Лекции по аналитической геометрии: векторная алгебра, прямые и плоскости

П.А. Кожевников

18 января 2017 г.

Оглавление

Глава 1

Векторы и системы координат

Обозначим множество точек прямой, плоскости или пространства соответственно через $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ (или $\mathcal{P}$, если речь идет о любом из множеств $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$). Можно считать, что $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3$.

Упорядоченная пара точек $X, Y \in \mathcal{P}$ определяет *направленный отрезок* $\overrightarrow{XY}$ (направленные отрезки и векторы обозначаем стрелкой или жирным шрифтом, например, $\overrightarrow{XY}$ или $\mathbf{a}$). Точки X и Y называются соответственно *началом* и *концом* направленного отрезка. Для направленных отрезков определено (известным образом) понятие *равенства*, которое удовлетворяет следующим свойствам (для любых направленных отрезков $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$):

1. $\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (*рефлексивность*);
2. если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ (*симметричность*);
3. если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ (*транзитивность*).

Таким образом, множество направленных отрезков распадается на классы равных направленных отрезков. Эти классы называются *векторами*, или *свободными векторами*. Обозначим множество свободных векторов на прямой, плоскости или в пространстве соответственно через V_1, V_2, V_3 (или V, если речь идет о любом из множеств V_1, V_2, V_3). Можно считать, что $V_1 \subset V_2 \subset V_3$. Множество V будем называть *векторным пространством* (это название дано в согласии с определением *абстрактного* векторного пространства, которое принято в алгебре).

Векторами мы, однако, будем иногда называть и направленные отрезки. (При этом из контекста будет ясно, фиксированы ли концы рассматриваемого вектора, то есть имеем ли мы в виду свободный вектор или направленный отрезок.) Часто используется тот факт, что от любой точки можно отложить единственный вектор, равный данному.

На множестве V известным образом вводятся операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие свойствам ($\forall\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$, $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (*ассоциативность*);
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (*коммутативность*);
3. $\exists\ \mathbf{0} \in V$ (*нулевой вектор*), удовлетворяющий равенству $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
4. $\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (вектор $(-1)\mathbf{a}$ обозначается также $-\mathbf{a}$ и называется *противоположным* вектору $\mathbf{a}$).
5. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (линейность по константам);
6. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (линейность по векторам);
7. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;
8. $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$.

Отметим еще тождества $0 \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $-(\lambda\mathbf{a}) = (-\lambda)\mathbf{a} = \lambda(-\mathbf{a})$. Операцию вычитания векторов можно определить как $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, при этом $(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{a}$, $\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$.

Несколько векторов из V_3 коллинеарны, если существует прямая, которой они параллельны. Несколько векторов из V_3 компланарны, если существует плоскость, которой они параллельны. (Условимся считать, что нулевой вектор параллелен любой прямой и любой плоскости, в частности нулевой вектор коллинеарен любому вектору.) Обозначение для коллинеарности двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Соответственно, запись $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Отметим следующую связь между коллинеарностью и умножением на число. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

Угол между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из V_3 равен углу AOB между направленными отрезками $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ (где O — произвольная точка; как нетрудно видеть, определение угла не зависит от ее выбора). Обозначение: $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Угол между ненулевыми векторами принимает значения из отрезка $[0, \pi]$. Будем считать, что угол между нулевым вектором и любым другим не определен однозначно, то есть считаем верным равенство $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \alpha$ при любых $\mathbf{a} \in V$ и $\alpha \in [0, \pi]$. Если $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\pi}{2}$, то говорят, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *перпендикулярные*, или *ортогональные* (обозначение: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$). Если $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, то говорят, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *сонаправленные* (обозначение: $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$). Если $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi$, то говорят, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *противоположно направленные* (обозначение: $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$). В частности, $\forall\, \mathbf{a} \in V_3$ имеем: $\mathbf{a} \perp \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{0}$. Отметим, что для векторов $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}$ из V_3 справедливы утверждения: $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \geqslant 0$: $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$; $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \leqslant 0$: $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

Если зафиксирована единица измерения, то для любого вектора $\mathbf{a}$ однозначно определена *длина*, или *норма* (обозначение: $|\mathbf{a}|$ или $\|\mathbf{a}\|$). Ясно, что ($\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$):

$|\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$;

$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$;

$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (*неравенство треугольника*).

Иногда употребляют выражение „*нормировать ненулевой вектор* $\mathbf{a}$“, означающее „заменить вектор $\mathbf{a}$ на сонаправленный единичный вектор $\dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$“.

В дальнейших рассмотрениях нам встретятся *наборы* или *системы векторов* (отличие набора от множества в том, что в наборе один элемент может содержаться в нескольких экземплярах). Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$ — некоторая конечная система векторов. Будем говорить, что система $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_l}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k$, является *подсистемой* системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Если в конечной системе векторов зафиксирован порядок, в котором перечисляются векторы, то говорят об *упорядоченной системе векторов.*

Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ векторного пространства V называется *ортогональной*, если $\mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}_j$ для всех i, j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Ортогональная система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ векторного пространства V называется *ортонормированной*, если $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = \ldots = |\mathbf{a}_k| = 1$.

§ 1. Линейная зависимость систем векторов. Базис

Линейная зависимость

Определение. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Сумма

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k \tag{1.1}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ с *коэффициентами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Если $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_k| > 0$ (то есть хотя бы один из коэффициентов не равен 0), то говорят, что линейная комбинация (1.1) *нетривиальная* (в противном случае линейная комбинация называется *тривиальной*).

В том случае, когда $\mathbf{b} \in V$ равен линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, также говорят, что $\mathbf{b}$ *раскладывается* по векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ или *линейно выражается* через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Отметим, что выражение (1.1) иногда удобно записать в виде матричного перемножения строки из векторов на столбец чисел: $(\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2, \,\ldots\, \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Определение. Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$ называется *линейно зависимой*, если некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна $\mathbf{0}$, и *линейно независимой* в противном случае.

Примером линейно зависимой системы векторов является любая система, содержащая $\mathbf{0}$. Полагают, что пустая система векторов линейно независима (формально это согласуется с определением).

Предложение 1.1. *Система векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$ *($k \geqslant 2$) линейно зависима* $\Leftrightarrow$ *среди векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ **найдется** *вектор, который линейно выражается через остальные $k-1$ векторов этой системы.*

$\triangleright$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, и не все коэффициенты равны 0, скажем $\lambda_k \neq 0$. Тогда поделим равенство на $-\lambda_k$ и перенесем $\mathbf{a}_k$ в другую часть; получим $\mathbf{a}_k = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{a}_{k-1}$, где $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_k}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть, скажем, вектор $\mathbf{a}_k$ раскладывается по векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$: $\mathbf{a}_k = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{a}_{k-1}$. Тогда $\mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k$ — нетривиальная линейная комбинация, равная $\mathbf{0}$. $\square$

Предложение 1.2. *1) Если в конечной системе векторов из V имеется некоторая линейно зависимая подсистема, то и вся система линейно зависима.*

2) Подсистема конечной линейно независимой системы линейно независима.

$\triangleright$ 1) Пусть, скажем, для системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ ее подсистема $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ (где $m \leqslant k$) линейно зависима, и некоторая нетривиальная линейная комбинация $\mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \mu_m\mathbf{a}_m$ равна $\mathbf{0}$. Тогда $\mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \mu_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_k$ — нетривиальная линейная комбинация, равная $\mathbf{0}$.

2) Это переформулировка утверждения 1). $\square$

Предложение 1.3. *Пусть вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Тогда коэффициенты λ_i в равенстве*

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k \tag{1.2}$$

определяются однозначно $\Leftrightarrow$ *система* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно независима.*

$\triangleright$ $\boxed{\Rightarrow}$ Преположим, что напротив, система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. Тогда к правой части (1.2) можно прибавить нетривиальную линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, равную $\mathbf{0}$. Получим линейное выражение $\mathbf{b}$ через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, отличающееся от (1.2) хотя бы в одном коэффициенте. Противоречие.

