}_\psi\,(B)\,I$. Тогда коммутатор $[A,\, B]$ не изменится, а в левой части неравенства появятся дисперсии. В результате получится соотношение неопределённостей:

$$\mathbb{V}ar_\psi\,(A)\,\mathbb{V}ar_\psi\,(B) \geq \frac{1}{4}\,|\langle \psi,\, [A,\, B]\,\psi\rangle|^2\,. \tag{3.45}$$

Пример 3.7. Для $A = q$, $B = p$ формула (3.45) даёт соотношение неопределённгостей:

$$\sigma_q^2 \sigma_p^2 \geq \frac{1}{4}. \tag{3.46}$$

Равенство достигается, когда ψ – когерентное состояние.

3.7. Классическая и квантовая ковариации

Определение 3.8. Ковариация двух классических случайных величин ξ и η определяется по формуле

$$\mathrm{Cov}\,(\xi,\,\eta) = \mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)\,(\eta - \mathbb{E}\eta)\right]. \tag{3.47}$$

Определение 3.9. *Матрицей ковариаций для классических случайных величин* $\xi_k,\ 1 \leq k \leq N$, называется матрица с коэффициентами

$$c_{jk} = \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)\,.$$

Определение 3.10. Ковариация двух совместимых наблюдаемых A и B, $[A, B] = 0$, определяется по формуле

$$\mathrm{Cov}\,(A,\,B) = \mathrm{Tr}\left[\rho\,(A - \mathrm{Tr}\,(\rho A))\,(B - \mathrm{Tr}\,(\rho B))\right]. \tag{3.48}$$

Определение 3.11. *Матрицей ковариаций попарно совместимых наблюдаемых* из множеств $\{A_j,\ 1 \leq j \leq N\}$ и $\{B_k,\ 1 \leq k \leq M\}$, $[A_j, B_k] = 0$, называется матрица с коэффициентами

$$c_{jk} = \mathrm{Cov}\,(A_j,\,B_k)\,. \tag{3.49}$$

Утверждение (Б.С. Цирельсон, 1980 [23]). Существует пример квантовой матрицы ковариаций, которая не реализуется в классическом случае.

Лекция 4

4.1. Составные квантовые системы

До сих пор мы рассматривали квантовые системы, которым соответствовало фиксированное гильбертово пространство H. По этой причине мы обозначали множество состояний (положительных операторов с единичным следом) $\mathfrak{S}$ без указания H. Теперь для изучения составных квантовых систем, мы введём обозначение $\mathfrak{S}(H)$ для множества всех состояний в H. Напомним, что $\rho \in \mathfrak{S}(H)$ называется *чистым*, если $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|\,,\ \psi \in H$. В противном случае состояние называется *смешанным*.

Определение 4.1. Пусть H, K – гильбертовы пространства, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$, $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ – ортонормированные базисы в них. *Тензорным произведением гильбертовых пространств* $H \otimes K$ называется гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_j \otimes h_k\}$, так что скалярное произведение определяется на базисных векторах по формуле

$$\langle e_j \otimes h_k,\, e_{j'} \otimes h_{k'}\rangle = \delta_{jj'}\delta_{kk'},$$

и продолжается по линейности на всё пространство.

Определение 4.2. Пусть H, K – гильбертовы пространства, $H \times K = \{\,(e,\, h) \mid e \in H,\, h \in K\}$ – их декартово произведение. Назовём элементарными тензорами объекты вида $e \otimes h$, где $e \in H$, $h \in K$. Определим скалярное произведение на элементарных тензорах по формуле

$$\langle e \otimes h,\, \tilde{e} \otimes \tilde{h}\rangle_{H\otimes K} = \langle e,\, \tilde{e}\rangle_H \langle h,\, \tilde{h}\rangle_K.$$

Тогда $||x|| = \sqrt{(x,\, x)}$ – согласованная с этим скалярным произведением норма. *Тензорным произведением гильбертовых пространств* называется $H \otimes K = H \times K/\sim$, где элементы $x \sim y$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $||x - y|| = 0$.

Утверждение 4.1. Определения 4.1 и 4.2 эквивалентны.

Замечание 4.1. Не все элементы $H \otimes K$ являются элементарными тензорами.

Пусть двум квантовым системам соответствуют гильбертовы пространства H и K соответственно. Тогда составной системе, состоящей из двух подсистем отвечает тензорное произведение $H \otimes K$. Предположим, что чистое состояние составной системы задаётся элементарным тензором $e \otimes h \in H \otimes K$. Тогда первая система находится в чистом состоянии $e \in H$, а вторая в чистом состоянии $h \in K$. Состояния $e \otimes h$ называются *сепарабельными*. Состояния не представимые в виде элементарного тензора называются *сцепленными* (entangled) *чистыми состояниями*. Из аксиом Макки следует, что кроме чистых состояний $|\psi\rangle \langle\psi|$ определены также смешанные состояния $\sum\limits_j \pi_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j|$. Смешанные состояния классифицируются на *сепарабельные* и *сцепленные* аналогично чистым. Более формально это важнейшее понятие определяется следующим образом.

Определение 4.3. Пусть $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$ – состояние составной системы. Если существует наборы состояний $\left\{\rho_H^j\right\} \subset \mathfrak{S}(H)$ и $\left\{\rho_K^j\right\} \subset \subset \mathfrak{S}(K)$ и набор чисел $\{\pi_j\} \subset \mathbb{R}$ таких, что $\pi_j > 0$, $\sum\limits_j \pi_j = 1$, и $\rho = \sum\limits_j \pi_j \rho_H^j \otimes \rho_K^j$ (состояние ρ является выпуклой комбинацией состояний $\rho_H^j \otimes \rho_K^j$), то состояние ρ называется *сепарабельным*. В противном случае (если состояние ρ не представимо в таком виде) состояние ρ называется *сцепленным*.

Замечание 4.2. Существует много вариантов перевода слова entangled на русский язык. В физике существует традиция перевода прилагательными запутанное или перепутанное. В математике – сцепленное или зацепленное. Один из величайших физиков XX века Л.В. Келдыш переводил этот термин как *переплетённое*. Нельзя забывать, что entangled уже является переводом на английский язык с немецкого первоначального термина Verschräenkung, введённого Э. Шредингером.

Пример 4.1. Пусть обеим системам соответствует одно и то же гильбертово пространство H, $\dim H = 2$ и $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ – ортонормированный базис в H. Тогда составная система описывается гильбертовым пространством $H \otimes H$. Рассмотрим два состояния из $H \otimes H$:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle\right),$$
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle\right).$$

Эти состояния не представимы в виде элементарных тензоров, то есть являются сцепленными. В физике ψ_0 называется *синглетным состоянием* (спин равен нулю), а ψ_1 – *триплетным* (спин равен единице).

Определение 4.4. Пусть $T : H \to H$ и $S : K \to K$ – линейные ограниченные операторы в гильбертовых пространствах H и K соответственно. Тогда их *тензорным произведением* $T \otimes S$ называется линейный оператор в $H \otimes K$, действующий на элементарные тензоры по формуле: $(T \otimes S)(e \otimes h) = Te \otimes Sh$ и далее продолжающийся на всё $H \otimes K$ по линейности. Элементарные тензоры $T \otimes S$ порождают алгебру всех линейных ограниченных операторов $B(H \otimes K)$ в гильбертовом пространстве тензорного произведения $H \otimes K$.

4.2. Очищение состояния

Определение 4.5. Пусть $\{|\xi_k\rangle \langle\xi_s| \otimes |\eta_k\rangle \langle\eta_s|\}$ – базис в $B(H \otimes K)$, состоящий из операторов ранга один. *Частичным следом* называется отображение $\mathrm{Tr}_K : \mathfrak{S}(H \otimes K) \to \mathfrak{S}(H)$, определённое на базисных элементах по формуле

$$\mathrm{Tr}_K (|\xi_k\rangle \langle\xi_s| \otimes |\eta_k\rangle \langle\eta_s|) = |\xi_k\rangle \langle\xi_s| \cdot \langle\eta_s, \eta_k\rangle . \tag{4.1}$$

На остальные элементы $B(H \otimes K)$ частичный след Tr_K продолжается по линейности.

Теорема 4.1. *Пусть $\rho \in \mathfrak{S}(H)$. Тогда существует гильбертово пространство K и вектор $\psi \in H \otimes K$ такие, что $\rho = \mathrm{Tr}_K (|\psi\rangle \langle\psi|)$.*

Доказательство. Используем спектральное разложение:

$$\rho = \sum_{j=1}^{N} \pi_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| ,$$

где $\langle\psi_j, \psi_k\rangle = \delta_{jk}$, $\pi_j \geq 0$, $\sum\limits_j \pi_j = 1$. Возьмём гильбертово пространство K, $\dim K = N$, с ортонормированным базисом $\{|j\rangle\}_{j=1}^N$. Положим $|\psi\rangle = \sum\limits_j \sqrt{\pi_j} |\psi_j\rangle \otimes |j\rangle \in H \otimes K$. Заметим, что $\langle\psi, \psi\rangle = 1$. По определению частичного следа получаем:

$$\mathrm{Tr}_K (|\psi\rangle \langle\psi|) = \mathrm{Tr}_K \left(\sum_{j,k} \sqrt{\pi_j \pi_k} |\psi_j\rangle \langle\psi_k| \otimes |j\rangle \langle k| \right) =$$

$$= \sum_{j,k} \sqrt{\pi_j \pi_k} \cdot \langle j|k\rangle \cdot |\psi_j\rangle \langle\psi_k| = = \sum_{j,k} \sqrt{\pi_j \pi_k} \cdot \delta_{jk} \cdot |\psi_j\rangle \langle\psi_k| = \sum_j \pi_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| .$$

□

Теорема 4.2. *Пусть* $\psi \in H \otimes K$, $||\psi|| = 1$. *Тогда существуют* $\{e_j\} \subset \subset H$, $\{h_j\} \subset K$ *– ортонормированные базисы в* H *и* K, *а также набор чисел* $\left\{ \pi_j : \ \pi_j \geq 0, \ \sum\limits_j \pi_j = 1 \right\}$, *так что справедливо разложение:*

$$|\psi\rangle = \sum_j \sqrt{\pi_j}\, |e_j\rangle \otimes |h_j\rangle\,,$$

называемое ***разложением Шмидта*** *состояния* ψ.

Доказательство. Обозначим $\rho = \mathrm{Tr}_K\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)$. Рассмотрим спектральное разложение $\rho = \sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j\, |e_j\rangle\langle e_j|$, где $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$, $\pi_j \geq 0$, $\sum\limits_j \pi_j = 1$. Поскольку $\{e_j \otimes e_k\}$ является ортонормированным базисом в $H \otimes K$, можно найти разложение $\psi = \sum\limits_{j,k} \lambda_{jk}\, |e_j\rangle \otimes |e_k\rangle$. Определим h_j по формуле

$$|h_j\rangle = \frac{\sum\limits_k \lambda_{jk}\, |e_k\rangle}{\sqrt{\sum\limits_k |\lambda_{jk}|^2}}. \tag{4.2}$$

Тогда $||h_j|| = 1$, так что получается искомое разложение $|\psi\rangle = \sum\limits_j \lambda_j\, |e_j\rangle \otimes \otimes |h_j\rangle$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j\, |e_j\rangle\langle e_j| = \rho = \mathrm{Tr}_K\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) = \sum_{j,k} \lambda_j \overline{\lambda_k}\, |e_j\rangle\langle e_k|\, \langle h_k, h_j\rangle\,. \tag{4.3}$$

Сравнивая полученные выражения, получаем $\langle h_j, h_k\rangle = \delta_{jk}$, $|\lambda_j|^2 = = \pi_j$. Таким образом, $|\psi\rangle = \sum\limits_j \sqrt{\pi_j}\, |e_j\rangle \otimes |h_j\rangle$. $\square$

Следствие 4.1. $\mathrm{Spect}\left(\mathrm{Tr}_K\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)\right) = \mathrm{Spect}\left(\mathrm{Tr}_H\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)\right)$.

Замечание. Физические условия накладывают дополнительные требования на состояния составной системы. Для бозонов требуется рассматривать симметризованное тензорное произведение $H \otimes_s K$, в то время как для фермионов – антисимметризованное $H \otimes_a K$. Также для фермионов нужно использовать правила суперотбора [18].

