Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский физико-технический институт
Кафедра высшей математики

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методические указания

Москва 2007

Составитель: П.А. Кожевников

Рецензент:
Доктор педагогических наук, проф. *М.И. Шабунин,*

УДК 517

Исследование сходимости несобственных интегралов: Методические указания / Сост. П.А. Кожевников. – М.: МФТИ, 2007.

В пособии изложены основные методы исследования сходимости несобственных интегралов и разобраны характерные примеры. Оно может быть полезно как студентам в процессе изучения математического анализа, так и преподавателям для подготовки семинарских занятий по рассматриваемой теме.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

На практических занятиях во втором семестре I курса МФТИ тема «Сходимость несобственных интегралов» считается одной из наиболее трудных. Для успешного решения упражнений по этой теме требуется как достаточно большой запас теоретических сведений (знание определений, признаков сходимости и т. д.), так и умение правильно ими распорядиться, подобрать метод, работающий в конкретной ситуации.

Цель настоящего пособия — в компактной форме изложить основные методы исследования сходимости и проиллюстрировать их на характерных примерах. Сборник состоит из введения и двух частей. В первой части формулируются признаки сравнения и разбираются примеры исследования сходимости интегралов от знакопостоянных функций. Во второй части проводится исследование условной и абсолютной сходимости интегралов от знакопеременных функций. Разделение на две части подчеркивает различие в методах исследования — иногда приемы, работающие в первой части, совершенно неприменимы во второй. Каждая из частей завершается набором задач для самостоятельного решения, значительная часть которых взята из экзаменационных контрольных работ по математическому анализу второго семестра I курса МФТИ.

Приемы, описанные в пособии, были почерпнуты из классических курсов, читаемых на Физтехе (см. список литературы), и из собственного опыта преподавания (некоторые идеи появились в процессе совместной работы со студентами на семинарских занятиях). Составитель также благодарен преподавателям кафедры высшей математики, которые с радостью делились знаниями и опытом. Особенно полезными оказались рекомендации М. И. Шабунина и методические материалы, разработанные Л. И. Коваленко.

Введение

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$ (где b может быть конечным числом или $+\infty$), и для любого $\xi \in (a,b)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,\xi]$. Для такой функции рассмотрим символ *несобственного интеграла* с особенностью в точке b

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Несобственный интеграл I называется *сходящимся*, если существует конечный предел $\lim\limits_{\xi\to b-0} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx$. В противном случае I называется *расходящимся*.

Если $f(x)$ определена на полуинтервале $(a,b]$ (где a может быть конечным числом или $-\infty$), то можно говорить о сходящемся или расходящемся несобственном интеграле $(*)$ с особенностью в точке a. Если же $f(x)$ определена на интервале (a,b) (где a и b могут быть конечными числами или $\pm\infty$), и для любых ξ, $\eta \in (a,b)$, $\xi < \eta$, интегрируема по Риману на отрезке $[\xi,\eta]$, то рассматривается несобственный интеграл $(*)$ с двумя особенностями в точках a и b. В этом случае I называется сходящимся, если для некоторого $c \in (a,b)$ каждый из интегралов $I_1 = \int\limits_a^c f(x)\,dx$, $I_2 = \int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходится. Последнее определение не зависит от выбора точки c.

Замечание. Пусть интеграл $(*)$ имеет особенность в точке b. Если зафиксировать $c \in [a,b)$, то из простейших свойств интеграла Римана (см., напр., [5], § 35) вытекает, что $\int\limits_c^\xi f(x)\,dx = \int\limits_a^\xi f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx$, поэтому сходимость интеграла (∗) равносильна сходимости интеграла $I_c = \int\limits_c^\xi f(x)\,dx$.

Будем использовать следующие основные свойства несобственного интеграла, вытекающие из свойств интеграла Римана: свойство линейности, формулу Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, формулу замены переменной (см. [5], § 38).

§ 1. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Рассмотрим несобственный интеграл $(*)$ с особенностью в точке b. Скажем, что функция $f(x)$ *знакопостоянна* в окрестности особенности, если найдется такое $c \in (a, b)$, что либо $\forall x \in (c, b) \to f(x) \geqslant 0$, либо $\forall x \in (c, b) \to f(x) \leqslant 0$. Согласно сделанному во введении замечанию, исследование сходимости интегралов от функций, знакопостоянных в окрестности особенности, сводится к вопросу о сходимости интегралов от неотрицательных функций.

Укажем вначале наиболее важные для дальнейшего примеры 1.1 и 1.2.

Пример 1.1. Найти все α, при которых сходится интеграл

$$\text{а) } I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \text{б) } I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

$\triangle$ а) Пусть $\xi \in (1; +\infty)$. Если $\alpha \neq 1$, то $\int\limits_1^\xi \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^\xi = \frac{\xi^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$. Если же $\alpha = 1$, то $I = \int\limits_1^\xi \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^\xi = \ln \xi$. Поэтому конечный предел $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \int\limits_1^\xi \frac{dx}{x^\alpha}$ существует тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

б) С помощью замены $t = \frac{1}{x}$ интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ преобразуется к интегралу $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$, который сходится согласно пункту а) тогда и только тогда, когда $2-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$.

Ответ: а) $\alpha > 1$; б) $\alpha < 1$. ▲

Пример 1.2. Найти все α, β, при которых сходится интеграл

$$\text{а) } I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}, \text{ б) } I = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}.$$

△ а) Решение см., напр., в [5], пример 11 из § 38.

б) Делая замену $t = \dfrac{1}{x}$, сведем задачу к исследованию интеграла $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha} \ln^\beta t}$ и применим результат пункта а).

Ответ: а) $\alpha > 1$ (при любом β), $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$; б) $\alpha < 1$ (при любом β), $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$. ▲

Основным инструментом в исследовании несобственных интегралов от знакопостоянных функций являются следующие *признаки сравнения.*

Пусть

$$I_1 = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \ I_2 = \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

— два несобственных интеграла (с особенностью, скажем, в точке b).

П1. Пусть $\forall x \in [a, b)$ выполняется неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда а) если I_2 сходится, то I_1 также сходится,

б) если I_1 расходится, то I_2 также расходится.

П2. Если $\forall x \in [a, b)$ выполнено $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$, то I_1 и I_2 сходятся или расходятся одновременно.

(Напомним (см., напр., [5], § 13), что функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to b-0$ (обозначение: $f(x) \sim g(x)$), если найдется такая функция $h(x)$, что $\lim\limits_{x \to b-0} h(x) = 1$ и $f(x) = h(x)g(x)$. Если $g(x)$ строго положительна, то условие эквивалентности означает, что существует предел $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, равный 1.)