$\boxed{\Leftarrow}$ Предположим, что вектор $\mathbf{b}$ разложен по векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ еще каким-то способом:

$$\mathbf{b} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \mu_k\mathbf{a}_k. \tag{1.3}$$

Вычитая (1.2) из (1.3), получаем $(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{a}_2 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Так как $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — линейно независимая система, то левая часть полученного равенства — тривиальная линейная комбинация, откуда $\lambda_i = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. $\square$

Заметим, что определение линейной зависимости давалось "алгебраически то есть через формулы, в которых используются операции над векторами. Выясним теперь геометрический смысл этого понятия.

Предложение 1.4. *1) Пусть $\mathbf{b} \in V$ раскладывается по коллинеарным векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ из V. Тогда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ коллинеарны.*

2) Пусть $\mathbf{b} \in V$ раскладывается по компланарным векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ из V. Тогда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ компланарны.

$\triangleright$ 1) Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ параллельны прямой l. Отложим их от точки $O \in l$. По правилу сложения векторов и умножения вектора на число вектор (1.2), отложенный от точки O, лежит на прямой l.

2) Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ параллельны плоскости σ. Отложим их от точки $O \in \sigma$. По правилу сложения векторов и умножения вектора на число вектор (1.2), отложенный от точки O, лежит в плоскости σ. $\square$

Предложение 1.5. *1) Пусть векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}$ таковы, что $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{b}$. Тогда $\mathbf{b}$ линейно выражается через $\mathbf{a}_1$.*

2) Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b}$ таковы, что $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$ и векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}$ компланарны. Тогда $\mathbf{b}$ линейно выражается через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

3) Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — тройка некомпланарных векторов из V. Тогда любой вектор $\mathbf{b} \in V$ линейно выражается через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

$\triangleright$ 1) Очевидно.

2) Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}$ параллельны плоскости σ. Отложим от некоторой точки $O \in \sigma$ векторы $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}_2$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Тогда точки A_1, A_2, B лежат в плоскости σ. Проведем через точку B прямую $l \parallel OA_2$, и пусть прямые l и OA_1 (они не параллельны) пересекаются в точке B_1. Тогда $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B}$. При этом $\overrightarrow{OB_1} \parallel \mathbf{a}_1$ и $\overrightarrow{B_1B} \parallel \mathbf{a}_2$. Из пункта 1) данного предложения вытекает (так как $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ ненулевые), что $\overrightarrow{OB_1} = \lambda_1\mathbf{a}_1$ и $\overrightarrow{B_1B} = \lambda_2\mathbf{a}_2$ для некоторых чисел λ_1 и λ_2. Тем самым, $\overrightarrow{OB} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$.

3) Отложим от некоторой точки O векторы $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \mathbf{a}_3$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Проведем через точку B прямую $l \parallel OA_3$, и пусть прямая l и плоскость OA_1A_2 (они не параллельны) пересекаются в точке B_1. Тогда $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B}$. При этом $\overrightarrow{OB_1}$ лежит в плоскости OA_1A_2, и значит (как следует из пункта (2) данного предложения) линейно выражается через (не коллинеарные) векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$: $\overrightarrow{OB_1} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$. Так как $\overrightarrow{B_1B} \parallel \mathbf{a}_3$, то из пункта (1) данного предложения вытекает (так как $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$), что $\overrightarrow{B_1B} = \lambda_3\mathbf{a}_3$ для некоторого $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Тем самым, $\overrightarrow{OB} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3$. $\square$

Теорема 1.1 (критерий линейной зависимости)**.** *1) Система из одного вектора $\mathbf{a}_1$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$.*

2) Система из двух векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$.

3) Система из трех векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны.

4) Система из любых четырех векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ (в пространстве V_3) линейно зависима.

$\triangleright$ 1) Очевидно.

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Из предложения 1.1 следует, что один из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно выражается через другой. Пусть, скажем, $\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_1$. Но отсюда следует, что $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Если $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, то система из одного вектора $\mathbf{a}_1$ линейно зависима $\Rightarrow$ согласно предложению 1.2 система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ также линейно зависима.

Если же $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, то из коллинеарности $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$ вытекает (по предложению 1.5), что $\mathbf{a}_2$ линейно выражается через $\mathbf{a}_1 \Rightarrow$ согласно предложению 1.1 система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависима.

3) $\boxed{\Rightarrow}$ Из предложения 1.1 следует, что один из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно выражается через другой. Пусть, скажем, $\mathbf{a}_3$ раскладывается по векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Тогда из предложения 1.4 следует (так как два вектора всегда компланарны), что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны.

$\boxed{\Leftarrow}$ Если $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$, то система из двух векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависима (по пункту (2) этой теоремы) $\Rightarrow$ согласно предложению 1.2 система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ также линейно зависима.

Если же $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$, то из компланарности $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ вытекает (по предложению 1.5), что $\mathbf{a}_3$ линейно выражается через $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2 \Rightarrow$ согласно предложению 1.1 система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависима.

4) Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны, то система из трех векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависима (по пункту (3) этой теоремы) $\Rightarrow$ согласно предложению 1.2 система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ также линейно зависима.

Если же $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ не компланарны, то (по предложению 1.5) $\mathbf{a}_4$ линейно выражается через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3 \Rightarrow$ согласно предложению 1.1 система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависима. $\square$

Базис

Определение. Упорядоченная система векторов $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ из V называется *базисом* векторного пространства V, если она линейно независима, и любой вектор из V раскладывается по векторам этой системы.

В частности, *ортогональный базис* — это ортогональная система векторов, являющаяся базисом, а *ортонормированный базис* (сокращенно — ОНБ) — это ортонормированная система векторов, являющаяся базисом.

Теорема 1.2 (описание базисов). *Упорядоченная система из n векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ векторного пространства V является базисом в $V \Leftrightarrow$*

1) в случае $V = V_1$: $n = 1$ и $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$;

2) в случае $V = V_2$: $n = 2$ и $\mathbf{e}_1 \nparallel \mathbf{e}_2$;

3) в случае $V = V_3$: $n = 3$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ не компланарны.

$\triangleright$ 1) Очевидно, что базис в V_1 должен содержать хотя бы один ненулевой вектор.

Из п. 2) теоремы 1.1 и предложения 1.2 следует, что базис в V_1 не может состоять более, чем из одного вектора.

Остается единственная возможность: базис может состоять из одного ненулевого вектора. Очевидно, система из одного ненулевого вектора удовлетворяет определению базиса в V_1.

2) Предположим, что базис в V_2 состоит из нескольких коллинеарных векторов, и пусть эти векторы параллельны некоторой прямой l. Тогда вектор $\mathbf{a} \nparallel l$ не раскладывается по векторам базиса — противоречие. Отсюда, в частности, следует, что базис в в V_2 содержит не менее двух векторов.

Из п. 3) теоремы 1.1 и предложения 1.2 следует, что базис в V_2 не может состоять более, чем из двух векторов.

Остается единственная возможность: базис может состоять из двух неколлинеарных векторов. Из п. 2) теоремы 1.1 и п. 2) предложения 1.5 следует, что система из двух неколлинеарных векторов в V_2 удовлетворяет определению базиса.

3) Предположим, что базис в V_3 состоит из нескольких компланарных векторов, и пусть эти векторы параллельны некоторой плоскости σ. Тогда вектор $\mathbf{a} \nparallel \sigma$ не раскладывается по

векторам базиса — противоречие. Отсюда, в частности, следует, что базис в в V_3 содержит не менее трех векторов.

Из п. 4) теоремы 1.1 и предложения 1.2 следует, что базис в V_3 не может состоять более, чем из трех векторов.

Осталась единственная возможность: базис может состоять из трех некомпланарных векторов. Из п. 3) теоремы 1.1 и п. 3) предложения 1.5 следует, что система из трех некомпланарных векторов в V_3 удовлетворяет определению базиса. □

Из теоремы следует, что наши обозначения согласуются с количеством векторов в базисе: каждый базис пространства V_n $(n = 1, 2, 3)$ состоит из n векторов.