4.3. Граница Цирельсона

Вернёмся к ковариационной матрице, введённой в п. 3.7 предыдущей лекции. Сразу следует отметить, что в квантовой теории для наблюдаемых $A_j, B_k \in \mathfrak{A}$, $\mathbb{E}_\psi(A_j) = \mathbb{E}_\psi(B_k) = 0$, имеет смысл рассматривать ковариационную матрицу:

$$c_{jk} = \mathbb{E}_\psi\left(A_j B_k\right),$$

только если наблюдаемые попарно коммутируют $[A_j, B_k] = 0$ (то есть измеримы одновременно).

Лемма 4.1. *Пусть* $X_k,\ Y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,\, 2$, $|X_k| \le 1$, $|Y_k| \le 1$. *Тогда* $|X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2| \le 2$.

Доказательство. Обозначим $M = |X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2|$. Тогда

$$\begin{aligned} M = |X_1\left(Y_1 + Y_2\right) + X_2\left(Y_1 - Y_2\right)| \le |X_1|\,|Y_1 + Y_2| + |X_2|\,|Y_1 - Y_2| \le \\ \le |Y_1 + Y_2| + |Y_1 - Y_2| \le 2. \end{aligned}$$

□

Следствие 4.2. *Для классических случайных величин* X_k, Y_k *таких, что* $|X_k| \le 1$, $|Y_k| \le 1$, $k = 1,\, 2$, *выполнено неравенство*

$$-2 \le \mathbb{E}\left(X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2\right) \le 2. \tag{4.4}$$

Замечание 4.3. Из следствия 4.2 вытекает, что коэффициенты классической ковариационной матрицы $c_{jk} = \mathbb{E}(X_jY_k)$ удовлетворяют соотношению

$$|c_{11} + c_{12} + c_{21} - c_{22}| \le 2. \tag{4.5}$$

Условие на матрицу ковариаций (4.5) называется *неравенством Белла–Клаузера–Хорна–Шимони.*

Вопрос 4.1. *Верно ли, что в случае квантовых случайных величин* A_j, B_k *с аналогичными свойствами как у* X_j, Y_k *для коэффициентов квантовой ковариационной матрицы* $c_{jk} = \mathbb{E}_\psi\left(A_jB_k\right)$ *выполняется неравенство (4.5)?*

Ответ: Нет, это, вообще говоря, не так.

Пример 4.2. Рассмотрим гильбертово пространство $H, \dim H = 2$, описывающее состояние частицы со спином $\frac{1}{2}$. Базис в H естественно обозначить

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

Введём наблюдаемую «удвоенная проекция спина на направление $\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)$», которую обозначим $\sigma(\vec{a})$:

$$\sigma\left(\vec{a}\right) = a_x\sigma_x + a_y\sigma_y + a_z\sigma_z = \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где $\sigma_x,\, \sigma_y,\, \sigma_z$ – матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Тогда

$$\langle\uparrow\left|\sigma\left(\vec{a}\right)\right|\uparrow\rangle = a_z,\ \langle\downarrow\left|\sigma\left(\vec{a}\right)\right|\downarrow\rangle = -a_z, \tag{4.9}$$

$$\langle\downarrow\left|\sigma\left(\vec{a}\right)\right|\uparrow\rangle = a_x + ia_y,\ \langle\uparrow\left|\sigma\left(\vec{a}\right)\right|\downarrow\rangle = a_x - ia_y. \tag{4.10}$$

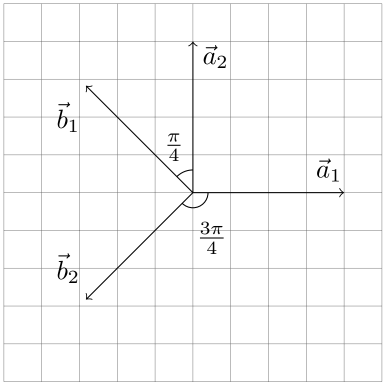
Теперь рассмотрим составную систему $H \otimes K$, $\dim H = \dim K = 2$. Будем считать, что гильбертовы пространства H и K описывают состояния двух систем со спином $\frac{1}{2}$. Тогда составная система $H \otimes K$ описывает состояние системы из двух фермионов, так что ортонормированный базис в ней будем обозначать $|\uparrow\uparrow\rangle\,,\ |\uparrow\downarrow\rangle\,,\ |\downarrow\uparrow\rangle\,, |\downarrow\downarrow\rangle$. Рассмотрим пару коммутирующих наблюдаемых $A = \sigma(\vec{a}) \otimes \mathrm{I}$ и $B = \mathrm{I} \otimes \sigma(\vec{b})$, отвечающих паре произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть система находится в синглетном состоянии:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).$$

Тогда из (4.9) и (4.10) немедленно вытекает, что

$$E_\psi(A) = E_\psi(B) = 0,\ \mathbb{V}\mathrm{ar}_\psi(A) = \mathbb{V}\mathrm{ar}_\psi(B) = 1, \tag{4.11}$$

$$\langle\psi\left|AB\right|\psi\rangle = -\vec{a}\vec{b}. \tag{4.12}$$



Зададим направления $\vec{a_j}, \vec{b_k}$ так, как это указано на рисунке. Тогда для коэффициентов ковариационной матрицы получаем

$$c_{11} + c_{12} + c_{21} - c_{22} = 2\sqrt{2}.$$

Теорема 4.3 (Б.С. Цирельсон, 1980 [23]). *Пусть операторы A_k, B_k $(k = 1,\, 2)$ таковы, что*

$$A_k^2 = B_k^2 = I,\ [A_k,\, B_j] = 0,\ \{A_k,\, A_j\} = \{B_k,\, B_j\} = c \cdot I, \tag{4.13}$$

$$-I < A_k \le I, \quad -I < B_k \le I. \tag{4.14}$$

Тогда $\mathbb{E}\left(A_1 B_1 + A_2 B_1 + A_1 B_2 - A_2 B_2\right) \le 2\sqrt{2}$. *Величина* $2\sqrt{2}$ *называется* ***границей Цирельсона***.

Замечание 4.4. Здесь $[\cdot,\, \cdot]$ – коммутатор, $\{\cdot,\, \cdot\}$ – антикоммутатор. Неравенство $A < I$ означает, что $I - A > 0$, то есть оператор $I - A$ положительный. Для любого оператора A выполнено неравенство $A < < ||A||\, I$, следовательно сравнение с I корректно.

Ниже дано доказательство из [23]. Более изящное доказательство приведено в [16].

Доказательство. Обозначим $M = A_1 B_1 + A_2 B_1 + A_1 B_2 - A_2 B_2$. Тогда

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{2}-1}{8}\left\{\left(\left(\sqrt{2}+1\right)(A_1 - B_1) + A_2 - B_2\right)^2 +\right.$$

$$+\left(\left(\sqrt{2}+1\right)(A_1-B_2)-A_2-B_1\right)^2+$$

$$\left.+\left(\left(\sqrt{2}+1\right)(A_2+B_2)-A_1-B_1\right)^2\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1^2+A_2^2+B_1^2+B_2^2\right)\leq\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

□

Замечание. Выше мы показали, что граница Цирельсона достигается на синглетном состоянии в задаче о системе двух частиц со спином $\frac{1}{2}$.

Лекция 5

5.1. Собственные функции и собственные значения преобразования Фурье

Рассмотрим преобразование Фурье, определённое для функций $\psi \in$ $\in L^1(\mathbb{R})$ формулой

$$\mathcal{F}\left[\psi\right](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} \psi\left(x\right) dx. \tag{5.1}$$

Действие $\mathcal{F}$ можно продолжить на функции из пространства $L^2(\mathbb{R})$, что будет частным случаем того, что мы получим в этом пункте. Рассмотрим операторы рождения и уничтожения, введённые нами при рассмотрении задачи о квантовом гармоническом осцилляторе:

$$a = \frac{q + ip}{\sqrt{2}},\ a^+ = \frac{q - ip}{\sqrt{2}}.$$

Из (5.1) следует, что

$$\mathcal{F} \circ q = -p \circ \mathcal{F},\ \mathcal{F} \circ p = q \circ \mathcal{F}. \tag{5.2}$$

Таким образом, выполнено тождество

$$\mathcal{F} \circ a = ia \circ \mathcal{F}. \tag{5.3}$$

Тем самым решение уравнения

$$a|0\rangle = 0$$

является неподвижной точкой преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}|0\rangle = |0\rangle. \tag{5.4}$$

Действительно, уравнение (5.4) имеет единственное нормированное решение:

$$\langle x|0\rangle = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

называемое *основным состоянием квантового гармонического осциллятора*. Таким образом, тождество (5.3) гарантирует, что это неподвижная точка преобразования Фурье. Ниже мы покажем, что это единственная (нормированная) неподвижная точка $\mathcal{F}$. Аналогично, поскольку

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

для когерентных состояний осциллятора $|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, с волновыми функциями

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-\sqrt{2}Re(\alpha))^2}{2} + i\sqrt{2}Im(\alpha)x\right)$$

получаем

$$\mathcal{F}|\alpha\rangle = -i\alpha| - i\alpha\rangle,$$

$\alpha \in \mathbb{C}$. Отметим, что отсюда немедленно получается, что

$$\mathbb{E}_{|\alpha\rangle}(q) = \mathbb{E}_{|\alpha\rangle}(p) = 0,$$

$$\mathbb{V}ar_{|\alpha\rangle}(q) = \mathbb{V}ar_{|\alpha\rangle}(p) = \frac{1}{2},$$

что минимизирует соотношение неопределённостей:

$$\mathbb{V}ar_\rho(q)\mathbb{V}ar_\rho(p) \geq \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим возбуждённые состояния осциллятора:

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.5}$$

Теорема 5.1. *Система основного и возбуждённых состояний осциллятора образует полную систему собственных функций преобразования Фурье:*

$$\mathcal{F}|n\rangle = (-i)^n|n\rangle,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

Замечание 5.1. Из теоремы 5.1 следует, что основное состояние осциллятора является единственной неподвижной точкой преобразования Фурье.

Замечание 5.2. Поскольку система собственных векторов $\mathcal{F}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье $\mathcal{F}$, заданное первоначально формулой (5.1), корректно заданной в $L^1(\mathbb{C})$, можно продолжить до преобразования функций из пространства $L^2(\mathbb{R})$. Более того, справедливо равенство Парсеваля:

$$||\mathcal{F}(\psi)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\psi||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Из (5.2) следует, что

$$\mathcal{F} \circ a^{+} = -ia^{+} \circ \mathcal{F}.$$

Таким образом, из (5.5) вытекает выполнение (5.6). Поскольку система из основного и возбуждённых состояний образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$, заключаем, что мы полностью описали спектр преобразования Фурье. □

5.2. Действие группы унитарных операторов, связанной с квантовым гармоническим осциллятором, на канонические наблюдаемые

Рассмотрим чистое состояние $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathfrak{S}$ и $A \in \mathfrak{A}$ – наблюдаемая в гильбертовом пространстве H, обладающая циклическим вектором $\psi_0 \in H$ (замыкание линейных комбинаций $A^n\psi_0$ порождают всё H). Тогда, согласно теореме 2.4, паре $(|\psi\rangle,\ A)$ отвечает волновая функция $\psi_A(x)$. Для операторов координаты q и импульса p функция

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

(основное состояние квантового гармонического осциллятора) является циклическим вектором. В случае, когда $A = q$ или p, говорят, что $\psi_q(x)$ и $\psi_p(x)$ – волновые функции состояния в координатном и импульсном представлении соответственно.

Волновые функции в координатном и импульсном представлении связаны преобразованием Фурье:

$$\psi_p(y) = \mathcal{F}[\psi_q](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\psi_q(x)\,dx. \tag{5.7}$$

Как уже было подмечено (вопрос 1.1), знание $|\psi_q|^2$ и $|\psi_p|^2$ не позволяет восстановить состояние ψ.

Вопрос 5.1. *Сколько наблюдаемых A необходимо взять, чтобы по квадратам модулей $|\psi_A(x)|^2$ можно было восстановить состояние ψ?*

Утверждение ([33]). Достаточно знать $|\psi_A(x)|^2$ для всех наблюдаемых вида $A = \cos\varphi \cdot q + \sin\varphi \cdot p$, где $\varphi \in [0,\ \pi]$.