На практике для исследования сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции удобно при помощи замены переменной сводить его к интегралу с особенностью в нуле или в $+\infty$, а далее при помощи признака сравнения П2 сводить исследование полученного интеграла к одному из «эталонов», рассмотренных в примерах 1.1, 1.2. Для установления эквивалентности $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ или $f(x) \sim \sim \dfrac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ часто используются разложения в ряд Тейлора. Если подынтегральная функция $f(x)$ представлена в виде дроби $\dfrac{g_1(x)g_2(x)\ldots g_k(x)}{h_1(x)h_2(x)\ldots h_l(x)}$, то каждый сомножитель g_i, h_j достаточно разложить только до «главного члена», т. е. до минимальной степени, при которой коэффициент в формуле Тейлора ненулевой.

Пример 1.3. Найти все α, при которых сходится интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^6)^\alpha \, dx.$$

$\triangle$ Подынтегральная функция $f(x)$ положительна на интервале $(0,1)$. Интеграл I имеет особенность в точках ± 1, поэтому представим I в виде $I = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx$, $I_2 = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx$. Так как функция $f(x)$ четная, достаточно исследовать только I_1.

Заменой $t = x+1$ перенесем особенность в точку $t = 0$, интеграл I_1 примет вид

$$\widetilde{I_1} = \int\limits_0^1 (1-(1-t)^6)^\alpha \, dx.$$

По формуле Тейлора при $t \to 0$ получаем

$$1-(1-t)^6 = 1-(1-6t+o(t)) \sim 6t.$$

Поэтому

$$(1-(1-t)^6)^\alpha \sim ct^\alpha = \frac{c}{t^{-\alpha}}$$

для некоторой ненулевой константы c. Согласно признаку сравнения П2, из примера 1.1 вытекает, что $\widetilde{I_1}$ сходится тогда и только тогда, когда $-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$.

Ответ: $\alpha > -1$. $\blacktriangle$

Пример 1.4. Найти все α, при которых сходится интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \ln^\alpha \operatorname{ch} x \cdot \arcsin \frac{2x}{3+x^2}\, dx.$$

$\triangle$ Подынтегральная функция $f(x)$ положительна на интервале $(0,+\infty)$. Интеграл I имеет особенность в точках 0, $+\infty$, поэтому представим I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

а) Исследуем I_1. При $x \to 0$ (с учетом того, что $\dfrac{2x}{3+x^2} \to 0$) имеем

$$\ln(\operatorname{ch} x) = \ln(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2},$$

$$\arcsin\frac{2x}{3+x^2} \sim \frac{2x}{3+x^2} \sim \frac{2}{3}x.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha} \cdot \frac{2}{3}x \sim \frac{c}{x^{-2\alpha-1}}$$

для ненулевой константы c. По признаку сравнения П2 I_1 сходится тогда и только тогда, когда $-2\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha > > -1$.

б) Исследуем I_2. При $x \to +\infty$ имеем

$$\ln(\operatorname{ch} x) = \ln\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \ln\left(e^x \cdot \frac{1+e^{-2x}}{2}\right) =$$
$$= x + \ln\frac{1+e^{-2x}}{2} = x + o(x) \sim x.$$

(Здесь равенство $\ln\dfrac{1+e^{-2x}}{2} = o(x)$ следует из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{1+e^{-2x}}{2} = \ln\dfrac{1}{2}$.)

Далее, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin\dfrac{2x}{3+x^2} = 0$,

$$\arcsin\frac{2x}{3+x^2} \sim \frac{2x}{3+x^2} \sim \frac{2}{\frac{3}{x}+x} \sim \frac{2}{x}.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim x^\alpha \cdot \frac{2}{x} \sim \frac{2}{x^{1-\alpha}}.$$

Итак, I_2 сходится тогда и только тогда, когда $1-\alpha > > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$.

Ответ: $\alpha \in (-1; 0)$. ▲

Пример 1.5. Найти все α, при которых сходится интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha}(x^2 - x^3)\,dx}{(\ln x)^2 \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{2\alpha - 1}}.$$

△ Подынтегральная функция $f(x)$ положительна при $x \in (0; 1)$. Интеграл I имеет особенность в точках 0 и 1, поэтому представим I в виде $I = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx$, $I_2 = \int\limits_{1/2}^1 f(x)\,dx$.

а) Исследуем I_1. При $x \to 0$:

$$\operatorname{arctg}(x^2 - x^3) \sim x^2 - x^3 = x^2(1-x) \sim x^2,$$

$$\cos \frac{\pi x}{2} \sim 1.$$

Поэтому

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{-2\alpha}(\ln x)^2}.$$

Согласно примеру 1.2, I_1 сходится тогда и только тогда, когда $-2\alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow \alpha \geqslant -\frac{1}{2}$.

б) Исследуем I_2. Сделав замену $t = 1 - x$, перенесем особенность в точку $t = 0$. Интеграл I_2 примет вид

$$\widetilde{I_2} = \int\limits_0^{1/2} g(t)\,dt = \int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg}^{\,\alpha}(t(1-t)^2)\,dt}{(\ln(1-t))^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right)\right)^{2\alpha - 1}}.$$

При $t \to 0$:

$$\operatorname{arctg}\left(t(1-t)^2\right) \sim t(1-t)^2 \sim t,$$

$$\ln(1-t) = -t + o(t) \sim -t,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right) = \sin\frac{\pi t}{2} \sim \frac{\pi t}{2}.$$

Отсюда

$$g(t) \sim \frac{ct^\alpha}{t^2 \cdot t^{2\alpha-1}} \sim \frac{c}{t^{\alpha+1}}$$

для некоторой ненулевой константы c. Согласно примеру 1.1, $\widetilde{I}_2$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha + 1 < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha < 0$.

Ответ: $\alpha \in [-1/2; 0)$. ▲

Иногда цепочка эквивалентостей для функции может оказаться разной в зависимости от параметра α. В следующем примере это происходит из-за того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}$ равен соответственно $+\infty$, 1, 0 при $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.

Пример 1.6. Найти все α, при которых сходится интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x} + x^{3/4}} \sqrt{e^{\alpha x} - 1 - \alpha x}\, dx.$$

△ Заметим, что при $\alpha = 0$ подынтегральная функция $f(x) = 0$ для любого $x \in (0, +\infty)$, поэтому I сходится.

Пусть $\alpha \neq 0$. Подынтегральная функция $f(x)$ положительна на интервале $(0, +\infty)$. Интеграл I имеет особенность в точках 0, $+\infty$; $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)\, dx, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

а) Исследуем I_1. При $x \to 0$:

$$\sqrt{x} + x^{3/4} = \sqrt{x}(1 + x^{1/4}) \sim \sqrt{x},$$
$$e^{\alpha x} - 1 - \alpha x = \left(1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(\frac{\alpha^2 x^2}{2})\right) - 1 - \alpha x \sim \frac{\alpha^2 x^2}{2}.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim c \cdot \frac{x^\alpha}{x^{1/2}} \cdot x \sim \frac{c}{x^{-\alpha-1/2}}$$

для ненулевой константы c. По признаку сравнения П2 I_1 сходится тогда и только тогда, когда $-\alpha - 1/2 < 1 \Leftrightarrow \alpha > > -3/2$.