Координаты вектора в базисе

Определение. Пусть в векторном пространстве V зафиксирован базис $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в разложении $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ вектора $\mathbf{a} \in V$ по этому базису называются *координатами* вектора $\mathbf{a}$ в базисе e.

Из предложения 1.3 следует, что упорядоченный набор координат вектора в базисе однозначно определен. Для любого упорядоченного набора координат имеется вектор из V именно с таким набором координат. Таким образом, если в векторном пространстве V зафиксирован базис $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, то имеется взаимно-однозначное соответствие между векторами $\mathbf{a}$ из V и упорядоченными наборами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ вещественных чисел. Столбец $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ называется *координатным столбцом*, или столбцом координат вектора $\mathbf{a}$ в базисе e. Запись

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathrm{e}\alpha}$$

будет означать, что $\mathbf{a}$ имеет координатный столбец α в базисе e (эта запись согласуется с символическим умножением матриц: $(\mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2\, \ldots\, \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$).

Предложение 1.6 (линейность сопоставления координат)**.** *Пусть в V_n зафиксирован базис $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда при сложении векторов соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число $\lambda \in \mathbb{R}$ соответствующие координаты умножаются на λ.*

(То есть если $\mathbf{a} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ *и* $\mathbf{b} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$, *то* $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$ *и* $\lambda\mathbf{a} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{pmatrix}$*.)*

▷ По условию $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\ldots+\beta_n\mathbf{e}_n$. Сложив равенства, имеем $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (\alpha_1+\beta_1)\mathbf{e_1} + (\alpha_2+\beta_2)\mathbf{e_2} + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)\mathbf{e_n}$. Умножив первое равенство на λ, имеем $\lambda\mathbf{a} = (\lambda\alpha_1)\mathbf{e_1} + (\lambda\alpha_2)\mathbf{e_2} + \ldots + (\lambda\alpha_n)\mathbf{e_n}$. □

Замена базиса

Пусть $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathrm{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ — два базиса в векторном пространстве V_n. (Условно назовем их *старый* и *новый*.)

Определение. Матрица S размера $n \times n$, j-ый столбец которой равен координатному столбцу вектора $\mathbf{e}'_j$ в базисе e, называется *матрицей перехода* от базиса e к базису e'.

Определение матрицы перехода можно символически записать в виде матричного умножения, используя строки из векторов $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathrm{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$:

$$\boxed{\mathrm{e}' = \mathrm{e}S.}$$

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathbf{a} \in V_n$ *имеет в базисах* $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *и* $\mathrm{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ *координатные столбцы* α *и* α'. *Тогда*

$$\boxed{\alpha = S\alpha'},$$

где S *— матрица перехода от базиса* e *к базису* e'.

$\triangleright$ "Символическое доказательство"(проверьте эту выкладку в координатах) выглядит так: $\mathbf{a} = \mathrm{e}'\alpha' = (\mathrm{e}S)\alpha' = \mathrm{e}(S\alpha')$. Это означает, что $S\alpha'$ является координатным столбцом вектора $\mathbf{a}$ в базисе e, то есть совпадает со столбцом α. $\square$

1. Если $\mathrm{e} = \mathrm{e}'$, то матрица перехода от e к e' имеет вид $S = E_n$, где E_n — *единичная матрица*.
2. Если $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — ОНБ на плоскости, а базис $\mathrm{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ получен из e поворотом на угол φ (в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$), то матрица перехода от e к e' имеет вид $S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Предложение 1.7. *Пусть* e, e', e'' *— три базиса в* V. *Пусть* S *— матрица перехода от* e *к* e', *а* R *— матрица перехода от* e' *к* e''. *Тогда матрица перехода от* e *к* e'' *равна* SR.

$\triangleright$ Символическое "доказательство": $\mathrm{e}'' = \mathrm{e}'R = (\mathrm{e}S)R = \mathrm{e}(SR)$. $\square$

§ 2. Системы координат

Декартова система координат

При фиксации начала координат O положение точки M задается однозначно *радиус-вектором* $\overrightarrow{OM}$.

Определение. *Декартовой системой координат* (примем сокращение ДСК) на прямой, на плоскости или в пространстве будем называть пару (O, e), где $O \in \mathcal{P}$ — некоторая точка, называемая *началом координат*, а e — некоторый базис в V.

Определение. ДСК (O, e) будем называть *прямоугольной* (примем сокращение ПДСК), если e — ОНБ.

Определение. *Координатами* точки M в декартовой системой координат (O, e) называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\mathbf{e}$.

Таким образом, *координатный столбец* точки M в ДСК (O, e) — это координатный столбец вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе e. Тот факт, что точка $M \in \mathcal{P}$ имеет в ДСК $(O, \mathbf{e})$ координатный столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ будем записывать $M \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} X$. Таким образом,

$$M \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} X \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \mathrm{e}X.$$

Сохраняется привычная терминология: для ДСК в $\mathcal{P}_3$ координаты x_1, x_2, x_3 называются соответственно *абсцисса, ордината, аппликата* и часто обозначаются буквами x, y, z. Прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат O параллельно базисным векторам $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, называются осями координат, а плоскости Oxy, Oyz, Ozx — координатными плоскостями. Помимо обозначения (O, e) ДСК на плоскости и в пространстве будем обозначать Oxy и $Oxyz$.

Предложение 2.1. *Пусть* (O, e) *— ДСК,* M *и* N *— некоторые точки, причем* $M \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $N \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. *Тогда* $\overrightarrow{MN} = \mathrm{e} \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ Следует из векторного равенства $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ и предложения 1.6. $\square$

Предложение 2.2 (Деление отрезка в данном отношении)**.** *Пусть* (O, e) *— ДСК,* M *и* N *— некоторые точки, причем* $M \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $N \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. *Пусть точка* P *делит отрезок* MN *в отношении* $\lambda \in \mathbb{R}$, *то есть* $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{MN}$. *Тогда* $P \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1 \\ (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda)x_n + \lambda y_n \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ Следует из векторного равенства $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{MN} = (1-\lambda)\overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{ON}$ и предложения 1.6. $\square$

Замена декартовой системы координат

Выясним, как связаны координаты одной и той же точки в разных ДСК.

Теорема 2.1 (о замене системы координат)**.** *Пусть* (O, e) *и* (O', e') *— две ДСК, причем* $O' \underset{(O,\mathrm{e})}{\longleftrightarrow} \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, *а матрица перехода от базиса* e *к базису* e' *равна* S.

Пусть точка M имеет в ДСК (O, e) координатный столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *а в ДСК* (O', e') *координатный столбец* $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. *Тогда*

$$\boxed{X = SX' + \gamma.}$$

$\triangleright$ По условию $\overrightarrow{OO'} = \mathrm{e}\gamma$, $\overrightarrow{OM} = \mathrm{e}X$, $\overrightarrow{O'M} = \mathrm{e}'X'$. Из теоремы 1.3 о замене базиса вытекает, что $\overrightarrow{O'M} = \mathrm{e}(SX')$. Из равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'}$, с использованием предложения 1.6, получаем требуемое равенство $X = SX' + \gamma$. $\square$

Полярные координаты

Рассмотрим на плоскости некоторую ПДСК Oxy. Для точки $M(x, y)$ обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — *полярный радиус*. Если $r \neq 0$, то пусть φ — угол поворота против часовой стрелки от $\mathbf{e}_1$ до $\overrightarrow{OM}$ (*полярный угол*). Можно считать, что $\varphi \in [0, 2\pi)$ или что φ определен с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пара (r, φ) — это *полярные координаты* точки M.

Формулы перехода от полярных координат к *согласованной* ПДСК: $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Цилиндрические и сферические координаты

Пусть в пространстве задана некоторая ПДСК $Oxyz$, а в плоскости Oxy введены полярные координаты, согласованные с ПДСК Oxy.

Пусть проекция M' точки $M(x, y, z)$ на координатную плоскость Oxy имеет полярные координаты (r, φ). Положение точки M определяется точкой M' и аппликатой z.

Тройка (r, φ, z) представляет собой *цилиндрические координаты* точки $M(x, y, z)$ (согласованные с данной прямоугольной декартовой системой координат).