Обозначим $H = \frac{q^2+p^2}{2}$ гамильтониан квантового гармонического осциллятора. Заметим, что оператор H – самосопряженный, следовательно, следовательно к нему применима спектральная теорема и для функции $f_\varphi(x) = \exp(-i\varphi x)$ корректно определён оператор $f_\varphi(H) = \exp\left(-i\varphi H\right)$, который является унитарным в силу того, что $Spect(f_\varphi(H)) = f_\varphi(Spect(H)) = \{e^{i\varphi x},\ x \in \mathbb{R}\}$ в силу теоремы об отображении спектра. Нам будет удобно определить семейство унитарных операторов формулой

$$U_\varphi = e^{\frac{i}{2}\varphi} f_\varphi(H), \tag{5.8}$$

поскольку в этом случае $U_{\frac{\pi}{2}} = \mathcal{F}$ совпадает с преобразованием Фурье.

Замечание 5.3. Из определения U_φ следует $U_{\varphi_1+\varphi_2} = U_{\varphi_1}U_{\varphi_2}$, то есть $\{U_\varphi\}$ – однопараметрическая подгруппа в группе всех унитарных операторов. Отметим, что для любого $f \in H$ последовательность $U_{\varphi+\delta}f \to U_\varphi f$ при $\delta \to 0$, что называется *непрерывностью орбит* в смысле сильной операторной топологии.

Теорема 5.2.

$$U_\varphi q U_\varphi^* = \cos\varphi q + \sin\varphi p,$$

$$U_\varphi p U_\varphi^* = -\sin\varphi q + \cos\varphi p,$$

$t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Коммутатор операторов координаты q и импульса p равен

$$[q,\, p] = qp - pq = i. \tag{5.9}$$

Используя (5.9), вычислим

$$\left[q^2,\, p\right] = q^2p - pq^2 = q^2p - (qp - i)\, q = q^2p + iq - q\,(qp - i) = 2iq. \tag{5.10}$$

Аналогичным образом

$$\left[p^2,\, q\right] = -2ip. \tag{5.11}$$

Отметим, что в общем случае

$$\left[f\left(q\right),\, p\right] = if'\left(q\right),\ \left[f\left(p\right),\, q\right] = -if'\left(p\right) \tag{5.12}$$

для аналитической функции f.

Обозначим

$$\Delta_\varphi = U_\varphi p U_\varphi^* = \exp\left(i\varphi H\right) q \exp\left(-i\varphi H\right). \tag{5.13}$$

Тогда
$$\Delta'_\varphi\big|_{\varphi=0} = i\,(Hp - pH) = i\,[H,\,p] = -q. \tag{5.14}$$

Из группового свойства $U_{\varphi_1+\varphi_2} = U_\varphi U_\varphi$ следует, что Δ_φ удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$\frac{d}{d\varphi}\Delta_\varphi = i\,[H,\,\Delta_\varphi]\,, \tag{5.15}$$
называемому *уравнением Лиувилля–фон Неймана.* Поставим для уравнения (5.15) начальное условие Коши:
$$\Delta_0 = q. \tag{5.16}$$
Будем искать решение задачи (5.15) – (5.16) в виде
$$\Delta_\varphi = \alpha(\varphi)\cdot q + \beta(\varphi)\cdot p. \tag{5.17}$$
Подставляя (5.17) в уравнение (5.15) и принимая во внимание (5.10) и (5.11) получаем
$$\alpha''(\varphi) = -\beta(\varphi),\ \ \beta''(\varphi) = \alpha(\varphi), \tag{5.18}$$
$$\alpha(0) = 1,\ \ \beta(0) = 0. \tag{5.19}$$
Решая систему (5.18) – (5.19) получаем $\alpha(\varphi) = \cos(\varphi),\ \beta(\varphi) = \sin(\varphi)$. Действие на оператор импульса p получается аналогичным образом. $\square$

Замечание 5.4. Можно показать, что действие унитарного оператора $U_\varphi = \exp\left(i\varphi H\right),\ \varphi \neq 0$, представимо в виде интегрального оператора
$$\left(U_\varphi\psi\right)(x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,|\sin\varphi|}}\exp\left(\frac{i\cos\varphi\cdot x^2}{2\sin\varphi}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{i\cos\varphi\cdot y^2}{2\sin\varphi} - \frac{ixy}{\sin\varphi}\right)\psi\left(y\right)dy, \tag{5.20}$$
$\psi \in L^1(\mathbb{R})$.

Замечание 5.5. В силу группового свойства $U_{\varphi_1+\varphi_2} = U_{\varphi_1}U_{\varphi_2}$ получаем
$$(U_{\frac{\pi}{2n}})^n = U_{\frac{\pi}{2}} = \mathcal{F},$$
то есть преобразование $U_{\frac{\pi}{2n}}$ является корнем n-й степени из преобразования Фурье $\mathcal{F}$. По этой причине группа $\{U_\varphi\}$ называется *дробным преобразованием Фурье* [40]. Поскольку основное и возбуждённые состояния осциллятора являются полной системой собственных функций гамильтониана H, получаем
$$U_\varphi|n> = e^{i\varphi n}|n>,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.21}$$

5.3. Семейство унитарных преобразований канонических наблюдаемых

Определим модифицированные операторы координаты и импульса:

$$q_{\mu,\nu} = \mu \cdot q - \nu \cdot p,$$
$$p_{\mu,\nu} = \nu \cdot q + \mu \cdot p,$$

$\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Отметим, что, поскольку для исходных операторов $[q,\, p] = i$, модифицированные операторы удовлетворяют соотношению

$$[q_{\mu,\nu},\, p_{\mu,\nu}] = i(\mu^2 + \nu^2).$$

Определение 5.1. Для фиксированных $\mu,\, \nu \in \mathbb{R},\ \nu \neq 0$, определим интегральное преобразование $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$ в пространстве $L^1(\mathbb{R})$ формулой

$$\mathcal{F}_{\mu,\nu}\left[\psi\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left|\nu\right|}} \exp\left(\frac{i\mu x^2}{2\nu}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i\mu y^2}{2\nu} - \frac{ixy}{\nu}\right) \psi\left(y\right) dy. \tag{5.22}$$

Замечание 5.6. Поскольку преобразование (5.22) является композицией преобразования Фурье и оператора умножения на функцию с единичном модулем, оно продолжается на пространство $L^2(\mathbb{R})$ и сохраняет норму

$$||\mathcal{F}_{\mu,\nu}(\psi)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\psi||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Лемма 5.1.

$$\mathcal{F}_{\mu,\nu} \circ q = q_{\mu,\nu} \circ \mathcal{F}_{\mu,\nu},$$

$$\mathcal{F}_{\mu,\nu} \circ p = p_{\mu,\nu} \circ \mathcal{F}_{\mu,\nu}.$$

Доказательство. Докажем первое тождество.

$$(\mu q + \nu p) \circ \mathcal{F}_{\mu,\nu}[\psi](x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left|\nu\right|}} \exp\left(\frac{i\mu x^2}{2\nu}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i\mu y^2}{2\nu} - \frac{ixy}{\nu}\right) (\mu x - \mu x + y)\psi\left(y\right) dy.$$

Второе тождество доказывается аналогично. □

Лекция 6

6.1. Задача безошибочного кодирования

Будем характеризовать классический канал связи неориентированным графом, в котором вершины изображают передаваемую информацию, а рёбра – искажение информации. Если вершины u и v соединены ребром, тогда при передаче v может быть получено u вместо v и при передаче u может быть получено v вместо u.

Задача 6.1. Какое кодирование нужно использовать, чтобы после передачи информации её можно было безошибочно декодировать?

Пример 6.1. Рассмотрим граф G с множеством вершин:

$$V = \{A,\, B,\, C,\, D\}$$

и множеством рёбер:

$$E = \{(A,\, B)\,,\, (C,\, D)\,,\, (D,\, E)\}\,.$$

В графе G возможны следующие искажения при передаче информации: $A \to B$, $B \to A$, $C \to D$, $D \to C$, $D \to E$ и $E \to D$. Если использовать для кодирования вершины A и E, то по полученному сообщению можно однозначно восстановить отправленное, поскольку множества вершин $[A]$ и $[B]$, в которые могут перейти сообщения A и B, не пересекаются. С другой стороны, если использовать для кодирования A, C и E, отправленная информация не всегда восстанавливается однозначно, поскольку при получении D нельзя достоверно заключить, было ли отправлено E или C.

Набор вершин, которые можно использовать для безошибочной передачи информации называется *антикликой*.

6.2. Кодирование квантовой информации

Носителем квантовой информации является набор состояний $\psi \in H$. По аналогии с классическим случаем, можно считать, что вершинами «графа», отвечающего каналу связи, являются состояния $\psi_k \in H$, $k \in \overline{1,\, N}$. Тогда рёбрами такого «графа» (ошибками) следует считать унитарные операторы $\psi_k \mapsto U\psi_k$. Обозначим множество «ошибок» $\mathcal{U}$. В силу того, что вершины, соединённые ребром, могут переходить друг в друга по условию, получаем требование $U \in \mathcal{U}$, которое влечёт $U^* \in \mathcal{U}$. Обязательно нужно предполагать, что искажение может и не происходить. Следовательно, $I \in U$. Конечно, приведённые выше соображения не являются точными определениями и нужны только для того, чтобы вызвать удобные ассоциации.

Определение 6.1. Линейное пространство $\mathcal{V}$, состоящее из ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, называется *некоммутативным операторным графом*, если выполнены следующие условия:

1) если оператор $A \in \mathcal{V}$, тогда $A^* \in \mathcal{V}$;

2) тождественный оператор $I \in \mathcal{V}$.

Замечание 6.1. Определение некоммутативного операторного графа в контексте квантовой теории информации было дано в [27]. На самом деле, в функциональном анализе некоммутативные операторные графы известны под названием *операторных систем* [22]. Более полное обсуждение теории квантовых кодов, исправляющих ошибки можно найти в [15, 16].

Теорема 6.1 ([26]). *В конечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{V}$ является некоммутативным операторным графом тогда и только тогда, когда существует набор операторов $M_j \in \mathcal{V}$, $M_j > 0$, $\sum\limits_j M_j = I$, такой, что $\mathcal{V} = span\,\{M_j\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} = span\,\{M_j\}$. Тогда все свойства из определения некоммутативного операторного графа выполнены.

Пусть, наоборот, $\mathcal{V}$ – некоммутативный операторный граф. Тогда, в силу свойства 1 из определения графа, в $\mathcal{V}$ существует базис из самосопряженных операторов. Такой базис будет состоять из конечного числа элементов в силу конечномерности гильбертова пространства H. Поскольку $\mathrm{I} + \frac{A}{||A||} > 0$ для любого самосопряженного оператора A, можно построить базис с нужными свойствами S. □

Определение 6.2. Проектор P в H такой, что $\dim(PH) \geq 2$, называется *антикликой* для некоммутативного операторного графа $\mathcal{V}$, если $\dim(P\mathcal{V}P) = 1$, то есть для любого $X \in \mathcal{V}$ выполнено $PXP = \lambda P$, где $\lambda \in \mathbb{C}$.

Замечание 6.2. Обозначим $H_P = PH$. Пусть $\{\xi_j\}$ – ортонормированный базис в H_P. Тогда выполнены следующие свойства:

$$\langle \xi_j, X\xi_j \rangle = \langle \xi_k, X\xi_k \rangle \quad \forall j,\, k\ \forall X \in \mathcal{V}; \tag{6.1}$$

$$\langle \xi_j, X\xi_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k\ \forall X \in \mathcal{V}. \tag{6.2}$$

Замечание 6.3. Если $U \in \mathcal{U}$ – унитарный оператор, то для ортонормированного базиса $\{\xi_j\}$ выполнено $U\xi_k \perp \xi_j$.

Следствие. *Состояния* $\{\xi_j\}_{j=1}^{\dim P}$ *можно выбрать для кодирования информации.*

Основы излагаемой теории заложены в [36]. Следует также упомянуть пионерскую работу [43].

