Теорема о дифференцировании интеграла Римана, зависящего от параметра

Теорема 5. *Пусть функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$, $\varphi \leqslant \psi$ на $[c, d]$.*

Пусть функции $f, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{G} = \{(x, y) \in \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y), \ c \leqslant y \leqslant d\}$,

$$J(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx.$$

Тогда на отрезке $[c, d]$ существует производная

$$\frac{d}{dy} J(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y). \tag{1}$$

При этом производная в точках $y = c$, $y = d$ понимается как односторонние.

Доказательство. Шаг 1. Положим при $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon := \{(x, y) : \ \varphi(y) - \varepsilon < x < \psi(y) + \varepsilon, \ c \leqslant y \leqslant d\}$$

и предположим дополнительно, что при некотором $\varepsilon > 0$ функции $f, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на G_ε. Определим на множестве $G^*_\varepsilon = = \{(y, u, v) : \ \varphi(y) - \varepsilon < u, v < \psi(y) + \varepsilon, \ y \in [c, d]\}$ функцию

$$F(y, u, v) := \int\limits_u^v f(x, y)\, dx.$$

Тогда

$$J(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

Формула (1) получается, очевидно, при дифференцировании последнего равенства в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции и дифференцирования интеграла с переменным верхним (нижним) пределом. Для применения теоремы 11.3.1 о дифференцируемости сложной функции достаточно убедиться в непрерывности на G^*_ε производных

$$\begin{gathered} F'_u(y, u, v) = -f(u, y), \\ F'_v(y, u, v) = f(v, y), \\ F'_y(y, u, v) = \int\limits_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx. \end{gathered} \tag{2}$$

Производные F'_u, F'_v непрерывны в силу непрерывности функции f.

Производная F'_y, вычисленная по правилу Лейбница (теорема 4), с помощью замены переменного в интеграле записывается в виде

$$F'_y(y, u, v) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(u + (v - u)t, y)(v - u)\, dt =: \int\limits_0^1 h(y, u, v, t)\, dt. \tag{3}$$

По теореме о непрерывности композиции непрерывных функций подынтегральная функция h непрерывна на G^*_ε. Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_0^1 h(y, u, v, t)\, dt$ непрерывен на G^*_ε. Непрерывность этого интеграла в произвольной точке $(y_0, u_0, v_0) \in G^*_\varepsilon$ можно установить с помощью непосредственной оценки (см. доказательство теоремы 1).

Шаг 2. Установим формулу (1) в предположениях теоремы.

Случай 1: $y_0 \in [c, d]$, $\varphi(y_0) < \psi(y_0)$. Уменьшая при необходимости отрезок $[c, d]$, можно считать, что $\varphi(y) < \varphi(y)$ на $[c, d]$. Рассмотрим последовательность функций

$$J_n(y) = \int\limits_{\varphi(y)+1/n}^{\psi(y)-1/n} f(x, y) dx.$$

Тогда из результата шага 1 на $[c, d]$

$$\frac{d}{dy} J_n(y) = \int\limits_{\varphi(y)+1/n}^{\psi(y)-1/n} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y) - 1/n, y)\psi'(y) - \\ - f(\varphi(y) + 1/n, y)\varphi'(y)).$$

Легко видеть, что при $n \to \infty$ J_n равномерно на $[c, d]$ стремится к J, а $\dfrac{d}{dy} J_n$ — к правой части (1). Применив теорему 16.3.3 (о дифференцировании функциональной последовательности), приходим к (1).

Случай 2: $y = y_0 \in [c, d]$, $\varphi(y_0) = \psi(y_0)$. Установим (1) непосредственным вычислением производной от J. Пусть $y_0, y_0 + + \Delta y \in [c, d]$. Применив теорему о среднем для интеграла, имеем

$$J(y_0 + \Delta y) - J(y_0) = \int\limits_{\varphi(y_0+\Delta y)}^{\psi(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = \\ = (\psi(y_0 + \Delta y) - \varphi(u_0 + \Delta y)) f(\xi, y_0 + \Delta y)$$

при $\xi \in [\varphi(y_0 + \Delta y), \psi(y_0 + \Delta y)]$.

Деля обе части равенства на Δy и переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ $(+0, -0)$. получаем, что

$$\frac{d}{dy} J(y_0) = (\psi'(y_0) - \varphi'(y_0)) f(\psi(y_0), y_0),$$

что и требовалось установить.