Пусть $R = |\overrightarrow{OM}|$. По положению точки M определим $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ следующим образом. Если $z \geqslant 0$ и $M' \neq O$, положим $\theta = \angle MOM'$ (в частности, $\theta = 0$, если $M \in Oxy$, $M \neq O$); если $z < 0$ и $M' \neq O$, положим $\theta = -\angle MOM'$; если $z > 0$ и $M' = O$, положим $\theta = \frac{\pi}{2}$; если $z < 0$ и $M' = O$, положим $\theta = -\frac{\pi}{2}$; если $M = O$, считаем, что θ равно произвольному значению из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Легко видеть, что $z = R\sin\theta$, $r = R\cos\theta$. По этим формулам можно, исходя из цилиндрических координат, вычислить R, φ, θ, и наоборот, зная R, φ, θ, определить цилиндрические координаты.

Тройка (R, φ, θ) представляет собой *сферические координаты* точки $M(x, y, z)$ (согласованные с данной ПДСК).

Формулы перехода от сферических координат к ПДСК: $\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\cos\theta, \\ z = R\sin\theta. \end{cases}$

§ 3. Скалярное произведение векторов

Определение. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — векторы из V, и φ — угол между ними. Число $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi$ называется *скалярным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (иногда пишут $\mathbf{ab}$), тем самым, определение можно записать формулой

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi}.$$

Из определения сразу вытекает

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. *Тогда*
1) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$*;*
2) $\boxed{\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0}$.

$\triangleright$ Следует из определений с учетом того, что если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — нулевой, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. $\square$

Проекцию вектора $\mathbf{a}$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ будем обозначать $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$.

Предложение 3.2. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. *Тогда*

$$\boxed{\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}}.$$

$\triangleright$ Проекция $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ длину $|\mathbf{a}| \cdot |\cos\varphi|$, где $\varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Кроме того, она сонаправлена с $\mathbf{b}$ в случае $\cos\varphi \geqslant 0$ и противоположно направлена вектору $\mathbf{b}$ в случае $\cos\varphi < 0$. Поэтому $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = (|\mathbf{a}|\cos\varphi)\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. (Величина $|\mathbf{a}|\cos\varphi$ иногда называется *алгебраической проекцией* вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{b}$). Преобразуем: $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|\cos\varphi)\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$, что и требовалось. $\square$

В частности, если $|\mathbf{b}| = 1$, то по предыдущему предложению $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{b}$.

Теорема 3.1. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ *выполнены следующие равенства:*
1) $\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0}$, *причем* $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.
2) $\boxed{(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ *(симметричность);*
3а) $\boxed{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})}$*;*
3б) $\boxed{(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{c})}$.

$\triangleright$ 1) и 2) следует сразу из определений.

3) Равенства очевидны, если $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Если же $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, рассмотрим проекции векторов на $\mathbf{c}$. Воспользуемся тем, что операция проектирования *линейна.* (Действительно, рассмотрим направленные отрезки $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. Пусть A', B', C' — проекции соответственно точек A, B, C на прямую, параллельную $\mathbf{c}$. Тогда $\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{a} = \overrightarrow{A'B'}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{b} = \overrightarrow{B'C'}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\overrightarrow{A'B'}$).

Имеем $\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dfrac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{a} + \mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{b} = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c} + \dfrac{(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c}$. Отсюда $\dfrac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c} = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c} + \dfrac{(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c}$. Приравнивая коэффициенты при $\mathbf{c}$ и домножая на $|\mathbf{c}|^2$, получаем требуемое равенство $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Аналогично, $\dfrac{(\lambda\mathbf{a},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c} = \mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\,\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}) = \lambda\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c}$, откуда $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{c})$. $\square$

Равенства 3) из предыдущей теоремы означают, что скалярное произведение линейно по первому аргументу. Но тогда из равенства 2) следует линейность и по второму аргументу.

Теорема 3.2. *Пусть* e *— ОНБ в* V, *и* $\mathbf{a} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ *Тогда*

$$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.}$$

$\triangleright$ $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n)$. После раскрытия скобок (пользуемся линейностью — см. предыдущую теорему), с учетом того, что $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ равно 0 для различных i и j, и равно 1 для равных i и j, получаем нужное выражение. $\square$

Следствие. *Пусть* $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)$ *— ОНБ в* V, *и* $\mathbf{a} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. *Тогда*

$$\alpha_i = (\mathbf{a},\mathbf{e}_i).$$

Теорема 3.2 дает рецепт для вычислений в ПДСК длин векторов или расстояний между точками (ибо $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$), углов между векторами (поскольку $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$) и проекций вектора на заданное направление.

Замечание. Можно вывести формулу для вычисления скалярного произведения в произвольном базисе (раскрывая скобку $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n, \beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\ldots+\beta_n\mathbf{e}_n)$). В матричном виде формула имеет вид $\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha^T\Gamma\beta}$, где $\mathbf{a} = \mathrm{e}\alpha$, $\mathbf{b} = \mathrm{e}\beta$ (т.е. α и β — координатные столбцы выкторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$), а Γ — матрица *Грама* (γ_{ij}), где $\gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$. (Матрицу Грама можно назвать таблицей скалярного умножения.)

§ 4. Ориентированные объемы и площади

Ориентация на плоскости

На плоскости и в пространстве введем понятие ориентации базиса.

Будем предполагать, что плоскость $\mathcal{P}_2$ лежит в пространстве $\mathcal{P}_3$. Пусть в плоскости $\mathcal{P}_2$ выбран базис, то есть зафиксирована упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Для удобства отложим эти векторы от одной точки O. Одно из полупространств, на которые $\mathcal{P}_2$ делит пространство, объявим *положительным.* Существует поворот против часовой стрелки (при взгляде из положительного полупространства) вокруг O на угол $\varphi \in (0, 2\pi)$, переводящий вектор $\mathbf{a}$ в вектор, сонаправленный с вектором $\mathbf{b}$. (Этот угол φ иногда называют углом поворота (против часовой стрелки) от вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$). Если $\varphi \in (0,\pi)$, то базис $\mathbf{a},\mathbf{b}$ назовем *положительно ориентированным*, в противном случае (то есть если $\varphi \in (\pi, 2\pi)$) — *отрицательно ориентированным.* Легко видеть, что данное определение не зависит от выбора точки O.

Предложение 4.1. *Базисы* $\mathbf{a},\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{b},\mathbf{a}$ *имеют разную ориентацию.*

$\triangleright$ Следует прямо из определения, поскольку сумма угла поворота от $\mathbf{a}$ до $\mathbf{b}$ и угла поворота от $\mathbf{b}$ до $\mathbf{a}$ равна 2π. $\square$

Подчеркнем, что ориентация базиса на плоскости зависит от выбора положительного полупространства. Если в качестве положительного полупространства выбрать противоположное полупространство, то положительно ориентированные базисы станут отрицательно ориентированными, и наоборот.

Ориентация в пространстве

Пусть в пространстве выбран базис $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Отложим эти векторы от одной точки O, то есть построим векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Из двух полупространств относительно плоскости OAB, объявим положительным то, которое содержит точку C. Тем самым мы вводим ориентацию упорядоченных пар неколлинеарных векторов, лежащих в плоскости OAB. Если в описанной ситуации упорядоченная пара векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ является положительно ориентированной, то будем говорить, что базис $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *положительно ориентирован*, или что тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ является *правой* тройкой. В противном случае $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ назовем *отрицательно ориентированным базисом*, или *левой* тройкой. Ясно, что данное определение не зависит от выбора точки O.

Предложение 4.2. *Упорядоченные тройки* $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ *и* $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *имеют ту же ориентацию, что и тройка* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, *а тройки* $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$, $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$, $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$ *имеют ориентацию, противоположную ориентации тройки* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

$\triangleright$ Пусть, определенности, тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ правая (для левой тройки доказательство аналогично). Пусть векторы отложены от одной точки O: $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Рассматривая трехгранный угол вершиной O и ребрами OA, OB, OC, видим, что угол поворота против часовой стрелки (при взгляде из полупространства относительно плоскости OBC, содержащего точку A) от $\mathbf{b}$ до $\mathbf{c}$ равен $\angle BOC \in (0, \pi)$. Следовательно, тройка $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ — правая. Так же показывается, что тройка $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ — правая.