Пример 6.2. Пусть $H = \mathbb{C}^2$ – кубит и унитарные операторы, порождающие граф (ошибки), – матрицы Паули:

$$\sigma_0 = I,\ \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Опишем физический смысл ошибок. Матрица σ_x отвечает перевороту направления спина (flip): $|\uparrow\rangle \mapsto |\downarrow\rangle$, $|\downarrow\rangle \mapsto |\uparrow\rangle$. Матрица σ_z отвечает сдвигу по фазе на π (phase shift): $|\uparrow\rangle \mapsto |\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle \mapsto -|\downarrow\rangle$. Матрица σ_y представляет собой композицию переворота и сдвига по фазе. Код Шора [43] строится из девяти кубитов и способен исправить произвольную ошибку, осуществляемую матрицами Паули, которая воздействует на один из них. Такая ситуация неудивительна, поскольку построенный код вкладывается в общую теорию [36].

Утверждение 6.1. Если $\dim \mathcal{V} = (\dim H)^2$, то есть $\mathcal{V}$ – алгебры всех матриц, то не существует антиклики P.

Утверждение 6.2. Если $\mathcal{V}$ – максимальная коммутативная подалгебра, то не существует антиклики P.

Теорема 6.2. *Пусть* $\dim \mathcal{V} \cdot (\dim \mathcal{V} + 1) \leq \frac{\dim H}{rankP}$, *тогда существует антиклика* P *размерности* $rankP$.

Доказательство. Используется обобщённая теорема Радона [37]. □

Пример 6.3. Рассмотрим двухкубитное пространство $H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ и пространство ошибок $\mathcal{V} = \operatorname{span}\{I, T, U, V, W\}$, где $T = \sigma_x \otimes I$, $U = \sigma_y \otimes I$, $V = I \otimes \sigma_y$, $W = I \otimes \sigma_z$.

Положим

$$f_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Тогда

$$\langle f_\pm, Xf_\pm \rangle = \langle f_\mp, Xf_\pm \rangle = 0. \tag{6.5}$$

Следовательно, проектор P на подпространство $H_P = PH = \{\mathbb{C}f_\pm\}$ – антиклика для $\mathcal{V}$.

6.3. Ковариантные положительные операторозначные меры

Рассмотрим локально-компактную хаусдорфову топологическую группу G и σ-кольцо $\mathcal{B}(G)$, порождённое её компактными подмножествами. Фиксируем гильбертово пространство H и обобщим определение 3.1 меры на действительной прямой.

Определение 6.3. Отображение $M : \mathcal{B}(G) \to B(H)$ называется *положительной операторозначной мерой* на группе G:

1) $M\,(B) \geq 0$ – положительный оператор для любого $B \in \mathcal{B}(G)$;

2) $M\,(\emptyset) = 0$ – нулевой оператор, $M\,(G) = \mathrm{I}$ – тождественный оператор;

3) $M\left(\bigcup\limits_j B_j\right) = \sum\limits_j M\,(B_j)$, если множества $B_j \cap B_k = \emptyset$ для любых $j \neq k$, где сходимость операторного ряда понимается в смысле сильной операторной топологии.

Пример 6.4. Согласно теореме 6.1 для некоммутативного операторного графа $\mathcal{V}$ в конечномерном гильбертовом пространстве найдётся базис $\{M_j,\ 0 \leq j \leq N\}$, состоящий из положительных операторов $M_j > 0$, образующих разложение единицы $\sum\limits_{j=0}^{N-1} M_j = I$, таких, что $\mathcal{V} = span\,\{M_j,\ 0 \leq j \leq N\}$. Рассмотрим циклическую группу

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{N}} = \{0,\, 1,\, \ldots\, ,\, N-1\}$$

и определим отображение на G по формуле

$$M(\{j\}) = M_j,\ 0 \leq j \leq N. \tag{6.6}$$

Тогда (6.6) естественным образом продолжается до положительной операторозначной меры на G.

Пусть, теперь $G\nu g \to U_g$ – проективное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H.

Определение 6.4. Положительная операторозначная мера $\{M(B),$ $B \in \mathcal{B}(G)\}$ называется *ковариантной* относительно действия $\{U_g,\ g \in$ $\in G\}$, если

$$U_g M(B) U_g^* = M(gB,\ g \in G,\ B \in \mathcal{B}(G).$$

Теорема 6.3 ([13]). *Пусть G – локально-компактная группа с мерой Хаара ν, гильбертово пространство H конечномерно и*

$$\{M(B),\ B \in \mathcal{B}(G)\}$$

– положительная операторозначная мера, ковариантная относительно $\{U_g,\ g \in G\}$. Тогда в H найдётся такой оператор $M_0 > 0$, что

$$M(B) = \int\limits_B U_g M_0 U_g^* d\nu(g),\ B \in \mathcal{B}(G).$$

Циклическую группу $\mathbb{Z}_N$ можно рассматривать как подгруппу максимальной коммутативной группы вращений единичной окружности $\mathbb{T}$. При этом элементы $\mathbb{Z}_N$ можно рассматривать как повороты на углы $\frac{2\pi j}{N}$, $0 \leq j \leq N-1$. Пример 6.4 может быть расширен следующим образом:

Пример 6.5 ([19]). Зададим унитарное представление группы вращений $\mathbb{T} = \{\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$ в гильбертовом пространстве $H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Определим ортогональные проекторы P_0 и P_1 по формулам

$$P_0 = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle >)(\langle 00| + \langle 11|) + \frac{1}{2}(|01\rangle + |10\rangle)(\langle 01| + \langle 10|), \quad (6.7)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(|00\rangle - |11\rangle >)(\langle 00| - \langle 11|) + \frac{1}{2}(|01\rangle - |10\rangle)(\langle 01| - \langle 10|) \quad (6.8)$$

и положим

$$U_\varphi = P_0 + e^{i\varphi} P_1,\ \varphi \in \mathbb{T}.$$

Определим проектор Q формулой

$$Q = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|, \quad (6.9)$$

тогда некоммутативный операторный граф

$$\mathcal{V} = span\{U_\varphi Q U_\varphi^*,\ \varphi \in \mathbb{T}\}$$

имеет антиклики P_0 и P_1 ранга 2.

С другой стороны, циклическая группа $\mathbb{Z}_N$ вкладывается в дискретную некоммутативную группу Гейзенберга–Вейля G_2, которая для $N = 4$ сводится к группе, порождённой матрицами Паули.

Пример 6.6 ([20]). Операторы, кратные единичному, I, −I, iI, −iI вместе с матрицами Паули (6.3) образуют группу относительно операции умножения. Обозначим эту группу G_2. Определим приводимое унитарное представление G_2 в гильбертовом пространстве $H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ по формуле

$$U_{mI} = mI,\ m \in \{1, -1, i, -i\},$$

$$U_{\sigma_x} = |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|,$$

$$U_{\sigma_z} = |00\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10|.$$

Представление для σ_y определяется условием: $\sigma_y = i\sigma_z\sigma x$. Возьмём тот же проектор (6.9) и определим некоммутативный операторный граф формулой

$$\mathcal{V} = span\{U_g Q U_g^*,\ g \in G_2\}.$$

Антикликами для него являются те же проекторы P_0 и P_1, что в предыдущем примере (6.7) – (6.8).

Лекция 7

7.1. Классические и квантовые случайные процессы

Целью лекции будет рассказ о том, как классические винеровский и пуассоновский случайные процессы вкладываются в симметричное (бозонное) пространство Фока. Что касается винеровского процесса, идеология такого вложения следует разложению Винера–Ито пространства L^2-функционалов от броуновского движения [12]. Вложение пуассоновского процесса было предложено в пионерской работе [32].

Всюду ниже T обозначено одно из множеств $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_+$.

Определение 7.1. Однопараметрическое множество случайных величин $\{\xi_t,\ t \in T\}$ называется (*классическим*) *случайным процессом*, если задано совместное распределение вероятностей:

$$Pr(\xi_{t_1} \in B_1, \ldots, \xi_{t_n} \in B_n)$$

для любого выбора индексов $t_j \in T$ и подмножеств $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Определение 7.2. Процесс $\{\xi_t,\ t \in T\}$ называется *случайным процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины $\xi_{t_1} - \xi_{s_1}$ и $\xi_{t_2} - \xi_{s_2}$ независимы при любом выборе непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2)$.

Пример 7.1. Случайный процесс с независимыми приращениями $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *винеровским*, если $\xi_t - \xi_s \in \mathcal{N}(0, t-s)),\ s < t$, то есть распределение вероятностей $\xi_t - \xi_s$ является гауссовским:

$$Pr(\xi_t - \xi_s \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int\limits_B exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx,$$

$s < t,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Пример 7.2. Случайный процесс с независимыми приращениями $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *пуассоновским*, если $\xi_t - \xi_s \in \mathcal{P}(t-s),\ s < t$, то есть распределение вероятностей $\xi_t - \xi_s$ является пуассоновским:

$$Pr(\xi_t - \xi_s = k) = e^{-t+s} \frac{(t-s)^k}{k!},$$

$s < t,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Определение классических случайных процессов с независимыми приращениями может быть перенесено на квантовый случай в следующей форме:

Определение 7.3. Пара $(\{X_t,\ t \in T\}, \rho)$, состоящая из семейства наблюдаемых $X_t \in \mathfrak{A}$ и состояния $\rho \in \mathfrak{S}$, называется *квантовым случайным процессом с независимыми приращениями*, если приращения процесса $X_{st} = X_t - X_s$ коммутируют (наблюдаемые совместимы):

$$[X_{s_1 t_1}, X_{s_2 t_2}] = 0$$

для непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$ и классические случайные величины $\xi_{s_j t_j}$ с совместным распределением, определяемым формулой (см. определение 3.15):

$$Pr(\xi_{s_1 t_1} \in B_1, \ldots, \xi_{s_n t_n} \in B_n) = \mathrm{Tr}(\rho E_1(B_1) \ldots E_n(B_n)),$$

где (E_j) – проекторозначные меры, отвечающие наблюдаемым $(X_{s_j t_j})$, независимы.

7.2. Симметричное пространство Фока

Рассмотрим тензорное произведение $H^{\otimes^n}$, состоящее из n копий гильбертова пространства H. Скалярное произведение в $H^{\otimes^n}$ задаётся на элементарных тензорах формулой

$$\langle f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \rangle_{H^{\otimes^n}} = \prod_{j=1}^{n} \langle f_j, g_j \rangle_H,$$

$f_j, g_j \in H$, и продолжается затем на всё пространство по линейности.

Определим ортогональный проектор $P_s : H^{\otimes^n} \to H^{\otimes^n}$ по формуле

$$P_s e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S} e_{s(1)} \otimes \cdots \otimes e_{s(n)},$$

где суммирование ведётся по множеству S, состоящему из всех перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$ и $e_j \in H$.

Определение 7.4. Подпространство $H^{\otimes^n_s} = P_s H^{\otimes^n}$ называется *симметризованным тензорным произведением* n копий пространства H.

Определение 7.5. Гильбертово пространство:

$$F(H) = \{\mathbb{C}\Omega\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H^{\otimes^n_s}$$

называется *симметричным* (*бозонным*) *пространством Фока*. Фиксированный вектор Ω называется *вакуумным*, пространство H – *одночастичным*, а пространства $H^{\otimes_s^n}$ – *n-частичными*.

Ранее мы рассматривали модель квантового гармонического осциллятора. Нашей целью теперь будет построение модели бесконечного множества квантовых гармонических осцилляторов в гильбертовом пространстве $F(H)$. Модель, которую мы построим, будет сводится к единичному осциллятору, когда $\dim H = 1$. Следующее определение даёт аналог когерентных состояний для $F(H)$.

Определение 7.6. Для $f \in H$ элемент $e(f) \in F(H)$, определяемый формулой

$$e(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{\otimes^n}}{\sqrt{n!}},$$

называется *экспоненциальным вектором*.

