УДК 517.518.452

ПРОСТОЙ ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ОСТАТКА РЯДА ФУРЬЕ

©2018 г. О. В. Бесов

Поступило . .2018

Приводится простое доказательство асимптотической оценки остатка ряда Фурье для 2π-периодической функции с непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой производной порядка $m-1$.

Символами $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ обозначаются соответственно множество натуральных чисел и множество действительных чисел.

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть 2π-периодическая функция f имеет непрерывную и кусочно непрерывно дифференцируемую производную порядка $m-1$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; f)| \leq C M_m \frac{\ln n}{n^m} \quad \text{при } n \geq 2,$$

где $M_m = \max |f^{(m)}|$, а постоянная C не зависит от f.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведём сначала для случаев $m = 1,\ m = 2$, затем в качестве следствия получим утверждение теоремы в общем случае.

Запишем разность между значениями функции $f(x)$ и её суммы Фурье в виде

$$f(x) - S_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\pi\Big) g_x(t) \sin((n+\frac{1}{2})t) dt = I_n(\delta) + J_n(\delta),$$

где $0 < \delta < \pi$,

$$g_x(t) = \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Для доказательства теоремы в случаях $m = 1, 2$ понадобятся два варианта оценок: через $M_1 := \max |f'|$ в случае $m = 1$ и через $M_2 := \max |f''|$ в случае $m = 2$. С помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем, что

$$|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leq \begin{cases} 2M_1 t, \\ 2M_2 t^2. \end{cases}$$

Оценивая функцию g_x и её производные

$$\frac{d}{dt} g_x(t) = \frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}} - (f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)) \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} g_x(t) = \frac{f''(x+t) + f''(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}} - 2(f'(x+t) - f'(x)) \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} - (f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)) \frac{\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}}{8\sin^3\frac{t}{2}},$$

получаем

$$|g_x(t)| \le \begin{cases} \pi M_1, \\ \frac{\pi}{2} M_2 t \end{cases} ; \ |\frac{d}{dt} g_x(t)| \le C \begin{cases} M_1 \frac{1}{t}, \\ M_2 \end{cases} ; \ |\frac{d^2}{dt^2} g_x((t)| \le C M_2 \frac{1}{t}.$$

Следовательно, $|I_n| \le C \begin{cases} M_1 \delta, \\ M_2 \delta^2. \end{cases}$

Пусть $m = 1$. Для оценки J_n применим интегрирование по частям. Получаем

$$\pi J_n = -g_x(t) \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}} \Big|_\delta^\pi + \int\limits_\delta^\pi (\frac{d}{dt} g_x(t)) \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{(n+\frac{1}{2})} dt.$$

Отсюда

$$|J_n| \le \frac{M_1}{n+1/2} + \frac{2M_1 \ln \frac{1}{\delta}}{n+1/2},$$

Полагая $\delta = \delta_n = 1/n$, получаем утверждение теоремы для случая $m = 1$.

В случае $m = 2$ для оценки J_n дважды применим интегрирование по частям. Получаем

$$\pi J_n = -g_x(t) \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}} \Big|_\delta^\pi - \frac{d}{dt} g_x(t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{(n+\frac{1}{2})^2} \Big|_\delta^\pi + \int\limits_\delta^\pi \frac{d^2}{dt^2} g_x(t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{(n+\frac{1}{2})^2} dt,$$

откуда

$$|J_n| \le C M_2 \delta \frac{1}{n} + C M_2 \frac{1}{n^2} + C M_2 \ln \frac{1}{\delta} \frac{1}{n^2}.$$

Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, приходим к утверждению теоремы для случая $m = 2$.

Установим теорему в случаях $m \ge 3$. Признак Дирихле сходимости числового ряда утверждает, что числовой ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ сходится и для суммы его справедлива оценка

$$|\sum_{k=1}^\infty a_k b_k| \le |a_1| \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sum_{k=1}^n b_k|$$

при выполнении условий:

1) последовательность $\{a_k\}$ монотонно стремится к нулю,

2) последовательность $\{\sum_{k=1}^n b_k\}_{n=1}^\infty$ ограничена.

Пусть $m \ge 3$ нечётно, $\varphi = f^{m-1}$. Пусть α_k, β_k–коэффициенты Фурье функции φ. Тогда по доказанному случаю $m = 1$ теоремы

$$|\sum_{k=n+1}^\infty \alpha_r \cos kx + \beta_k \sin kx| \le C \frac{\ln n}{n} \quad \forall n \ge 2.$$

В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье, применённой $m-1$ раз, имеем

$$|r_n(f,x)| = |\sum_{k=n+1}^\infty a_r \cos kx + b_k \sin kx| = |\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^{m-1}} (\alpha_r \cos kx + \beta_k \sin kx)|.$$

Применяя признак Дирихле сходимости ряда, получаем, что

$$|r_n(f,x)| \leq CM_m \frac{\ln n}{n} \frac{1}{(n+1)^{m-1}},$$

и теорема установлена для всех нечётных m.

Аналогично из доказанного случая $m = 2$ теоремы получаем утверждение теоремы для всех чётных $m \geq 4$.

Замечание 1. *Утверждение теоремы сохранится, если условие непрерывности и кусочно непрерывной дифференцируемости производной порядка $m-1$ заменить условием Липшица этой производной. Для доказательства достаточно аппроксимировать функцию её средними Стеклова, к которым можно применить доказанную теорему.*

Замечание 2. *Оценку теоремы нельзя усилить по порядку. Это вытекает, например, из асимптотического равенства для приближений суммами Фурье класса 2π-периодических функций, производные порядка $m-1$ которых удовлетворяют условию Липшица с константой M_m [1].*

Список литературы

1 bibl *[1] Никольский С.М., Избранные труды, Т.1. Теория приближений. Статья: Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. , Наука, М., 2006.*

О. В. Бесов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: besov@mi-ras.ru

О. В. Бесов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: besov@mi-ras.ru

РЕФЕРАТ

О. В. Бесов

Асимптотическая оценка остатка ряда Фурье

Приводится простое доказательство асимптотической оценки остатка ряда Фурье для 2π-периодической функции, производная которой порядка $m-1$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема.

O. V. Besov.

Asymptotic estimate for the rest of Fourier series for an m times piecewise differentiable function

The simple proof for asymptotic estimate of the rest of Fourier series for an 2π-periodical function with continuous and piecewise continuously differentiable derivative of order $m-1$ is given.