б) Исследуем I_2. При $x \to +\infty$ имеем

$$\sqrt{x} + x^{3/4} = x^{3/4}(1 + x^{-1/4}) \sim x^{3/4},$$

Далее, при $\alpha > 0$:

$$e^{\alpha x} - 1 - \alpha x \sim e^{\alpha x},$$

а при $\alpha < 0$:

$$e^{\alpha x} - 1 - \alpha x \sim -\alpha x.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x/2}}{x^{3/4-\alpha}} & \text{при } \alpha > 0, \\ \dfrac{c}{x^{1/4-\alpha}}, & \neq 0, \text{ при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Как известно, при произвольном μ и $\lambda > 0$ предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\lambda x}}{x^\mu}$ равен 0 (доказывается, например, при помощи правила Лопиталя). Поэтому если $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, следовательно, интеграл I_2 расходится. Если же $\alpha < 0$, то I_2 сходится тогда и только тогда, когда $1/4 - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < < -3/4$.

Ответ: $\alpha \in (-3/2; -3/4) \cup \{0\}$. ▲

Упражнения

Исследовать несобственные интегралы на сходимость:

1.1. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Ответ: расходится.

1.2. $$\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x}{(x\ln x)^2}\,dx.$$

Ответ: сходится.

1.3. $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{P_n(x)}{(Q_m(x))^\alpha}\,dx,$$

где P_n, Q_m — многочлены соответственно степени n и m, причем $Q_m(x) > 0$ при $x > 0$.

Ответ: сходится $\Leftrightarrow \alpha > \dfrac{n+1}{m}$.

1.4. $$\int\limits_a^{b} (x-a)^\alpha (b-x)^\beta\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow \alpha,\ \beta > -1$.

1.5. $$\int\limits_4^{+\infty} \frac{1}{x\ln x\ln^\alpha(\ln x)}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

1.6. $$\int\limits_0^{1} \left(\frac{1}{x^2}-1\right)^\alpha \sin^2 \pi x\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

1.7. $$\int\limits_0^{1} \left(\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x}-x)}{e^x-1}\right)^\alpha\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -1 < \alpha < 2$.

1.8. $$\int\limits_0^{+\infty} (x + x^2)^\alpha \ln(x + e^{-x})\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

1.9. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^\alpha}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < \alpha < 3$.

1.10. $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^\alpha x}{\ln^2(e^{\sqrt{x}} - \cos x)}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -1 \leqslant \alpha < 0$.

1.1. $$\int\limits_0^{+\infty} |\sqrt[3]{1 + 3x} - \operatorname{ch} x|^\alpha\ \arcsin \frac{x}{1 + x^3}\,dx.$$

1.11. $$\int\limits_0^{+\infty} \ln^\alpha(e^x - x)\ \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2 + \ln^2 x}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant \alpha < -1$.

1.12. $$\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin^\alpha(x^3 - x^4)}{(\ln x)^2(\sin \pi x)^{2\alpha - 1}}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -2 \leqslant \alpha < 0$.

1.13. $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^6}{\operatorname{ch}^\alpha 6x(\sqrt[4]{1 + x^6} - 1)^\alpha}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow 1 \leqslant \alpha < \dfrac{7}{6}$.

1.14. $$\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin\frac{x^2}{1+x^3}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < 0$.

1.15. $$\int\limits_1^{+\infty} (x^3-1)^\alpha \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+x}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < \alpha < -\dfrac{1}{9}$.

1.16. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x \operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^\alpha}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$.

1.17. $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x - 1)}{(e^x-1)(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})^\alpha}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 8$.

1.18. $$\int\limits_0^{+\infty} \left(\sqrt{1+2x}-\cos x\right)^\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2+x^4}\right)\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < 2$.

1.19. $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(x-\operatorname{sh} x)x^{\frac{3\alpha}{2}}}{(e^x-1)\sqrt{1+x^\alpha}}\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < -\dfrac{2}{3}$.

Указание. Пусть $g(x) = \sqrt{1+x^\alpha}$. Если $\alpha \geqslant 0$, то при $x \to 0$: $g(x) \sim 1$, при $x \to +\infty$: $g(x) \sim x^{\frac{\alpha}{2}}$. Если $\alpha < 0$, то при $x \to 0$: $g(x) \sim x^{\frac{\alpha}{2}}$, при $x \to +\infty$: $g(x) \sim 1$.

1.20. $$\int\limits_0^{+\infty} \left(\sqrt{x^2+x^3}-x^{3/2}\right)^\alpha \ln(e^{\alpha x^2}-\alpha x^2)\,dx.$$

Ответ: сходится $\Leftrightarrow \alpha \in (-5,-2)\cup\{0\}$.

§ 2. Несобственный интеграл от знакопеременных функций. Абсолютная и условная сходимость интегралов

Рассмотрим несобственный интеграл $(*)$ с особенностью в точке b.

Определение. Интеграл I называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\overline{I} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Интеграл I называется *условно сходящимся*, если I сходится, но интеграл $\overline{I}$ расходится.

Интеграл $(*)$ с двумя особенностями в точках a и b считается абсолютно сходящимся, если абсолютно сходятся оба интеграла $\int\limits_a^c |f(x)|\,dx$, $\int\limits_c^b |f(x)|\,dx$ для некоторого $c \in (a, b)$.

В случае знакопостоянной функции $f(x)$ понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны. Если же $f(x)$ *знакопеременная*, т. е. не является знакопостоянной ни на каком интервале (c, b), $a < c < b$, ставится вопрос об исследовании I на абсолютную и условную сходимость.

Из абсолютной сходимости всегда следует сходимость, поэтому для интеграла I имеются три взаимоисключающие возможности: либо I абсолютно сходится, либо I сходится условно, либо I расходится.

Для исследования интеграла I на абсолютную сходимость, т.е. для исследования на сходимость интеграла $\overline{I}$, могут быть применены признаки сравнения из первой части, в то время как для исследования интеграла I от знакопеременной функции эти признаки неприменимы (см., скажем, пример 2.7 ниже).

Для доказательства сходимости используются следующие *признаки Дирихле и Абеля* (см., напр., [6], гл. 8, § 4), дающие достаточные условия сходимости интеграла вида

$$J = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx.$$

Признак Дирихле. Если выполнены следующие три условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

3) функция $g(x)$ монотонна на $[a, +\infty)$,

то интеграл J сходится.

Признак Абеля. Если выполнены следующие три условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится,

2) функция $g(x)$ ограничена на $[a, +\infty)$,

3) функция $g(x)$ монотонна на $[a, +\infty)$,

то интеграл J сходится.

Признак Абеля иногда удобно использовать в форме следующего следствия.

Следствие из признака Абеля. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, +\infty)$, а $g(x)$ — непрерывная и монотонная на $[a, +\infty)$, причем существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = a$, $a \neq 0$.