Непосредственно проверяется, что скалярное произведение экспоненциальных векторов равно

$$\langle e(f), e(g)\rangle_{F(H)} = e^{\langle f,g\rangle_H}. \tag{7.1}$$

Лемма 7.1. *Линейные комбинации экспоненциальных векторов из множества*

$$\{e(f),\ f \in H\}$$

плотны в $F(H)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{d^n}{dt^n}(e(tf))|_{t=0} = \sqrt{n!} f^{\otimes^n}.$$

С другой стороны, множество линейных комбинаций элементарных тензоров вида $f^{\otimes^n}$ позволяет выразить любой элементарный тензор из $H^{\otimes_s^n}$. Докажем это по индукции. Для $n = 2$ получаем

$$f \otimes g + g \otimes f = (f+g) \otimes (f+g) - f \otimes f - g \otimes g. \tag{7.2}$$

Пусть утверждение доказано для n. Докажем его для $n+1$. Рассмотрим элемент h, представляющий собой симметризованное тензорное произведение f и $g^{\otimes n}$:

$$h = f \otimes g^{\otimes^n} + g \otimes f \otimes g^{\otimes^{n-1}} + \cdots + g^{\otimes^n} \otimes f, \tag{7.3}$$

где $f, g \in H$. Утверждение верно, если из равенства нулю скалярного произведения
$$\langle h, u^{\otimes^{n+1}} \rangle_{H^{\otimes n+1}} = 0 \tag{7.4}$$
для любого $u \in H$ следует, что
$$h = 0.$$
Заметим, что
$$\langle h, u^{\otimes^{n+1}} \rangle_{H^{\otimes n+1}} = (n+1)\langle f, u\rangle_H \langle g, u\rangle_H^n. \tag{7.5}$$
Положим $u = f$, тогда из (7.4)–(7.5) вытекает $\langle g, f\rangle_H = 0$ для всех $f \in H$, так что $g = 0$. Аналогично, подставляя $u = g$, получаем, что $f = 0$. Тем самым $h = 0$. □

В силу леммы 7.1 любой линейный оператор в $F(H)$ достаточно задать на экспоненциальных векторах. Экспоненциальные вектора обладают ещё одним важным свойством, которое нам потребуется в дальнейшем.

Лемма 7.2. *Отображение $U : F(H \oplus K) \to F(H) \otimes F(K)$, заданное на экспоненциальных векторах формулой*
$$U(e(f \oplus g)) = e(f) \otimes e(g),\ \ f \in H,\ \ g \in K,$$
является унитарным оператором.

Доказательство. Нам нужно доказать, что U сохраняет скалярное произведение. Заметим, что
$$\langle e(f_1)\otimes e(g_1), e(f_2)\otimes e(g_2)\rangle_{F(H)\otimes F(K)} = \langle e(f_1), e(f_2)\rangle_{F(H)} \langle e(g_1), e(g_2)\rangle_{F(K)} =$$
$$= e^{\langle f_1, f_2\rangle_H + \langle g_1, g_2\rangle_K}, f_j \in H,\ \ g_k \in K.$$
С другой стороны,
$$\langle e(f_1 \oplus g_1), e(f_2 \oplus g_2)\rangle_{F(H\oplus K)} = e^{\langle f_1, f_2\rangle_H + \langle g_1, g_2\rangle_H},$$
$f_j \in H,\ \ g_k \in K.$ □

Для $f \in H$ определим оператор $a(f)$ на экспоненциальных векторах по формуле
$$a(f)e(g) = \langle f, g\rangle e(g),\ \ g \in H. \tag{7.6}$$

Из формулы (7.6) следует, что экспоненциальные векторы являются аналогом когерентных состояний квантового гармонического осциллятора. Оператор $a^+(f)$, сопряжённый с $a(f)$, полностью определяется формулой

$$\langle e(g), a^+(f)e(h)\rangle_{F(H)} = \langle a(f)e(g), e(h)\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}_H e^{\langle f,g\rangle_H}. \tag{7.7}$$

Операторы $a^+(f), a(g),\ f, g \in H$ называются *операторами рождения* и *уничтожения* в симметричном пространстве Фока $F(H)$. Следующее свойство операторов рождения полезно для технических расчётов.

Лемма 7.3.

$$a^+(f)e(g) = \frac{d}{dt}(e(g+tf))|_{t=0}. \tag{7.8}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\langle e(h), e(g+tf)\rangle_{F(H)} = \frac{d}{dt}e^{\langle h,g\rangle_H + t\langle h,f\rangle_H} = \langle h, f\rangle_H e^{\langle h,g\rangle_H + t\langle h,f\rangle_H}.$$

□

Теорема 7.1. *Операторы рождения и уничтожения $a^+(f), a(g),\ f, g \in H$, удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям:*

$$a(f)a^+(g) - a^+(g)a(f) = \langle f, g\rangle_H \mathrm{I},$$
$$a(f)a(g) - a(g)a(f) = 0,\ a^+(f)a^+(g) - a^+(g)a^+(f) = 0, \tag{7.9}$$

$f, g \in H$.

Замечание 7.1. Тождества (7.9) называются *каноническими коммутационными соотношениями.*

Доказательство. Докажем первое из соотношений (7.9). Остальные доказываются аналогично. Заметим, что

$$\langle e(v), a^+(f)a(g)e(u)\rangle_{F(H)} = \langle a(f)e(v), a(g)e(u)\rangle_{F(H)} =$$
$$= \overline{\langle f, v\rangle}_H \langle g, u\rangle_H e^{\langle v,u\rangle_H}.$$

С другой стороны, применяя лемму 7.3, получаем

$$\langle e(v), a(g)a^+(f)e(u)\rangle_{F(H)} = \frac{d}{dt}\langle e(v), a(g)e(u+tf)\rangle_{F(H)}|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\langle g, u+tf\rangle_H e^{\langle v,u+tf\rangle_H}\right)|_{t=0} = (\langle g, f\rangle_H + \langle g, u\rangle_H\langle v, f\rangle_H)e^{\langle v,u\rangle_H}.$$

□

7.3. Реализация винеровского и пуассоновского процессов в пространстве Фока

Нашей целью будет реализация случайных процессов примеров 7.1 и 7.2 в виде линейных неограниченных операторов в симметричном пространстве Фока. Для этого мы будем использовать одночастичное пространство Фока $H = L^2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$H_{st} = \{\mathbb{C}\chi_{[s,t]}\}$$

одномерное гильбертово пространство, натянутое на индикаторную функцию

$$\chi_{[s,t]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [s,t]; \\ 0, & x \notin [s,t]. \end{cases}$$

Рассмотрим пространство Фока $F(H_{st}) \subset F(H)$. Введём семейства операторов

$$A^+_{st} = a^+(\chi_{[s,t]}),\ A_{st} = a(\chi_{[s,t]}). \tag{7.10}$$

Лемма 7.4. *Действие операторов (7.10) относительно представления*

$$F(H_{st} \oplus H^{\perp}_{st}) \cong F(H_{st}) \otimes F(H^{\perp}_{st})$$

имеет вид

$$A^+_{st} \cong A^+_{st}|_{F(H_{st})} \otimes \mathrm{I}_{F(H^{\perp}_{st})},\ A_{st} \cong A_{st}|_{F(H_{st})} \otimes \mathrm{I}_{F(H^{\perp}_{st})}.$$

Доказательство. Непосредственно следует из определения действия A^+_{st} и A_{st} на экспоненциальные векторы (7.6) – (7.8) и леммы 7.2. $\square$

Положим

$$Q_t = A^+_{0t} + A_{0t}.$$

Теорема 7.2. *Пара $(Q_t, |\Omega\rangle)$ определяет винеровский случайный процесс.*

Доказательство. Из теоремы 7.1 следует, что операторы A^+_{st} и A_{st} удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению вида

$$[A_{st}, A^+_{st}] = (t-s)\mathrm{I}.$$

Если отождествить ортонормированный базис в $F(H_{st})$ с основным и возбуждённым состояниями квантового осциллятора согласно правилу

$$|0\rangle = |\Omega\rangle,\ |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(t-s)^n}}\chi^{\otimes^n}_{[s,t]},$$

получим, что оператор $A_{st}^{+} + A_{st} = \sqrt{t-s}C$, где оператор C рассмотрен в примере 3.4.2.. Следовательно, приращения процесса $Q_t - Q_s = A_{st}^{+} + A_{st} \in \mathcal{N}(0, t-s)$ в состоянии, определяемом вакуумным вектором $|\Omega\rangle$. Коммутативность наблюдаемых, входящих в процесс $[Q_t, Q_s] = 0$, следует из канонических коммутационных соотношений теоремы 7.1. Осталось доказать, что классические случайные величины, порождённые $Q_{t_1} - Q_{s_1}$ и $Q_{t_2} - Q_{s_2}$ в вакуумном состоянии, независимы. Для гауссовских случайных величин независимость следует из некоррелированности. Заметим, что

$$Cov_\rho(Q_{t_1} - Q_{s_1}, Q_{t_2} - Q_{s_2}) = \langle\Omega|(A_{s_1t_1}^{+} + A_{s_1t_1})(A_{s_2t_2}^{+} + A_{s_2t_2})|\Omega\rangle_{F(H)} =$$

$$= \langle A_{s_1t_1}^{+}\Omega|A_{s_2t_2}^{+}\Omega\rangle_{F(H)} = \langle\chi_{[s_1,t_1]}, \chi_{[s_2,t_2]}\rangle_H = 0,$$

если $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$ в состоянии $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$. □

Рассмотрим двухпараметрическое семейство операторов:

$$\Lambda_{st} = \frac{1}{t-s}\left(A_{st}^{+}A_{st}\right), \ s < t.$$

Лемма 7.5. *Для любого выбора $s \le r \le t$ справедливо*

$$\Lambda_{sr} + \Lambda_{rt} = \Lambda_{st}.$$

Доказательство. По определению действия A_{st}^{+} и A_{st} получаем

$$\Lambda_{st}|\Omega\rangle = 0,$$

$$\Lambda_{st}\chi_{[s,t]}^{\otimes^n} = n\chi_{[s,t]}^{\otimes^n}.$$

В силу леммы 7.4 получаем

$$\Lambda_{st} \cong \Lambda_{st}|_{F(H_{st})} \otimes \mathrm{I}_{F(H_{st}^{\perp})}.$$

Таким образом, получаем

$$\Lambda_{st} \cong \Lambda_{sr}|_{F(H_{sr})} \otimes \mathrm{I}_{F(H_{rt})} \otimes \mathrm{I}_{F(H_{st}^{\perp})} +$$

$$+ \mathrm{I}_{F(H_{sr})} \otimes \Lambda_{rt}|_{F(H_{rt})} \otimes \mathrm{I}_{F(H_{st}^{\perp})}.$$

□

Фиксируем $\lambda > 0$ и положим

$$N_t = \Lambda_{0t} + \sqrt{\lambda}Q_t + \lambda t\mathrm{I}.$$

Теорема 7.3. *Пара* $(N_t, |\Omega\rangle)$ *определяет пуассоновский случайный процесс с распределением:*

$$N_t - N_s \in \mathcal{P}(\lambda(t-s)).$$

Доказательство. В силу леммы 7.5 для приращений N_t справедливо представление

$$N_t - N_s = \left(\frac{1}{\sqrt{t-s}}A^+_{st} + \sqrt{\lambda(t-s)}\mathrm{I}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t-s}}A_{st} + \sqrt{\lambda(t-s)}\mathrm{I}\right).$$

Тогда из примера 3.4.1. получаем

$$N_t - N_s \in \mathcal{P}(\lambda(t-s)).$$

Попарная коммутативность операторов N_t следует из теоремы 7.1. Осталось доказать независимость классических случайных величин, порождённых приращениями $N_{t_1} - N_{s_1}$ и $N_{t_2} - N_{s_2}$ в вакуумном состоянии для непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$. Для этого достаточно проверить некоррелированность в состоянии $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$. Заметим, что

$$\left\langle \Omega \left| \left(\frac{1}{\sqrt{t_1-s_1}}A^+_{s_1t_1} + \sqrt{\lambda(t_1-s_1)}\mathrm{I}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t_1-s_1}}A_{s_1t_1} + \sqrt{\lambda(t_1-s_1)}\mathrm{I}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1}{\sqrt{t_2-s_2}}A^+_{s_2t_2} + \sqrt{\lambda(t_2-s_2)}\mathrm{I}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t_2-s_2}}A_{s_2t_2} + \sqrt{\lambda(t_2-s_2)}\mathrm{I}\right)\right| \Omega \right\rangle =$$

$$= \left(\sqrt{\lambda}\langle\chi_{[s_1,t_1]}| + \lambda(t_1-s_1)\langle\Omega|\right)\left(\sqrt{\lambda}|\chi_{[s_2,t_2]}\rangle + \lambda(t_2-s_2)|\Omega\rangle\right) =$$

$$= \lambda^2(t_1-s_1)(t_2-s_2)$$

для непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$. Следовательно,

$$Cov_\rho(N_{t_1} - N_{s_1}, N_{t_2} - N_{s_2}) =$$

$$= \mathbb{E}_\rho(N_{t_1} - N_{s_1} - \lambda(t_1-s_1), N_{t_2} - N_{s_2} - \lambda(t_2-s_2)) = 0.$$

$\square$

Лекция 8

8.1. Томографическое представление квантовой механики

Под *томографическим представлением квантовой механики* мы понимаем некоторую процедуру при которой удаётся перейти от операторов состояний и наблюдаемых к функциям некоторого количества переменных. Разработка томографического представления привело к созданию следующего формализма [25, 38]. В гильбертовом пространстве H вводятся множества операторов $U(\mathbf{x})$ и $D(\mathbf{x})$, зависящих от n-мерного вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ таким образом, что оператору A на H сопоставляется функция

$$f_A(\mathbf{x}) = \mathrm{Tr}\,(U(\mathbf{x})A)\,, \tag{8.1}$$

называемая *его символом*, и оператор может быть восстановлен по своему символу с использованием формулы

$$A = \int D(\mathbf{x}) f_A(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{8.2}$$

Семейства $U(\mathbf{x})$ и $D(\mathbf{x})$ получили названия *де-квантизатора* и *квантизатора* соответственно.