Далее, из определения ориентации и предложения 4.1 сразу следует, что ориентация у троек $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$ различная. То же верно для троек $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ и $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$, а также для троек $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$. $\square$

Ориентированный объем параллелепипеда. Ориентированная площадь параллелограмма

Отложим векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ от точки O. Достроим конструкцию до параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, *отвечающего* тройке $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (параллелепипед $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ имеет вершины, заданные радиус-векторами $\overrightarrow{OO} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OE} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OF} = \mathbf{c} + \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$). Если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны, то у $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ все вершины лежат в одной плоскости; в этом случае считаем, что $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — параллелепипед нулевого объема (вырожденный).

Определение. Ориентированным объемом параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется число $\pm V$, где V — объем $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, знак $''+''$ берется в случае правой тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, а знак $''-''$ — в случае левой тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Будем обозначать ориентированный объем $V_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ или просто $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (если это не вызовет двусмысленности). Число $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется также *смешанным произведением* упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (см. теорему 5.1).

Аналогично определяется ориентированная площадь $S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ параллелограмма, соответствующего упорядоченной паре векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_2$.

Предложение 4.3. *Если* $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *— ОНБ в* V_3*, то* $V_{\pm}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = \pm 1$*, где знак* $''+''$ *соответствует случаю правой тройки* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*, а знак* $''-''$ *— случаю левой тройки* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

$\triangleright$ Так как $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — это единичный куб, то $|V_{\pm}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})| = 1$. Выбор знака вытекает из определений. $\square$

Предложение 4.3.' Если $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — ОНБ в V_3, то $S_{\pm}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) = \pm 1$, где знак $''+''$ соответствует случаю положительно ориентированного базиса, а знак $''-''$ — отрицательно ориентированного.

$\triangleright$ Аналогично предыдущему предложению. $\square$

Предложение 4.4. *Векторы* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$ *компланарны* $\Leftrightarrow V_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

$\triangleright$ Следует из определений. $\square$

Предложение 4.4.' Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ коллинеарны $\Leftrightarrow S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

$\triangleright$ Следует из определений. $\square$

Теорема 4.1. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V_3$*,* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ *выполнены следующие равенства для ориентированных объемов:*

1) $\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})}$*;*

2) $\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$*;*

3) $\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})}$.

$\triangleright$ 1) Следует из определения ориентированного объема и предложения 4.2.

2), 3) В случае $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ свойства очевидны.

Пусть $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Рассмотрим такой вектор $\mathbf{e}$, что $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{e} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{e} \perp \mathbf{b}$, и тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ — правая тройка. Из формулы объема $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \cdot (\pm h)$, где h — высота параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Заметим, что множитель $\pm h$ равен алгебраической проекции вектора $\mathbf{c}$ на $\mathbf{e}$. Отсюда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{e})$. Теперь свойства 2) и 3) вытекают из линейности скалярного произведения (см. теорему 3.1).$\square$

Равенства 2) и 3) из предыдущей теоремы означают, что ориентированный объем линеен по третьему аргументу. Но тогда из равенства 1) следует линейность по каждому из трех аргументов. Теорема, аналогичная предыдущей, верна и для ориентированных площадей.

Теорема 4.1.' $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_2$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ выполнены следующие равенства:

1) $\boxed{S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S_{\pm}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$;

2) $\boxed{S_{\pm}(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$;

3) $\boxed{S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{c})}$.

$\triangleright$ Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. $\square$

В следующих теоремах раскрывается геометрический смысл определителей второго и третьего порядка.

Теорема 4.2 (ориентированный объем в координатах)**.** *Пусть* $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *— базис (произвольный) в* V_3*;*

$\mathbf{a} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$. *Положим* $\Delta = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$. *Тогда*

$$\boxed{V_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \Delta \cdot V_{\pm}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3).}$$

В частности, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *компланарны* $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

$\triangleright$ Воспользовавшись предложением 4.3 и теоремой 4.1, а так же тем фактом, что $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = 0$ если хотя бы два из индексов i,j,k совпадают (см. предложение 4.4), получаем: $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3, \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3) =$
$= \alpha_1\beta_2\gamma_3(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) + \alpha_1\beta_3\gamma_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2) + \alpha_2\beta_1\gamma_3(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3) + \alpha_2\beta_3\gamma_1(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1) +$
$+ \alpha_3\beta_1\gamma_2(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) + \alpha_3\beta_2\gamma_1(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) = \alpha_1\beta_2\gamma_3(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) - \alpha_1\beta_3\gamma_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) -$
$- \alpha_2\beta_1\gamma_3(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) + \alpha_2\beta_3\gamma_1(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) + \alpha_3\beta_1\gamma_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) - \alpha_3\beta_2\gamma_1(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) =$
$= \Delta \cdot (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$. $\square$

Следствие. *Если в условиях теоремы* e *— положительно ориентированный ОНБ, то* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \Delta$.

Теорема 4.2.’ Пусть $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ — базис (произвольный) в V_2;
$\mathbf{a} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$. Положим $\delta = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$. Тогда

$$\boxed{S_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \delta \cdot S_{\pm}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2).}$$

В частности, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \delta = 0$.

$\triangleright$ Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. $\square$

Следствие. *Если в условиях теоремы* e *— положительно ориентированный ОНБ, то* $S_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \delta$.

§ 5. Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a},\mathbf{b} \in V_3$) называется такой вектор $\mathbf{c} \in V_3$, что
1) $|\mathbf{c}| = |S_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b})|$;
2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
3) (при $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$) тройка векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ положительно ориентирована.

Для векторного произведения используем обозначение $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ (также используется обозначение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$).

Определение однозначно задает способ построения вектора $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Следующие два предложения вытекают непосредственно из определений.

Предложение 5.1. *Если* $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ *— правый ОНБ в* V_3*, то* $[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2$.

$\triangleright$ Следует из рассмотрения единичного куба $P(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$. $\square$

Предложение 5.2. *Для векторов* $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V_3$ *следующие условия эквивалентны:*
1) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$*; 2)* $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{0}$*; 3)* $\mathbf{a},\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *компланарны.*

$\triangleright$ Из определения следует, что в случае $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ условия 2) и 3) выполнены, а в случае $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ оба эти условия нарушаются. $\square$

Следующая теорема проясняет, почему ориентированный объем также называется смешанным произведением.

Теорема 5.1. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$ *выполнено*

1) $\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})}$;

2) $\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])}$.

$\triangleright$ 1) Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то обе части равенства равны 0.

Пусть $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Из определения векторного произведения вытекает, что вектор $\mathbf{e}$, используемый в доказательстве теоремы 4.1, равен $\dfrac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$, где $\mathbf{d} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Отсюда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \cdot (\mathbf{e}, \mathbf{c}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \cdot \left(\dfrac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \mathbf{c}\right) = |\mathbf{d}| \cdot \dfrac{(\mathbf{d}, \mathbf{c})}{|\mathbf{d}|} = (\mathbf{d}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$.

2) Из предыдущего пункта и теоремы 4.1 следует, что
$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. $\square$

Теорема 5.2 (антисимметричность и линейность векторного произведения)**.** $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ *выполнены следующие равенства:*

1) $\boxed{[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$ *(антисимметричность);*

2) $\boxed{[\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \lambda [\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$;

3) $\boxed{[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]}$.

$\triangleright$ 1) Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то обе части равенства равны $\mathbf{0}$.

Иначе тройка $\mathbf{b}, \mathbf{a}, -[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — правая, и значит вектор $-[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ удовлетворяет всем условиям в определении векторного произведения $\mathbf{b}$ на $\mathbf{a}$.

2), 3) Рассмотрим ОНБ $\mathrm{e} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$, и докажем требуемые равенства векторов покоординатно (см. предложение 1.6), пользуясь предыдущей теоремой, следствием из теоремы 3.2 и линейностью ориентированного объема (теорема 4.1).

Имеем (для $i = 1, 2, 3$): $([\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{e}_i) = (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i) = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i) = \lambda ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{e}_i)$, то есть i-я координата вектора $[\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ получается из i-й координаты вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ домножением на λ.

Далее: $([\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{e}_i) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{e}_i) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}_i) = ([\mathbf{a}, \mathbf{c}], \mathbf{e}_i) + ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{e}_i)$, то есть i-я координата вектора $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ равна сумме i-х координат векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. $\square$

Равенства 2) и 3) из предыдущей теоремы означают, что векторное произведение линейно по второму аргументу. Но тогда из равенства 1) следует линейность и по первому аргументу.

Теорема 5.3 (координаты векторного произведения)**.** *Пусть* $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — *положительно ориентированный ОНБ в* V_3*;*

$\mathbf{a} = \mathrm{e} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \mathrm{e} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. *Тогда* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathrm{e} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$, *где*

$\delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$.

$\triangleright$ Пользуясь предложением 5.1 и теоремой 5.2, и учитывая, что $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i] = \mathbf{0}$, получим

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3, \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3] =$

$= \alpha_1 \beta_2 [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] + \alpha_2 \beta_1 [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] + \alpha_1 \beta_3 [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] + \alpha_3 \beta_1 [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \alpha_2 \beta_3 [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + \alpha_3 \beta_2 [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] =$

$= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3)[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \delta_3 \mathbf{e}_3 + \delta_2 \mathbf{e}_2 + \delta_1 \mathbf{e}_1$. $\square$

Равенство $\boxed{[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}$ представляет собой удобное символическое правило для утверждения предыдущей теоремы: раскрываем определитель и получаем разложение $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ по правому ОНБ e.

Замечание. Формула для вычисления векторного произведения в произвольном базисе имеет вид:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3] & [\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1] & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Ее можно получить, повторив доказательство теоремы 5.3 вплоть до последнего знака равенства.

Завершая разговор о векторном произведении, докажем формулу раскрытия двойного произведения, в устном математическом фольклоре именуемую "бац минус цаб".

Предложение 5.3. $\forall\, \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V_3$ *выполнено равенство*

$$\boxed{[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}).}$$

$\triangleright$ Выберем правый ОНБ $\mathrm{e} = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ в V_3 так, чтобы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{c}$ были коллинеарны, а векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b}$ компланарны. Тогда координаты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ будут выглядеть следующим образом: $\mathbf{a} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \mathrm{e}\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Тогда (пользуясь теоремой 5.3) получаем: $[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathrm{e}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\beta_2\gamma\end{pmatrix}$, $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathrm{e}\begin{pmatrix}-\alpha_2\beta_2\gamma\\ \alpha_1\beta_2\gamma\\ 0\end{pmatrix}$.

С другой стороны, $(\mathbf{a},\mathbf{c}) = \alpha_1\gamma$, $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$, поэтому

$$\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathrm{e}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\gamma\beta_1\\ \alpha_1\gamma\beta_2\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\gamma\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}\begin{pmatrix}-\alpha_2\beta_2\gamma\\ \alpha_1\beta_2\gamma\\ 0\end{pmatrix}. \square$$

Глава 2

Прямые и плоскости

В этой главе предполагается, что на плоскости $\mathcal{P}_2$ или в пространстве $\mathcal{P}_3$ введена ДСК (O, e), где $\mathsf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — базис ($n = 2$ для плоскости и $n = 3$ для пространства). Абсциссы, ординаты и аппликаты точек в данной ДСК обозначаются соответственно x, y, z. Как обычно, прямые Ox, Oy, Oz называются *осями координат*, а плоскости Oxy, Oyz, Ozx — *координатными плоскостями*.

§ 1. Прямая на плоскости.

Способы задания.

Прямая l однозначно задается точкой $M_0 \in l$ и ненулевым *направляющим* вектором $\mathbf{a}$.

Пусть M_0 имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_0$, и пусть некоторая точка M имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$. Тогда $M \in l \Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны $\Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ пропорционален вектору $\mathbf{a}$.

Таким образом, имеем *векторно-параметрическое* уравнение

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}}. \tag{2.1}$$

Это уравнение имеет координатную запись $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t, \end{cases}}$ где $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ — координатные столбцы точек M, M_0 и вектора $\mathbf{a}$ соответственно.

При $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ уравнение (2.1) легко переводится в *каноническое* уравнение

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2}}.^{1} \tag{2.2}$$

Также прямая l задается *общим уравнением*

$$\boxed{Ax + By + C = 0}, \tag{2.3}$$

где $|A| + |B| > 0$. Иногда для краткости будем обозначать линейную функцию $Ax + By + C$ через $L(x, y)$ или L, тем самым общее уравнение (2.3) будет записываться как $L = 0$. С общим уравнением (2.3) свяжем *сопутствующий* вектор $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. [2]

[1] Иногда запись (2.2) используют и в случае $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_2 = 0$.

[2] Как увидим далее, в предложении 1.3, для ПДСК сопутствующий вектор является нормальным (то есть перпендикулярным) к прямой.

Предложение 1.1 (критерий параллельности). *Для того, чтобы вектор* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ *был параллелен прямой* $Ax + By + C = 0$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\boxed{A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0}$.

$\triangleright$ Аналогично предложению 2.1 (только проще). $\Box$

Следствие 1. *Вектор* $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ *является направляющим для прямой (2.3).*

Следствие 2. *Сопутствующий вектор* $\mathbf{n}$ *не параллелен прямой (2.3).*

Взаимное расположение двух прямых

Предложение 1.2. *Две прямые, заданные общими уравнениями* $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ *вида (2.3) параллельны или совпадают* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$, *причем прямые совпадают* $\Leftrightarrow$ L_1 *и* L_2 *пропорциональны.*

$\triangleright$ В случае $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ столбцы $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ пропорциональны, значит уравнения прямых имеют вид $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $\lambda(A_1x + B_1y) + C_2 = 0$. При $C_2 = \lambda_1$ эти уравнения пропорциональны, значит задают одну и ту же прямую. Иначе система из этих двух уравнений имеет пустое множество решений, т.е. l_1 и l_2 не имеют общих точек.

В случае $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2$ система уравнений $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ имеет единственное решение, т.е. прямые пересекаются в одной точке. $\Box$

Линейное неравенство

От некоторой точки прямой l, заданной общим уравнением $L = 0$, отложим вектор $\mathbf{n}$. Ту полуплоскость, в которой лежит конец этого вектора (по следствию из предложения 1.1 он не лежит на прямой), объявим положительной, а другую полуплоскость — отрицательной. (Если изменить знак в уравнении, то есть рассматривать уравнение $-L = 0$, то положительная и отрицательная полуплоскости поменяются ролями.)

Теорема 1.1. *Точка* $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *лежит в положительной полуплоскости относительно прямой, заданной уравнением* $L = 0$ *вида (2.3)* $\Leftrightarrow$ $L(x, y) > 0$.

$\triangleright$ Аналогично доказательству теоремы 2.1. $\Box$

Пучок прямых

Определение. Пучком прямых с центром M называется множество прямых, проходящих через M.

Пучок обозначаем $\Pi(M)$. Пучок определяется двумя пересекающимися прямыми.

Теорема 1.2. *Пусть* $L_i = 0$ — *общие уравнения вида (2.3) прямых* l_i, $i = 1, 2, 3$, *при этом прямые* l_1 *и* l_2 *пересекаются в точке* M. *Прямая* l_3 *принадлежит пучку* $\Pi(M)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\ \lambda_1, \lambda_2$ *такие, что* $L_3 = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$.

$\triangleright$ Аналогично доказательству теоремы 2.2. $\Box$

Нормальное уравнение прямой и метрические задачи

С этого момента до конца параграфа предполагаем, что ДСК прямоугольная.

Предложение 1.3. *Пусть l — прямая, заданная общим уравнением $L = 0$. Тогда $\mathbf{n} \perp l$.*

$\triangleright$ Аналогично доказательству предложения 2.4 (только проще). $\square$

Таким образом, в ПДСК сопутствующий вектор является перпендикулярным, или *нормальным* к прямой.

Общее уравнение прямой (в силу теоремы 3.2 главы 1) приобретает вид

$$\boxed{(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + C = 0}. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) называется *нормальным уравнением* прямой.

Выведем формулы для решения основных метрических задач (то есть задачах об измерении расстояний и углов).

Предложение 1.4 (расстояние от точки до прямой)**.** *Пусть l — прямая, заданная нормальным уравнением (2.4) или общим уравнением (2.3). Тогда расстояние от точки $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ до прямой l равно $\boxed{\rho(M_0, l) = \dfrac{|(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) + C|}{|\mathbf{n}|}}$ или $\boxed{\rho(M_0, l) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$ соответственно.*

$\triangleright$ Аналогично доказательству предложения 2.5. $\square$

Задача поиска угла между прямыми сводится к задачи отыскании угла между их направляющими или их нормальными векторами.

§ 2. Плоскость в пространстве

Способы задания

Плоскость $\sigma \subset \mathcal{P}_3$ однозначно задается точкой $M_0 \in \sigma$ и парой неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, параллельных плоскости σ. (Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ иногда называют *направляющими* для плоскости σ.)

Пусть M_0 имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_0$, и пусть некоторая точка M имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$. Тогда $M \in \sigma \Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ компланарны $\Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Таким образом, имеем векторно-параметрическое уравнение

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}}, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

Это уравнение имеет координатную запись $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t + \beta_1 s \\ y = y_0 + \alpha_2 t + \beta_2 s \\ z = z_0 + \alpha_3 t + \beta_3 s \end{cases}}$, где $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ — координатные столбцы точек M, M_0 и векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно.

Пользуясь критерием компланарности (предложение 4.4 главы 1), получаем уравнение

$$\boxed{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0}. \tag{2.6}$$

Также плоскость σ задается *общим уравнением*

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}, \tag{2.7}$$

где $|A|+|B|+|C| > 0$ (то есть линейная функция $L = L(x, y, z) = Ax+By+Cz+D$ отлична от константы). С уравнением плоскости (2.7), свяжем *сопутствующий вектор* $\mathbf{n}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$.

Предложение 2.1 (критерий параллельности вектора и плоскости). *Вектор* $\mathbf{a}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ *параллелен плоскости σ, заданной уравнением (2.7)* $\Leftrightarrow$ $\boxed{A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0}$.

$\triangleright$ Пусть $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ — некоторая точка в плоскости σ, так что $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Отложим от M_0 вектор $\mathbf{a}$, концом этого вектора будет точка $M_1\begin{pmatrix}x_0+\alpha_1\\y_0+\alpha_2\\z_0+\alpha_3\end{pmatrix}$.
Имеем: $\mathbf{a} \parallel \sigma \Leftrightarrow M_1 \in \sigma \Leftrightarrow A(x_0 + \alpha_1) + B(y_0 + \alpha_2) + C(z_0 + \alpha_3) + D = 0 \Leftrightarrow$
$(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + (A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3) = 0 \Leftrightarrow A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0.$ $\square$

Следствие 1. *Если в уравнении (2.7) $A \neq 0$, то в качестве пары неколлинеарных направляющих векторов плоскости можно взять векторы* $\begin{pmatrix}-B\\A\\0\end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix}-C\\0\\A\end{pmatrix}$.

Следствие 2. *Сопутствующий вектор* $\mathbf{n}$ *не параллелен плоскости (2.7).* [3]

Взаимное расположение плоскостей

Предложение 2.2 (две плоскости). *Пусть две плоскости σ_1 и σ_2 заданы общими уравнениями $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ вида (2.7). Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) $\sigma_1 \parallel \sigma_2$ или $\sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$, причем
$\sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow L_1$ и L_2 пропорциональны.
2) Если $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, то прямая $\sigma_1 \cap \sigma_2$ имеет направляющий вектор $\mathbf{d} = \begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$. [4]

$\triangleright$ В случае $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ столбцы $\begin{pmatrix}A_1\\B_1\\C_1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}A_2\\B_2\\C_2\end{pmatrix}$ пропорциональны, значит уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 имеют вид $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$. При $D_2 = \lambda D_1$ эти уравнения пропорциональны, значит задают одну и ту же плоскость. Иначе система из этих двух уравнений имеет пустое множество решений, т.е. плоскости σ_1 и σ_2 не имеют общих точек.

[3]Как увидим далее, в предложении 2.4, для ПДСК сопутствующий вектор является нормальным к плоскости.

[4]В ПДСК это утверждение находится в согласии с теоремой 5.3 главы 1: $\mathbf{d} = \pm[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$.

В случае $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2$ предъявленный в формулировке вектор $\mathbf{d}$ ненулевой. Непосредственно проверяется, что его координаты $\delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ удовлетворяют равенствам $A_i\delta_1 + B_i\delta_2 + C_i\delta_2 = 0$, $i = 1, 2$ (левая часть представляет собой раскрытие определителя $\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$). Эти равенства, в силу предложения 2.1, означают, что $\mathbf{d} \parallel \sigma_i$, $i = 1, 2$. $\square$

Предложение 2.3 (три плоскости)**.** *Пусть даны три плоскости σ_i, заданные общими уравнениями $L_i = 0$ вида (2.7), $i = 1, 2, 3$. Плоскости σ_1, σ_2 и σ_3 пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ некомпланарны $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$.*

$\triangleright$ В случае $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ векторы $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ компланарны. По предложению 2.2, в этом случае $\sigma_1 \parallel \sigma_2$ или $\sigma_1 = \sigma_2$, поэтому σ_1, σ_2 и σ_3 не могут пересекаться в одной точке.

Далее считаем, что $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2$. По предложению 2.2, в этом случае $\sigma_1 \cap \sigma_2$ — это прямая с направляющим вектором $\mathbf{d} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$, где $\delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. В таком случае плоскости σ_1, σ_2 и σ_3 пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow$ $\mathbf{d} \nparallel \sigma_3$. В силу предложения 2.1, последнее условие переписывается как $A_3\delta_1 + B_3\delta_2 + C_3\delta_3 \neq 0$. Но выражение $A_3\delta_1 + B_3\delta_2 + C_3\delta_3$ равно $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$. $\square$

Линейное неравенство

От некоторой точки плоскости σ, заданной общим уравнением $L = 0$, отложим вектор $\mathbf{n}$. То полупространство относительно σ, в котором лежит конец этого вектора (по следствию из предложения 2.1 он не будет лежать в σ), объявим положительным, а другое полупространство — отрицательным. (Если изменить знак в уравнении, то есть рассматривать уравнение $-L = 0$, то положительное и отрицательное полупространства поменяются ролями.)

Теорема 2.1. *Точка $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ лежит в положительной полуплоскости относительно плоскости σ, заданной уравнением $L = 0$ вида (2.7) $\Leftrightarrow$ $L(x_1, y_1, z_1) > 0$.*

$\triangleright$ Через точку M_1 проведем прямую, параллельную вектору $\mathbf{n}$. Пусть эта прямая пересекает плоскость σ в точке $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Пусть $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda\mathbf{n}$, тогда $x_1 = x_0 + \lambda A$, $y_1 = y_0 + \lambda B$, $z_1 = z_0 + \lambda C$. Очевидно, M_1 лежит в положительном полупространстве $\Leftrightarrow$ $\lambda > 0$.

С другой стороны, $L(x_1, y_1, z_1) > 0 \;\Leftrightarrow\; A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D > 0 \;\Leftrightarrow\; (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + \lambda(A^2 + B^2 + C^2) > 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(A^2 + B^2 + C^2) > 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda > 0$. $\square$

Пучок плоскостей

Определение. Пучком плоскостей с осью l называется множество плоскостей, проходящих через прямую l.

Пучок обозначаем $\Pi(l)$. Пучок определяется двумя пересекающимися плоскостями.

Теорема 2.2. *Пусть $L_i = 0$ — общие уравнения вида (2.7) плоскостей σ_i, $i = 1, 2, 3$, при этом плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются по прямой l. Плоскость σ_3 принадлежит пучку $\Pi(l) \Leftrightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2$ такие, что $L_3 = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$.*

$\triangleright$ $\boxed{\Leftarrow}$ Для любой точки $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, лежащей на прямой l, выполнено $L_1(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $L_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \Rightarrow \lambda_1 L_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 L_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \Rightarrow L_3(x_0, y_0, z_0) = 0 \Rightarrow M_0 \in \sigma_3$. Тем самым, $l \subset \sigma_3$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Рассмотрим точку $M_3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$, не лежащую на прямой l, но лежащую в плоскости σ_3. Положим $\mu_1 = L_2(x_3, y_3, z_3)$, $\mu_2 = -L_1(x_3, y_3, z_3)$. Хотя бы одно из чисел μ_1, μ_2 ненулевое, иначе $M_3 \in \sigma_1 \cap \sigma_2 = l$ с противоречием с выбором точки M_3. Положим $L_3' = \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2$. Уравнение $L_3' = 0$ линейное (имеет вид (2.7)) с коэффициентами $\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$, $\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2$, $\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2$ при x, y, z. Хотя бы один из коэффициентов не равен 0, поэтому уравнение $L_3' = 0$ задает некоторую плоскость σ_3'. Согласно первой части доказательства, плоскость σ_3' содержит прямую l. Кроме того, $L_3'(x_3, y_3, z_3) = \mu_1 L_1(x_3, y_3, z_3) + \mu_2 L_2(x_3, y_3, z_3) = \mu_1(-\mu_2) + \mu_2\mu_1 = 0$, поэтому плоскость σ_3' проходит и через точку M_3. Значит, σ_3' совпадает с σ_3. $\square$

Нормальное уравнение плоскости и метрические задачи

С этого момента до конца параграфа предполагаем, что ДСК прямоугольная.

Предложение 2.4. *Пусть σ — плоскость, заданная общим уравнением $L = 0$. Тогда $\mathbf{n} \perp \sigma$.*

$\triangleright$ Согласно предложению 2.1, для любого направляющего вектора $\mathbf{a}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ плоскости σ верно равенство $A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0$. Поскольку мы рабатаем в ПДКС, это равенство означает, что $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}$. Итак, $\mathbf{n}$ ортогонален любому направляющему вектору, а значит ортогонален плоскости σ. $\square$

Таким образом, в ПДСК сопутствующий вектор является перпендикулярным, или *нормальным* к плоскости.

Общее уравнение плоскости (в силу теоремы 3.2 главы 1) приобретает вид

$$\boxed{(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0}. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) называется *нормальным уравнением* плоскости.

Выведем формулы для решения основных метрических задач.

Предложение 2.5 (расстояние от точки до плоскости)**.** *Пусть σ — плоскость, заданная нормальным уравнением (2.8) или общим уравнением (2.7) в ПДСК. Тогда расстояние от точки $M_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ до плоскости σ равно $\boxed{\rho(M_1, \sigma) = \dfrac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D|}{|\mathbf{n}|}}$ или $\boxed{\rho(M_1, \sigma) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$ соответственно.*

$\triangleright$ Выберем в плоскости σ произвольную точку M_0, заданную радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, так что $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) + D = 0$. Заметим, что $\rho(M_1, \sigma)$ равно длине проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на нормаль: $\rho(M_1, \sigma) = |\operatorname{pr}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{M_0M_1}| = |\operatorname{pr}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)| = \left|\dfrac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right| = \dfrac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|^2} \cdot |\mathbf{n}| = \dfrac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D|}{|\mathbf{n}|}$.
$\square$

Задача поиска угла между плоскостями сводится к задачи отыскании угла между их нормальными векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$.

§ 3. Прямая в пространстве

Способы задания

Так же, как и прямая на плоскости, прямая l в пространстве однозначно задается точкой $M_0 \in l$ и ненулевым *направляющим* вектором $\mathbf{a}$. Повторяя рассуждения для прямой на плоскости, выводим векторно-параметрическое уравнение

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}}. \tag{2.9}$$

Это уравнение имеет координатную запись $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \\ z = z_0 + \alpha_3 t \end{cases}}$, где $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ — координатные столбцы точек M, M_0 и вектора $\mathbf{a}$ соответственно.

При $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ уравнение (2.9) легко переводится в каноническое уравнение

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3}}.^5 \tag{2.10}$$

На самом деле каноническое уравнение (2.10) представляет собой систему двух линейных уравнений. Геометрически это означает, что прямая является пересечением двух плоскостей. Вообще, прямую в пространстве можно задать системой двух непропорциональных линейных уравнений $\boxed{\begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \end{cases}}$.

Уравнение (2.9) равносильно коллинеарности $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{a}$, а это условие можно переписать с помощью векторного произведения (см. предложение 5.2 главы 1): $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ или $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$. Положив $\mathbf{b} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$, мы получаем задание прямой с помощью векторного произведения

$$\boxed{[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}}, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой, а $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$. Наоборот, при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ уравнение (2.11) задает прямую. Действительно, положив $\mathbf{r}_0 = \dfrac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$, имеем (с учетом предложения 5.3 главы 1 и того, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$) $[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|^2}[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{a}] = -\dfrac{1}{|\mathbf{a}|^2}[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = -\dfrac{1}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{b}|\mathbf{a}|^2) = \mathbf{b}$. Таким образом, уравнение (2.11) приводится к виду $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$, или $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$, что равносильно $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{a}$.

[5] Иногда запись (2.10) допускают и в случае $\alpha_i = 0$ для некоторого i.

Взаимное расположение двух прямых

Предложение 3.1. *Пусть две прямые l_1 и l_2 в пространстве заданы векторно-параметрическими уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}_2$. Тогда верны следующие утверждения.*

В случае $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$:

$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \nparallel \mathbf{a}_1 \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$;

$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{a}_1 \Leftrightarrow l_1 = l_2$.

В случае $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$:

$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *компланарны* $\Leftrightarrow l_1$ *и* l_2 *пересекаются;*

$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *некомпланарны* $\Leftrightarrow l_1$ *и* l_2 *скрещиваются.*

$\triangleright$ Следует из геометрического смысла векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2$. $\square$

Взаимное расположение прямой и плоскости (принадлежность, пересечение в одной точке или параллельность) можно определить, используя предложение 2.1.

Метрические задачи

Предложение 3.2 (расстояние от точки до прямой)**.** *Пусть l — прямая, заданная уравнением (2.9). Тогда расстояние от точки M_1, заданной радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ до прямой l равно* $\boxed{\rho(M_1, l) = \dfrac{|S_\pm(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})|}{|\mathbf{a}|}}$ *или* $\boxed{\rho(M_1, l) = \dfrac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}}$.[6]

$\triangleright$ Построим на векторах $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ параллелограмм. Тогда его высота к основанию длины $|\mathbf{a}|$ равна $\rho(M_1, l)$ и нужная формула получается из формулы площади параллелограмма. $\square$

Предложение 3.3 (расстояние между скрещивающимися прямыми)**.** *Пусть l_1, l_2 — скрещивающиеся прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}_2$ ($\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$). Тогда расстояние между ними равна* $\boxed{\rho(l_1, l_2) = \dfrac{|V_\pm(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|S_\pm(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}}$ *или* $\boxed{\rho(l_1, l_2) = \dfrac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}}$.[7]

$\triangleright$ Построим на векторах $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ параллелепипед. Этот параллелепипед имеет грань площади $|S_\pm(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|$, а высота к этой грани равна $\rho(l_1, l_2)$. Тогда нужная формула получается из формулы объема параллелепипеда. $\square$

Задача поиска угла между прямыми сводится к задачи отыскании угла между их направляющими. А чтобы найти угол между прямой и плоскостью, достаточно найти угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости.

[6] Имеется и другой вид формулы $\rho(M_1, l) = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 - \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|$.

[7] Заметим, что $\rho(l_1, l_2) = 0$ соответствует случаю пересекающихся прямых — см. предложение 3.1. Другой вид формулы $\rho(l_1, l_2) = |\,\mathrm{pr}_{[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)|$.