Тогда интегралы $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\widetilde{I} = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Ясно, что в признаках Дирихле, Абеля, и в следствии из признака Абеля условие монотонности функции на промежутке $[a, +\infty)$ можно заменить на условие монотонности на промежутке $[c, +\infty)$ для некоторого $c \in [a, +\infty)$ (см. замечание во введении).

Сформулируем **критерий Коши** сходимости интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ с особенностью в точке b.

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (a, b) \quad \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \to \left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Для доказательства расходимости интеграла часто удобно использовать отрицание условия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \in (a, b) \quad \exists \xi', \xi'' \in (\delta, b) \to \left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx \right| \geqslant \varepsilon.$$

Если подынтегральная функция представлена в виде суммы нескольких слагаемых, то можно пользоваться следующими утверждениями:

Пусть $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\widetilde{I} = \int\limits_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\,dx$.

C1. Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то интегралы I и $\widetilde{I}$ сходятся или расходятся одновременно.

C2. Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится абсолютно, то I и $\widetilde{I}$

либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Пример 2.1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx.$$

$\triangle$ Интеграл имеет особенность в $+\infty$. Подынтегральная функция $f(x)$ знакопеременная.

а) Пусть $\alpha > 1$. Заметим, что $|f(x)| = |\dfrac{\sin x}{x^\alpha}| \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$. Пользуясь признаком сравнения П1 и примером 1.1, получаем, что I абсолютно сходится.

б) Пусть $\alpha \in (0; 1]$.

1. Положив $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, убеждаемся, что выполнены все условия применимости признака Дирихле, поэтому I сходится.

2. Покажем, что при $\alpha \in (0; 1]$ интеграл I не является абсолютно сходящимся, т.е. что $\overline{I} = \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x^\alpha}|\, dx$ расходится. Заметим, что так как $|\sin x| \leqslant 1$, то

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\right).$$

Интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ расходится, а интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\, dx$ сходится (это доказывается аналогично предыдущему пункту 1). Следовательно, согласно утверждению С1 $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx$ расходится. Отсюда по признаку сравнения

П1 для интегралов от неотрицательных функций получаем расходимость интеграла $\overline{I} = \int\limits_{1}^{+\infty} |\frac{\sin x}{x^{\alpha}}|\, dx$.

в) Докажем, что при $\alpha \leqslant 0$ интеграл I расходится. Для этого убедимся, что выполнено отрицание условия Коши при $\varepsilon = 2$. Для любого $\delta \in (1; \infty)$ возьмем натуральное $n > \frac{\delta}{2\pi}$ и положим $\xi' = 2\pi n$, $\xi'' = 2\pi n + \pi$. Тогда, поскольку на отрезке $[\xi', \xi'']$ функция $\sin x$ неотрицательна и $0 < x^{\alpha} \leqslant 1$, имеем

$$\left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx \right| = \int\limits_{\xi'}^{\xi''} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx \geqslant \int\limits_{\xi'}^{\xi''} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} = 2 = \varepsilon.$$

Ответ: Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0; 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. ▲

Замечание. Другое доказательство сходимости I при $\alpha > 0$ можно получить, применив интегрирование по частям:

$$I = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx = -\frac{\cos x}{x^{\alpha}} \Big|_{1}^{+\infty} - \alpha \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\, dx = \cos 1 - J,$$

где интеграл J сходится абсолютно по признаку П1, так как $|\frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha+1}}$.

Пример 2.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x}{x^{\alpha}}.$$

△ Интеграл имеет особенность в $+\infty$. Аналогично примеру 2.1 доказываем, что интеграл от функции $\frac{\cos x}{x^{\alpha}}$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0; 1]$ и расходится при $\alpha \leqslant 0$. Поскольку $\operatorname{arctg} x$ — монотонная функция, и $\lim\limits_{x \to +\infty} = \dfrac{\pi}{2}$, по следствию из признаку Абеля для сходимости I вытекает тот же самый результат.

Ответ: Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0; 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. ▲

Пример 2.3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sin(3x-6)}{(x - \ln(x-1) - 2)^{\alpha}}\, dx.$$

△ Заменой $t = x - 2$ сведем I к интегралу

$$\widetilde{I} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 3t}{(t - \ln(1+t))^{\alpha}}\, dt = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin 3t}{(t - \ln(1+t))^{\alpha}}\, dt$ и $I_2 = \displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin 3t}{(t - \ln(1+t))^{\alpha}}\, dt$ — интегралы с особенностями в 0 и $+\infty$.

I. При $t \in (0, \pi)$ подынтегральная функция неотрицательна (в силу известного неравенства $t \geqslant \ln(1+t)$), поэтому особенность в нуле исследуется методами, рассмотренными в первой части:

$$\frac{\sin 3t}{(t - \ln(1+t))^{\alpha}} \sim \frac{3t}{\left(t - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right)^{\alpha}} \sim \frac{c}{t^{2\alpha - 1}},$$

поэтому I_1 сходится $\Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$.

II. Исследуем особенность в $+\infty$. Представим подынтегральную функцию в виде $\dfrac{\sin 3t}{t^{\alpha}} g(t)$, где $g(t) = \left(1 - \dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)^{-\alpha}$. Функция $h(t) = 1 - \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ имеет предел 1 при $t \to +\infty$ и монотонна при $t > e-1$, поскольку $h'(t) = \dfrac{\ln(1+t)-1}{t^2}$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(t) = 1$ и $g(t)$ монотонна при $t > e-1$. По следствию из признака Абеля получаем, что в $+\infty$ сходимость и ее тип (условная, абсолютная) для интеграла I_2 такие же, как для интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin 3t}{t^\alpha}\,dt$, который сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0,1]$ и расходится при $\alpha < 0$, что доказывается аналогично примеру 2.1.

Из результатов пунктов I и II сразу вытекает ответ.

Ответ: Сходится условно при $\alpha \in (0;1)$, расходится при всех остальных α. ▲

Пример 2.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{e^{\alpha x} + \ln x}.$$

△ Интеграл имеет особенность в $+\infty$. Подынтегральная функция знакопеременная.

а) Пусть $\alpha > 0$. Тогда найдется такое $c > 1$, что $e^{\alpha x} \geqslant x^2$ при $x \geqslant c$. Отсюда

$$\left|\frac{\cos^3 x}{e^{\alpha x} + \ln x}\right| \leqslant \frac{1}{e^{\alpha x}} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

при $x \geqslant c$, поэтому согласно признаку П1 I абсолютно сходится.

б) Пусть $\alpha \leqslant 0$.

1. Так как $f(x) = \cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$, то $f(x)$ имеет ограниченную первообразную. (По-другому это можно объяснить, заметив, что первообразная $F(x) = \int\limits_1^x \cos^3 t\,dt$

является периодической с периодом 2π, так как интеграл от $f(x)$ по любому отрезку длины 2π равен 0. Это соображение годится, если показатель 3 заменить на любое нечетное число.)

Далее, при $x \to +\infty$ выполнено $e^{\alpha x} + \ln x \sim \ln x$, поэтому $g(x) = \dfrac{1}{e^{\alpha x} + \ln x} \to 0$.

Кроме того, найдется такое $c > 1$, что $e^{-\alpha x} > |\alpha| x$ при $x \geqslant c$, откуда $(e^{\alpha x} + \ln x)' = \dfrac{1}{x} + \alpha e^{\alpha x} > 0$ при $x \geqslant c$, поэтому $g(x)$ монотонно убывает при $x > c$.

Все условия признака Дирихле выполнены, следовательно I сходится.

2. Покажем, что при $\alpha \leqslant 0$ интеграл I не является абсолютно сходящимся. Запишем оценку

$$\left|\frac{\cos^3 x}{e^{\alpha x} + \ln x}\right| \geqslant \frac{\cos^4 x}{e^{\alpha x} + \ln x} =$$
$$= \frac{(1+\cos 2x)^2}{4(e^{\alpha x} + \ln x)} = \frac{1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4(e^{\alpha x} + \ln x)} =$$
$$= \frac{3}{8(e^{\alpha x} + \ln x)} + \frac{\cos 2x}{2(e^{\alpha x} + \ln x)} + \frac{\cos 4x}{8(e^{\alpha x} + \ln x)}.$$

Интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x} + \ln x}\, dx$ расходится (признак П2 для знакопостоянных подынтегральных функций), а интегралы $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{e^{\alpha x} + \ln x}\, dx$ и $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{e^{\alpha x} + \ln x}\, dx$ сходятся (по признаку Дирихле, это доказывается аналогично предыдущему пункту 1). Следовательно, из утверждений С1 и П1 вытекает расходимость интеграла $\overline{I} = \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos^3 x}{e^{\alpha x} + \ln x}\right| dx$.

Ответ: Сходится абсолютно при $\alpha > 0$, сходится условно при $\alpha \leqslant 0$. ▲

Пример 2.5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh}^\alpha x}{x^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

△ Интеграл I имеет особенность в нуле. Заменой $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ перенесем особенность в $+\infty$, при этом исследование I сводится к исследованию

$$\widetilde{I} = \int\limits_1^{+\infty} = t \operatorname{sh}^\alpha \frac{1}{t^2} \sin t\, dt.$$

Представим подынтегральную функцию в виде $\dfrac{\sin t}{t^{2\alpha-1}} g(t)$, где $g(t) = \left(t^2 \operatorname{sh} \dfrac{1}{t^2}\right)^\alpha$. Ясно, что $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 1$.

Для функции $h(u) = \dfrac{\operatorname{sh} u}{u}$ найдется такое $\delta > 0$, что $h(u)$ возрастает при $u \in (0, \delta)$. В самом деле, $h'(u) = u^{-2}(u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)$, что при $u \to 0$ равно $u^{-2}\left(u(1 + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)) - (u + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3))\right) = \dfrac{u}{3}(1 + o(1))$. Теперь ясно, что достаточно выбрать такое $\delta > 0$, что при $u \in (0, \delta)$ верно неравенство $|o(1)| < 1$.

Далее, положив $u = \dfrac{1}{t^2}$, приходим к тому, что функция $t^2 \operatorname{sh} \dfrac{1}{t^2}$ убывает при $t > c = \dfrac{1}{\delta^2}$. Значит, при $t > c$ функция $g(t)$ монотонна.

По следствию из признака Абеля получаем, что в $+\infty$ результаты исследования сходимости интеграла $\widetilde{I}$ совпадают с соответствующими результатами для интеграла

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2\alpha-1}}\, dt$, который сходится абсолютно при $2\alpha - 1 > 1$, сходится условно при $2\alpha - 1 \in (0, 1]$, и расходится при $2\alpha - 1 < 0$, что доказано в примере 2.1.

Ответ: Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. ▲

Пример 2.6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_2^{+\infty} x^\alpha \cos(x \ln x)\, dx.$$

△ Интеграл имеет особенность в $+\infty$. Подынтегральная функция $f(x)$ знакопеременная.

а) Поскольку $|f(x)| = |x^\alpha \cos(x \ln x)| \leqslant \frac{1}{x^{-\alpha}}$, то I абсолютно сходится при $-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < -1$.

б) 1. Пусть $\alpha \leqslant 0$. Докажем, что I сходится. После замены $z = x \ln x$ можно попытаться применить признак Дирихле, однако неудобство состоит в том, что обратная замена не задается явно. Вместо замены выполним следующую «имитацию» замены.

Заметим, что в качестве аргумента косинуса выступает монотонная непрерывно дифференцируемая функция $h(x) = x \ln x$. Домножим и разделим $f(x)$ на $h'(x) = 1 + \ln x$, интеграл I примет вид

$$I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{x^\alpha (1 + \ln x) \cos(x \ln x)}{1 + \ln x}\, dx.$$

Положим $f(x) = (1 + \ln x) \cos(x \ln x)$, $g(x) = \frac{x^\alpha}{1 + \ln x}$. Функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = h'(x)\cos(h(x))$, поэтому является производной ограниченной функции $F(x) = \sin(h(x))$.

Заметим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Кроме того, при $\alpha \leqslant 0$ функция $g(x)$ убывает, так как $x^{-\alpha}(1+\ln x)$ возрастает (как произведение положительных монотонных функций). Тем самым, при $\alpha \leqslant 0$ все условия применимости признака Дирихле выполнены, следовательно I сходится.

2. Покажем, что при $\alpha \in [-1; 0]$ интеграл I не является абсолютно сходящимся. Оценим

$$|x^\alpha \cos(x\ln x)| \geqslant x^\alpha \cos^2(x\ln x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{-\alpha}} - x^\alpha \cos(2x\ln x)\right).$$

Интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}}\,dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_2^{+\infty} x^\alpha \cos(2x\ln x)\,dx$ сходится (это доказывается аналогично предыдущему пункту 1). Из утверждений П1 и С1 получаем, что I не является абсолютно сходящимся.