В конечномерном пространстве H (спиновая томография) такой подход может быть реализован математически безупречно [28]. Этого нельзя сказать про бесконечномерный случай, когда семейства $U(\mathbf{x})$ и $D(\mathbf{x})$ фактически состоят не из операторов, а лишь определяют линейные формы:

$$A \to Tr(U(\mathbf{x})A), \ A \to Tr(D(\mathbf{x})A), \tag{8.3}$$

смысл которых необходимо математически точно объяснять. Причина сложностей состоит в том, что, как было установлено в теореме 2.14, пространство ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(H)$ является предсопряженным к алгебре всех ограниченных операторов ($B(H)^* = \mathfrak{S}_1(H)$. Таким образом, если рассматривать ограниченные операторы в качестве наблюдаемых, алгебра наблюдаемых является сопряженным пространством к пространству состояний. Если мы хотим, чтобы неограниченные операторы входили в пространство наблюдаемых $\mathfrak{A}$ и пространство состояний $\mathfrak{S}$ обладало свойством $(\mathfrak{S})' = \mathfrak{A}$, мы должны взять некоторое подмножество в $\mathfrak{S}_1(H)$. Мы будем придерживаться такого подхода.

8.2. Конечномерный случай

В случае $\dim H < +\infty$ де-квантизатор (8.1) и квантизатор (8.2) представляют собой семейства ограниченных операторов в H. Из соотношений (8.1) и (8.2) тут же следует, что если

$$f_\rho(\mathbf{x}) = \mathrm{Tr}(U(\mathbf{x}\rho), \; g_A(\mathbf{x}) = \mathrm{Tr}(D(\mathbf{x})A) \tag{8.4}$$

для двух операторов $\rho, A \in B(H)$, тогда

$$Tr(\rho A) = \int g_A(\mathbf{x}) f_\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{8.5}$$

Таким образом, формулу (8.5) можно воспринимать как действие функционала A на элемент ρ, так что она отражает тот факт, что в конечномерном случае $B(H)^* \cong B(H)$.

Различные примеры де-квантизаторов и квантизаторов для конечномерного случая приведены в [28, 29]. Мы не будем здесь их все воспроизводить и ограничимся простейшим случаем $\dim H = 2$, когда формулы выглядят наиболее просто. Положим $\mathbf{x} := (m, \alpha, \beta)$, где $m = \pm\frac{1}{2}$ представляет собой два возможных результата измерения величины спина по направлению, задаваемому углами Эйлера: $\alpha \in$ $\in [0, 2\pi]$, $\beta \in [0, \pi]$. Тогда де-квантизатор и квантизатор еределяются формулами:

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \cos\beta & -e^{i\alpha}\sin\beta \\ -e^{-i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

$$D(\mathbf{x}) = 3U(\mathbf{x}) - \mathrm{I}. \tag{8.7}$$

Здесь нужно положить

$$\int \mathrm{d}\mathbf{x} := \sum_{m=-1/2}^{1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta \, \mathrm{d}\beta. \tag{8.8}$$

8.3. Представление характеристическими функциями

Обозначим $S(\mathbb{R}^n)$ *пространство Шварца*, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, убывающих быстрее любой степени на бесконечности, с обычной топологией для такого пространства. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$. Пространство $S(\mathbb{R})$ плотно в области определения всех степеней операторов *координаты* $(q\psi)(x) = x\psi(x)$ и *импульса* $(p\psi)(x) =$

$= -i\frac{d\psi}{dx}(x)$. Нам также потребуются операторы рождения $a^\dagger = \frac{q-ip}{\sqrt{2}}$ и уничтожения $a = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$.

Оператор $T \in B(H)$ называется *оператором Шварца* [34], если он ограничен относительно семейства полунорм:

$$||T||_{n,m,\psi} = ||q^n p^m T\psi||, \tag{8.9}$$

$n, m = 0, 1, 2, \ldots, \psi \in S(\mathbb{R})$. Обозначим $\mathcal{S}$ *множество всех операторов Шварца*. В [34] было показано: для того чтобы $T \in \mathcal{S}$, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид

$$(T\psi)(x) = \int \rho(x,y)\psi(y)dy, \tag{8.10}$$

где ядро $\rho(\cdot,\cdot) \in S(\mathbb{R}^2)$. Множество $\mathcal{S}$ является пространством Фреше относительно семейства полунорм (8.9).

Унитарные операторы:

$$W(x,y) = exp(i(xq + yp)) \tag{8.11}$$

в пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$ называются *операторами Вейля*. В квантовой механике часто используется следующее полезное свойство.

Лемма 8.1 (формула Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа)**.** *Пусть* $[A, B] = cI$ *(пропорционален тождественному оператору), тогда*

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)\exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\right).$$

Замечание 8.1. Из леммы 8.1 немедленно следует, что

$$\exp(ixq + iyp) = \exp(ixq)\exp(iyp)\exp(ixy/2). \tag{8.12}$$

Доказательство. Заметим, что из $[A, B] = cI$ следует

$$[A, F(B)] = cF'(B),$$

что влечёт

$$[A, \exp(B)] = c\exp(B).$$

Тогда

$$\exp(-B)A\exp(B) = A + cI$$

и

$$\exp(-B)\exp(A)\exp(B) = \exp(A + cI) = \exp(A)\exp(c).$$

В итоге
$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)\exp([A,B]). \tag{8.13}$$
Рассмотрим семейство операторов:
$$U_t = \exp(tA)\exp(tB)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \tag{8.14}$$
Применяя к операторам tB и sA соотношение (8.13), получаем для (8.14):
$$U_t U_s = U_{t+s},$$
так что семейство операторов (8.14) является решением задачи Коши:
$$\frac{dU_t}{dt} = (A+B)U_t,\ t \geq 0,\ U_0 = I. \tag{8.15}$$
Решением той же системы (8.15) является семейство операторов: $\exp(t(A+B))$, откуда можно сделать вывод:
$$U_t = \exp(t(A+B)),\ t \geq 0.$$
Подстановка $t = 1$ завершает доказательство. $\square$

Положим $\mathbf{x} = (x, y)$ и определим де-квантизатор с помощью оператора Вейля: $U(x,y) = W(x,y)$. Тогда можно ввести символ оператора $\rho \in \mathfrak{S}_1(H)$ по формуле
$$f_\rho^W(x,y) = Tr(W(x,y)\rho). \tag{8.16}$$
В случае $\rho \in \mathfrak{S}(H)$, символ (8.16) называется *характеристической функцией* состояния ρ [13]. Соответствующий квантизатор дается формулой [13]:
$$D(x,y) = \frac{1}{2\pi}W(-x,-y). \tag{8.17}$$
Мы будем называть (8.16) *вейлевской характеристической функцией* оператора $\rho \in \mathfrak{S}_1(H)$.

Лемма 8.2. *Пусть $\rho \in \mathcal{S}$. Тогда вейлевская характеристическая функция $f_\rho^W \in S(\mathbb{R}^2)$. Более того, если функция $f \in S(\mathbb{R}^2)$, тогда полученный из нее с помощью квантизатора оператор $T \in \mathcal{S}$.*

Доказательство. Из (8.12) немедленно следует, что
$$W(x,y) = e^{\frac{i}{2}xy}V_x U_y, \tag{8.18}$$

где
$$(V_x\psi)(z) = e^{ixz}\psi(z),\ (U_y\psi)(z) = \psi(z+y), \tag{8.19}$$
$\psi \in H$. Поскольку $\rho \in \mathcal{S}$, в силу (8.10) получаем
$$f_\rho^W(x,y) = Tr(W(x,y)\rho) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{2}xy}e^{ixt}\rho(t+y,t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixt}\rho\left(t+\frac{y}{2}, t-\frac{y}{2}\right)dt. \tag{8.20}$$
Функция $\tilde{\rho}(t,y) = \rho(t+\frac{y}{2}, t-\frac{y}{2})$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, её преобразование Фурье по переменной t также принадлежит $S(\mathbb{R}^2)$.

Пусть теперь наоборот: $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Положим
$$T = \frac{1}{2\pi}\int f(x,y)W(-x,-y)dxdy. \tag{8.21}$$
Определим, как действует T на функцию $\psi \in H$.
$$(T\psi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\!\!\int f(x,y)e^{-\frac{i}{2}xy}e^{-ix(t-y)}\psi(t-y)dxdy =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,t-s)e^{-\frac{i}{2}x(t-s)}e^{-ixs}\psi(s)dxds = \int\limits_{\mathbb{R}}\rho(t,s)\psi(s)ds, \tag{8.22}$$
где ядро оператора $\rho(t,s)$ определяется формулой
$$\rho(t,s) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{2}tx}f(x,t-s)dx. \tag{8.23}$$
Получаем, что отображение $f \to \rho$ представляет собой композицию сдвига и преобразования Фурье по одной из переменных. Таким образом, $\rho \in S(\mathbb{R}^2)$ и T тем самым является оператором Шварца.

$\square$

Используя операторы рождения и уничтожения формулу (8.16), можно переписать в виде
$$f_\rho^W(x,y) = f_\rho^W(z) = \mathrm{Tr}(exp(za^\dagger - \overline{z}a)\rho), \tag{8.24}$$
где
$$z = \frac{y+ix}{\sqrt{2}}. \tag{8.25}$$

В квантовой физике используются также характеристические функции [24]:

$$f_\rho^P(x,y) = f_\rho^P(z) = \mathrm{Tr}(\exp(za^\dagger)\exp(-\overline{z}a)\rho) \tag{8.26}$$

и

$$f_\rho^Q(x,y) = f_\rho^Q(z) = \mathrm{Tr}(\exp(-\overline{z}a)\exp(za^\dagger)\rho), \tag{8.27}$$

называемые *характеристической функцией Глаубера–Сударшана* и *характеристической функцией Хусими.* Функккции (8.16), (8.26) и (8.27) связаны простым соотношением

$$f_\rho^W(z) = f_\rho^P(z)e^{\frac{-|z|^2}{2}} = f_\rho^Q(x)e^{\frac{|z|^2}{2}}. \tag{8.28}$$

Характеристические функции Глаубера–Сударшана и Хусими также можно считать символами оператора ρ. Обратное преобразование (квантизатор) представляет собой композицию (8.28) и квантизатора для вейлевской характеристической функции. Введём множества $S_\pm(\mathbb{R}^2)$, состоящие из функций $\psi_\pm$, представимых в виде

$$\psi_\pm(x,y) = exp\left(\pm\frac{x^2+y^2}{4}\right)\psi(x,y),$$

где $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$. Лемма 8.2 и (8.28) влечет справедливость утверждения ниже.

Следствие 8.1. *Пусть $\rho \in \mathcal{S}$. Тогда характеристические функции $f_\rho^P \in S_+(\mathbb{R}^2)$, $f_\rho^Q \in S_-(\mathbb{R}^2)$. Более того, если функция f принадлежит соответствующему классу, тогда полученный из нее с помощью квантизатора оператор $T \in \mathcal{S}$.*

8.4. Представление квазираспределениями

Для вейлевских характеристических функций справедливо равенство [13]:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f_\rho^W(x,y)f_\sigma^W(x,y)dxdy = Tr(\rho\sigma), \tag{8.29}$$

$\rho,\sigma \in \mathcal{S}$. С помощью соотношения (8.29) можно расширить отображение $\rho \to f_\rho^W$ с $\mathcal{S}$ до $\mathcal{S}'$. В этом случае символами полиномов от операторов координаты и импульса q и p станут линейные комбинации сингулярных обобщенных функций $\delta^{(n)}(x)\delta^{(m)}(y)$ [1]. По-видимому, поэтому исторически [47, 39] был выбран другой символ, представляющий собой преобразование Фурье от характеристической функции f^W.