в) При $\alpha > 0$ докажем отрицание критерия Коши для $\varepsilon = 1$. Снова используем запись I в виде $I = \int\limits_2^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. Из правила Лопиталя следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, поэтому $\exists c\,\forall x \geqslant c \to g(x) \geqslant 1$. Пусть $\delta > 2$, и $d = \max(c, \delta)$. Непрерывная возрастающая на $[2; +\infty)$ функция $h(x) = x\ln x$ отображает взаимно-однозначно полуинтервал $[d, +\infty)$ на полуинтервал $[d\ln d, +\infty)$. Подберем натуральное $n > \dfrac{d\ln d}{2\pi}$ и определим ξ', ξ'' из условий $\xi'\ln\xi' = 2\pi n$, $\xi''\ln\xi'' = 2\pi n + \dfrac{\pi}{2}$. Тогда ξ', $\xi'' > \delta$, и при $x \in [\xi', \xi'']$ выполнены неравенства $\cos(x\ln x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 1$, поэтому

$$\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''}(1+\ln x)\cos(x\ln x)g(x)\,dx\right| \geqslant \int\limits_{\xi'}^{\xi''}(1+\ln x)\cos(x\ln x)\,dx =$$

$$\sin(x\ln x)\Big|_{\xi'}^{\xi''} = \sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(2\pi n) = 1 = \varepsilon.$$

Ответ: Сходится абсолютно при $\alpha < -1$, сходится условно при $\alpha \in [0;1]$, расходится при $\alpha > 0$. ▲

Утверждения C1, C2 лежат в основе метода *выделения главной части*: если подынтегральную функцию удается представить в виде $f(x)+g(x)$, и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится абсолютно, то задача сводится к исследованию интеграла от, возможно, более простой «главной части» $f(x)$.

На практике можно использовать разложения подынтегральных функций по формуле Тейлора либо до неотрицательного слагаемого, либо до абсолютно сходящегося слагаемого.

Пример 2.7. При $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x}\,dx.$$

△ Интеграл имеет особенность в $+\infty$. Представим знакопеременную подынтегральную функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}\left(1-\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^{-1}.$$

Итак, $f(x) = z(1-z)^{-1}$, где $z(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ стремится к 0 при $x \to +\infty$. По формуле Тейлора $f(z) = z(1-z)^{-1} = z + {}$ $+\, z^2(1+a(z))$, где $\lim\limits_{z\to 0} a(z) = 0$. Подынтегральная функция представлена в виде суммы двух слагаемых. Исследуем сходимость интеграла для каждого из них, а затем воспользуемся утверждениями С1, С2.

Интеграл от $z(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ рассмотрен в примере 2.1, он сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и сходится условно при $\alpha \in \in (0, 1]$.

Найдем такое $\delta > 0$, что при $|z| < \delta$ выполнено $|a(z)| < < 1/2$. Далее, найдем такое $c > 1$, что при $x > c$ выполнено $|z(x)| = \dfrac{|\sin x|}{x^\alpha} < \delta$. Тогда при $x > c$ имеем $\dfrac{z^2}{2} \leqslant z^2(1 + + a(z)) \leqslant \dfrac{3z^2}{2}$ (в частности, $z^2(1+a(z))$ — знакопостоянная функция в окрестности $+\infty$), и по признаку П1 интеграл от $z^2(1 + a(z))$ сходится одновременно с интегралом $J = = \int\limits_c^{+\infty} z^2\, dx = \int\limits_c^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\, dx$. Но J сходится (абсолютно) при $2\alpha > 1$ и расходится при $2\alpha \leqslant 1$, как было показано в решении примера 2.1.

Из утверждений С1, С2 получаем окончательный результат.

Ответ: Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. ▲

Замечание 1. Рассмотренный пример показывает, что условия монотонности функций в признаке Дирихле (и в следствии из признака Абеля) существенны. Действительно, функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную, а функция $\dfrac{\sin x}{x^\alpha - \sin x}$ стремится к 0, но при $\alpha \in (0, 1]$ не является монотонной. Применение признака Дирихле в этом случае ошибочно и приводит к неверному ответу в случае $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Замечание 2. Исследование на абсолютную сходимость можно было провести пользуясь признаком П2. Заметим, что функция $h(x) = \left(1 - \dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right)^{-1}$ неотрицательна и $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. Отсюда $|f(x)| = \dfrac{|\sin x|}{x^\alpha} h(x)$, и согласно признаку П2 интегралы $\widetilde{I} = \int\limits_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$ сходятся одновременно. Последний интеграл, как было показано в примере 2.1, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 2.8. При $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx.$$

$\triangle$ Интеграл имеет особенность в $+\infty$. Положим $z(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, заметим что $|z| < 1$ при $x > 1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} z(x) = 0$.

а) Исследуем интеграл I на абсолютную сходимость. Так как $|\operatorname{tg} z| \sim |z|$ при $z \to 0$, то согласно признаку П2 интегралы $\int\limits_1^{+\infty} |\operatorname{tg} z(x)|\,dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} |z(x)|\,dx$ сходятся одновременно (признак П2 применим, так как функции неотрицательны). Последний интеграл, как было показано в примере 2.1, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

б) Докажем, что I сходится при $\alpha > 0$.

Вначале рассмотрим частный случай $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Рассмотрим разложение $\operatorname{tg} z$ по формуле Тейлора: $\operatorname{tg} z = z + \dfrac{1}{3} z^3 (1 + a(z))$, где $\lim\limits_{z\to 0} a(z) = 0$. Подынтегральная функция представлена в виде суммы двух слагаемых. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} z(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится (см. пример 2.1).

Подберем такое $\delta > 0$, что при $|z| < \delta$ выполнено $|a(z)| < 1$. Далее найдем такое $c > 1$, что при $x > c$ выполнено $|z(x)| < \delta$. Тогда при $x > c$ справедливы оценки: $|z^3(1 + a(z))| \leqslant 2|z^3| = 2\frac{|\sin^3 x|}{x^{3/2}} \leqslant \frac{2}{x^{3/2}}$. По признаку П1 интеграл $\int\limits_1^{+\infty} z^3(1+a(z))\,dx$ сходится абсолютно. Из утверждения С1 вытекает сходимость I при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Применим изложенные выше соображения для произвольного положительного α.

Найдем такое натуральное n, что $(2n-1)\alpha > 1$, и рассмотрим разложение $\operatorname{tg} z$ по формуле Тейлора:

$$\operatorname{tg} z = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \ldots + b_{2n-1} z^{2n-1}(1 + a(z)),$$

где $\lim\limits_{z\to 0} a(z) = 0$. (В отличие от задачи 2.7 в силу нечетности тангенса в данном разложении все коэффициенты при четных степенях z равны 0.)

Подынтегральная функция представлена в виде конечного числа слагаемых. Интегралы от всех слагаемых, кроме последнего, имеют вид $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^{2k-1} x}{x^\beta}\,dx$ $(\beta > 0)$. Они являются сходящимися, что доказывается аналогично пункту 1б) в решении примера 2.4.

Покажем, что интеграл от последнего слагаемого сходится абсолютно. Подберем такое $\delta > 0$, что при $|z| < \delta$ выполнено $|a(z)| < 1$. Далее найдем такое $c > 1$, что при $x > c$ выполнено $|z(x)| < \delta$. Тогда при $x > c$ справедливы оценки: $|z^{2n-1}(1 + a(z))| \leqslant 2|z^{2n-1}| = 2\frac{|\sin^{2n-1} x|}{x^{(2n-1)\alpha}} \leqslant \frac{2}{x^{(2n-1)\alpha}}$. Согласно выбору n интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{(2n-1)\alpha}}\,dx$ сходится. В силу признака П1 интеграл $\int\limits_1^{+\infty} z^{2n-1}(1+a(z))\,dx$ сходится абсолютно.