Рассмотрим преобразование Фурье F функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$:

$$F(f)(q,p) \equiv \hat{f}(q,p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-iqx-ipy} f(x,y)dxdy. \qquad (8.30)$$

Функция

$$W(q,p) = \hat{f}_\rho^W(q,p) \qquad (8.31)$$

называется *функцией Вигнера.* Поскольку преобразование Фурье переводит $S(\mathbb{R}^2)$ в себя, справедливо следующее утверждение.

Лемма 8.3. *Функция Вигнера $W_\rho \in S(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда оператор ρ, по которому она построена, является оператором Шварца.*

Обозначим

$$\hat{S}_-(\mathbb{R}^2) = F(S_-(\mathbb{R}^2)). \qquad (8.32)$$

Лемма 8.4. *Элементами $\hat{S}_-(\mathbb{R}^2)$ являются функции ψ, представимые в виде свертки:*

$$\psi = \xi_0 \star \xi, \qquad (8.33)$$

где $\xi_0(q,p) = \exp(-q^2 - p^2)$ и $\xi \in S(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. При преобразовании Фурье умножение на функцию переходит в свёртку. Таким образом, достаточно заметить, что для $f_0(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$ имеем $F(f_0)(q,p) = \frac{1}{2\pi}e^{-q^2-p^2}$.

□

Положим

$$\alpha = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}. \qquad (8.34)$$

Тогда функция

$$Q_\rho(\alpha) = \hat{f}_\rho^Q(q,p) \qquad (8.35)$$

называется *функцией Хусими.* Как известно,

$$Q_\rho(\alpha) = \frac{1}{\pi}(\psi_\alpha, \rho\psi_\alpha). \qquad (8.36)$$

По построению функция Хусими получаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 8.5. *Функция Хусими $Q_\rho \in \hat{S}(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда оператор ρ, по которому она построена, является оператором Шварца.*

Заметим, что преобразование Фурье (8.30) можно расширить не только на обобщенные функции медленного роста класса $S'(\mathbb{R}^2)$, но и на функции класса $S_+(\mathbb{R}^2)$. Преобразование Фурье функции $\psi_+ \in \in S_+(\mathbb{R}^2$ является обобщенной функцией $F(\psi_+) \in \hat{S}'_-(\mathbb{R}^2)$, так что

$$< F(\psi_+), \overline{F(\psi_-)} >:=< \psi_+, \overline{\psi_-} >= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_+(x,y)\overline{\psi_-(x,y)}dxdy, \qquad (8.37)$$

где $\psi_\pm \in S_\pm(\mathbb{R}^2)$. Делая замену переменной (8.34), можно определить

$$P_\rho(\alpha) = \hat{f}_\rho^P(q,p), \qquad (8.38)$$

называемую *P-функцией Глаубера–Сударшана.* Из равенства Парсеваля следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} P_\rho(\alpha)Q_\sigma(\alpha)d^2\alpha = \mathrm{Tr}(\rho\sigma) \qquad (8.39)$$

для двух $\rho, \sigma \in \mathcal{S}$. Отсюда немедленно вытекает известная формула:

$$\rho = \int\limits_{\mathbb{C}} P_\rho(\alpha)|\psi_\alpha >< \psi_\alpha|d^2\alpha. \qquad (8.40)$$

8.5. Представление оптическими томограммами и дуальное к нему

Оптическая томограмма [21] также может быть использована для определения символов операторов Шварца. Используя ядро интегрального оператора (8.10) можно выразить оптическую томограмму в виде [17]:

$$\omega_\rho(x,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is(t\cos\varphi - x)}\rho\left(t - \frac{s\sin\varphi}{2}, t + \frac{s\sin\varphi}{2}\right)dtds. \quad (8.41)$$

Если определить отображение

$$\Omega_\rho(x,\varphi) = \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{i(x+t\sin\varphi)s}\rho\left(t - \frac{s\sin\varphi}{2}, t + \frac{s\sin\varphi}{2}\right)dtds, \qquad (8.42)$$

получим [17]:

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \Omega_\rho(x,\varphi)\omega_\sigma(x,\varphi)dxd\varphi = \mathrm{Tr}(\rho\sigma), \qquad (8.43)$$

где $\rho, \sigma \in \mathcal{S}$. Оптический томографический символ обладает свойством: $\omega_\rho(-x, \varphi) := \omega_\rho(x, \varphi + \pi)$. Обозначим S_{opt} образ $S(\mathbb{R}^2)$ при отображении (8.41). Справедливо следующее утверждение [17]:

Теорема 8.1. *Элементы пространства S_{opt} обладают следующими двумя свойствами:*

(i) $\omega_\rho(\cdot, \varphi) \in S(\mathbb{R})$ для фиксированного $\varphi \in [0, 2\pi]$;

(ii) $\omega_\rho(x, \cdot)$ – бесконечно дифференцируемая 2π-периодическая функция для фиксированного $x \in \mathbb{R}$.

Лекция 9

9.1. Квантовые динамические отображения

Рассмотрим линейное отображение $\Phi: B(H) \to B(H)$, заданное на алгебре всех ограниченных операторов $B(H)$ в гильбертовом пространстве H:

- отображение Φ называется *положительным*, если для любого $A > 0$ выполнено $\Phi(A) > 0$;
- отображение Φ называется *n-положительным*, если

  $$\Phi \otimes \mathrm{id}_n : \; B(H) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to B(H) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

  является положительным;
- отображение Φ называется *вполне положительным*, если оно n-положительно для любого n.

То, что для некоммутативного случая положительность отличается от n-положительности, заметил В.Ф. Стайнспринг, которому и принадлежит определение полной положительности.

Теорема 9.1. *Для того чтобы отображение $\Phi: \; B(H) \to B(H)$ было вполне положительным, необходимо и достаточно, чтобы для любого выбора $Y_j \in B(H)$ и $\xi_j \in H$ выполнялось условие:*

$$\sum_{j,k} \left\langle \xi_j, \Phi(Y_j^* Y_k)\xi_k \right\rangle \geq 0.$$

Доказательство. По определению $\Phi \otimes \mathrm{id}: \; B(H) \otimes B(K) \to B(H) \otimes B(K)$, где $\dim K = n$, – положительное отображение, то есть для любого $X \in B(H) \otimes B(K)$, такого что $X > 0$, выполнено $(\Phi \otimes \mathrm{id})(X) > 0$. Положим

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & \dots & X_{nn} \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

где $X_{ij} \in B(H)$. Тогда

$$(\Phi \otimes \mathrm{id})(X) = \begin{pmatrix} \Phi(X_{11}) & \dots & \Phi(X_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi(X_{n1}) & \dots & \Phi(X_{nn}) \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Пусть $\xi = (f_1, \dots, f_n)^T \in \mathcal{H} \otimes K$, где $f_j \in \mathcal{H}$. Из условия

$$(\Phi \otimes \mathrm{id})(X) > 0$$

следует

$$\langle \xi, (\Phi \otimes \mathrm{id})(X)\, \xi \rangle \geq 0, \tag{9.3}$$

что эквивалентно

$$\sum_{i,j} \langle f_i, \Phi(Y_i^* Y_j)\, f_j \rangle \geq 0, \tag{9.4}$$

поскольку для $X > 0$ существует набор операторов $\{Y_i\}$ такой, что

$$X = \begin{pmatrix} Y_1^* \\ \vdots \\ Y_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & \dots & Y_n \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

$\square$

Пример 9.1. Отображение $\Phi(X) = X^T$ является положительным, но не является вполне положительным, поскольку элемент

$$X = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} > 0 \tag{9.6}$$

переводится отображением Φ в

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \not> 0. \tag{9.7}$$

Утверждение 9.1. Пусть $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, тогда полная положительность эквивалентна n-положительности.

Определение 9.1. Отображение Φ называется *унитальным*, если оно сохраняет тождественный оператор

$$\Phi(I) = I.$$

Определение 9.2. Линейное отображение $\pi : B(H) \to B(K)$ называется представлением $B(H)$ в гильбертовом пространстве K, если оно является $*$-морфизмом, то есть

$$\pi(A^*) = (\pi(A))^*, \ \pi(AB) = \pi(A)\pi(B),$$

для всех $A, B \in B(H)$.

Теорема 9.2 (Стайнспринг [44]). *Отображение Φ является вполне положительным и унитальным тогда и только тогда, когда существуют изометрическое вложение $V: H \hookrightarrow K$ и представление $\pi: B(H) \to B(K)$ такие, что*

$$\Phi(A) = V^* \pi(A) V, \tag{9.8}$$

где сопряженное отображение V^* определяется из условия

$$\langle Vf, \xi \rangle_K = \langle f, V^* \xi \rangle_H . \tag{9.9}$$

Доказательство. Определим на множестве пар (f, A), где $f \in H$, $A \in B(H)$, двухточечную функцию

$$\langle (f, A), (g, B) \rangle_K \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \Phi(A^* B) g \rangle_H , \tag{9.10}$$

линейную по второму и антилинейную по первому аргументам. Пополняя $\{(f, A)\}$ по норме, определенной скалярным произведением (9.10), получим гильбертово пространство K. Определим вложение $V: f \mapsto$ $\mapsto (f, I)$ и представление $\pi(A): (f, B) \mapsto (f, AB)$.

$\square$

Следствие 9.1. *Для любого вполне положительного унитального отображения $\Phi: B(H) \to B(H)$ найдётся семейство операторов $V_j \in B(H)$ такое, что справедливо следующее представление:*

$$\Phi(A) = \sum_j V_j^* A V_j, \ \sum_j V_j^* V_j = I. \tag{9.11}$$

Замечание 9.1. Представление (9.11) называется *представлением Крауса*, а операторы (V_j) – *операторами Крауса*. Представление Крауса не является единственным. Минимально возможное число операторов Крауса в (9.11) для заданного Φ называется *рангом Чоя* (M.D. Choi).

Доказательство. Пусть V и π – оператор изометрического вложения и представление, определённые в теореме Стайнспринга. Из теории представлений следует, что найдётся такое гильбертово пространство H_0, $\dim H_0 \geq 0$, что $\pi \simeq \tilde{\pi}$, где $\tilde{\pi}$ – представление $B(H)$ в $B(H \otimes H_0)$ вида $\tilde{\pi}(A) = A \otimes I$. Определим операторы V_j формулой

$$\langle f, V_j g \rangle_H \stackrel{\text{def}}{=} \langle f \otimes e_j, Vg \rangle_{H \otimes H_0} , \tag{9.12}$$

где $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в H_0. Тогда

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{dim H_0} V_j^* A V_j, \ A \in B(H).$$

$\square$

Определение 9.3. Отображение $\Phi_* : \mathfrak{S}(H) \to \mathfrak{S}(H)$ называется *предсопряженным к отображению* $\Phi : B(H) \to B(H)$, если

$$\mathrm{Tr}\left(\Phi_*\left(\rho\right) A\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho \Phi\left(A\right)\right), \tag{9.13}$$

где $\rho \in \mathfrak{S}\left(H\right)$, $A \in B\left(H\right)$.

Определение 9.4. Отображение Φ_* называется *квантовым каналом*, если Φ – вполне положительное унитальное отображение.

Замечание 9.2. Существует единственное продолжение Φ_* на всю алгебру ограниченных операторов $B\left(H\right)$.

Замечание 9.3. Из представления Крауса (9.11) для Φ немедленно вытекает, что

$$\Phi_*(\rho) = \sum_j V_j \rho V_j^*, \ \rho \in \mathfrak{S}(H).$$

9.2. Дефазирующие каналы

В этом пункте использованы результаты [14, 2].

Определение 9.5. Пусть $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в H. *Дефазирующим* называется канал

$$\Phi\left(\left|e_n\right\rangle \left\langle e_m\right|\right) = \lambda\left(n,\, m\right) \left|e_n\right\rangle \left\langle e_m\right|, \tag{9.14}$$

удовлетворяющий условиям:

1) $\lambda\left(n,\, n\right) = 1$ (сохранение следа);

2) $\sum\limits_{n,m} \lambda\left(n,\, m\right) \overline{c_n} c_m \geq 0$, $c_n \in \mathbb{C}$ (положительная определённость).