Из утверждения С1 вытекает сходимость I при произвольном $\alpha > 0$.

Ответ: Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0;1]$.

▲

Упражнения и задачи

Исследовать несобственные интегралы на абсолютную и условную сходимость (2.1–2.38):

2.1.
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

Ответ: сходится абсолютно.

2.2.
$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x\ln^2 x}\,dx.$$

Ответ: сходится абсолютно.

2.3.
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.4.
$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\ln^{\alpha}(x-\operatorname{arctg} x)}\,dx.$$

Ответ: сходится условно при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.5. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{x \ln^\alpha(x+1)}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \leqslant 1$.

2.6. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(4x-1)}{e^{\alpha x} + x^{-1}}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.7. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(x - \cos x)^\alpha}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.8. $$\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)^\alpha \cos(3x-4)\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.9. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(2x-2)}{x(e^{x-1} - x)^\alpha}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $0 < \alpha < 1$, сходится условно при $\alpha = 0$, расходится при других значениях α.

(У интеграла две особенности.)

2.10. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{(2x^{3/2} - 3x + 1)^\alpha}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\dfrac{2}{3} < \alpha < 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant \dfrac{2}{3}$, расходится при других значениях α.

(У интеграла две особенности.)

2.11.
$$\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin\sin x\,dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $-2 < \alpha < -1$, сходится условно при $-1 \leqslant \alpha < 0$, расходится при других значениях α.

(У интеграла две особенности.)

2.12.
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.13.
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^5 x}{x^\alpha}\,dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0,1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.14.*
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{T_n(x)}{x^\alpha}\,dx,$$

где $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx + b_k \cos kx$ — тригонометрический многочлен степени n.

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0,1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

Указание. Воспользуйтесь схемой доказательства примера 2.1. Для доказательства отсутствия абсолютной сходимости при $\alpha \in (0,1]$ можно подобрать такую константу C, что $|T_n(x)| \leqslant C$ для любого x, воспользоваться оценкой

$\left|\dfrac{T_n(x)}{C}\right| \geqslant \left(\dfrac{T_n(x)}{C}\right)^2$ и представить $T_n(x)^2$ в виде тригонометрического многочлена.

2.15.
$$\int\limits_0^1 \frac{(\operatorname{arctg} x^2)^\alpha}{x^3} \sin\frac{1}{x}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2.16.
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln^\alpha(1+x^2)}{x^4} \cos\frac{1}{x}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > \dfrac{3}{2}$, сходится условно при $\alpha \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right]$, расходится при $\alpha \leqslant 1$.

2.17.
$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2\left(\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)^\alpha}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.18.
$$\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{(\sqrt{x} - x)^\alpha}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$.

(У интеграла две особенности.)

2.19.
$$\int\limits_1^{+\infty} \cos x^3\, dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.20. $$\int\limits_1^{+\infty} x^\gamma \sin x^\beta \, dx, \ \ \beta > 0.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\gamma < -1$, сходится условно при $-1 \leqslant \gamma < \beta - 1$, расходится при $\gamma \geqslant \beta - 1$.

2.21. $$\int\limits_1^{+\infty} ((x+1)^\alpha - x^\alpha) \sin x^2 \, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha \leqslant 0$, сходится условно при $\alpha \in (0, 2)$, расходится при $\alpha \geqslant 2$.

2.22. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(3x - \operatorname{arctg} x)^\alpha} \, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 3$, сходится условно при $\alpha \in (0, 3]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.23. $$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x^2}{(\sqrt{x} + \sin e^{-x})^\alpha} \, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 2$, сходится условно при $\alpha \in (-2, 2]$, расходится при $\alpha \leqslant -2$.

2.24. $$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x^{3/2}}{(x + \cos \operatorname{arctg} x)^\alpha} \, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

2.25. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} \cos x^2}{(x^2 e^x + \ln x)^\alpha} \, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 0$, сходится условно при $\alpha \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right]$, расходится при $\alpha \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

2.26. $$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x \cos\sqrt{x}}{(x^2 \ln x + \operatorname{arctg} x)^\alpha}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > \dfrac{1}{2}$, сходится условно при $\alpha \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, расходится при $\alpha \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2.27. $$\int\limits_1^{+\infty} x \cos(x^2 \ln x)\, dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.28. $$\int\limits_1^{+\infty} \cos(x^{3/2} - \ln x)\, dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.29. $$\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x^3 - 2x)\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha < -1$, сходится условно при $\alpha \in [-1, 2)$, расходится при $\alpha \geqslant 2$.

2.30. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin \ln x \cdot \sin x}{x^\alpha}\, dx.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

Указание. Преобразуйте произведение синусов в сумму косинусов.

2.31. $$\int\limits_2^{+\infty} \arcsin \frac{\cos x}{x^{\frac{1}{e}} + e^{-x}}\, dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.32. $$\int\limits_{2}^{+\infty} \operatorname{sh} \frac{\cos x}{\sqrt[5]{x^2 - \ln x}}\, dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.33. $$\int\limits_{2}^{+\infty} \left(\ln(3x + \sin x) - \ln(3x - \sin x)\right) dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.34. $$\int\limits_{2}^{+\infty} \operatorname{tg} \frac{\sin x}{\sqrt[7]{x^3 - x}}\, dx.$$

Ответ: сходится условно.

2.35. $$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x - 2\cos x}\, dx.$$

Ответ: сходится условно (однако, для $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x - 2\cos x}$ признак Дирихле неприменим).

2.36.* $$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha - \sin x}\, dx, \quad \alpha > 0.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$.

2.37.* $$\int\limits_{2}^{+\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx, \quad \alpha > 0.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$.

2.38.* $$\int\limits_{2}^{+\infty} \ln\left(\frac{x^\alpha + \cos x}{x^\alpha}\right) dx, \quad \alpha > 0.$$

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

2.39. Пусть f, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Известно, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,dx$ расходятся. Верно ли, что $\int\limits_0^{+\infty} (f(x) + g(x))\,dx$ расходится?

Ответ: неверно.

Указание. достаточно положить $f + g = 0$.

2.40. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Известно, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

а) Верно ли, что существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, равный 0?

б) Верно ли, что $f(x)$ — ограниченная функция?

Ответ: а) неверно, б) неверно.

Указание. Подберите нужным образом параметры β и γ в задаче 2.20.

2.41. Ответьте на вопросы предыдущей задачи в предположении, что $f(x)$ неотрицательна при всех $x \geqslant 0$.

Ответ: а) неверно, б) неверно.

Указание. Рассмотрим функцию $f(x)$, равную нулю при всех x, не принадлежащих объединению интервалов $\Delta_n = \left(n, n + \frac{1}{2^{2n}}\right)$ $(n = 1,\ 2,\ 3\ldots)$. На интервале Δ_n можно определить $f(x)$ так, чтобы $f(x)$ было неотрицательным, и $\max\limits_{x\in\Delta_n} f(x) = 2^n$.

2.42.* Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная функция. Известно, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Указание. Предположив, что утверждение неверно, найдем такое $\varepsilon > 0$, что для любого $c > 0$ найдется $x_c > c$, для которого $|f(x_c)| > \varepsilon$. Из условия равномерной непрерывности вытекает, что найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > \varepsilon/2$ при $x \in [x_c - \delta, x_c + \delta]$. Тогда $\left|\int\limits_{x_c-\delta}^{x_c+\delta} f(x)\right| \geqslant \varepsilon\delta$, что противоречит критерию Коши для сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ответы и указания

1.1. расходится.

1.2. сходится.

1.3. сходится $\Leftrightarrow \alpha > \dfrac{n+1}{m}$.

1.4. сходится $\Leftrightarrow \alpha,\ \beta > -1$.

1.5. сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

1.6. сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

1.7. сходится $\Leftrightarrow -1 < \alpha < 2$.

1.8. сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

1.9. сходится $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < \alpha < 3$.

1.10. сходится $\Leftrightarrow -1 \leqslant \alpha < 0$.

1.11. сходится $\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant \alpha < -1$.

1.12. сходится $\Leftrightarrow -2 \leqslant \alpha < 0$.

1.13. сходится $\Leftrightarrow 1 \leqslant \alpha < \dfrac{7}{6}$.

1.14. сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < 0$.

1.15. сходится $\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < \alpha < -\dfrac{1}{9}$.

1.16. сходится $\Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$.

1.17. сходится $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 8$.

1.18. сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < 2$.

1.19. сходится $\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < \alpha \leqslant 4$.

1.20. сходится $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \alpha < 2$.

1.21. сходится $\Leftrightarrow -3 < \alpha < -\dfrac{2}{3}$.

Указание. Пусть $g(x) = \sqrt{1 + x^\alpha}$. Если $\alpha \geqslant 0$, то при $x \to 0$: $g(x) \sim 1$, при $x \to +\infty$: $g(x) \sim x^{\frac{\alpha}{2}}$. Если $\alpha < 0$, то при $x \to 0$: $g(x) \sim x^{\frac{\alpha}{2}}$, при $x \to +\infty$: $g(x) \sim 1$.

1.22. сходится $\Leftrightarrow \alpha \in (-5, -2) \cup \{0\}$.

2.1. сходится абсолютно.

2.2. сходится абсолютно.

2.3. сходится условно.

2.4. сходится условно при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.5. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \leqslant 1$.

2.6. сходится абсолютно при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.7. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.8. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.9. сходится абсолютно при $0 < \alpha < 1$, сходится условно при $\alpha = 0$, расходится при других значениях α.

(У интеграла две особенности.)

2.10. сходится абсолютно при $\dfrac{2}{3} < \alpha < 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant \dfrac{2}{3}$, расходится при других значениях α.

(У интеграла две особенности.)

2.11. сходится абсолютно при $-2 < \alpha < -1$, сходится условно при $-1 \leqslant \alpha < 0$, расходится при других значениях α.

(У интеграла две особенности.)

2.12. сходится условно.

2.13. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.14. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

Указание. Воспользуйтесь схемой доказательства примера 2.1. Для доказательства отсутствия абсолютной сходимости при $\alpha \in (0, 1]$ можно подобрать такую константу C, что $|T_n(x)| \leqslant C$ для любого x, воспользоваться оценкой $\left|\dfrac{T_n(x)}{C}\right| \geqslant \left(\dfrac{T_n(x)}{C}\right)^2$ и представить $T_n(x)^2$ в виде тригонометрического многочлена.

2.15. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2.16. сходится абсолютно при $\alpha > \dfrac{3}{2}$, сходится условно при $\alpha \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right]$, расходится при $\alpha \leqslant 1$.

2.17. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.18. сходится абсолютно при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$.

(У интеграла две особенности.)

2.19. сходится условно.

2.20. сходится абсолютно при $\gamma < -1$, сходится условно при $-1 \leqslant \gamma < \beta - 1$, расходится при $\gamma \geqslant \beta - 1$.

2.21. сходится абсолютно при $\alpha \leqslant 0$, сходится условно при $\alpha \in (0, 2)$, расходится при $\alpha \geqslant 2$.

2.22. сходится абсолютно при $\alpha > 3$, сходится условно при $\alpha \in (0, 3]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

2.23. сходится абсолютно при $\alpha > 2$, сходится условно при $\alpha \in (-2, 2]$, расходится при $\alpha \leqslant -2$.

2.24. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

2.25. сходится абсолютно при $\alpha > 0$, сходится условно при $\alpha \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right]$, расходится при $\alpha \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

2.26. сходится абсолютно при $\alpha > \dfrac{1}{2}$, сходится условно при $\alpha \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, расходится при $\alpha \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2.27. сходится условно.

2.28. сходится условно.

2.29. сходится абсолютно при $\alpha < -1$, сходится условно при $\alpha \in [-1, 2)$, расходится при $\alpha \geqslant 2$.

2.30. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$, расходится при $\alpha \leqslant 0$.

Указание. Преобразуйте произведение синусов в сумму косинусов.

2.31. сходится условно.

2.32. сходится условно.

2.33. сходится условно.

2.34. сходится условно.

2.35. сходится условно (однако, для $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x - 2\cos x}$ признак Дирихле неприменим).

2.36. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$.

2.37. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$.

2.38. сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, расходится при $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.

2.39. неверно.

Указание. Достаточно положить $f+g=0$.

2.40. а) неверно, б) неверно.

Указание. Подберите нужным образом параметры β и γ в задаче 2.20.

2.41. а) неверно, б) неверно.

Указание. Рассмотрим функцию $f(x)$, равную нулю при всех x, не принадлежащих объединению интервалов $\Delta_n = \left(n, n+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$ $(n = 1,\ 2,\ 3\ldots)$. На интервале Δ_n можно определить $f(x)$ так, чтобы $f(x)$ было неотрицательным, и $\max\limits_{x\in\Delta_n} f(x) = 2^n$.

2.42. *Указание.* Предположив, что утверждение неверно, найдем такое $\varepsilon > 0$, что для любого $c > 0$ найдется $x_c > c$, для которого $|f(x_c)| > \varepsilon$. Из условия равномерной непрерывности вытекает, что найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > \varepsilon/2$ при $x \in [x_c-\delta, x_c+\delta]$. Тогда $\left|\int\limits_{x_c-\delta}^{x_c+\delta} f(x)\right| \geqslant \varepsilon\delta$, что противоречит критерию Коши для сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. – М.: МФТИ, 2004.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. I. – М.: Высшая школа, 1981.
3. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Ч. II (интегралы, ряды). – М.: Высшая школа, 1981.
4. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. I. – М.: Наука, 1983.
5. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Изд. МФТИ, 2000.
6. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2004.