Определение 9.6. Для фиксированных $x, y \in \mathbb{R}$ определим отображение $\left|x\right\rangle \left\langle y\right| : C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ по формуле

$$\left\langle f|x\right\rangle \left\langle y|g\right\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{f\left(x\right)} g\left(y\right), \tag{9.15}$$

то есть $\left|x\right\rangle \left\langle y\right|$ отображает каждую пару непрерывных функций $f, g \in$ $\in C(\mathbb{R})$ в комплексное число, причём отображение линейно по второму аргументу и антилинейно по первому.

Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$. Тогда, согласно теореме Рисса–Фреше, для любого оператора $A \in B(H)$ существует такая функция $\rho_A(x,y)$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_A(x, y)\,\overline{f(x)} f(y)\, dxdy = \langle f, Ag\rangle. \tag{9.16}$$

Используя определение 9.6 можно переписать (9.16) в виде

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_A(x, y)\,|x\rangle\langle y|\, dxdy. \tag{9.17}$$

Определим отображение

$$\Phi(|x\rangle\langle y|) = \lambda(x, y)\,|x\rangle\langle y|, \tag{9.18}$$

понимая его в том смысле, что

$$\langle f, \Phi(|x\rangle\langle y|)\, g\rangle = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x, y)\,\overline{f(x)} g(y)\, dxdy, \tag{9.19}$$

где $f, g \in H$. Тогда

$$\Phi(A) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_A(x, y)\,\lambda(x, y)\,|x\rangle\langle y|\, dxdy. \tag{9.20}$$

Определение 9.7. Отображение (9.20) называется *обобщённым дефазирующим каналом*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lambda(x, x) = 1$ (сохранение следа);

2) $\iint \lambda(x, y)\,\overline{c(x)} c(y)\, dxdy \geq 0$ (положительная определённость).

Определение 9.8. Каналы, демпфирующими фазу, называются *дефазирующими каналами* (9.14), для которых

$$\lambda(n, m) = \lambda(n - m), \ \lambda(-n) = \overline{\lambda(n)}.$$

В непрерывном случае каналы, демпфирующие фазу, называются *обобщёнными дефазирующими каналами* (9.20) для которых

$$\lambda(x, y) = \lambda(x - y), \ \lambda(-x) = \overline{\lambda(x)}.$$

Определение 9.9. Пусть G –локально компактная абелева группа. Тогда локально компактная абелева группа $\hat{G}$, дуальная к G, состоит из отображений $c: G \to \mathbb{C}$, называемых *характерами*, таких, что $c(gh) = c(g)c(h),\ g, h \in G$.

Теорема 9.3 (С. Бохнер [11]). *Пусть $\lambda: G \to \mathbb{C}$ – функция на локально компактной абелевой группе, которая удовлетворяет условиям:*

1) $\int\limits_G \int\limits_G \lambda(x-y)\overline{c(x)}c(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) > 0$, где μ – мера Хаара на группе G;

2) $\lambda(-x) = \overline{\lambda(x)}$, $\lambda(0) = 1$.

Тогда существует мера ν на дуальной группе $\hat{G}$ такая, что функция λ имеет вид

$$\lambda(g) = \int\limits_{\hat{G}} \langle h, g\rangle\, d\nu(h). \tag{9.21}$$

Рассмотрим, как работает теорема Бохнера в трёх важных частных случаях.

- $\dim H = N < +\infty$, $G = \mathbb{Z}_N$. Тогда $\hat{G} = \mathbb{Z}_N$ и

$$\lambda(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi nki}{N}\right)\pi_k, \tag{9.22}$$

где $\pi_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \pi_k = 1$ – некоторое распределение вероятностей. Положим $\pi_1 = 1$ (и все остальные – нули). Тогда

$$\lambda(n) = \exp\left(\frac{2\pi ni}{N}\right). \tag{9.23}$$

Рассмотрим канал, демпфирующий фазу, определённый (9.23):

$$\Phi\left(|e_n\rangle\langle e_m|\right) = \exp\left(\frac{2\pi(n-m)i}{N}\right)|e_n\rangle\langle e_m|. \tag{9.24}$$

Канал Φ можно представить в виде

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{N-1} \pi_k U^k \rho U^{-k}, \tag{9.25}$$

где

$$U|e_n\rangle = \exp\left(\frac{2\pi ni}{N}\right)|e_n\rangle.$$

- $\dim H = +\infty$, $G = \mathbb{Z}$. Тогда $\hat{G} = \mathbb{T} = [0, 2\pi]$ и

$$\lambda(n) = \int\limits_{\mathbb{T}} \exp(nti)\, d\nu(t), \tag{9.26}$$

где ν – некоторая мера на $\mathbb{T}$. Рассмотрим канал, демпфирующий фазу, определённый (9.26). Для него справедливо представление:

$$\Phi(\rho) = \int\limits_{\mathbb{T}} U_t \rho U_t^* d\nu(t), \tag{9.27}$$

где

$$U_t |e_n\rangle = \exp(nti) |e_n\rangle .$$

- $\dim H = +\infty,\ G = \mathbb{R}$. Тогда $\hat{G} = \mathbb{R}$ и

$$\lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(itx) d\nu(t), \tag{9.28}$$

где ν – некоторая вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Рассмотрим канал, демпфирующий фазу, определённый (9.28). Для него справедливо представление:

$$\Phi(\rho) = \int\limits_{\mathbb{R}} U_t \rho U_t^* d\nu(t), \tag{9.29}$$

где

$$(U_t f)(x) = exp(itx) f(x),\ \ f \in H.$$

Заключение

Для продолжения занятий всем рекомендую использование ресурса http://arxiv.org, где в разделе «quant-ph» выкладываются все значимые работы, посвященные квантовой теории вероятностей.

Литература

1. *Амосов Г.Г., Коренной Я.А., Манько В.И.* О вычислении средних значений квантовых наблюдаемых в представлении оптической томографии // ТМФ. 2012. Т. 171. С. 475–482.
2. *Амосов Г.Г.* Оценка выходной энтропии тензорного произведения двух квантовых каналов // ТМФ. 2015. Т. 182, № 3. С. 453–464.
3. *Бройер Х.-П., Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем. Москва–Ижевск : РХД, 2010.
4. *Вальд А.* Статистические решающие функции // Позиционные игры. Москва : Наука, 1967.
5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.А.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Москва : Наука, 1965.
6. *Лидский В.Б.* Несамосопряженные операторы, имеющие след // ДАН. 1959. Т. 125, № 3. С. 485–488.
7. *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики. Москва : Мир, 1965.
8. *Наймарк М.А.* Положительно-определенные операторные функции на коммутативной группе // Изв. АН СССР. Серия: математика. 1943. Т. 7, вып. 5. С. 237–244.
9. *фон Нейман И.* Математические основания квантовой механики. Москва : Наука, 1964.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. Москва : Мир, 1977.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. Москва : Мир, 1978.
12. *Хида Т.* Броуновское движение. Москва : Наука, 1987.
13. *Холево А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории Москва : Наука, 1980.
14. *Холево А.С.* Каналы, разрушающие сцепленность, в бесконечных размерностях // Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44, вып. 3. С. 3–18.
15. *Холево А.С.* Квантовые системы, каналы, информация. Москва : МЦНМО, 2010.
16. *Холево А.С.* Математические основы квантовой информатики // Лекц. курсы НОЦ. 2018. Вып. 30. С. 3–117. Москва : МИАН, 2018.
17. *Amosov G.G.* On tomographic representation on the plane of the space of Schwartz operators and its dual // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 595–599.

18. *Amosov G.G., Filippov S.N.* Spectral properties of reduced fermionic density operators and parity superselection rule // Quantum Inf. Process. 2017. V. 16. P. 16.

19. *Amosov G.G., Mokeev A.S.* On non-commutative operator graphs generated by covariant resolutions of identity // Quantum Inf. Process. 2018. V. 17. P. 11.

20. *Amosov G.G., Mokeev A.S.* On non-commutative operator graphs generated by reducible unitary representation of the Heisenberg-Weyl group // Internat. J. Theor. Phys. 2018. doi: 10.1007/s10773-018-3963-4, URL: `https://arxiv.org/abs/1812.02515`

21. *Bertrand J., Bertrand P.* A tomographic approach to Wigner's function // Foundations of Physics. 1987. V. 17. P. 397–405.

22. *Choi M.D., Effros E.G.* Injectivity and operator spaces // J. Funct. Anal. 1977. V. 24. P. 156–209.

23. *Cirel'son B.S.* Quantum generalizations of Bell's inequality // Lett. Math. Phys. 1980. V. 4, N 2. P. 93–100.

24. *Cahill K.E., Glauber R.G.* Density operators and quasiprobability distributions // Physical Review. 1969. V. 177, N 5. P. 1882–1902.

25. *D'Ariano G.M., Maccone L., Paris M.G.A.* Quarum of observables for universal quantum estimation // J. Phys. A: Math. and General. 2001. V. 34, N 1. P. 93–104.

26. *Duan R.* Super-Activation of Zero-Error Capacity of Noisy Quantum Channels // arXiv.org. 2009. URL: `https://arxiv.org/abs/0906.2527`

27. *Duan R., Severini S., Winter A.* Zero-error communication via quantum channels, noncommutative graphs and a quantum Lovasz theta function // IEEE Trans. Inf. Theory. 2013. V. 59. P. 1164–1174.

28. *Filippov S.N., Man'ko V.I.* Spin tomography and star-product kernel for qubits and qutrits // J. Russ. Laser Res. 2009. V. 30. P. 129–145.

29. *Filippov S.N., Man'ko V.I.* Symmetric informationally complete positive operator valued measure and probability representation of quantum mechanics // J. Russ. Laser Res. 2010. V. 31. P. 211–231.

30. *Glauber R.G.* Coherent and incoherent states of the radiation field // Phys. Rev. 1963. V. 131, N 6. P. 2766–2788.

31. *Gleason A.M.* Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // J. Math. Mech. 1957. V. 6. P. 885–893.

32. *Hudson R.L., Parthasarathy K.R.* Quantum Ito's formula and stochastic evolutions // Commun. Math. Phys. 1984. V. 93, N 3. P. 301–323.

33. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G., Simoni A., Ventriglia F.* An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics // Phys. Scr. 2009. V. 79. P. 065013.

34. *Keyl M., Kiukas J., Werner R.F.* Schwartz operators // Rev. Math. Phys. 2016. V. 28, N 3. P. 1630001.

35. *Kolmogoroff A.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin : Springer, 1933.

36. *Knill E., Laflamme R.*, Theory of quantum error-correcting codes // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. 900–911.

37. *Knill E., Laflamme R., Viola L.* Theory of quantum error correction for general noise // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2525–2528.

38. *Manko O.V., Manko V.I., Marmo G.* Alternative commutation relations, star products and tomography // J. Phys. A: Math. and General. 2002. V. 35, N 3. P. 699–720.

39. *Moyal J.E.* Quantum mechanics as a statistical theory // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99–124.

40. *Namias V.* The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics // J. Inst. Math. Appl. 1980. V. 25. P. 241–265.

41. *Pauli W.* Handbuch der physik / Eds. Geiger, Scheel. V. XXIV. Part 1. 1933.

42. *Rudin W.* Real and complex analysis. McGraw-Hill, 1987.

43. *Shor P.* Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. R2493(R).

44. *Stinespring W.F.* Positive functions on C^*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. V. 6. P. 211–216.

45. *Sudarshan E.C.G.* Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10, N 7. P. 277–279.

46. *Weaver N.* A “quantum” Ramsey theorem for operator systems // Proc. Amer. Math. Soc. 2017. V. 145, N 11. P. 4595–4605.

47. *Wigner E.P.* On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. 1932. V. 40, N 5. P. 749–759.

Учебное издание

Амосов Григорий Геннадьевич

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЯМ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Редактор *Н. Е. Кобзева*. Корректор *И. А. Волкова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*
Дизайн обложки *Е. А. Казённова*

Подписано в печать 15.10.2019. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 5,75. Уч.-изд. л. 4,5. Тираж 100 экз. Заказ № 228.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок