

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С. И. Колесникова

ТФКП в задачах

*Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК

Колесникова С. И.

ТФКП в задачах. – уч. пособие. – М.: МФТИ, 2016. – 198 с.

УДК

Пособие содержит подробные разборы и решения практически всех основных задач курса «Теория функций комплексного переменного». Приведены основные определения и формулировки теорем. К задачам приведено около 200 иллюстрирующих рисунков.

Пособие предназначено преподавателям математических, физико-математических, физико-технических специальностей для проведения практических занятий по всему курсу, студентам этих специальностей для самостоятельного изучения курса, для подготовки домашних заданий, подготовки к контрольным работам и экзаменам, а также оно может пригодиться научным работникам, занимающимся приложениями теории функций комплексного переменного в рамках инновационно-образовательной программы.

©Колесникова С. И., составление, 2016

©Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2016

Предисловие

Программа курса ТФКП содержит материал, используемый в физике, механике сплошных сред и других прикладных дисциплинах, изучаемых на разных факультетах МФТИ. Последние годы время на изучение курса уменьшается, студенты не успевают усвоить одновременно теорию и практику решения задач. Пособие написано с той целью, чтобы дать возможность самостоятельно и полнее овладеть способами и приёмами решения основных задач, а, значит, более продуктивно выполнять домашние задания.

Пособие не совсем обычное. В нём приведены, в основном, те задачи, при решении которых часто возникают вопросы или затруднения. Приведённые решения не всегда традиционны. Одновременно в нём есть довольно сложные и громоздкие задачи, довести решение которых до конца не все смогли бы.

В первой главе при рассмотрении однозначных функций обращается внимание на новые свойства экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций, чтобы не удивляться, что, например, уравнение $\cos^2 z + 1 = 0$ имеет решение.

При рассмотрении рядов Тейлора и Лорана подчёркивается, что условия, при которых функции разлагаются в эти ряды, формулируются намного проще, чем в математическом анализе. Кроме того, теперь можно получить ответы на некоторые вопросы о том, почему тот или иной ряд расходится или имеет именно этот радиус сходимости.

В пособии мы считаем окрестность точки $z = \infty$ проколотой, и поэтому будем считать точку $z = \infty$ всегда особой точкой.

При вычислении интегралов от функций действительного переменного отдельно рассмотрены случаи, когда на контуре интегрирования находится особая точка соответствующей функции комплексного переменного.

Вторая глава посвящена изучению многозначных функций. Свойства многозначной функции $\text{Ln } z$ выводятся из того, что,

по определению,

$$\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}.$$

Это даёт возможность явно представить себе, как одна ветвь $\operatorname{Ln} z$ непрерывно «переходит» в следующую, когда процесс «продолжения» приводит к переходу на следующий экватор плоскости.

Исходя из этого определения, показывается, что $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления $\operatorname{Ln} z$, и многозначная функция распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим точки ветвления. Затем определяются точки ветвления для часто встречающихся в задачах многозначных функций. Тогда эти функции распадаются на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим все точки ветвления.

Показано, что в окрестности произвольной точки $z = a$ любую ветвь $f_*(z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ можно представить в виде суммы двух слагаемых: значение $f_*(a)$ и некоей ветви, разложение которой в окрестности этой точки известно. Например,

$$\begin{aligned} f_*(z) = \operatorname{Ln}_*(z) &\equiv \operatorname{Ln}_*(z - a + a) \equiv \operatorname{Ln}_* a \left(1 + \frac{z - a}{a}\right) = \\ &= \operatorname{Ln}_* a + \ln \left(1 + \frac{z - a}{a}\right), \end{aligned}$$

где $\ln \left(1 + \frac{z - a}{a}\right)$ — это та ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} \left(1 + \frac{z - a}{a}\right)$, которая в точке $z = a$ равна 0 и имеет стандартное разложение в ряд Тейлора. Аналогичные преобразования сделаны и для других часто встречающихся многозначных функций.

Третья глава посвящена конформным отображениям. Так как эта тема в курсе последняя, то на неё особенно не хватает времени. Обычно изучение конформных отображений начинается с дробно-линейных. В данном пособии сделано наоборот. Сначала изучаются отображения, осуществляемые с помощью классических элементарных функций. При этом особое внимание уделяется обратным отображениям, которые осуществ-

вляются ветвями многозначных функций. Конкретные примеры подчёркивают, чем отличаются ветви друг от друга. Из картинок будет хорошо видно, что разные ветви отображают одну и ту же область в разные области. Затем формулируются те свойства дробно-линейных отображений, которые будут использоваться при решении задач.

В пособии приведён каталог элементарных отображений. Он помогает понять, какими отображениями удобно воспользоваться при решении конкретной задачи, с чего начать. После этого можно рассматривать любые задачи.

Это хорошо видно при рассмотрении отображений с помощью тригонометрических и гиперболических функций.

И только после этого начинают решаться примеры.

Теперь уже становится понятней, с чего можно начать решать ту или иную конкретную задачу.

Задачи отобраны не всегда самые простые. Практически любая из них реализует какую-то идею или метод. Оформление решений построено так, чтобы было понятно, почему применим тот или иной метод. Иногда задача решается двумя способами.

В силу недостатка места и во избежание громоздкости изложения, некоторые теоретические утверждения выписаны в несколько «упрощённой» форме.

В пособии приведены примеры решений практически всех типов задач из курса ТФКП, изучаемого в МФТИ. Все задачи взяты из вариантов общекурсовых контрольных работ, предложенных в разные годы разными сотрудниками нашей огромной дружной кафедры высшей математики МФТИ.

Пособие имеет очень подробное оглавление, из которого легко можно понять содержание. При решении задач приводится много рисунков.

Большое спасибо профессору Д. В. Беклемишеву, замечания которого ко второй главе оказались очень полезными, и А. В. Полозову, оказавшему большую помощь при подготовке рукописи к печати.

ГЛАВА I. ОДНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1.1. Операции с комплексными числами.

Решение уравнений $z^n = a$, $e^z = b$, $a, b \in \mathbb{C}$

Не будем вводить определение комплексного числа, потому что в разных источниках оно разное.

Вспомним, что комплексные числа, записанные в алгебраической форме $a + bi$, равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \iff \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

В такой форме комплексные числа удобно складывать, вычитать, умножать друг на друга.

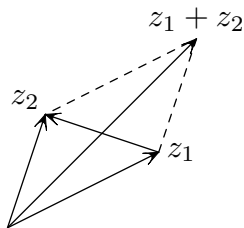


Рис. 1.1

Все помнят, что между множеством комплексных чисел и векторами плоскости можно установить взаимно однозначное соответствие. Если отложить векторы от начала координат, то комплексные числа z_1 , z_2 становятся точками плоскости. Тогда сложение комплексных чисел $z_1 + z_2$ равносильно нахождению диагонали параллелограмма, построенного

на векторах z_1 и z_2 , при этом $|z_1 + z_2|$ — это длина диагонали.

А как с другой диагональю?

Другая диагональ — это разность комплексных чисел $z_2 - z_1$, а длина второй диагонали равна $|z_2 - z_1|$, а тогда $|z_2 - z_1|$ — это расстояние между точками z_1 и z_2 : $|z_2 - z_1| = \rho(z_2, z_1)$.

Имея это в виду, можно компактно записать уравнение некоторых кривых.

Например,

- а) $|z - z_1| = |z - z_2|$ — геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных — срединный перпендикуляр (см. рис. 1.2);
- б) $|z - z_0| = R$ — уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0 ;

в) Многие узнают в уравнении $|z - z_1| + |z - z_2| = \text{const} > |z_1 - z_2|$ эллипс (см. рис. 1.3).

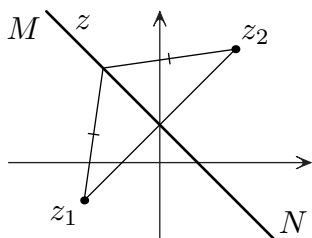


Рис. 1.2

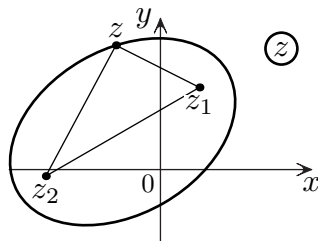


Рис. 1.3

г) А вот кривую, которая описывается уравнением $|z - z_1| - |z - z_2| = \text{const} < |z_1 - z_2|$ (см. рис. 1.4), узнают не все.

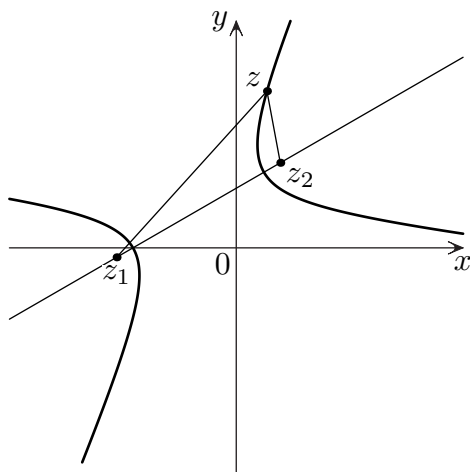


Рис. 1.4

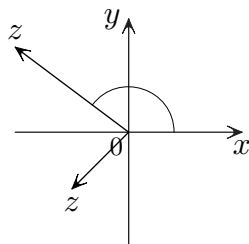


Рис. 1.5

Если $\text{const} > 0$, то это правая ветвь гиперболы (проверьте!) (см. рис. 1.4).

Кроме алгебраической формы комплексное число можно записать в тригонометрической, или экспоненциальной форме

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg z$, а аргумент определяется системой соотношений

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

На практике при нахождении тригонометрической формы конкретного комплексного числа лучше всего прикинуть на эскизе, в какой четверти расположено число — тогда аргумент быстро определится. Например (см. рис. 1.5),

$$\begin{aligned} z = -4 + 3i &= 5 \left(\cos \arccos \left(-\frac{4}{5} \right) + i \sin \arccos \left(-\frac{4}{5} \right) \right) = \\ &= 5e^{i \arccos \left(-\frac{4}{5} \right)} = 5 \left(\cos \left(\pi - \arcsin \left(\frac{3}{5} \right) \right) + i \sin \left(\pi - \arcsin \left(\frac{3}{5} \right) \right) \right) = \\ &= 5e^{i \left(\pi - \arcsin \left(\frac{3}{5} \right) \right)}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в общем виде формулу для φ выписать нельзя.

Определение. Числа z_1 , z_2 , записанные в тригонометрической или экспоненциальной форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &\iff r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \iff \\ &\iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.1) \end{aligned}$$

В такой форме записи комплексные числа удобно умножать и возводить в целую степень.

При рассмотрении в дальнейшем многозначных функций особое внимание нам придётся уделять аргументу комплексного числа. Поэтому вспомним операцию умножения комплексных чисел и связь аргумента произведения с суммой аргументов сомножителей.

Пусть $\arg z_1$ и $\arg z_2$ — произвольные возможные значения аргументов z_1 и z_2 . Обозначим их для удобства буквами φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

По определению равенства комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеем:

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \\ \arg z_1 z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \arg z^2 &= 2 \arg z + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ \arg z^n &= n \arg z + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Очень важно в дальнейшем учитывать, что, вообще говоря,

$$\begin{aligned} \arg z^2 &\neq 2 \arg z, \\ \arg z^n &\neq n \arg z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Например, $(-1)^2 = 1 \iff (e^{\pi i})^2 = e^{i \cdot 0} \Rightarrow 2\pi i \neq 0$, $(-1)(1) = -1 \iff (e^{-3\pi i})e^{2\pi i} = e^{\pi i} \Rightarrow -i\pi \neq i\pi$ и т. д.

Период 2π никак не влияет на нахождение значения произведения или степени комплексных чисел: $r^n e^{in\varphi} \equiv r^n e^{in(\varphi+2\pi k)}$.

Но то, что $\arg z^2 \neq 2 \arg z$, становится существенным тогда, когда будем решать уравнение $z^n = a$ или $e^z = b$, или рассматривать многозначные функции.

Умея складывать и вычитать комплексные числа, находить обратные и вычислять степени, сможем вычислить и значение дроби $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$.

Теперь попробуем решить уравнение $z^n = a$.

Заметим, что в школьном курсе есть некоторые проблемы, связанные с корнями чётной и нечётной степени из числа и рациональной степенью числа.

Корнем степени n из числа a называется число, после возведения которого в степень n получится заданное число a . Единого обозначения для корня степени n из числа a в школьном курсе не существует.

После рассмотрения графиков функций $y = x^{2n}$ и $y = x^{2n+1}$ выясняется, что уравнение $x^{2n} = a$, $a > 0$ имеет два решения, которые обозначаются как $x_1 = \sqrt[2n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[2n]{a}$; уравнение

$x^{2n+1} = a$, $a \in \mathbb{R}$ имеет единственное решение, которое обозначается как $x = \sqrt[2n+1]{a}$. При этом $x_1 = \sqrt[2n+1]{a}$ называется корнем чётной степени из неотрицательного числа a , $x = \sqrt[2n+1]{a}$ называется корнем нечётной степени из действительного числа a . Затем вводится понятие арифметического корня из действительного числа a , которое обозначается как $\sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, и, наконец, вводится рациональная степень неотрицательного числа $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ (здесь уже $a > 0$, т. к. m может быть отрицательным). Отсюда следует, что

$$\sqrt[2n]{a} = a^{\frac{1}{2n}}, \quad a \geq 0, \quad (1.5)$$

т. к. и левая, и правая части имеют одну и ту же область определения, а $\sqrt[2n+1]{a}$, вообще говоря, не равен $a^{\frac{1}{2n+1}}$:

$$\sqrt[2n+1]{a} = a^{\frac{1}{2n+1}}, \quad a \geq 0, \quad (1.6)$$

но

$$\sqrt[2n+1]{a} \neq a^{\frac{1}{2n+1}}, \quad a < 0, \quad (1.7)$$

т. к. в этом случае левая и правая части имеют разные области определения. Так что школьнику есть где запутаться!

В отличие от функции действительного переменного, график которой мы строим в плоскости, функция комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ задаёт отображение некоторого множества плоскости в множество той же плоскости. Это уже более сложная задача, её мы будем рассматривать в третьей главе.

Сейчас попробуем решить уравнения $z^n = a$, $e^z = b$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Если решаем уравнение $x^n = a$, то возможны разные варианты в зависимости от m и a :

- a) $x^2 = 5 \iff x = \pm\sqrt{5}$;
- b) $x^3 = -3 \iff x = \sqrt[3]{-3} \neq x^{\frac{1}{3}}$;
- c) $x^8 = 1 \iff (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0 \iff x = \pm 1$;
- d) $x^4 = -7 \iff \emptyset$.

Уравнение 8-й степени, как оказалось, имеет два решения.

Сейчас мы выведем единую формулу для решения уравнения $z^n = a$, откуда будет следовать, в частности, что уравнение $z^n = a$ степени n в \mathbb{C} имеет ровно n различных решений.

В теории доказывается, что любое уравнение $P_n(z) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеет ровно n корней в \mathbb{C} , считая их кратность, откуда следует, что любой многочлен $P_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ разлагается на произведение биномов вида $(z - a_i)^{k_i}$, где k_i — кратность корня a_i .

Итак, решаем уравнение $z^n = a$:

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff r^n e^{in\varphi} = |a|e^{i \arg a} \iff \\ &\iff \begin{cases} r^n = |a|, \\ n\varphi - \arg a = 2\pi k \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} r = |a|^{\frac{1}{n}}, \\ \varphi = \frac{\arg a + 2\pi k}{n}, \end{cases} k \in \mathbb{Z} \iff z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg a}{n}} e^{k \frac{2\pi i}{n}}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Кажется, что корней бесконечно много. Проверим, так ли это.

$$k = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\arg a}{n} \Rightarrow z = z_0,$$

$$k = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\arg a}{n} + \frac{2\pi}{n} \Rightarrow z = z_1,$$

$$k = 2 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\arg a}{n} + 2 \frac{2\pi}{n} \Rightarrow z = z_2,$$

...

$$k = n - 1 \Rightarrow \varphi_{n-1} = \frac{\arg a}{n} + (n - 1) \frac{2\pi}{n} \Rightarrow z = z_{n-1},$$

$$k = n \Rightarrow \varphi_n = \frac{\arg a}{n} + 2\pi \Rightarrow z = z_0 \quad \text{и т. д.}$$

Оказалось, корней ровно n , и они все различны — они расположены на окружности радиуса $R = |a|^{\frac{1}{n}}$ на угловом расстоянии друг от друга, равном $\frac{2\pi}{n}$. Так как мы видим, что уравнение $z^n = a$ имеет ровно n решений, то можно записать

$$z^n = a \iff z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\arg a + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1). \quad (1.8)$$

Это конечное множество чисел — множество решений уравнения $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$ — обозначается

$$z = \sqrt[n]{a} \iff z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(\arg a + 2\pi k)i}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Мы нашли значение корня n -й степени из комплексного числа a — оно имеет ровно n различных значений. Но отсюда без до-

полнительного исследования не ясно, существует ли функция $\sqrt[n]{z}$, а, если существует, то как она изменяется с изменением аргумента — ведь из формулы не видно, каковы значения в «соседних» с a точках. Об этом станет известно после введения понятия функции $\sqrt[n]{z}$ и изучения отображения $f(z) = z^n$ — глава II–III.

Заметим, что, если $a > 0$, то $\arg a = 2\pi n$ и

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1), \quad a > 0. \quad (1.9)$$

Теперь решим уравнение $e^z = b$, $b \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e^z = b &\iff e^x e^{iy} = |b| e^{i \arg b} \iff \begin{cases} e^x = |b|, \\ y - \arg b = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \\ &\iff z_k = \ln |b| + i(\arg b + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Итак,

$$e^z = b \iff z_k = \ln |b| + i(\arg b + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.10)$$

Это бесконечное множество чисел — множество решений уравнения $e^z = b$ — называется логарифмом числа b , оно обозначается $\operatorname{Ln} b$, т. е.

$$\operatorname{Ln} b = \ln |b| + i(\arg b + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.11)$$

Отсюда тоже без дополнительного исследования не ясно, существует ли функция $\operatorname{Ln} z$, а, если существует, то как она изменяется с изменением аргумента z — ведь из формулы не видно, каковы значения в «соседних» с b точках. Об этом станет известно после введения понятия функции $\operatorname{Ln} z$ и изучения отображения $f(z) = e^z$ — глава II–III.

Пример 1.1. Упростите число $(1 - i\sqrt{3})^{2017}$.

► Воспользуемся тригонометрической формой числа $1 - i\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} (1 - i\sqrt{3})^{2017} &= 2^{2017} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)^{2017} = \\ &= 2^{2017} \left(\cos\left(-\frac{2017\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2017\pi}{3}\right) \right) = \\ &= 2^{2017} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2^{2016} (1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ответ. $2^{2016}(1 - i\sqrt{3})$. ◀

Пример 1.2. Решите уравнение $z^8 - 1 = 0$.

► Можно, конечно, воспользоваться формулой (1.8), но решим «в лоб»:

$$\begin{aligned} z^8 - 1 = 0 &\iff r^8 e^{8i\varphi} = e^{0i} \iff \begin{cases} r = 1, \\ 8\varphi = 0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \\ &\iff z_k = e^{\frac{\pi k i}{4}}, \quad k = 0, 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Ответ. $e^{\frac{\pi k i}{4}}, k = 0, 1, \dots, 7$. ◀

Пример 1.3. Решите уравнение $e^z + 1 = 0$.

► $e^z + 1 = 0 \iff e^x e^{iy} = e^{i\pi} \iff \begin{cases} e^x = 1, \\ y - \pi = 2\pi k \end{cases} \iff z_k = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$. ◀

Пример 1.4. Решите уравнение $z^3 + 5 + 10i = 0$.

► Придётся воспользоваться тригонометрической формой числа $z = 5(-1 - 2i)$, расположенного в третьей четверти (см. рис. 1.5). Здесь не определён ни один «арк» — поэтому обязательно будет какая-то сумма или разность углов.

$$\begin{aligned} z^3 + 5 + 10i = 0 &\iff \\ \iff z^3 = 5(-1 - 2i) = 5\sqrt{5}(\cos(\pi + \arctg 2) + i \sin(\pi + \arctg 2)) &\iff \\ \iff z_k = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi + \arctg 2 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + \arctg 2 + 2\pi k}{3} \right), & \\ &k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Можно записать и по-другому:

$$\begin{aligned} z^3 = 5(-1 - 2i) &= \\ = 5\sqrt{5} \left(\cos \left(\pi + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \right) + i \sin \left(\pi + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right) &\iff \\ \iff z_k = \sqrt{5} e^{\frac{i(\pi + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi k)}{3}}, & \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Можно записать через арккосинус и т. д.

Ответ. $\sqrt{5} e^{\frac{i(\pi + \arctg 2 + 2\pi k)}{3}}, k = 0, 1, 2$. ◀

§ 1.2. Новые свойства «старых знакомых»: e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$

1. Функции e^z и $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, в отличие от e^x , $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, являются теперь *периодическими* с периодом $T = 2\pi i$: $e^{z+2\pi i} \equiv e^z$.
 $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (\cos(y + 2\pi k) + i \sin(y + 2\pi k))$,

Функции e^z , $\operatorname{ch} z$ перестали быть положительными, и, например, уравнения $e^z + 1 = 0$, $\operatorname{ch} z + 1 = 0$ имеют решения.

2. Функции $\sin z$, $\cos z$ перестали быть ограниченными.

Например, $\lim_{z \rightarrow 0+i\infty} \cos z = \lim_{z \rightarrow 0+i\infty} \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = +\infty$.

Функции $\sin z$, $\cos z$ могут принимать комплексные значения, могут принимать действительные значения по модулю большие 1.

3. Возникает вопрос — старые значения, по модулю меньшие или равные 1, «новые» $\sin z$, $\cos z$ могут принимать в точках, отличных от хорошо известных?

Выясним, например, где $\operatorname{Im} \sin z = 0$.

► По определению,

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}}{2i} = \\ &= \frac{e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x)}{2i} = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \sin z = 0 \iff \cos x \operatorname{sh} y = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{sh} y = 0 \iff y = 0 \Rightarrow z = x, x \in \mathbb{R}, \sin z = \sin x; \\ \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi + iy, y \in \mathbb{R}, \sin z = (-1)^k \operatorname{ch} y. \end{cases} \quad (1.12)$$

Итак, $\sin z$ принимает действительные значения на действительной оси и на вертикалях $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Причём, на действительной оси $\sin z = \sin x$, а в точках, отличных от точек действительной оси, $\sin z = (-1)^k \operatorname{ch} y \in \mathbb{R}$, но $|\sin z| = |(-1)^k \operatorname{ch} y| > 1$, т. е., если $y \neq 0$, то синус может принимать

действительные значения, но по модулю они больше 1. Это пунктирные вертикали на рис. 1.6.

Поэтому «старые» значения синус принимает *только и только в «старых»* точках. Аналогичная ситуация и с $\cos z$:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{2} = \\ &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \Rightarrow \ln \cos z = 0 \iff \sin x \operatorname{sh} y = 0 \iff \\ &\iff \begin{cases} \sin x = 0 \iff x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos z = (-1)^m \operatorname{ch} y \Rightarrow \\ \operatorname{sh} y = 0 \iff y = 0 \Rightarrow \cos z = \cos x, x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow |\cos z|_{x=\pi n, y \neq 0} = \operatorname{ch} y > 1 \end{cases} \quad (1.13) \end{aligned}$$

— это сплошные вертикали (см. рис. 1.6). ◀

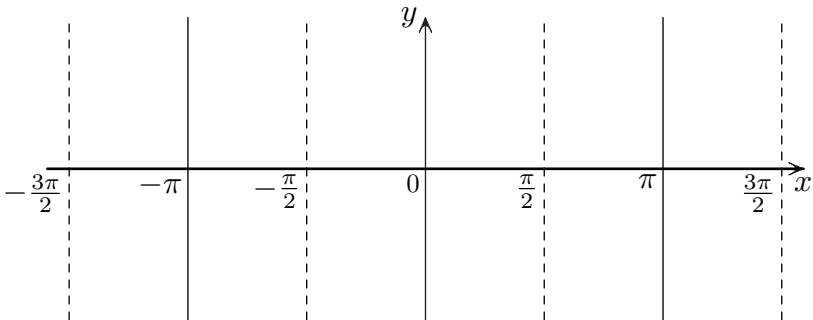


Рис. 1.6

Видно, что одновременно $\cos z$ и $\sin z$ принимают действительные значения только и только на действительной оси — жирная ось Ox на рис. 1.6. Поэтому $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ принимают свои «старые» — действительные — значения только в «старых» точках — на действительной оси.

Итак, все «новые функции» принимают свои старые значения только и только в «старых» точках.

4. Множество значений тригонометрических функций $\cos z$, $\sin z$ и гиперболических $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ совпадают, но одинаковые значения принимаются в разных точках.

Между ними имеет место следующая связь:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \cos iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \sin z &= -i \operatorname{sh} iz. \end{aligned}$$

Знание этой связи даёт возможность быстрее решить некоторые уравнения.

Пример 1.5. Решите уравнение $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$.

► Конечно, можно решать уравнение, используя определение $\operatorname{ch} z$. Но проще перейти к обычному косинусу: $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} \iff \iff \cos iz = \frac{1}{2} \iff iz = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \iff z = i\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $i\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$ ◀

Пример 1.6. Решите уравнение $\operatorname{sh} z = \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

► Здесь опять видно знакомое число $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому попробуем перейти к обычному синусу:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z = \frac{i\sqrt{3}}{2} &\iff -i \sin iz = \frac{i\sqrt{3}}{2} \iff \sin iz = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \\ &\iff iz = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k \iff z = i\left((-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ. $i\left((-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$. ◀

А вот, если справа стоит число по модулю больше 1, то придётся решать уравнение по-другому.

Пример 1.7. Решите уравнение $\sin z = 3$.

► Здесь уже придётся воспользоваться определением новой функции $\sin z$:

$$\sin z = 3 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3.$$

Удобно сделать замену переменных $e^{iz} = t$. Тогда уравнение примет вид $\frac{t-t^{-1}}{2i} = 3 \iff t^2 - 6it - 1 = 0 \iff t = i(3 \pm 2\sqrt{2})$.

Так как $3 \pm 2\sqrt{2} > 0$, то

$$e^{iz} = i(3 \pm 2\sqrt{2}) \iff e^{ix} e^{-y} = (3 \pm 2\sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{2}} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = 3 \pm 2\sqrt{2}, \\ x - \frac{\pi}{2} = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i \ln(3 \pm 2\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i \ln(3 \pm 2\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}.$ ◀

Пример 1.8. Решите уравнение $\operatorname{ch} z + 1 = 0$.

▶ $\operatorname{ch} z + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos iz = -1 \Leftrightarrow iz = -\pi + 2\pi k \Leftrightarrow z = i\pi(2m + 1), \quad m \in \mathbb{Z}.$

Ответ. $\pi i(1 + 2m), \quad m \in \mathbb{Z}.$ ◀

§ 1.3. Регулярные функции. Ряд Тейлора

Функции комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, как известно, непрерывны в точке $z = x + iy$ тогда и только тогда, когда $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывны в точке (x, y) . С дифференцируемостью сложнее.

Напомним, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда выполнены два условия.

- 1) Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $(x_0; y_0)$.
- 2) Выполнены в этой точке условия Коши–Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Определение 1. Функция $f(z)$ называется регулярной (аналитической, голоморфной) в области, если она дифференцируема в любой точке области.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется регулярной (аналитической, голоморфной) в точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Примечание. На некоторых факультетах МФТИ принято в определениях 1 и 2 добавлять требование непрерывности производной. Это связано с тем, что в связи с недостатком лекционного времени интегральная теорема Коши доказывается с помощью формулы Грина. В классическом доказательстве непрерывность не требуется.

Теорема. Если функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности $|z - a| < \rho$ точки $z = a$, то она разлагается в этой окрестности в ряд по целым неотрицательным степеням разности $(z - a)$, т. е.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k, \quad |z - a| < \rho.$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора*.

П р и м е ч а н и е. При доказательстве теоремы получается формула для a_k : $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$. Несколько необычная формула для коэффициентов ряда Тейлора. Однако, так как при доказательстве используется интегральная формула Коши для представления регулярной функции:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \text{то} \quad \frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi,$$

и на самом деле получается хорошо знакомая формула

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Обратите внимание, как сильно отличаются условия для разложения функции в ряд Тейлора для функции действительного и комплексного переменного.

Для функции комплексного переменного достаточно, чтобы она была дифференцируема в окрестности всего один раз!

Для функции действительного переменного бесконечной дифференцируемости в окрестности мало!

Например, есть **Теорема**.

Если $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности $|x - a| < \rho$ точки a и все производные равномерно ограничены в этой окрестности, то

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_k (x - a)^k, \quad |x - a| < \rho.$$

Этим условиям удовлетворяют e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ в любой окрестности любой точки.

Функции $(1+x)^a$, $\ln(1+x)$ этим условиям не удовлетворяют, и сходимость соответствующих рядов Тейлора для этих функций доказывается отдельно. То, что у этих функций радиус сходимости равен 1, не удивительно — при $x = -1$ они перестают существовать. Но почему радиус сходимости равен 1 и для функций $(1+x^2)^\alpha$, $\ln(1+x^2)$? — см. п. 2.2.4.

Есть даже бесконечно дифференцируемая функция, ряд Тейлора которой сходится, но не к ней. — см. п. 1.5.3.

Теорема. *Разложение в ряд Тейлора функции $f(z)$, регулярной в некоторой окрестности $|z - a| < \rho$ точки $z = a$, единственно.*

Поэтому во всём пособии не будем пользоваться формулами. Будем пользоваться готовыми формулами пяти основных разложений, формально известных с 1-го курса для функций действительного переменного и выведенных в любом учебнике для функций комплексного переменного, и теоремой единственности.

Сейчас это следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < \infty; \\
 \sin z &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty; \quad \operatorname{sh} z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty; \\
 \cos z &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty; \quad \operatorname{ch} z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty.
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Методы разложения функций в ряд Тейлора те же, что и для функций действительного переменного.

В литературе встречается другое, эквивалентное определению 2, определение регулярной функции.

Определение 3. Функция $f(z)$ называется регулярной (аналитической, голоморфной) в точке z_0 , если она представляется рядом по неотрицательным степеням разности $(z - z_0)$ в

некоторой окрестности $|z - z_0| < \rho$ этой точки: $f(z) = \sum_0^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < \rho$.

Определение 2 кажется более конструктивным, потому что, если функция $f(z)$ задана в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то бывает затруднительно проверить выполнение определения 3. В этом случае бывает удобнее проверить дифференцируемость $u(x, y)$, $v(x, y)$ и выполнение условий Коши–Римана.

Пример 1.9. Найдите точки $z = x + iy$, в которых функция $f(z) = z \operatorname{Re} z$

а) дифференцируема, б) регулярна.

► Запишем функцию в виде $f(z) = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + ixy$. Проверим критерий дифференцируемости $f(z)$ в точке. 1) Очевидно, что $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в \mathbb{R}^2 . 2) Проверим условия Коши–Римана: $\begin{cases} 2x = x \iff x = 0, \\ 0 = -y \iff y = 0 \end{cases}$, т. е. $f(z)$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$. Отсюда следует, что $f(z)$ нигде не является регулярной, т. к. не дифференцируема ни в какой окрестности.

Ответ. а) $z = 0$, б) нигде. ◀

Пример 1.10. Найдите точки $z = x + iy$, в которых функция

$$f(z) = x \sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x + i(y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x)$$

а) дифференцируема, б) регулярна.

► Очевидно, что

1) $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в \mathbb{R}^2 .

2) Проверим условия Коши–Римана:

$$\begin{cases} \sin x \operatorname{ch} y + x \cos x \operatorname{ch} y + y \operatorname{sh} y \sin x = \\ \quad = \sin x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y + x \operatorname{ch} y \cos x \iff (x, y) \in \mathbb{R}^2; \\ x \sin x \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} y \cos x - y \operatorname{ch} y \cos x = \\ \quad = -(y \cos x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \cos x - x \operatorname{sh} y \sin x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Итак, функция регулярна в \mathbb{C} .

Теперь, будучи уверенными в том, что функция регулярна в \mathbb{C} , т. е. в окрестности каждой точки разлагается в ряд Тей-

лора, попробуем найти выражение заданной функции в зависимости от z :

$$\begin{aligned} f(z) &= x \sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x + i(y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x) = \\ &= (x + iy)(\sin x \operatorname{ch} y) + i(iy + x)(\operatorname{sh} y \cos x) = \\ &= (x + iy)(\sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x) = z \sin z. \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что определение 3 выполнено.

Ответ. а) \mathbb{C} , б) \mathbb{C} . ◀

Пример 1.11. Разложите функцию $f(z) = (z^2 - 4z + 5)e^{4z - z^2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 2$.

► Так как работать надо в окрестности точки $z = 2$, то удобно сделать замену переменных: $t = z - 2$. Тогда при разложении можно применить стандартные формулы:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z^2 - 4z + 5)e^{4z - z^2} = e^4(t^2 + 1)e^{-t^2} = \\ &= e^4(t^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} = e^4 + e^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (t^2)^k (k-1)}{k!}, |t| < \infty. \end{aligned}$$

Ответ. $e^4 + e^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (z-2)^{2k} (k-1)}{k!}$, $|z-2| < \infty$ ◀

§ 1.4. Ряд Лорана

Теорема. Всякая функция $f(z)$, регулярная в некотором кольце с центром в точке $z = a$: $\rho < |z - a| < R$, где $0 \leq \rho < R \leq \infty$, представляется в этом кольце в виде ряда по всем целым степеням разности $(z - a)$:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z - a)^k = \sum_0^{+\infty} a_k (z - a)^k + \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - a)^k, \rho < |z - a| < R.$$

Иногда удобнее писать так:

$$f(z) = \sum_0^{+\infty} a_k (z - a)^k + \sum_1^{+\infty} \frac{a_m}{(z - a)^m}, \quad \rho < |z - a| < R.$$

При этом первое слагаемое называют правильной (или тейлоровской) частью, а второе называют главной частью ряда Лорана.

Любое слагаемое главной части *неограниченно* в окрестности центра кольца, а все слагаемые правильной части ограничены.

Любопытен случай, когда $\rho = 0$.

Если $g(z)$ регулярна в окрестности точки $z = a$, то её ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора, т. к. главная часть просто отсутствует (все a_m равны 0).

Если же функция регулярна только в *проколотой* окрестности $0 < |z - a| < R$, то функция разлагается в ней в ряд Лорана!

(Вот почему на первом курсе в теории пределов нельзя было упускать условие $x \neq a!$)

Теорема. *Разложение регулярной в кольце $\rho < |z - a| < R$ функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - a)$ единственно.*

Формулы для коэффициентов ряда Лорана мы не выписываем, потому что ими пользоваться не будем. При разложении будем использовать стандартные разложения.

Нам придётся воспользоваться в дальнейшем двумя бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_0^{\infty} z^k, \quad |z| < 1 \quad \text{и} \\ \frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_0^{\infty} (-1)^k z^k, \quad |z| < 1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.4.1. Функция $f(z)$ и сумма $S(z)$ её ряда Тейлора или Лорана

Рассмотрим самую простую функцию $f(z) = \frac{1}{1+az}$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

1) Эта функция регулярна в окрестности $|z| < \frac{1}{|a|}$ (см. рис. 1.7), а потому разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора. Её можно рассматривать в этой окрестности как бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -az$:

$$\frac{1}{1+az} = \sum_0^{\infty} (-1)^k (az)^k, \quad |z| < \frac{1}{|a|}. \quad (1.16)$$

Обратите внимание на то, что после формулы ряда стоит *неравенство* $|z| < \frac{1}{|a|}$. Не является ли оно лишним, если в тексте сказано, что мы разложили функцию в окрестности $|z| < \frac{1}{|a|}$? Нет, оно является необходимым. Иначе равенство $\frac{1}{1+az} = \sum_0^{\infty} (-1)^k (az)^k$ становится неверным, потому что области существования левой части и правой различны: стоящая слева функция определена и регулярна в $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{a}\right\}$, а стоящий справа ряд сходится и является регулярной функцией только в круге $|z| < \frac{1}{|a|}$.

2) Теперь рассмотрим ту же самую функцию, но в другой области: $|az| > 1$, или, что то же, в кольце $\frac{1}{|a|} < |z| < \infty$ (см. рис. 1.7), где функция тоже регулярна. Это — проколотая окрестность $z = \infty$, значит, $f(z)$ разлагается в ней в ряд Лорана по целым степеням z . Теперь вынесем в знаменателе az — тогда оставшуюся дробь $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{az}\right)}$ в рассматриваемой области можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -\frac{1}{az}$:

$$\frac{1}{1+az} = \frac{1}{az} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{az}\right)} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}(z)^{k+1}}, \quad |z| > \frac{1}{|a|}. \quad (1.17)$$

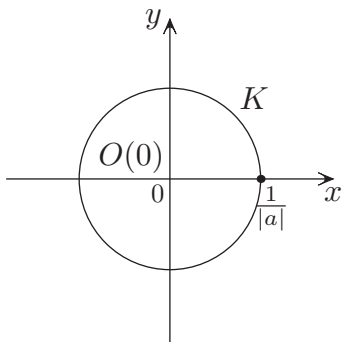


Рис. 1.7

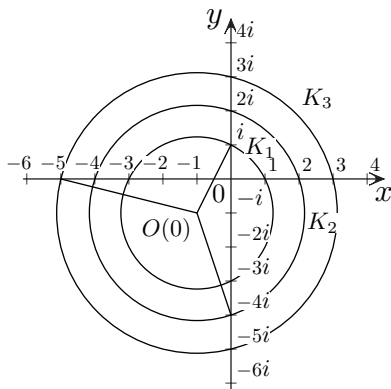


Рис. 1.8

Итак, функция $f(z) = \frac{1}{1+az}$ в разных областях \mathbb{C} (см. рис. 1.7) разлагается в разные ряды: в окрестности $|z| < \frac{1}{|a|}$ в ряд Тейлора, в кольце $\frac{1}{|a|} < |z| < \infty$ в ряд Лорана.

Заданная функция $f(z)$ и сумма $S(z)$ её ряда Лорана или Тейлора по степеням z — это разные функции: у них разные области существования. Эти рассуждения нам всё время будут полезны.

Итак, если дробь $\frac{1}{a+bz}$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности 0, то в знаменателе выносится свободный член: $\frac{1}{a+bz} \equiv \frac{1}{a\left(1+\frac{bz}{a}\right)}$, чтобы знаменатель прогрессии был по модулю меньше 1; если же дробь $\frac{1}{a+bz}$ раскладывается в ряд Лорана в окрестности ∞ , то в знаменателе выносится bz : $\frac{1}{a+bz} \equiv \frac{1}{bz\left(1+\frac{a}{bz}\right)}$.

В наших примерах придётся раскладывать в ряд дробно-рациональные функции. У дроби надо сначала выделить целую часть, а затем правильную дробь разложить на сумму элементарных дробей, которые имеют вид $\frac{c}{(z-a)^n}$. Разложение дроби $\frac{1}{(1+z)^n}$ по степеням z в окрестности 0 можно получить, продифференцировав $n-1$ раз $\frac{1}{1+z}$ — получится известная формула

$$\frac{1}{(1+z)^n} = \sum_0^{\infty} C_{-n}^k z^k \equiv \sum_0^{\infty} \frac{(-n)(-n-2)\dots(-n-k+1)}{k!} z^k, |z| < 1.$$

Рассмотрим теперь довольно «противный» с точки зрения арифметических вычислений пример.

Пример 1.12. Исследуйте все возможные разложения функции

$$f(z) = \frac{2z^2(1-i) + z(13i+16) + 57i}{(z-i)(z+5)(z+4i)}$$

по степеням $(z+1+i)$.

► Важно то, что, зная нули знаменателя, мы сразу можем сказать, в каких кольцах и в какие ряды может быть разложена эта функция.

Для этого нанесём на плоскость нули знаменателя и проведём окружности с центром в точке $z = (-1 - i)$ (центре возможных колец или окрестностей разложения) и проходящих через точки — нули знаменателя: $i, -5, -4i$ (см. рис. 1.8).

Получилось — одна окрестность $O(-1-i)$: $|z - (-1 - i)| < \sqrt{5}$ и три кольца:

$$\begin{aligned} K_1 &: \sqrt{5} < |z - (-1 - i)| < \sqrt{10}, \\ K_2 &: \sqrt{10} < |z - (-1 - i)| < \sqrt{17}, \\ K_3 &: \sqrt{17} < |z - (-1 - i)| < \infty, \quad (\text{см. рис. 1.8}) \end{aligned}$$

Функция $f(z)$ представима в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z) = \frac{a}{z - i} + \frac{c}{z + 4i} + \frac{b}{z + 5}.$$

Теперь можно понять, в какие ряды нам придётся разлагать слагаемые. Обозначим буквой T_i ряд Тейлора для i -й дроби, а буквой L_i ряд Лорана для i -й дроби.

- 1) Все три дроби регулярны в $O(-1 - i)$: $|z - (-1 - i)| < \sqrt{5}$, а потому они разлагаются в этой окрестности в ряды Тейлора — получим T_1, T_2, T_3 .
- 2) В кольце K_1 : $\sqrt{5} < |z - (-1 - i)| < \sqrt{10}$ ситуация другая. Первая дробь $\frac{a}{z - i}$ регулярна уже в кольце $\sqrt{5} < |z - (-1 - i)| < \infty$, а потому разлагается в этом кольце в ряд Лорана, остальные дроби регулярны в окрестности $|z - (-1 - i)| < \sqrt{10}$, а потому разлагаются в кольце K_1 : $\sqrt{5} < |z - (-1 - i)| < \sqrt{10}$ по-прежнему в ряды Тейлора — получится L_1, T_2, T_3 .
- 3) В кольце K_2 : $\sqrt{10} < |z - (-1 - i)| < \sqrt{17}$ вторая дробь $\frac{c}{z + 4i}$ регулярна уже в кольце $\sqrt{10} < |z - (-1 - i)| < \infty$ и там разлагается в ряд Лорана; третья дробь по-прежнему регулярна в окрестности $|z - (-1 - i)| < \sqrt{17}$ и разлагается там в ряд Тейлора — получится L_1, L_2, T_3 .

4) В кольце K_3 : $\sqrt{17} < |z - (-1 - i)| < \infty$ все три дроби регулярны и разлагаются в ряды Лорана — получится L_1, L_2, L_3 .

Ряды должны быть по степеням $z - (-1 - i)$. Сделаем, для удобства, во всех дробях замену переменных: $t = z - (-1 - i) \iff z = t - 1 - i$, чтобы можно было применить формулы геометрической прогрессии.

Тогда

$$f(z) = \frac{a}{z - i} + \frac{c}{z + 4i} + \frac{b}{z + 5} = \frac{a}{t - 1 - 2i} + \frac{c}{t - 1 + 3i} + \frac{b}{t + 4 - i},$$

и будем теперь производить разложение функции $g(t) = \frac{a}{t - 1 - 2i} + \frac{c}{t - 1 + 3i} + \frac{b}{t + 4 - i}$ по степеням t в ряды Тейлора или Лорана в соответствующих областях.

Поэтому получим следующие разложения.

1) $|t| < \sqrt{5} \Rightarrow T_1, T_2, T_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(t) = \sum_0^{\infty} t^k \left(-\frac{a}{(1 + 2i)^{k+1}} - \frac{c}{(1 - 3i)^{k+1}} + \frac{(-1)^k b}{(4 - i)^{k+1}} \right), |t| < \sqrt{5}.$$

2) K_1 : $\sqrt{5} < |t| < \sqrt{10} \Rightarrow L_1, T_2, T_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(t) = \sum_0^{\infty} t^k \left(-\frac{c}{(1 - 3i)^{k+1}} + \frac{(-1)^k b}{(4 - i)^{k+1}} \right) + a \sum_0^{\infty} \frac{(1 + 2i)^k}{t^{k+1}},$$

$$\sqrt{5} < |t| < \sqrt{10}.$$

3) K_2 : $\sqrt{10} < |t| < \sqrt{17} \Rightarrow L_1, L_2, T_3 \Rightarrow g(t) = \frac{b}{4 - i} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(4 - i)^k} +$

$$+ \sum_0^{\infty} \frac{a(1 + 2i)^k + c(1 - 3i)^k}{t^{k+1}}, \sqrt{10} < |t| < \sqrt{17}.$$

4) K_3 : $\sqrt{17} < |t| < \infty \Rightarrow L_1, L_2, L_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(t) = \sum_0^{\infty} \frac{a(1 + 2i)^k + c(1 - 3i)^k + b(-1)^k (4 - i)^k}{t^{k+1}},$$

$$\sqrt{17} < |t| < \infty. \quad \blacktriangleleft$$

Однако обычно задача формулируется по-другому, более конкретно. Для упрощения выкладок мы рассмотрим ту же самую функцию.

Пример 1.13. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{2z^2(1 - i) + z(13i + 16) + 57i}{(z - i)(z + 5)(z + 4i)}$$

по степеням $z - (-1 - i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 2 + i$. Указать границы кольца сходимости.

► Границы кольца сходимости $S(z)$ к $f(z)$ можно указать сразу, как только выяснится, в виде суммы каких элементарных дробей представляется заданная функция. Рисуются все возможные кольца. Затем вычисляется расстояние от z_0 до центра колец и определяется, в каком кольце находится z_0 (см. рис. 1.8).

Точка $z_0 = 2 + i$ находится в K_2 : $\sqrt{10} < |z - (-1 - i)| < \sqrt{17}$, т. к. $|2 + i - (-1 - i)| = |3 + 2i| = \sqrt{13}$.

Осталось найти коэффициенты a, b, c .

Начинаем работать. Раскладывать просят по степеням $z - (-1 - i)$, но, чтобы избежать лишних арифметических ошибок, не надо делать замену переменных до того, как разложим заданную функцию на сумму элементарных дробей,

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{2z^2(1-i) + z(13i+16) + 57i}{(z-i)(z+5)(z+4i)} &= \frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+5} + \frac{c}{z+4i} = \\ &= \frac{a(z+5)(z+4i) + b(z-i)(z+4i) + c(z-i)(z+5)}{(z-i)(z+5)(z+4i)}. \end{aligned}$$

А вот теперь внимание — мы не будем раскрывать скобки, а будем приравнивать числители, подставив $z = z_i$, являющимися корнями знаменателя. При этом всегда, без всякой системы, сразу будет определяться коэффициент той дроби, у которой в знаменателе стоит $z - z_i$, а числители у остальных дробей обратятся в 0.

- 1) $z = i$: $-2(1-i) + i(13i+16) + 57i = a(5+i)5i \iff a = 3$;
- 2) $z = -4i$: $-32(1-i) - 4i(13i+16) + 57i = c(-5i)(-4i+5) \iff c = -1$;
- 3) $z = -5$: $b(-5-i)(-5+4i) = 50(1-i) - 5(13i+16) + 57i \iff b = -2i$.

Итак, запишем представление в виде суммы элементарных дробей и воспользуемся найденным в предыдущем примере

разложением в ряд Лорана в кольце K_2 :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{z-i} - \frac{1}{z+4i} - \frac{2i}{z+5} = \\ &= -2i \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k (z+1+i)^k}{(4-i)^{k+1}} + \sum_0^{\infty} \frac{3(1+2i)^k - (1-3i)^k}{(z+1+i)^{k+1}}, \\ &\qquad \qquad \qquad \sqrt{10} < |(z+1+i)| < \sqrt{17}. \end{aligned}$$

Ответ.

$$\begin{aligned} f(z) &= -2i \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k (z+1+i)^k}{(4-i)^{k+1}} + \sum_0^{\infty} \frac{3(1+2i)^k - (1-3i)^k}{(z+1+i)^{k+1}}, \\ &\qquad \qquad \qquad \sqrt{10} < |(z+1+i)| < \sqrt{17}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 1.14. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{z(4+i) + 12i + 3}{z^2 + 2iz + 15} + \frac{3z(i-1) + 6}{z^2 + z(1-3i) - 3i}$$

в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z = 1 + 2i$. Укажите границы кольца сходимости.

► Разложим каждое слагаемое $f(z)$ в сумму элементарных дробей. Для этого, не раскрывая скобок, приравниваем числители при значениях z_k , равных корням знаменателя — при этом сразу, без всякой системы, определится коэффициент при дроби, знаменатель которой равен $z - z_k$:

$$1) \quad \frac{z(4+i) + 12i + 3}{z^2 + 2iz + 15} = \frac{a}{z-3i} + \frac{b}{z+5i} = \frac{a(z+5i) + b(z-3i)}{(z-3i)(z+5i)} \Rightarrow$$

$$z = -5i: -5i(4+i) + 12i + 3 = -8ib \iff b = 1+i;$$

$$z = 3i: 3i(4+i) + 12i + 3 = 8ai \iff a = 3;$$

$$\frac{z(4+i) + 12i + 3}{z^2 + 2iz + 15} = \frac{3}{z-3i} + \frac{1+i}{z+5i};$$

$$2) \quad \frac{3z(i-1) + 6}{z^2 + z(1-3i) - 3i} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-3i} = \frac{a(z-3i) + b(z+1)}{z^2 + z(1-3i) - 3i} \Rightarrow$$

$$z - 3i = 0: 9i(i-1) + 6 = b(3i+1) \iff b = -3;$$

$$z = -1: -3(i-1) + 6 = -a(1+3i) \iff a = 3i \Rightarrow$$

$$\frac{3z(i-1) + 6}{z^2 + z(1-3i) - 3i} = \frac{3i}{z+1} - \frac{3}{z-3i}.$$

Поэтому

$$f(z) = \frac{1+i}{z+5i} + \frac{3i}{z+1}, \quad z \neq 3i.$$

Итак, у нас одна окрестность и два кольца (см. рис. 1.9). Так как $1 < |1 + 2i| = \sqrt{5} < 5$, то заданная точка принадлежит кольцу $1 < |z| < 5$, в котором и раскладываем функцию:

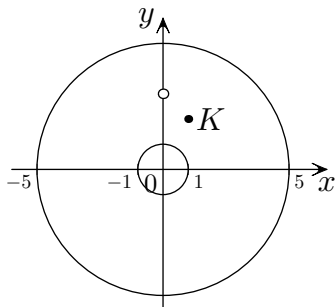


Рис. 1.9

$$f(z) = \frac{1+i}{5i\left(1 + \frac{z}{5i}\right)} + \frac{3i}{z\left(1 + \frac{1}{z}\right)} =$$

$$= (1+i) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(5i)^{k+1}} + 3i \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}},$$

$1 < |z| < 5, \quad z \neq 3i.$

Ответ. $f(z) = (1+i) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(5i)^{k+1}} + 3i \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}}, \quad 1 < |z| < 5, \quad z \neq 3i.$ ◀

1.4.2. Ряд Лорана для e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ в окрестности ∞

Хорошо известно, что ряд Тейлора в 0 для e^z имеет вид

$$e^z = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty. \quad (1.18)$$

Ряд сходится в круге любого радиуса с центром в начале координат.

А теперь просто посмотрим на равенство (1.18).

Видно, что функция e^z представлена в виде суммы степенного ряда в проколотой окрестности $z = \infty$. Вспомнив теорему о единственности разложения функции в ряд Лорана, понимаем, что ряд

$$\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty$$

как раз и является рядом Лорана функции e^z в проколотой окрестности точки $z = \infty$.

Аналогично, ряды Тейлора в 0 для

$$\sin z, \quad \cos z, \quad \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh} z$$

являются рядами Лорана в проколотой окрестности точки $z = \infty$.

Итак, ряды Лорана в окрестности $z = \infty$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty,$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty,$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty$$

§ 1.5. Особые точки регулярных функций

Определение. Точка $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, если $f(z)$ регулярна в некоторой проколотой окрестности точки $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$, но не регулярна в самой точке.

1.5.1. Классификация изолированных особых точек

Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \rho$, если $z_0 \in \mathbb{C}$, или $f(z)$ регулярна в некоторой проколотой окрестности $z_0 = \infty$: $R < |z| < \infty$.

В силу теоремы, $f(z)$ разлагается в этих проколотых окрестностях в соответствующие ряды Лорана.

Тогда так классифицируются особые точки.

1. Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$, то z_0 называется устранимой особой точкой (УОТ).

Это равносильно тому, что ряд Лорана не содержит главной части:

а) если $z_0 \in \mathbb{C}$, то $f(z) = \sum_0^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $0 < |z - z_0| < \rho$;

б) если $z = \infty$, то $f(z) = a_0 + \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$, $R < |z| < \infty$.

Например,

а) $f(z) = \frac{\sin z}{z} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \Rightarrow z = 0$ — УОТ,

- б) $f(z) = \cos \frac{1}{z} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z = \infty$ — УОТ.
2. Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, то z_0 называется полюсом (П).

Это равносильно тому, что главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых.

При этом особая точка называется полюсом порядка k (ПК), если

- 1) главная часть содержит не более k слагаемых и
- 2) коэффициент при $\frac{1}{(z - z_0)^k}$ отличен от 0, если $z_0 \in \mathbb{C}$,
- 3) коэффициент при z^k отличен от 0, если $z_0 = \infty$.

При этом,

а) если $z_0 \in \mathbb{C}$, то $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^k \frac{a_m}{(z - z_0)^m}$,
 $a_k \neq 0, 0 < |z - z_0| < \rho$;

б) если $z = \infty$, то $f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{(z)^n} + \sum_1^k a_m z^m$, $a_k \neq 0$,
 $R < |z| < \infty$.

Порядок полюса иногда можно определить и не разлагая функцию в ряд Лорана.

Это можно сделать, если функция представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ имеет 0 порядка m , $\psi(z)$ имеет 0 порядка $m + k$, то $f(z)$ имеет в этой точке полюс порядка k .

Регулярная функция $g(z)$ в точке $z = a$ имеет 0 порядка n , если

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = 0, \quad \dots, \quad g^{(n-1)}(a) = 0, \quad g^{(n)}(a) \neq 0.$$

Например,

а) $f(z) = \frac{e^{z-1}}{z^2} = \frac{e^{-1}}{z^2} \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{z^2} + \frac{e^{-1}}{z} + e^{-1} \sum_2^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}$, $0 < |z| < \infty \Rightarrow z = 0$ — полюс 2-го порядка (П2),

б) $f(z) = 3z^3 - 4z + \frac{16}{z} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{— П1,} \\ z = \infty & \text{— П3,} \end{cases}$

в) $f(z) = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} z} \Rightarrow z = 0$ — П2, т.к. $(1 + \operatorname{ch} z)'_{z=0} = \operatorname{sh} 0 = 0$, $(1 + \operatorname{ch} z)''_{z=0} = \operatorname{ch} 0 \neq 0$.

3. Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует, то z_0 — существенно особая точка (СОТ). Это равносильно тому, что ряд Лорана содержит в главной части бесконечное число слагаемых.

Например,

$$а) f(z) = e^z \rightarrow \begin{cases} +\infty, & z \rightarrow +\infty; \\ 0, & z \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow z = \infty \text{ — СОТ, или,}$$

т. к. $f(z) = e^z = a_0 + \sum_1^{\infty} a_k z^k, |z| < \infty$ — главная часть содержит бесконечно много слагаемых $\Rightarrow z = \infty$ — СОТ.

$$б) f(z) = \cos \frac{1}{z} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \cos \frac{1}{z} \text{ не существует} \Rightarrow z = 0 \text{ — СОТ.}$$

1.5.2. $z = \infty$ — всегда особая точка в $\overline{\mathbb{C}}$

Так как R -окрестностью точки $z = \infty$ называется внешность окружности радиуса R с центром в любой точке $a: |z - a| > R, R \geq 0$, то окрестность точки $z = \infty$ всегда проколота, или кольцо, ибо никакая функция $f(z)$ не определена в этой «точке», а может лишь иметь или не иметь предел при $z \rightarrow \infty$. Поэтому точку $z = \infty$ будем всегда считать особой. Это оправдывается и тем, что, если в области $D \in \mathbb{C}$ находятся только устранимые особые точки, то работает интегральная теорема Коши: $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$. Если же $D \in \overline{\mathbb{C}}$ и содержит только устранимые особые точки, среди которых $z = \infty$, то $\int_{\partial D} f(z) dz$ может быть как равен 0, так и отличен от 0 — работает так называемая *теорема о вычетах*: вычет в $z = \infty$, если даже это УОТ, может быть отличен от 0. Или, например, просто посчитаем $\oint_{|z|=10} \frac{dz}{z} = \left| \begin{matrix} z = 10e^{i\varphi}, \\ dz = 10e^{i\varphi} i d\varphi \end{matrix} \right| = i \int_{2\pi}^0 d\varphi = -2\pi i \neq 0$, несмотря на то, что у подынтегральной функции точка $z = \infty$ устранимая особая точка.

Итак, в нашем пособии $z = \infty$ — всегда особая точка.

П р и м е ч а н и е 1. Так как окрестность $z = \infty$ всегда проколота, то слово «проколота» обычно опускают.

П р и м е ч а н и е 2. Уже известно, что $e^z, \sin z, \cos z,$

$\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ регулярные во всей плоскости функции, разлагаются в ряд Тейлора в окрестности любой точки $a \in \mathbb{C}$, имеют при этом радиус сходимости $R = \infty$. Функции e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ — это «след» функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ на действительной оси.

Если $a \in \mathbb{C}$, то круг $|z - a| < \infty$, в котором сходятся ряды Тейлора для e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, содержит промежуток $|x - a| < \infty$, в котором как раз и сходятся ряды Тейлора для e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, как след рядов Тейлора для e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$.

Определение. Если в любой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ или $z_0 = \infty$ находится, по крайней мере, одна особая точка, отличная от z_0 , то z_0 является и называется неизолированной особой точкой (НОТ).

Простейшие примеры.

1) $f(z) = \frac{1}{1 + \cos z}$. Ясно, что точки, где $1 + \cos z = 0$, особые. Найдём их:

$$1 + \cos z = 0 \iff z_k = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{1 + \cos z} = \infty \Rightarrow z_k = \pi + 2\pi k \text{ — полюс.}$$

Какого порядка? Очень частый ответ — первого. Но это не так, потому что, во-первых, $1 + \cos z_k = 0$, $(1 + \cos z)'_{z_k} = -\sin z_k = 0$, $(1 + \cos z)''_{z_k} \neq 0$, — поэтому полюс 2-го порядка.

А, во-вторых, из школьной тригонометрии известно (правда, для $1 + \cos 2x$, но мы знаем, что эти формулы верны и для z), что $1 + \cos z = 2 \cos^2 \frac{z}{2}$, т. е. здесь 0 второго порядка!

Замечаем сразу, что $z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$. Это значит, что $z = \infty$ — неизолированная особая точка (НОТ), в данном случае предельная точка полюсов.

2) $f(z) = e^{\frac{1}{z+1}}$. Ясно, что точки, где $e^{1/z} + 1 = 0 \iff \frac{1}{z_k} = i(\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_k = \frac{1}{i(\pi + 2\pi k)}$ — особые. Так как

$\frac{1}{e^{1/z} + 1} \xrightarrow{z \rightarrow z_k} \infty$, а e^ξ при $\xi \rightarrow \infty$ не имеет предела, то z_k — существенно особая точка (СОТ).

Видно, что $z_k = \frac{1}{i(\pi + 2\pi k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Значит, $z = 0$ — неизолированная особая точка (НОТ), в данном случае предельная точка существенно особых точек.

Пример 1.15. Найдите все особые точки функции

$$f(z) = \frac{e^{\operatorname{tg} \pi z} \sin \frac{2\pi z}{3}}{(2z + 1)(e^z + 1)}$$

и определите их тип.

► Прежде всего надо переписать функцию в другом виде

$$f(z) = \frac{e^{\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}} \sin \frac{2\pi z}{3}}{(2z + 1)(e^z + 1)},$$

т. к. $\operatorname{tg} z$ не является самостоятельной функцией, а это частное двух классических (иначе некоторые теряют точки, где знаменатель равен 0).

В таких примерах важно знать, в каком порядке вести исследование. Никогда не надо начинать с особых точек числителя или знаменателя.

1. Сначала выписываем *особые точки* числителя: $\cos \pi z = 0$, $z = \infty$.
2. Выписываем *особые точки* знаменателя — это только что выписанная точка $z = \infty$.

Теперь важно понять, что отсюда следует, что $f(z)$, по теореме о регулярности дроби, регулярна всюду в \mathbb{C} , кроме, быть может, точек, где знаменатель обращается в 0.

3. Это точки: $z = -\frac{1}{2}$, $e^z + 1 = 0$. Обращаем внимание на то, что это точки *регулярности* знаменателя, которые могут оказаться особыми точками дроби.

Выпишем список «кандидатов» в особые точки, одновременно решая возникающие уравнения:

$$1) z = \infty, \quad 2) \cos \pi z = 0 \iff z = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}.$$

Точек бесконечно много — последовательность $z_k = \frac{1}{2} + k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \Rightarrow$ в любой окрестности $z = \infty$ находится бесконечно много особых точек, т. е. мы «бесплатно» получаем ответ для пункта 1).

1) $z = \infty$ — неизолированная особая точка — НОТ (в дальнейшем можно уточнить, какие особые точки накапливаются в окрестности $z = \infty$).

$$3) z = -\frac{1}{2}.$$

4) $e^z + 1 = 0 \iff e^z = -1 \iff z_k = i(\pi + 2\pi k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty, k \in \mathbb{Z}$
 — опять получили, что $z = \infty$ — НОТ.

С чего начать исследование?

После нахождения «кандидатов» в особые точки выписываем неизолированные особые точки и начинаем рассматривать изолированные. Удобнее всего часто бывает начать с точек регулярности знаменателя, в которых он обращается в 0.

$$4) z = i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

Начнём с 4) (можно было и 3)).

Надо проверить, не являются ли эти точки особыми для каких-нибудь множителей числителя или знаменателя или не обращаются ли какие-нибудь множители числителя или знаменателя в 0 в этих точках. В нашем случае ясно, что нет. Поэтому точки $z_k = i(\pi + 2\pi k)$ — это полюса 1-го порядка, т. к. $(e^z + 1)' = e^z \neq 0$.

3) Точка $z = -\frac{1}{2}$. Проверяем, не является ли эта точка особой для каких-нибудь множителей числителя или знаменателя или не обращаются ли какие-нибудь множители числителя или знаменателя в 0 в этой точке. В нашем случае при $k = -1$ эта точка совпадает с особой точкой числителя, т. к. $\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = 0$. Числитель не имеет предела, а знаменатель обращается в 0. Выяснить, что происходит с дробью можно, например, одним из двух следующих способов.

а) Можно воспользоваться тем, что, если $a \in \mathbb{C}$ и является СОТ для $f(z)$ и полюсом для $g(z)$, то $a \in \mathbb{C}$ — СОТ для $f(z)g(z)$.

- б) Можно показать «в лоб», что дробь не имеет предела. Удобно сделать замену $z + \frac{1}{2} = t \iff z = t - \frac{1}{2}$. Тогда

$$f(z) = \frac{e^{\frac{\sin \pi(t-\frac{1}{2})}{\cos \pi(t-\frac{1}{2})}} \sin \frac{2\pi(t-\frac{1}{2})}{3}}{2t(e^{(t-\frac{1}{2})} + 1)} \sim -\frac{e^{\frac{1}{\sin \pi t}} \sin \frac{\pi}{3}}{2t(e^{-\frac{1}{2}} + 1)} \sim A \frac{e^{-\frac{1}{\pi t}}}{t}.$$

Так как $A \frac{e^{-\frac{1}{\pi t}}}{t} = \frac{A}{t} \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{\pi t}\right)^k$ и главная часть содержит бесконечно много слагаемых, $t = 0$ — СОТ.

Поэтому $z = -\frac{1}{2}$ — существенно особая точка (СОТ).

- 2) Точки $z = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z} \iff z_k = \frac{1}{2} + k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$.

Во-первых, и эти точки скапливаются в окрестности $z = \infty$.

Проверяем, не являются ли эти точки особыми для каких-нибудь множителей числителя или знаменателя или не обращаются ли какие-нибудь множители числителя или знаменателя в 0 в этих точках.

$$\begin{aligned} \text{«Подозрение» вызывает поведение } \sin \frac{2\pi z}{3}: \sin \frac{2\pi z}{3} = 0 &\iff \\ \iff \frac{2\pi z}{3} = \pi n &\iff z = \frac{3}{2}n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Сравним их с точками $z_k = \frac{1}{2} + k$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}n = \frac{1}{2} + k &\iff 3n - 1 = 2k \Rightarrow n = 2m + 1 \Rightarrow \\ &\iff 3(2m + 1) - 1 = 2k \iff k = 3m + 1. \end{aligned}$$

Ну вот! Общие точки!

Поэтому

- а) $z_k = \frac{1}{2} + k$, $k \neq -1$, $k \neq 3m + 1$ — СОТ, т. к. числитель предела не имеет, а остальные множители ограничены и отличны от 0.

- б) Пусть теперь $z_m = \frac{1}{2} + 3m + 1$. Удобно сделать замену переменных $z - \left(\frac{1}{2} + 3m + 1\right) = t$. Тогда

$$f(z) = \frac{e^{\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}} \sin \frac{2\pi z}{3}}{(2z + 1)(e^z + 1)} \sim A e^{-\frac{1}{\pi t}} t \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_m = \frac{1}{2} + 3m + 1$ — тоже СОТ.

Ответ. 1) $z = \infty$ — НОТ, предельная точка полюсов и существенно особых точек,

2) $z_n = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$ — СОТ.

3) $z_n = i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$ — полюса 1-го порядка. ◀

Пример 1.16. Найдите все особые точки функции $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{\operatorname{ch} z}}(\pi z + \pi + 1)}{1 + \cos \frac{1}{z+1}}$ и определите их тип.

► Выпишем «кандидатов» в особые точки. Решение будем оформлять по схеме предыдущего примера, но более кратко.

1) $z = \infty$;

2) $\operatorname{ch} z = 0 \iff \cos iz = 0 \iff iz = \frac{\pi}{2} + \pi k \iff z_k = \pi i \left(-\frac{1}{2} + k\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow z = \infty$ — НОТ, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $1 + \cos \frac{1}{z+1} = 0 \iff \frac{1}{z+1} = \pi + 2\pi k \iff z_k = \frac{1}{\pi(2k+1)} - 1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1 \Rightarrow z = -1$ — НОТ.

Видите? По ходу решения элементарных уравнений мы определили типы двух особых точек: $z = \infty$ и $z = -1$. Одна — особая точка числителя, а другая — особая точка знаменателя. Если бы начали с них, то наверняка бы запутались!

Исследуем остальные.

2) $z_k = \pi i \left(-\frac{1}{2} + k\right)$ — СОТ (значения всех остальных функций дроби $\in \mathbb{C}$ и не равно 0),

3) $z_k = \frac{1}{\pi(2k+1)} - 1$. Заметим, что $\pi z + \pi + 1 = 0 \iff z = -1 - \frac{1}{\pi}$, что соответствует $k = -1$. Поэтому,

а) если $k \neq -1$, то $z_k = \frac{1}{\pi k} - 1$ — полюс (внимание!) 2-го порядка.

Почему 2-го порядка?

Во-первых, потому, что первая производная $1 + \cos \frac{1}{z+1}$ равна 0, потому что там, где косинус равен -1 , синус равен 0, а вторая отлична от 0 (проверьте).

Во-вторых, по формулам школьной тригонометрии $1 + \cos \frac{1}{z+1} = 2 \cos^2 \frac{1}{2(z+1)}$, а это ноль 2-го порядка!

- б) если $k = -1$, то $z = -1 - \frac{1}{\pi}$ — полюс 1-го порядка, т. к. в числителе 0 первого порядка, а в знаменателе 0 второго порядка.

Ответ. 1) $z = \infty$ — НОТ, предельная точка существенно особых точек;

2) $z = -1$ — НОТ, предельная точка полюсов;

3) $z_k = \pi i \left(-\frac{1}{2} + k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ — СОТ;

4) $z_k = \frac{1}{\pi(2k+1)} - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1$ — полюс 2-го порядка;

5) $z = -\frac{1}{\pi} - 1$ — полюс 1-го порядка. ◀

1.5.3. Функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$ и $e^{-\frac{1}{z^2}}$

Вспомним пример, который приводится на 1-ом курсе, функции, ряд Тейлора для которой в окрестности $x = 0$ существует, сходится, но не к самой функции. Функция определяется так:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Вычисления, по определению, показывают, что все производные в точке $x = 0$ равны 0 — соответствующий этой функции ряд Тейлора состоит из нулевых членов, а потому его сумма тождественно равна 0. Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на всей оси.

Но! Сама функция $f(x)$ обращается в 0 только в одной точке — ряд к заданной функции не сходится. Почему? В чём дело?

На первом курсе этот факт объяснить невозможно. Зато мы теперь сможем.

Рассмотрим функцию $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$. Она регулярна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Точка $z = 0$ — существенно особая точка (СОТ). Функция регулярна в проколотой окрестности $0 < |z| < \infty$, а потому разлагается в ней в ряд Лорана:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! z^{2n}}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Функция $f(x)$ — «след» $f(z)$ на действительную ось. Но $f(z)$, как мы увидели, разлагается в окрестности $z = 0$ не в ряд Тейлора, а в ряд Лорана, причём, правильная часть состоит всего лишь из одного члена: $a_0 = 1$, а главная часть имеет бесконечно много слагаемых. Поэтому и на оси Ox имеем $e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!x^{2n}}$, $0 < |x| < \infty$, а ряд Тейлора не существует!

Так как $z = 0$ — СОТ, то $\lim_{z \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{z^2}}$ не существует. Это означает, что по разным направлениям пределы разные. Но оказалось, что $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, и, если это принять за значение $f(x)|_{x=0} = 0$, то мы и получим ряд Тейлора в 0, который не имеет отношения к $f(x)$.

§ 1.6. Вычеты

Определение. Пусть $z = z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ — изолированная особая точка однозначного характера регулярной функции $f(z)$, т. е. $f(z)$ регулярна в некоторой проколотой окрестности точки $z = z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Пусть $C: |z - z_0| = \rho$ — произвольная окружность в этой окрестности. Окружность ориентирована так, что при обходе контура точка $z = z_0 \in \overline{C}$ остаётся слева. Тогда $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz$ называется вычетом функции $f(z)$ в точке $z = z_0 \in \overline{C}$ и обозначается

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z).$$

Оказывается, что числовое значение вычета полностью определяется коэффициентом при $\frac{1}{z - z_0}$, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и коэффициентом при $\frac{1}{z}$, если $z_0 = \infty$.

► Покажем это.

1. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — конечная точка. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \left((a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots \right) \right) dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{a_{-1}}{z-z_0} dz = \left| \begin{array}{l} z-z_0 = \rho e^{i\varphi}, \\ dz = \rho e^{i\varphi} i d\varphi \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi i} a_{-1} i \int_0^{2\pi} d\varphi = a_{-1},
\end{aligned}$$

т. е. $\operatorname{res}_{z=z_0 \in \mathbb{C}} f(z) = a_{-1}$.

Все функции $f_m(z) = (z-z_0)^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$ имеют однозначные первообразные $\frac{(z-z_0)^{m+1}}{m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$, и интегралы по замкнутому контуру $\oint_{|z-z_0|=\rho} f_m(z) dz = 0$.

Остался $\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{a_{-1}}{z-z_0} dz$, который мы и вычислили.

2. Пусть теперь $z_0 = \infty$. Направление контура изменилось на противоположное:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz &= \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \left((a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots \right) \right) dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{a_{-1}}{z} dz = \left| \begin{array}{l} z = \rho e^{i\varphi}, \\ dz = \rho e^{i\varphi} i d\varphi \end{array} \right| = -a_{-1},
\end{aligned}$$

т. е.

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}.$$

Обратите внимание — в точке $z_0 = \infty$ вычет равен коэффициенту при $\frac{1}{z}$, взятому с обратным знаком. Вы, очевидно,

заметили, что это связано с тем, что обход $z_0 = \infty$ происходит в обратном направлении по сравнению с обходом конечной точки. ◀

Всегда ли нужно раскладывать функцию в ряд Лорана, чтобы найти вычет в точке? Оказывается, не всегда.

Вычет в конечной точке $a \in \mathbb{C}$

I. Если $a \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка (УОТ), то $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$, т.к. нет слагаемых главной части, содержащих отрицательные степени разности $(z - a)$.

II. $a \in \mathbb{C}$ — полюс.

1) Полюс 1-го порядка.

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z - a)); \quad (1.20)$$

$$\left(\lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z - a)) = \lim_{z \rightarrow a} \left(\sum_0^{\infty} a_k (z - a)^k + \frac{a_{-1}}{z - a} \right) (z - a) = a_{-1} \right);$$

б) Если функция представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \left(\lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z - a)) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)(z - a)}{\psi(z)} = \right. \\ \left. = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(\varphi(a) + \varphi'(a)(z - a) + \dots)(z - a)}{\psi'(a)(z - a) + \dots} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \right); \end{aligned}$$

2) Полюс k -го порядка.

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}((z - a)^k f(z))}{dz^{k-1}}. \quad (1.22)$$

III. $a \in \mathbb{C}$ — существенно особая точка (СОТ). Вычет вычисляется разложением в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$. Полностью ряд находить не надо — необходимо найти лишь коэффициент при $\frac{1}{z - a}$.

Вычет в ∞

1. Если $z = \infty$ — устранимая особая точка (УОТ), то, в отличие от конечной точки, вычет может быть и отличен от 0, т. к. коэффициент при $\frac{1}{z}$ находится в *правильной* части ряда Лорана и никак не связан с типом особой точки в ∞ .

Иногда коэффициент при $\frac{1}{z}$ находится из ряда Лорана, но можно и по формуле

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)), \text{ где } f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z). \quad (1.23)$$

2. Во всех остальных особых точках коэффициент a_{-1} при $\frac{1}{z}$ находится разложением в ряд Лорана в проколотой окрестности $z = \infty$:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}.$$

Лемма. Если $f(z)$ регулярна в $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением, быть может, конечного числа изолированных особых точек a_1, a_2, \dots, a_n , то $\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = 0$.

1.6.1. Вычет для $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ в ∞

Найти вычеты в ∞ функций $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ можно по-разному.

1. Все эти функции регуляرنы в \mathbb{C} и не имеют конечных особых точек. Поэтому сумма вычетов относительно всех конечных особых точек равна 0. В этом случае, по лемме, вычет на ∞ равен сумме вычетов относительно всех конечных особых точек с обратным знаком, т. е. вычет в ∞ для любой из функций: $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ — равен 0.
2. Мы изучили разложение функций $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ в ∞ . Там нет отрицательных степеней z — вычет любой из этих функций в ∞ равен 0.

Пример 1.17. Найдите $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}$.

► Точка $z = 0$ — полюс 1-го порядка (П1), т. к. в числителе 0 третьего порядка, а в знаменателе 0 четвертого порядка. Вос-

пользуемся формулой (1.20) для П1:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sin 3z - 3 \sin z)z}{(\sin z - z) \sin z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{27z^3}{3!} + \frac{3z^3}{3!} + o(z^4)\right)z}{\left(-\frac{z^3}{3!} + o(z^4)\right)(z + o(z^2))} = 24. \end{aligned}$$

Ответ. 24. ◀

Пример 1.18. Найдите вычеты функции

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 3 - 4i)(z - 2i)^2}$$

во всех особых точках.

► Все особые точки — полюсы. Найдём их:

$$z^2 + 3 - 4i = 0 \iff z^2 = 1^2 + 4i + (2i)^2 \iff z = \pm(1 + 2i).$$

Итак, $z = \pm(1 + 2i)$ — полюсы 1-го порядка. Воспользуемся формулой (1.21) для П1:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{(z - 2i)^2}, \quad \psi(z) = z^2 + 3 - 4i \Rightarrow \\ \operatorname{res}_{z=1+2i} \frac{1}{(z^2 + 3 - 4i)(z - 2i)^2} &= \frac{1}{2(1 + 2i)}, \\ \operatorname{res}_{z=-1-2i} \frac{1}{(z^2 + 3 - 4i)(z - 2i)^2} &= -\frac{1}{2(1 + 2i)(1 + 4i)^2}. \end{aligned}$$

Точка $z = 2i$ — полюс 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{(z^2 + 3 - 4i)(z - 2i)^2} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{(z - 2i)^2}{(z^2 + 3 - 4i)(z - 2i)^2} \right)' \Big|_{2i} = \\ &= \frac{-2z}{(z^2 + 3 - 4i)^2} \Big|_{2i} = \frac{-4i}{(1 + 4i)^2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Несмотря на наличие формул, иногда удобнее находить a_{-1} «в лоб» — разлагать функцию в ряд Лорана.

Пример 1.19. Найдите $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$.

► Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $Q_n(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0$.

Тогда $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow z = \infty$ — УОТ. Найдём коэффициент при $\frac{1}{z}$ «в лоб»:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} &= \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + o\left(\frac{1}{z}\right)}{1 + \frac{b_{n-1}}{b_n z} + o\left(\frac{1}{z}\right)} = \\ &= \frac{a_n}{b_n} \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) \left(1 - \frac{b_{n-1}}{b_n z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{a_n}{b_n} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{b_n}\right) + \text{слагаемые, не содержащие } \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{b_n^2}$.

Ответ. $\frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{b_n^2}$. ◀

Пример 1.20. Найдите $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z(e^z - 1)}$.

► В точке $z = 0$ полюс 2-го порядка (П2).

Найдём коэффициент при $\frac{1}{z}$ функции $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ «в лоб»:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2) - 1\right)} &= \frac{1}{z^2\left(1 + \frac{z}{2} + o(z)\right)} = \\ &= \frac{1 - \frac{z}{2} + o(z)}{z^2} = \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2}\right) + \text{слагаемые, не содержащие } \frac{1}{z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z(e^z - 1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $-\frac{1}{2}$. ◀

Зачем нужны вычеты и особые точки?

§ 1.7. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов

Теорема. Пусть в области $D \subset \bar{C}$ с кусочно-гладкой границей функция $f(z)$ регулярна всюду, кроме, быть может, ко-

нечного числа изолированных особых точек однозначного характера a_1, a_2, \dots, a_n и $f(z)$ непрерывна на \overline{D} . Тогда

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z). \quad (1.24)$$

Пример 1.21. Вычислите $\oint_{|z|=2} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016}-1)} dz$.

► Внутри окружности расположено 2017 полюсов 1-го порядка: $\begin{cases} z=0, \\ z_k^{2016}-1=0, & k=1, 2, \dots, 2016, \end{cases}$ а вне — одна существенно особая точка $z=\infty$. В полюсах вычет считается легко, но полюсов 2017! А $z=\infty$ — СOT, в которой вычет считается не всегда легко.

Что делать?

Первый способ.

Так как $\oint_{|z|=2} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016}-1)} dz = - \oint_{|z|=2} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016}-1)} dz$, то, чем считать 2017 вычетов, попробуем найти вычет в ∞ .

$$\text{Тогда } \oint_{|z|=2} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016}-1)} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016}-1)}.$$

Будем искать a_{-1} разложением подынтегральной функции в окрестности ∞ :

$$\begin{aligned} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016}-1)} dz &= \frac{1}{z^{2017}} \frac{\left(1 + z^{2016} + \frac{(z^{2016})^2}{2!} + \dots\right)}{1 - \frac{1}{z^{2016}}} = \\ &= \frac{1}{z^{2017}} \left(1 + z^{2016} + \frac{(z^{2016})^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z^{2016}} + \left(\frac{1}{z^{2016}}\right)^2 + \dots\right) = \end{aligned}$$

(теперь будем последовательно умножать слагаемые первой скобки на вторую скобку и выписывать только коэффициенты при слагаемых вида z^{2016})

$$= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots\right) +$$

+ слагаемые, не содержащие $\frac{1}{z}$.

Суммируем получившийся числовой ряд:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots = e - 1 \Rightarrow \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016} - 1)} = 1 - e,$$

и получим

Ответ. $2\pi i(e - 1)$.

Примечание. Не всегда при вычислении вычета в СОТ получается такой знакомый ряд.

Второй способ.

Попытаемся всё же посчитать 2016 вычетов в полюсах.

$$1) \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016} - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^{2016}}}{z^{2016} - 1} = -1.$$

$$2) \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016} - 1)} = \frac{e^{z_k^{2016}}}{z_k 2016 z_k^{2015}} = \frac{e}{2016}.$$

Вот это да! Вычеты во всех 2016 точках одинаковы!

Поэтому

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{z^{2016}}}{z(z^{2016} - 1)} dz = 2\pi i \left(-1 + 2016 \cdot \frac{e}{2016} \right) = 2\pi i(e - 1).$$

Ответ. $2\pi i(e - 1)$. ◀

Пример 1.22. Вычислите $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z + \frac{2}{\pi}}{2 \sin \frac{1}{3z} - 1} dz$.

► Найдём особые точки:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{3z} - 1 = 0 &\iff \frac{1}{3z} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \iff \\ &\iff z_k = \frac{2}{\pi((-1)^k + 6k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Оказалось, что внутри окружности находится бесконечно много полюсов — теорема о вычетах не применима. Вне: $z = \frac{2}{\pi}$ и $z = \infty$. Поэтому другого пути нет — придётся искать вычеты в полюсах 1-го порядка в точках $z = \frac{2}{\pi}$ и $z = \infty$.

Найдём коэффициент при $\frac{1}{z}$ ряда Лорана в $z = \infty$:

$$\begin{aligned} z + \frac{2}{\pi} &= -z \frac{1 + \frac{2}{\pi z}}{1 - \frac{2}{3z} + \frac{2}{3!27z^3} + o\left(\frac{1}{z^4}\right)} = \\ 2 \sin \frac{1}{3z} - 1 &= -z \left(1 + \frac{2}{\pi z}\right) \left(1 + \frac{2}{3z} + \frac{4}{9z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{z} \left(\frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9}\right) + \dots \Rightarrow \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z + \frac{2}{\pi}}{2 \sin \frac{1}{3z} - 1} = \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9}. \\ \operatorname{res}_{z=\frac{2}{\pi}} \frac{z + \frac{2}{\pi}}{2 \sin \frac{1}{3z} - 1} &= \frac{4}{2\pi \cos \frac{1}{3z} \cdot -\frac{1}{3z^2}} \Bigg|_{\frac{2}{\pi}} = -\frac{16\sqrt{3}}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z + \frac{2}{\pi}}{2 \sin \frac{1}{3z} - 1} dz = -2\pi i \left(-\frac{16\sqrt{3}}{\pi^3} + \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9} \right).$$

Ответ. $-2\pi i \left(-\frac{16\sqrt{3}}{\pi^3} + \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9} \right)$. ◀

Пример 1.23. Вычислите $\oint_{|z|=1} e^{\frac{\pi}{2}(z+\frac{1}{z})} dz$.

► Очень интересный пример!

Во-первых, задача с параметром x !

Во-вторых, подынтегральная функция имеет две особые точки — обе точки являются существенно особыми: $z = 0$ и $z = \infty$, а ряды по степеням z в обеих точках одинаковы!

Поэтому абсолютно всё равно, в какой из особых точек считать вычеты.

Пусть это будет точка $z = 0$.

Тогда $\oint_{|z|=1} e^{\frac{\pi}{2}(z+\frac{1}{z})} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{\pi}{2}(z+\frac{1}{z})}$.

Вычет будем искать разложением в окрестности $z = 0$ в ряд Тейлора $e^{\frac{\pi z}{2}}$ и разложением в ряд Лорана $e^{\frac{\pi}{2z}}$:

$$e^{\frac{\pi}{2}(z+\frac{1}{z})} = e^{\frac{\pi}{2}z} e^{\frac{\pi}{2}\frac{1}{z}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)z + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 z^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n z^n + \dots \right) \times \\
&\times \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{z^n} + \dots \right) = \\
&= \frac{1}{z} \left(\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2+3} + \dots + \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+n+1} + \dots \right) + \\
&+ \text{слагаемые, не содержащие } \frac{1}{z} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} &= \\
&= \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2+3} + \dots + \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+n+1} + \dots = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \oint_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Ответ. $2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$. ◀

§ 1.8. Вычисление интегралов от функций действительного переменного

1.8.1. Выбор контура интегрирования

При вычислении интегралов от функций действительного переменного с помощью интегралов от функции комплексного переменного, прежде всего, возникает вопрос о выборе контура интегрирования.

С чего начать?

1. Часть контура интегрирования должна совпадать с отрезком, по которому ведётся интегрирование заданной функции действительного переменного, или отрезком любой длины, если вычисляется несобственный интеграл по бесконечному промежутку.

2. Так как теория вычетов применяется к интегралам по замкнутому контуру, то нужно контур замкнуть. «Замыкание» осуществляется так, что, либо по дополнительным контурам интегралы будут равны 0, либо мы их сможем вычислить, либо их значения известны.
3. Нередко при вычислении, например, несобственного интеграла от $-\infty$ до $+\infty$ в качестве отрезка действительной оси выбираются симметричные отрезки. Тогда приходится вычислять только в.р. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dx$. Заметим, что, если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dx$ сходится, то в.р. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Рассмотрим пример.

Пример 1.24. Вычислите

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}, \quad a > b > 0.$$

► Этот интеграл в принципе можно вычислять и на первом курсе, сделав универсальную замену переменных $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Но эти вычисления будут громоздкими (попробуйте!),

Попробуем его вычислить, применяя методы ТФКП.

Интеграл от 0 до 2π — ясно, что придётся считать интеграл по окружности. Теперь надо выразить подынтегральную функцию через z . Удачно то, что $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$, т. е. z принадлежит единичной окружности. Теперь выразим $d\varphi$ через dz :

$$z = e^{i\varphi} \Rightarrow dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{-i dz}{z}.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{-i dz}{z \left(a + \frac{b}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{-4iz dz}{(bz^2 + 2az + b)^2}.$$

Найдём нули знаменателя: $bz^2 + 2az + b = 0 \iff z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$, $z_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. Выяснили, что $|z_1| > 1$, а $|z_2| < 1$, поэтому вычет будем считать в точке $z = z_2$. Особая точка $z = z_2$ — полюс второго порядка, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_2} \frac{-4iz}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2} &= -\frac{4i}{b^2} \left(\frac{z}{(z-z_1)^2} \right)'_{z_2} = \frac{4i}{b^2} \frac{z_1 + z_2}{(z_2 - z_1)^3} = \\ &= \frac{-ia}{(\sqrt{a^2 - b^2})^3} \Rightarrow \oint_{|z|=1} -4i \frac{z dz}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = \frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2 - b^2})^3}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2 - b^2})^3}$. ◀

1.8.2. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx$. Лемма Жордана

Исследовать на сходимость (вспомните признак Дирихле) и абсолютную сходимость (вспомните, например, признак Вейерштрасса) несобственные интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx,$$

где $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m, n \in \mathbb{N}$, — рациональная функция, мы умеем. Теперь научимся их вычислять. Будем вычислять $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx$, а тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx. \end{aligned}$$

Но на самом деле мы научимся вычислять интегралы вида $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx$, т. к. будем рассматривать симметричные отрезки на оси Ox , а уже отсюда получим значение обоих интегралов:

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax \, dx &= \text{Im v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} \, dx, \\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax \, dx &= \text{Re v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} \, dx. \end{aligned}$$

При этом мы знаем, что, если интеграл сходится, то $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$.

1.8.2. а) На контуре интегрирования нет особых точек. Лемма Жордана

Для вычисления $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx$ мы будем рассматривать $\oint_C R(z)e^{iaz} dz$, где C — некоторый замкнутый контур.

Предполагаем в этом пункте, что $Q_n(x)$ не имеет действительных корней — в этом случае $\int_{-R}^R R(x)e^{iax} dx$ существует при любом R .

Так как $Q_n(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, то его корни входят комплексно сопряжёнными парами — поэтому в верхней полуплоскости находится только половина корней знаменателя.

Выбираем контур интегрирования. Прежде всего — это отрезок $[-R, R]$. Замыкаем контур полуокружностью C_R (см. рис. 1.10).

Так как $Q_n(x)$ имеет конечное число корней, то найдётся такое R_0 , при котором все корни, расположенные в верхней полуплоскости, будут находиться в

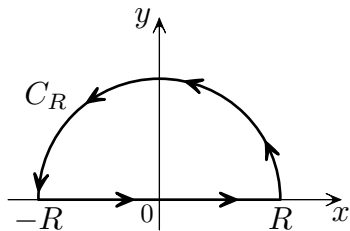


Рис. 1.10

полукруге. Мы будем рассматривать $R > R_0$ — тогда значение $\oint_C f(z) dz$ не будет меняться при увеличении R , т. к. $\oint_C f(z) dz$ полностью определяется особыми точками, расположенными внутри контура.

Желательно, чтобы интеграл по C_R , «ушёл», когда $R \rightarrow \infty$. Для оценки интеграла по C_R служит

Лемма Жордана. Если $a > 0$ и $\max_{z \in C_R} |R(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, то

$$\int_{C_R} R(z) e^{iaz} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Примечание. При нашем выборе полуокружности C_R : $|z| = R$, $\text{Im } z \geq 0$ знак α очень важен, т. к. $e^{i\alpha(x+iy)} = e^{i\alpha x} e^{-\alpha y} \Rightarrow |e^{i\alpha(x+iy)}| = e^{-\alpha y}$.

Если $a < 0$ в интеграле $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx$, то лемма Жордана будет работать в нижней полуплоскости.

Итак, будем рассматривать $\oint_C R(z) e^{iaz} dz$, $\alpha > 0$.

Пример 1.25. Вычислите $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(3-2x)}{x^2-4x+5} dx$.

► Для вычисления интеграла выберем контур интегрирования C : $[-R; R] \cup C_R$ (см. рис. 1.10).

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(3-2x)}{x^2-4x+5} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i(3-2x)}}{x^2-4x+5} dx$, $\alpha = -2 < 0$, а для применения леммы Жордана надо, чтобы было $\alpha > 0$, то перепишем наш интеграл по-другому:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(3-2x)}{x^2-4x+5} dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(2x-3)}{x^2-4x+5} dx = \\ &= - \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{(2x-3)i}}{x^2-4x+5} dx, \quad \alpha = 2 > 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим

$$\oint_C \frac{z e^{(2z-3)i}}{z^2-4z+5} dz = \oint_C \frac{z e^{(2z-3)i}}{(z-(2+i))(z-(2-i))} dz.$$

У подынтегральной функции внутри контура одна особая точка $z = 2 + i$ — полюс 1-го порядка.

Поэтому, с одной стороны, по теореме о вычетах,

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{ze^{(2z-3)i}}{z^2-4z+5} dz &= \\ &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=2+i} \frac{ze^{(2z-3)i}}{z^2-4z+5} = 2\pi i \frac{(2+i)e^{i(4+2i-3)i}}{2(2+i)-4} = \\ &= \pi e^{-2}(2+i)e^i = \pi e^{-2}((2 \cos 1 - \sin 1) + i(2 \sin 1 + \cos 1)). \end{aligned}$$

С другой стороны, так как подынтегральная функция удовлетворяет условиям леммы Жордана, а $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{(2x-3)i}}{x^2-4x+5} dx$ сходится по признаку Дирихле, то

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{ze^{(2z-3)i}}{z^2-4z+5} dz &= \int_{-R}^R \frac{xe^{(2x-3)i}}{x^2-4x+5} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{(2z-3)i}}{z^2-4z+5} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{(2x-3)i}}{x^2-4x+5} dx. \end{aligned}$$

Поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{(2x-3)i}}{x^2-4x+5} dx = \pi e^{-2}((2 \cos 1 - \sin 1) + i(2 \sin 1 + \cos 1))$, а

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(3-2x)}{x^2-4x+5} dx &= -\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{(2x-3)i}}{x^2-4x+5} dx = \\ &= -\pi e^{-2}(2 \sin 1 + \cos 1). \end{aligned}$$

Ответ. $-\pi e^{-2}(2 \sin 1 + \cos 1)$. ◀

1.8.2. б) Особые точки на контуре интегрирования

При вычислении интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx$ встречаются и такие, у которых $Q_n(x)$ имеет действительные корни $z_k = a_k \in \mathbb{R}$ — тогда их надо «обходить» по полуокружностям $|z - a_k| < \rho$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Предварительно проведём несколько дополнительных вычислений.

Дополнение

- Пусть $z = a$ - полюс 1-го порядка функции $f(z)$.

Рассмотрим $\int_{\gamma} f(z) dz$, где γ — полуокружность $|z - a| = \rho$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, проходимая в направлении, при котором точка $z = a$ остаётся слева.

Так как $z - a$ — П1, то

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|z-a|=\rho_1 \\ \text{Im } z \geq 0}} f(z) dz &= \int_{\substack{|z-a|=\rho_1 \\ \text{Im } z \geq 0}} \left(\frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_0^{\infty} a_k (z-a)^k \right) dz = \\ &= \left[z-a = \rho e^{i\varphi} \right] = \int_0^{\pi} \left(\frac{a_{-1}}{\rho e^{i\varphi}} + \sum_0^{\infty} a_k \rho^k e^{ik\varphi} \right) \rho e^{i\varphi} i d\varphi = \\ &= i\pi a_{-1} + i \sum_0^{\infty} a_k \rho^{k+1} \int_0^{\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} i\pi \operatorname{res}_{z=a} f(z). \end{aligned}$$

Итак, $\int_{\substack{|z-a|=\rho \\ \text{Im } z \geq 0}} f(z) dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} i\pi \operatorname{res}_{z=a} f(z)$.

2. Пусть теперь $z = a$ — УОТ. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|z-a|=\rho \\ \text{Im } z \geq 0}} f(z) dz &= \int_{\substack{|z-a|=\rho \\ \text{Im } z \geq 0}} \sum_0^{\infty} a_k (z-a)^k dz = \left[z-a = \rho e^{i\varphi} \right] = \\ &= \int_0^{\pi} \sum_0^{\infty} a_k \rho^k e^{ik\varphi} \rho e^{i\varphi} i d\varphi = i \sum_0^{\infty} a_k \rho^{k+1} \int_0^{\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} 0. \end{aligned}$$

Мы доказали, что, если $a \in \mathbb{C}$ — полюс 1-го порядка (П1) или устранимая особая точка (УОТ), то

$$\int_{\substack{|z-a|=\rho \\ \text{Im } z \geq 0}} f(z) dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} i\pi \operatorname{res}_{z=a} f(z), \quad (1.25)$$

если полуокружность проходит в направлении, при котором точка $z = a$ остаётся слева.

Пример 1.26. Вычислите интеграл Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$.

► Заметим, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \quad I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = -I(-a)$$

— нечётная функция относительно параметра a . Очевидно, что $I(0) = 0$. Поэтому достаточно найти $I(a)$ для $a > 0$.

Заметим также, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx$, но, в отличие от сходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx$ расходится в 0 — поэтому нам придётся «обойти» эту особую точку..

Однако существует

$$J(a) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax + i \sin ax}{x} dx = \\ = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx,$$

т. к. $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x} dx = 0$, а $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$ сходится.

$$\text{Итак } I(a) = -i \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx \iff I(a) = -iJ(a).$$

Будем рассматривать $\oint_C \frac{e^{iaz}}{z} dz$ по некоторому замкнутому контуру C .

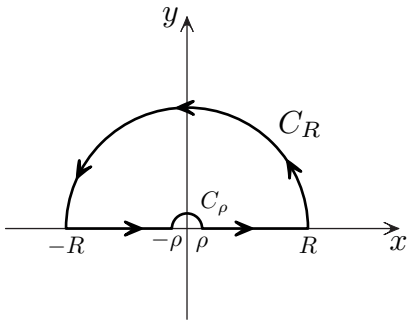


Рис. 1.11

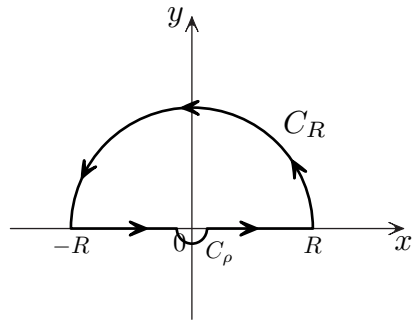


Рис. 1.12

Первый способ.

Подынтегральная функция имеет одну особую точку: $z = 0$ — полюс 1-го порядка.

Поэтому выберем контур, изображённый на рис. 1.11. Внутри выбранного контура особых точек нет — работает интегральная теорема Коши: $\oint_C \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_C \frac{e^{iaz}}{z} dz = \\
 &= \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow +\infty} \\
 &\xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow +\infty} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx - i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx - i\pi \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = i\pi, \quad \text{т. к.}
 \end{aligned}$$

1) $\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ по лемме Жордана,

2) $\int_{C_\rho} \frac{e^{iaz}}{z} dz \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} -i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iaz}}{z}$ по пункту 1). Дополнения (но полуокружность обходится по часовой стрелке — поэтому взят знак -).

Итак,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = i\pi \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0,$$

откуда, в силу нечётности $I(a)$, получаем, что $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx =$

$$= \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a, \quad \text{где } \operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a$.

Второй способ.

Между прочим, контур можно выбрать другой — как, например, на рис. 1.12.

Тогда (запишем коротко)

$$2\pi i \cdot 1 = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \oint_C \frac{e^{iaz}}{z} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow +\infty} \\
&\xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow +\infty} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx + i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iaz}}{z} = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx + i\pi \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = i\pi,
\end{aligned}$$

т. к. $\int_{C_\rho} \frac{e^{iaz}}{z} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iaz}}{z}$ по пункту 1) Дополнения (но по-луоокружность обходится теперь против часовой стрелки).

Ответ. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a$. ◀

Пример 1.27. Вычислите $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx$, если

1) $a > 0$, 2) $a < 0$.

► В отличие от предыдущих примеров, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx$ расхо-дится в 0. Поэтому существует только

$$I(a) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx.$$

Заметим, что $I(0) = 0$, а

$$\begin{aligned}
I(a) &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos ax - i \sin ax}{x^2} dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx,
\end{aligned}$$

т. е. $I(a) = I(-a)$.

Поэтому достаточно вычислить интеграл для $a > 0$. Заме-тим, однако, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx$ вычисляется в матанализе с помощью дифференцирования по параметру. Но мы его вы-числим с помощью интеграла по замкнутому контуру.

Выберем контур интегрирования (см. рис. 1.11).

Будем вычислять $\oint_C \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz$. Подынтегральная функция имеет одну особую точку $z = 0$ — полюс 1-го порядка. Внутри выбранного контура особых точек нет — работает интегральная теорема Коши: $\oint_C \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = 0$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_C \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \int_{-R}^{-\rho} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{\rho}^R \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \\
 &\quad + \int_{C_\rho} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz + \int_{C_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \\
 &\xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx - i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} \iff \\
 &\iff \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx = i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2},
 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz \right| &\leq \left| \int_{C_R} \frac{1}{z^2} dz \right| + \left| \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz \right|, \quad \text{а} \\
 \left| \int_{C_R} \frac{1}{z^2} dz \right| &= \left| \int_{\pi}^0 \frac{e^{-i\varphi}}{R^2} R d\varphi \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad \left| \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

по лемме Жордана.

Так как

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(1 - e^{iaz})}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - iaz + o(z)}{z} = -ia,$$

то

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx = i\pi(-ia) = \pi a.$$

В силу чётности $I(a)$, $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx = \pi|a|$.

Ответ. $\pi|a|$.

Можно не вычислять интеграл при $a < 0$. Тем не менее мы приведём вычисления лишь для того, чтобы показать, как работать с $a < 0$.

Вычисление интеграла для $\alpha < 0$.

Первый способ.

Так как $a < 0$, выберем другой контур интегрирования — контур на рис. 1.13, проходимый против часовой стрелки.

Тогда

$$\int_R^\rho \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{-\rho}^{-R} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} -\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx.$$

На новой полуокружности C_R для $\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz$ работает лемма Жордана при $a < 0$

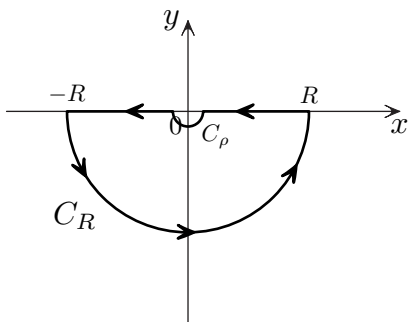


Рис. 1.13

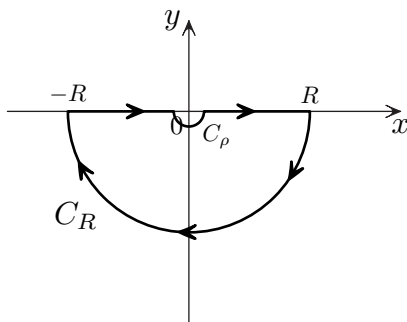


Рис. 1.14

Внутри контура нет особых точек — поэтому (оценка интегралов по C_R аналогична проведённой в предыдущем пункте)

$$0 = \oint_C \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \int_R^\rho \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{-\rho}^{-R} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{C_\rho} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz + \int_{C_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} -\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx - i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} \iff \\ & \iff \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx = -i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} = -i\pi(-ia) = -\pi a. \end{aligned}$$

Итак, $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx = -\pi a$, $a < 0$. **Ответ.** $-\pi a$, $a < 0$.

Ответ. 1) πa ; 2) $-\pi a$.

Второй способ.

Интеграл можно вычислить и «в лоб» по контуру рис. 1.14 сразу в нужном направлении. Но тогда работы больше — придётся считать вычеты ещё в двух точках: $z = 0$, $z = \infty$.

Тогда, с одной стороны,

$$\oint_C \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} + \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} \right) = 0,$$

т. к.

$$\left. \frac{1 - 1 - iaz + \dots}{z^2} \right|_{\infty} = \frac{1}{z}(-ia) + \dots \Rightarrow \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} = ia.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \int_{-R}^{-\rho} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{C_\rho} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz + \\ & \quad + \int_{\rho}^R \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{C_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} \iff \\ & \iff \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + i\pi(-ia) = 0 \iff \\ & \iff \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx = -\pi a. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Примечание. Заметим, что на действительной оси интегралы $\int_{-l}^l R(x) \cos ax \, dx$, $\int_{-l}^l R(x) \sin ax \, dx$ совпадают с интегралами $\int_{-l}^l R(z) \cos az \, dz$, $\int_{-l}^l R(z) \sin az \, dz$. Тогда почему не рассматриваются интегралы $\int_C R(z) \sin az \, dz$, $\int_C R(z) \cos az \, dz$? Дело в том, что, по лемме Жордана, $\int_{C_R} R(z) e^{iaz} \, dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, если, например, $\alpha > 0$ и C_R находится в верхней полуплоскости, а

$$\begin{aligned} \int_{C_R} R(z) \sin az \, dz &= \int_{C_R} R(z) \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i} \, dz = \\ &= \int_{C_R} R(z) \frac{e^{a(-y+ix)} - e^{a(y-ix)}}{2i} \, dz \end{aligned}$$

и, как видно, интеграл «уйдёт» в ∞ при $y \rightarrow +\infty$.

Следующий пример интерес тем, что выбор контура не так прост.

Пример 1.28. Вычислите интегралы Френеля:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx, \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx.$$

► Ясно, что $\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{ix^2} \, dx$, $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{ix^2} \, dx$. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} \, dx$ — это сумма двух сходящихся по признаку Дирихле интегралов. Выберем отрезок $[0; R]$ в качестве части контура. В силу сходимости интегралов, $\int_0^R e^{ix^2} \, dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{ix^2} \, dx$.

Теперь надо чем-то «замыкать» контур.

Заметим, что

$$\int_C e^{iz^2} \, dz = \int_C e^{i(x^2-y^2)} e^{-2xy} \, dz$$

и при $x = y \Rightarrow \int_{x=y} e^{iz^2} \, dz = \int_{x=y} e^{-2x^2} (1+i) \, dx$ — это, с точностью до const, может быть интегралом Пуассона.

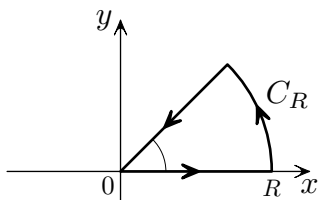


Рис. 1.15

Поэтому в качестве второй границы выберем часть луча $x = y$ и замкнём контур дугой окружности C_R радиуса R (см. рис. 1.15). Тогда на луче $x = y$

$$\int_0^R e^{-2x^2} (1+i) dx =$$

$$= - \int_0^{R \cos \frac{\pi}{4}} e^{-2x^2} (1+i) dx = - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Осталось оценить интеграл по дуге:

$$\left| \int_{C_R} e^{i(x^2-y^2+2ixy)} dz \right| \leq \int_{C_R} e^{-2xy} |dz| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2\varphi} R d\varphi.$$

Известно, что $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2\varphi} R d\varphi \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4R^2\varphi}{\pi}} R d\varphi = - \frac{\pi}{4R} (e^{-R^2} - 1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Так как особых точек внутри нашего контура нет, то применима интегральная теорема Коши:

$$0 = \oint_C e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + (1+i) \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^0 e^{-2x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} I - (1+i) \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \iff$$

$$\iff I = (1+i) \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx \iff$$

$$\iff \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}; \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$. ◀

ГЛАВА II. МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 2.1. Многозначные функции. Определение. Регулярные ветви

2.1.1. Определение $\text{Ln } z$

Определение. По определению, положим

$$\text{Ln } z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}. \quad (2.1)$$

Заметим, что $\int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ — это криволинейный интеграл 2-го рода. Он зависит от кривой, соединяющей точки $\xi = 1$ и $\xi = z$. Пусть задана кривая $\gamma: \xi = r(t)e^{i\varphi(t)}$. Тогда $d\xi = dr e^{i\varphi(t)} + ir(t)e^{i\varphi(t)} d\varphi$ и

$$\begin{aligned} \text{Ln } z &= \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^z \frac{e^{i\varphi} dr + ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = \\ &= \int_1^{|z|} \frac{dr}{r} + \int_{\varphi(1)}^{\varphi(z)} d\varphi = \ln |z| + i\Delta_\gamma\varphi, \quad \text{т. е.} \end{aligned}$$

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i\Delta_\gamma\varphi, \quad (2.2)$$

где $\Delta_\gamma\varphi$ — приращение аргумента z при движении точки из $z = 1$ в рассматриваемую точку z по кривой γ .

А чему может быть равен $\text{Ln } z|_{z=1}$?

Рассмотрим кривую γ , проходящую против часовой стрелки, охватывающую начало координат и возвращающуюся в точку $z = 1$, например, окружность $|z| = 1$. Тогда

$$\text{Ln } z|_{z=1} = \oint_{|z|=1} \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi i!$$

Если кривая «обойдёт» начало координат в одном и том же направлении k раз, то

$$\operatorname{Ln} z|_{z=1} = \oint_{|z|=1} \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где знак k выбирается в соответствии с направлением обхода.

На практике, конечно, при вычислении $\operatorname{Ln} 1$ не очень понятно, сколько раз уже «обошли» $z = 0$. Поэтому в общем случае значение $\operatorname{Ln} 1$ имеет вид

$$\operatorname{Ln} 1 = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

а в «частных» случаях значение придётся находить отдельно.

Посмотрим, как влияет кривая γ на значение логарифма в точке z (см. рис. 2.1–2.3).

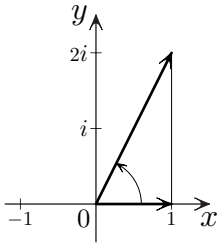


Рис. 2.1

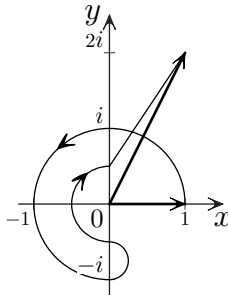


Рис. 2.2

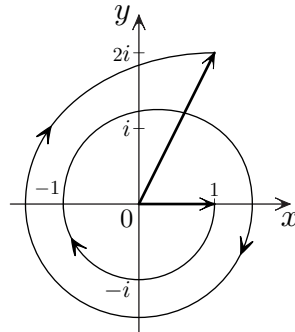


Рис. 2.3

Видно, что на рис. 2.1 при движении по прямой из $z = 1$ в рассматриваемую точку z приращение аргумента просто совпадает с величиной угла между вектором z и осью Ox — в данном случае это $\arctg 2$, т. е. $\operatorname{Ln}(1 + 2i) = \ln \sqrt{5} + i \arctg 2$.

На рис. 2.2 кривая γ довольно «экзотична», но приращение аргумента по-прежнему равно величине угла между осью Ox и вектором z . При движении по кривой γ вектор z то отклонился влево, затем развернулся в обратную сторону.

На рис. 2.3 картина другая — вектор повернулся в другую сторону на угол, равный $(4\pi - \operatorname{arctg} 2)$. Тогда $\operatorname{Ln}(1 + 2i) = \ln \sqrt{5} + i(\operatorname{arctg} 2 - 4\pi)$.

В одной и той же точке получили разные значения $\operatorname{Ln} z$! Функция $\operatorname{Ln} z$ — *многозначная!*

Когда приращение аргумента меняется, а когда — нет?

Так как $x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg}(\varphi + \pi k)$, то $d\varphi = d \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ и $\int_{\gamma} d\varphi = \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ — криволинейный интеграл второго рода. Подынтегральное выражение является полным дифференциалом в любой *односвязной области, не содержащей* начало координат.

Отсюда следует, что, если внутри замкнутого контура в односвязной области нет точки $z = 0 \iff x^2 + y^2 = 0$, то $\oint_{\gamma} d\varphi = \oint_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$, а, если $z = 0$ находится внутри, то $\oint_{\gamma} d\varphi = 2\pi k$ при k -кратном обходе $z = 0$ в одном направлении.

Поэтому, если γ — произвольная кривая в односвязной области, не охватывающая начало координат, то $\int_1^{\varphi(z)} d\varphi = \int_1^{(x,y)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ зависит только от точки z и *не зависит* от кривой, соединяющей 1 и z (см. рис. 2.1–2.2).

Если контур охватывает начало координат, то значение интеграла может изменяться при каждом обходе на 2π или -2π в зависимости от направления обхода (см. рис. 2.3).

Так как Δ , $\varphi(z)$ отличаются, в зависимости от γ , на $2\pi k$, то геометрически в плоскости это угол φ_0 между векторами $z = 1$ и z плюс $2\pi k$, т. е. $\Delta_{\gamma} \varphi(z)$ — одно из значений аргумента z .

Так как $\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln |z| + i\Delta \varphi_{\gamma}(z)$, то значение $\operatorname{Ln} z$ в точке имеет вид

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i(\varphi_* + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.4)$$

где φ_* — одно из возможных значений аргумента z .

П р и м е ч а н и е. Мы не будем использовать обозначение $\operatorname{Arg} z$, а $\arg z$ обозначает любое возможное значение аргумента z .

Рассмотрим интеграл внимательней.

По определению, $\text{Ln } z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln |z| + i\Delta_\gamma\varphi$, где $\Delta_\gamma\varphi$ — приращение аргумента z при движении точки из $z = 1$ в рассматриваемую точку z .

Но не всегда удобно рассматривать именно это приращение — бывает, что $z = 1$ вообще не принадлежит области рассмотрения $\text{Ln } z$. Часто значение $\text{Ln } z$ известно в некоторой точке z_0 — оно зависит от того, по какой кривой γ_0 «пришли» в эту точку из точки $z = 1$. Так как $\ln |z|$ однозначная функция в плоскости, то значение $\text{Ln } z$ полностью определится значением аргумента z в точке z_0 .

Как тогда найти значение $\text{Ln } z$?

Имеем

$$\begin{aligned} \text{Ln } z &= \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{z_0} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{z_0}^z \frac{d\xi}{\xi} = \\ &= \ln |z_0| + i(\varphi_{\gamma_0}(z_0) - \varphi(1)) + \ln |z| - \ln |z_0| + i(\varphi_\gamma(z) - \varphi(z_0)) = \\ &= \ln |z| + i(\varphi(z_0) + \Delta_\gamma\varphi) = \ln |z| + i(\arg z_0 + \Delta_\gamma\varphi). \end{aligned}$$

Теперь $\Delta_\gamma\varphi$ — приращение аргумента z при движении уже от точки z_0 до z по кривой γ , а $\varphi_{\gamma_0}(z_0) - \varphi(1)$ — аргумент z_0 , который зависят от того, как «пришли» из 1 в z_0 . Он имеет вид $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ где α — одно из возможных значений аргумента z_0 .

Например, $\arg(-1) = \pi + 2\pi k = -\pi + 2\pi m$, $k, m \in \mathbb{Z}$ и т. д.

Итак, получили формулу для многозначной функции $\text{Ln } z$:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z_0 + \Delta_\gamma\varphi), \quad (2.5)$$

где $\Delta_\gamma\varphi$ — это приращение аргумента z при движении по кривой γ от точки z_0 до точки z . Оно существенно зависит от кривой и является неоднозначной функцией в плоскости.

Поэтому ещё раз подчеркнём, что

$\text{Ln } z$ — многозначная функция.

При работе с формулой (2.5) в качестве точки z_0 может быть взята и точка $z = 1$. При этом значение $\arg 1$ может быть отлично от 0 — оно имеет вид $2\pi ki$. Ведь не известно, сколько

раз уже обошли начало координат до того, как заинтересовались тем, как меняется $\operatorname{Ln} z$ при дальнейшем изменении z .

П р и м е ч а н и е. Можно показать, что $\operatorname{Ln} z$ — это функция, обратная к экспоненте:

► $e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln|z|+i \arg z} = |z|e^{i \arg z} = z.$ ◀

2.1.2. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления $\operatorname{Ln} z$.

Регулярные ветви $\operatorname{Ln} z$ в плоскости с разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$. Производная ветви $\operatorname{Ln}_* z$, $\operatorname{Ln}_* f(z)$

Обозначение. Значком * внизу будем обозначать ветвь многозначной функции.

Определение. Точка $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется точкой ветвления многозначной функции $F(z)$, если $F(z)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ и после обхода точки $z = a$ по замкнутому контуру, принадлежащему её окрестности, значение функции меняется.

Определение. Регулярная в области D функция $f(z)$ называется регулярной ветвью многозначной функции $F(z)$, если её значения в каждой точке D совпадают с одним из значений $F(z)$ в этой точке.

В предыдущем пункте было показано, что значение $\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ в любой точке односвязной области плоскости, не содержащей начало координат, зависит только от точки z и не зависит от кривой γ , соединяющей 1 и z , т. е. функция в этой области является однозначной функцией точки, т. е. в такой области существует регулярная ветвь $\operatorname{Ln} z$.

Если же γ «охватывает» начало координат, то значение может меняться.

Покажем, что $\operatorname{Ln} z$ имеет две точки ветвления: $z = 0$ и $z = \infty$.

Точка $z = 0$ является точкой ветвления функции $\operatorname{Ln} z$.

► По определению, $\operatorname{Ln} z = \ln|z|+i(\arg z_0+\Delta_\gamma\varphi)$. Зафиксируем какое-нибудь значение аргумента z_0 : $\operatorname{Ln} z_0 = \ln|z_0| + i \arg z_0$ и обойдём начало координат по любой простой замкнутой кривой γ , например, против часовой стрелки. При этом значение

аргумента увеличилось на 2π , а, значит, и изменилось значение $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0 . Оно стало равным $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z_0 + 2\pi)$. ◀

Точка $z = \infty$ тоже является точкой ветвления функция $\operatorname{Ln} z$.

► В нашем пособии $z = \infty$ всегда особая точка. Заметим, что обход $z = 0$ — это обход и $z = \infty$ (только в противоположном направлении), т. к. в плоскости нет других особых точек, а потому и $z = \infty$ — точка ветвления функция $\operatorname{Ln} z$. ◀

При обходе несколько раз в одном направлении $z = 0$ или $z = \infty$ мы никогда не вернёмся к начальному значению. Такая точка ветвления называется точкой ветвления бесконечного порядка, или *логарифмической точкой ветвления*.

Исключим возможность обхода точек ветвления — проведём произвольный разрез, их соединяющий. Тогда в получившейся односвязной плоскости с разрезом $\int_a^b d\varphi = \int_a^b \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ зависит только от точек a , b и не зависит от кривой, их соединяющих.

Это значит, что в этой области $\Delta_\gamma \varphi$ не зависит от γ и $\operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви

$$\operatorname{Ln}_k z = f_k(z) = \ln |z| + i(\varphi_{0k} + \Delta\varphi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

где $\varphi_{0k} = \varphi_0 + 2\pi k$, а φ_0 — одно из возможных значений аргумента z в точке z_0 .

Как видно, $f_k(z)$ полностью определяется значением аргумента $f_k(z)$ в одной точке — точке z_0 , вернее значением аргумента z_0 . Формулу (1.6) можно записать и по-другому:

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \ln |z| + i(\varphi_{0k} + \Delta\varphi) \Rightarrow \\ f_k(z_0) &= \ln |z_0| + i\varphi_{0k} \iff i\varphi_{0k} = f_k(z_0) - \ln |z_0| \Rightarrow \\ f_k(z) &= \ln |z| + f_k(z_0) - \ln |z_0| + i\Delta\varphi = f_k(z_0) + \ln \left| \frac{z}{z_0} \right| + i\Delta\varphi. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ln}_k z = f_k(z) = f_k(z_0) + \ln \left| \frac{z}{z_0} \right| + i\Delta\varphi. \quad (2.7)$$

Ещё раз отметим, что в плоскости с разрезом от 0 до ∞ приращение $\Delta\varphi$ не зависит от γ !

С многозначными функциями приходится обращаться очень внимательно.

Например, как связать $\text{Ln } z^2$ с $\text{Ln } z$?

Здесь нам потребуются формулы (1.3).

В отличие от такой неоднозначной связи между аргументом произведения и аргументами сомножителей, в теории показывается, что связь между приращениями аргументов вдоль кривой однозначна:

$$\Delta \arg(z_1 z_2) = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 \quad (2.8)$$

и, в частности,

$$\Delta \arg(z^2) = 2\Delta \varphi. \quad (2.9)$$

Воспользуемся формулой (1.3): $\arg z_0^2 = 2 \arg z_0 + 2\pi k \neq 2 \arg z_0$ и свойством приращений $\Delta_\gamma \arg z^2 = 2\Delta_\gamma \arg z$.

Тогда $\text{Ln } z^2 = 2 \ln |z| + i(\arg z_0^2 + 2\Delta_\gamma \varphi) = 2 \ln |z| + i(2 \arg z_0 + 2\pi k + 2\Delta_\gamma \varphi)$, а

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z_0 + \Delta_\gamma \varphi) \Rightarrow 2 \text{Ln } z = 2 \ln |z| + i(2 \arg z_0 + 2\Delta_\gamma \varphi).$$

Поэтому в общем случае

$$\text{Ln } z^2 \neq 2 \text{Ln } z. \quad (2.10)$$

Удобней пользоваться формулой

$$\text{Ln } z^2 = 2 \ln |z| + i(\arg z_0^2 + 2\Delta_\gamma \varphi). \quad (2.11)$$

Теперь приведём ещё одну формулу:

$$\text{Ln } f^2(z) = 2 \ln |f(z)| + i(\arg f^2(z_0) + 2\Delta_\gamma \arg f(z)). \quad (2.12)$$

Опять замечаем, что, так как $\arg f^2(z_0) = 2 \arg f(z_0) + 2\pi n$, то, вообще говоря,

$$2 \text{Ln } f(z) \neq \text{Ln } f^2(z).$$

Теперь заметим, что все ветви $\text{Ln}_* z$ многозначной функции $\text{Ln } z$ в окрестности точки отличаются на $2\pi k$, поэтому

$$(\text{Ln}_* z)' = \frac{1}{z}, \quad (2.13)$$

а тогда и

$$(\text{Ln}_* f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}. \quad (2.14)$$

2.1.3. Функция z^α

Определение. По определению,

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln|z| + i(\varphi_0 + \Delta_\gamma \varphi))} = |z|^\alpha e^{i\alpha(\varphi_0 + \Delta_\gamma \varphi)}. \quad (2.15)$$

Дано новое определение степени. А не изменятся ли при этом свойства привычных целых степеней z ?

2.1.3. а) Функция z^n , $n \in \mathbb{Z}$ является однозначной функцией в $\overline{\mathbb{C}}$

► По новому определению, $z^n = e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n(\ln|z| + i(\varphi_0 + \Delta_\gamma \varphi))}$ — это композиция экспоненты и многозначного логарифма. Поэтому проверим, не являются ли точки $z = 0$ и $z = \infty$ точками ветвления.

Пусть в некоторой точке, по определению, $z_0^n = e^{n(\ln|z_0| + i\varphi_0)}$. Обойдём начало координат (значит, и $z = \infty$). Получим значение после возвращения: $z_0^n|_* = e^{n(\ln|z_0| + i(\varphi_0 + 2\pi))} = e^{n(\ln|z_0| + i\varphi_0)} = z_0^n$. Функция однозначна. ◀

2.1.3. б) Функция $\sqrt[n]{z}$ имеет две точки ветвления: $z = 0$ и $z = \infty$. Производная ветви. Арифметический корень n -й степени, $\sqrt[n]{x}$, ${}_{2n+1}\sqrt{x}$

Функция распадается на регулярные ветви в плоскости с произвольным разрезом, соединяющим точки $z = 0$ и $z = \infty$.

► По определению, $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\operatorname{Ln} z}{n}} = e^{\frac{\ln|z| + i(\varphi_0 + \Delta_\gamma \varphi)}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi_0}{n}} e^{\frac{i(\Delta_\gamma \varphi)}{n}}$, $\sqrt[n]{z_0} = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi_0}{n}}$.

Обойдём начало координат (значит, и $z = \infty$). Получим значение после возвращения: $\sqrt[n]{z_0}|_* = e^{\frac{\ln|z_0| + i(\varphi_0 + 2\pi)}{n}} = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi_0}{n}} e^{\frac{2\pi i}{n}} \Rightarrow$ если $n > 1$, то значение изменилось.

Следовательно $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления.

Обойдём начало координат (значит, и $z = \infty$) ещё раз в том же направлении. Получим после возвращения: $\sqrt[n]{z_0}|_{**} = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi_0}{n}} e^{\frac{4\pi i}{n}} \neq |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi_0}{n}}$, если $n > 2$. После k -го, $k < n$, обхода получим $\sqrt[n]{z_0} e^{\frac{2\pi ki}{n}} \neq \sqrt[n]{z_0}$, а после n -го обхода, как видно, вернёмся к начальному значению.

Такая точка ветвления называется точкой ветвления конечного порядка, или *алгебраической точкой ветвления*.

Чтобы исключить многозначность, соединим произвольным разрезом $z = 0$ и $z = \infty$. Тогда функция $\sqrt[n]{z}$ распадётся на n однозначных в плоскости с разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$ функций $f_k(z)$

$$f_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i\varphi_{0k}}{n}} e^{\frac{i\Delta\varphi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (2.16)$$

— регулярных ветвей $\sqrt[n]{z}$, где $\varphi_{0k} = \varphi_0 + 2\pi k$, φ_0 — одно из возможных значений аргумента z_0 . ◀

Регулярную в плоскости с разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$ ветвь можно записать и по-другому:

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i\varphi_{0k}}{n}} e^{\frac{i\Delta\varphi}{n}} \Rightarrow f_k(z_0) = \sqrt[n]{|z_0|} e^{\frac{i\varphi_{0k}}{n}} \iff \\ &\iff e^{\frac{i\varphi_{0k}}{n}} = \frac{f_k(z_0)}{\sqrt[n]{|z_0|}} \Rightarrow f_k(z) = f_k(z_0) \sqrt[n]{\left| \frac{z}{z_0} \right|} e^{\frac{i\Delta\varphi}{n}}, \\ f_k(z) &= f_k(z_0) \sqrt[n]{\left| \frac{z}{z_0} \right|} e^{\frac{i\Delta\varphi}{n}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В плоскости с разрезом от 0 до ∞ приращение $\Delta\varphi$ не зависит от γ !

П р и м е ч а н и е. Формулами (2.7) и (2.17) мы в нашем пособии пользоваться практически не будем, предпочитая формулы (2.6) и (2.16). Это потому, что ветвь определяется, вообще говоря, не значением $f(z)$, а значением $\arg z_0$. Кроме того, применение формул (2.6) и (2.16), на наш взгляд, даёт возможность чётче почувствовать сам факт выделения ветви.

Регулярную ветвь $f_0(z)$ многозначной функции $\sqrt[n]{z}$, определённую в плоскости с разрезом по отрицательной полуоси, для которой $f_0(1) = 1$, иногда называют *главной ветвью* $\sqrt[n]{z}$. Вероятно, это потому, что на положительной полуоси $f_0(z)$ принимает значения арифметического корня n -ой степени из x : $f_0(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $x \geq 0$ и значения корня чётной степени из x : $f_0(x) = \sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$, $x \geq 0$.

При этом можно заметить, что $f_0(z)$ не существует при $x < 0$ — там разрез. А на верхнем и нижнем берегах разреза

$f_0(z)$ принимает комплексные значения. А что с корнем нечётной степени из x ?

Как известно, $^{2n+1}\sqrt{x}$ определён при $x \in \mathbb{R}$, а $x^{\frac{1}{2n+1}}$ при $x \geq 0$. Но нет ни одной ветви $^{2n+1}\sqrt{z}$, значения которой совпали бы со значениями $^{2n+1}\sqrt{x}$ на всей числовой оси.

Пусть $f_*(z)$ — произвольная ветвь $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$. Тогда

$$f_*^n(z) = z \Rightarrow n f_*^{n-1}(z) f'_*(z) = 1 \iff \\ \iff f'_*(z) = \frac{1}{n f_*^{n-1}(z)} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{z})_*^{n-1}}. \quad (2.18)$$

Заметим, что при этом $f'_*(z) \neq \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$.

Если $f_*(z)$ — произвольная ветвь $\sqrt[n]{g(z)}$, то

$$f_*^n(z) = g(z) \Rightarrow n f_*^{n-1}(z) f'_*(z) = g'(z) \iff \\ \iff f'_*(z) = \frac{g'(z)}{n f_*^{n-1}(z)} = \frac{g'(z)}{n (\sqrt[n]{g(z)})_*^{n-1}}. \quad (2.19)$$

2.1.3. в) Функция $\sqrt[n]{z^n}$ не имеет точек ветвления. Формула $\sqrt[n]{z^n}$ представляет собой n различных однозначных в $\overline{\mathbb{C}}$ функций:
 $f_k(z) = z e^{\frac{2\pi k i}{n}}, k = 0, 1, \dots, (n-1)$.

► По определению, $\sqrt[n]{z^n} = e^{\frac{\text{Ln } z^n}{n}} = e^{\frac{\ln|z|^n + i(\arg(z_0^n) + n\Delta\gamma\varphi)}{n}}$. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и выберем φ_0 — одно из возможных значений аргумента числа z_0^n ($\arg z_0^n \neq n \arg z_0!$). Тогда $\sqrt[n]{z_0^n} = e^{\frac{\ln|z_0|^n + i(\arg z_0^n)}{n}}$. Обойдём начало координат (значит, и $z = \infty$). Получим значение после возвращения: $\sqrt[n]{z_0^n}|_* = e^{\frac{\ln|z_0|^n + i(\arg(z_0^n) + 2\pi n)}{n}}$ — исходное значение.

Примечание. Если же считать, что $\arg z_0^n = n \arg z_0$, то $\sqrt[n]{z_0^n} = e^{\frac{\text{Ln } z_0^n}{n}} = e^{\frac{\ln|z_0|^n + i(n \arg(z_0))}{n}} = |z_0| e^{i \arg z_0} = z_0$, т.е. это однозначная функция. На самом деле, например, $\sqrt[3]{8} = 2e^{\frac{2\pi k i}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, а согласно только что полученному, $\sqrt[3]{z_0^3} = z_0$, т.е. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

Итак, $z = 0$ и $z = \infty$ не являются точками ветвления. Что же мы получили?

Заметим, что $\sqrt[n]{z^n} = e^{\frac{\text{Ln } z^n}{n}} = e^{\frac{\ln |z|^n + i(n \arg(z_0) + 2\pi m + n\Delta\varphi)}{n}} = e^{\ln |z|} e^{i(\arg z_0 + \Delta\varphi)} e^{\frac{2\pi mi}{n}} = ze^{\frac{2\pi mi}{n}}$, $m = 0, 1, \dots, (n-1)$, т.е. получили n различных однозначных функций

$$\sqrt[n]{z^n} = ze^{\frac{2\pi mi}{n}}, \quad m = 0, 1, \dots, (n-1). \quad \blacktriangleleft \quad (2.20)$$

Пример 2.1. Упростите число i^i .

► По определению, $i^i = e^{i \text{Ln } i} = e^{i(0+i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Комплексное число в комплексной степени, оказалось, представляет собой счётное множество действительных чисел!

Ответ. $e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$. ◀

Пример 2.2. Найдите значение $f(-2+2i)$, $f'(-2+2i)$, где $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[5]{z}$ в плоскости с разрезом, изображённом на рис. 2.4, если $f(1) = 1$.

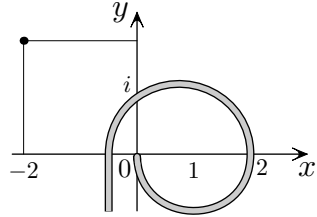


Рис. 2.4

► По определению, $\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{|z|} e^{i\frac{(\varphi_0 + \Delta\varphi)}{5}}$. По условию, $f(1) = 1$. Найдём $e^{\frac{i\varphi_0}{5}}$ для нашей ветви: $f(1) = e^{i\frac{(\varphi_0)}{5}} = 1$. Теперь можно выписать формулу ветви $f(z) = \sqrt[5]{|z|} e^{i\frac{\Delta\varphi}{5}}$, а затем найти $f(-2+2i)$: $f(-2+2i) = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{(2\pi + \frac{3\pi}{4})}{5}} = \sqrt[5]{8} e^{\frac{11\pi i}{20}}$.

Найдём производную:

$$f^5(z) = z \Rightarrow 5f^4(z)f'(z) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{5f^4(z)} \Rightarrow f'(-2+2i) = \frac{e^{-\frac{11\pi i}{5}}}{10\sqrt[5]{2}}.$$

Ответ. $\sqrt[5]{8} e^{\frac{11\pi i}{20}}$; $\frac{e^{-\frac{11\pi i}{5}}}{10\sqrt[5]{2}}$. ◀

2.1.3. г) Функция z^α

Посмотрим, в каком случае начало координат (значит, и $z = \infty$) может оказаться точкой ветвления для z^α . Пусть

$f(z_0) = |z_0|^\alpha e^{\alpha i \varphi_0}$. Обойдём начало координат — получим значение $f^*(z_0) = |z_0|^\alpha e^{\alpha i \varphi_0} e^{2\pi \alpha i}$, которое не равно $f(z_0) = |z_0|^\alpha e^{\alpha i (\varphi_0)}$, если $2\pi \alpha \neq 2\pi k$. Тогда в плоскости с разрезом по кривой, соединяющей 0 и ∞ , z^α распадается на регулярные ветви.

Найдём производную ветви

$$(z^\alpha)'_* = (e^{\alpha \operatorname{Ln} z})'_* = (e^{\alpha \operatorname{Ln} z})_* \cdot \frac{\alpha}{z} = \frac{\alpha(z^\alpha)_*}{z}, \quad \text{т. е.}$$

$$(z^\alpha)'_* = \frac{\alpha(z^\alpha)_*}{z}, \quad (2.21)$$

$$(z^\alpha)'_* = \frac{\alpha(z^\alpha)_*}{z} \neq \alpha z^{\alpha-1}. \quad (2.22)$$

2.1.4. Точки ветвления и регулярные ветви $\sqrt[n]{P_n(z)}$.

Производная ветви

Многозначная функция $\sqrt[n]{P_n(z)}$, где многочлен $P_n(z)$ имеет m , где $2 \leq m \leq n$, различных корней (т. е., по крайней мере, два корня различны), имеет m точек ветвления — это различные корни $P_n(z)$. При этом $z = \infty$ не является точкой ветвления $\sqrt[n]{P_n(z)}$.

Аналитическая функция $\sqrt[n]{P_n(z)}$ распадается на n регулярных ветвей в плоскости с любым разрезом, соединяющим различные корни $P_n(z)$.

► Запишем многочлен в виде: $P_n(z) = (z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2} \dots (z-a_{k_m})^{k_m}$, $\sum_1^m k_i = n$.

По определению,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{P_n(z)} &= \sqrt[n]{(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2} \dots (z-a_{k_m})^{k_m}} = \\ &= \sqrt[n]{|P_n(z)|} e^{\frac{i(\varphi_0 + \Delta_\gamma P_n(z))}{n}}, \end{aligned}$$

где φ_0 — одно из значений аргумента $P_n(z)$ в точке z_0 , $\Delta_\gamma \varphi_i$ — приращение аргумента вектора $z - a_i$ при движении по кривой γ из точки z_0 в z , $\Delta_\gamma P_n(z) = k_1 \Delta_\gamma \varphi_1 + k_2 \Delta_\gamma \varphi_2 + \dots + k_m \Delta_\gamma \varphi_m$.

В точке z_0 :

$$\sqrt[n]{(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2} \dots (z-a_{k_m})^{k_m}} \Big|_{z_0} = \sqrt[n]{|P_n(z_0)|} e^{\frac{i\varphi_0}{n}}.$$

Обойдём точку a_1 по окружности γ_1 с центром в a_i , в которой нет других нулей многочлена (см. рис. 2.5а).

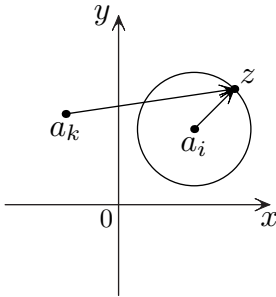


Рис. 2.5а

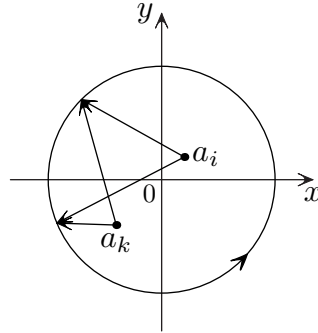


Рис. 2.5б

Вектор $z - a_i$ повернулся вокруг точки $z = a_i$, а остальные векторы «качались» то в одну сторону, то в другую. После возвращения имеем: $\Delta_\gamma \varphi_i = 2\pi$, а все $\Delta_\gamma \varphi_k = 0$, $k \neq i$, и

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{(z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}} \Big|_{z_0^*} &= \sqrt[n]{|P_n(z_0)|} e^{\frac{i(\varphi_0 + 2\pi)}{n}} = \\ &= \sqrt[n]{|P_n(z_0)|} e^{\frac{i\varphi_0}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq \sqrt[n]{|P_k(z_0)|} e^{\frac{i\varphi_0}{n}} \end{aligned}$$

— значение изменилось. Значит, a_i — точка ветвления.

Так как нулей конечное число, то найдётся окружность γ некоторого радиуса, вне которой нет нулей многочлена. Обойдём по ней ∞ (см. рис. 2.5б) Тогда $\Delta_\gamma \varphi_k = 2\pi$, $k = 1, 2, \dots, m$ и после возвращения получим

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{(z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}} \Big|_{z_0^*} &= \\ &= \sqrt[n]{|P_n(z_0)|} e^{\frac{i(\varphi_0 + 2\pi(k_1 + k_2 + \dots + k_m))}{n}} = \sqrt[n]{|P_n(z_0)|} e^{\frac{i(\varphi_0)}{n}} \end{aligned}$$

— значение не изменилось, ∞ не является точкой ветвления.

Чтобы исключить возможность обхода отдельного нуля, сделаем разрез, соединяющий все нули многочлена. Тогда в плоскости с разрезом, соединяющим все различные нули многочлена, полная аналитическая функция $\sqrt[n]{P_n(z)}$ распадается

на n регулярных ветвей

$$f_k(z) = \sqrt[n]{|P_n(z)|} e^{\frac{i(\varphi_{0k} + \Delta_\gamma P_n(z))}{n}}, \quad (2.23)$$

где $\varphi_{0k} = \varphi_0 + 2\pi k$, $k = 0, 1, \dots, (n-1)$, φ_0 — одно из возможных значений аргумента числа $P_n(z_0)$: $f_k(z_0) = \sqrt[n]{|P_n(z_0)|} e^{\frac{i(\varphi_0 + 2\pi k)}{n}}$.

$$f_k(z) = f_k(z_0) \sqrt[n]{\left| \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} \right|} e^{\frac{i\Delta_\gamma P_n(z)}{n}}, \quad (2.24)$$

где $\Delta_\gamma P_n(z) = k_1 \Delta_\gamma \varphi_1 + k_2 \Delta_\gamma \varphi_2 + \dots + k_m \Delta_\gamma \varphi_m$.

Область не односвязна — приращения аргументов зависят от γ , но значение функции не зависит от выбора γ . Поэтому при решении конкретного примера желательно выбирать более удобный «путь» от z_0 к z .

Найдём производную ветви:

$$\begin{aligned} f_k(z) = \sqrt[n]{P_n(z)}_* &\Rightarrow f_k^n(z) = P_n(z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow n f_k^{n-1}(z) f'_k(z) = P'_n(z) \iff f'_k(z) = \frac{P'_n(z)}{n f_k^{n-1}(z)}. \end{aligned}$$

Примечание. Если многозначная функция имеет вид

$$\sqrt[n]{P_k(z)} = \sqrt[n]{(z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}},$$

где $\sum_1^m k_i = k < n$, то $z = \infty$ является точкой ветвления, и функция распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим $z = \infty$ с различными корнями многочлена. ◀

2.1.5. Точки ветвления и регулярные ветви $\sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}}$

Многозначная функция $\sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}}$, где многочлен $P_l(z)$, имеет $1 \leq m \leq l < n$ различных корней, а многочлен $Q_l(z)$ имеет $1 \leq j \leq l < n$ различных корней, то $\sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}}$ имеет $m + j$

точек ветвления — это различные корни $P_l(z)$ и $Q_l(z)$. При этом $z = \infty$ не является точкой ветвления для $\sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}}$.

Аналитическая функция $\sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}}$ распадается на n регулярных ветвей в плоскости с любым разрезом, соединяющим различные корни $P_l(z)$ и $Q_l(z)$.

► Пусть $P_l(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}$, $\sum_{j=1}^m k_j = l$,
 $Q_l(z) = (z - b_1)^{l_1}(z - b_2)^{l_2} \dots (z - b_{l_j})^{l_j}$, $\sum_{i=1}^j l_i = l$. Тогда, по определению,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}}{(z - b_1)^{l_1}(z - b_2)^{l_2} \dots (z - b_{l_j})^{l_j}}} &= \\ &= \sqrt[n]{\left| \frac{P_l(z)}{Q_l(z)} \right|} e^{\frac{i(\varphi_0 + \Delta_\gamma P_l(z) - \Delta_\gamma Q_l(z))}{n}}, \end{aligned}$$

где $\Delta_\gamma P_l(z) - \Delta_\gamma Q_l(z) = k_1 \Delta_\gamma \varphi_1 + k_2 \Delta_\gamma \varphi_2 + \dots + k_m \Delta_\gamma \varphi_m - (l_1 \Delta_\gamma \psi_1 + l_2 \Delta_\gamma \psi_2 + \dots + l_j \Delta_\gamma \psi_j)$.

Пусть в точке z_0

$$\sqrt[n]{\frac{(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}}{(z - b_1)^{l_1}(z - b_2)^{l_2} \dots (z - b_{l_j})^{l_j}}} \Big|_{z_0} = \sqrt[n]{\left| \frac{P_l(z_0)}{Q_l(z_0)} \right|} e^{\frac{i\varphi_0}{n}}.$$

Обойдём, например, точку a_i (см. рис. 2.5a). Тогда $\Delta_\gamma \varphi_i = 2\pi$, $\Delta_\gamma \varphi_p = 0$, $p \neq i$, $\Delta_\gamma \psi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, j$. $\Rightarrow \Delta_\gamma P_l(z) - \Delta_\gamma Q_l(z) = k_i \Delta_\gamma \varphi_i$. После обхода

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}}{(z - b_1)^{l_1}(z - b_2)^{l_2} \dots (z - b_{l_j})^{l_j}}} \Big|_{z_0} &= \\ &= \sqrt[n]{\left| \frac{P_l(z_0)}{Q_l(z_0)} \right|} e^{\frac{i\varphi_0}{n}} e^{\frac{i2\pi k_i}{n}} \neq \sqrt[n]{\left| \frac{P_l(z_0)}{Q_l(z_0)} \right|} e^{\frac{i\varphi_0}{n}}, \quad \text{т.к. } k_i < n. \end{aligned}$$

Точка a_i — точка ветвления. Теперь обойдём $z = \infty$.

Тогда

$$\sqrt[n]{\frac{(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}}{(z - b_1)^{l_1}(z - b_2)^{l_2} \dots (z - b_{l_j})^{l_j}}} \Big|_{z_0} = \sqrt[n]{\frac{P_l(z_0)}{Q_l(z_0)}} e^{\frac{i\varphi_0}{n}},$$

а после обхода $\Delta_\gamma \varphi_i = 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, m$; $\Delta_\gamma \psi_i = 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, j$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}}{(z - b_1)^{l_1}(z - b_2)^{l_2} \dots (z - b_{l_j})^{l_j}}} \Big|_{z_0^*} &= \\ &= \sqrt[n]{\frac{P_l(z_0)}{Q_l(z_0)}} e^{\frac{i(\varphi_0 + 2\pi l - 2\pi l)}{n}} = \sqrt[n]{\frac{P_l(z_0)}{Q_l(z_0)}} e^{\frac{i\varphi_0}{n}}. \end{aligned}$$

Поэтому точка $z = \infty$ не является точкой ветвления, и функция $\sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}}$ распадается на n регулярных ветвей в плоскости с любым разрезом, соединяющим различные корни $P_l(z)$ и $Q_l(z)$:

$$f_k(z) = \sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}} e^{\frac{i(\varphi_{0k} + \Delta_k P_l(z) - \Delta_\gamma Q_l(z))}{n}}, \quad (2.25)$$

где $\varphi_{0k} = \varphi_0 + 2\pi k$, $l = 0, 1, \dots, (n-1)$, φ_0 — одно из возможных значений аргумента числа $\frac{P_l(z_0)}{Q_l(z_0)}$.

Примечание 1. И здесь, конечно, можно написать формулу, аналогичную (2.24), но лучше понять, как выделить $f_k(z)$, чем запоминать то, что можно не запоминать. ◀

2.1.6. Точки ветвления и регулярные ветви $\text{Ln } P_n(z)$. Производная ветви

Многозначная функция $\text{Ln } P_n(z)$, где многочлен $P_n(z)$ имеет m ($2 \leq m \leq n$) различных корней (т. е., по крайней мере, два корня различны), имеет $m + 1$ точку ветвления — это различные корни $P_n(z)$ и $z = \infty$.

Аналитическая функция $\text{Ln } P_n(z)$ распадается на регулярные ветви в плоскости с любым разрезом, соединяющим различные корни $P_n(z)$ и $z = \infty$.

► Запишем многочлен в виде:

$$P_n(z) = (z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_{k_m})^{k_m}, \quad \sum_1^m k_i = n.$$

По определению,

$$\operatorname{Ln} P_n(z) = \ln |P_n(z)| + i \left(\varphi_0 + \sum_1^n k_i \Delta_\gamma \varphi_i \right), \quad (2.26)$$

В точке z_0 : $\operatorname{Ln} P_n(z)|_{z_0} = \ln |P_n(z_0)| + i\varphi_0$.

Обойдём точку a_i (см. рис. 2.5а). После возвращения имеем: $\operatorname{Ln} P_n(z)|_{z_0^*} = \ln |P_n(z_0)| + i(\varphi_0 + 2\pi k_i) \neq \ln |P_n(z_0)| + i\varphi_0$, значит, $z = a_i$ — точка ветвления.

Теперь обойдём $z = \infty$ (см. рис. 2.5б). После возвращения $\Delta_\gamma \varphi_i = 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, m$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} P_n(z)|_{\infty^*} &= \ln |P_n(z_0)| + i \left(\varphi_0 + \sum_1^n 2\pi k_i \right) = \\ &= \ln |P_n(z_0)| + i(\varphi_0 + 2\pi n) \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = \infty$ — тоже точка ветвления.

Поэтому аналитическая функция $\operatorname{Ln} P_n(z)$ распадается на регулярные ветви в плоскости с любым разрезом, соединяющим различные корни $P_n(z)$ и $z = \infty$.

$$f_k(z) = \ln |P_n(z)| + i \left(\varphi_{0k} + \sum_1^n k_i \Delta \varphi_i \right), \quad (2.27)$$

$\varphi_{0k} = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где φ_0 — одно из возможных значений аргумента $P_n(z_0)$.

Область односвязна — значения $\Delta \varphi_i$ не зависят от γ . ◀

Найдём производную любой ветви $\operatorname{Ln} P_n(z)$:

$$\operatorname{Ln}_* P_n(z)' = \frac{1}{P_n(z)} \cdot P_n'(z).$$

2.1.7. Точки ветвления и регулярные ветви $\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$

Функция $\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$, где $P_n(z)$ имеет $1 \leq m \leq n$, $\sum_{i=1}^m k_i = n$, различных корней, а $Q_n(z)$ имеет $1 \leq j \leq n$, $\sum_{i=1}^j l_i = n$ различных корней, имеет $m + j$ точек ветвления — это различные корни $P_n(z)$ и $Q_n(z)$. При этом $z = \infty$ не является точкой ветвления $\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$.

Аналитическая функция $\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ распадается на регулярные ветви в плоскости с любым разрезом, соединяющим различные корни $P_n(z)$ и $Q_n(z)$.

► По определению,

$$\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \ln \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| + i(\varphi_0 + \Delta_\gamma P_n(z) - \Delta_\gamma Q_n(z)), \quad (2.28)$$

где φ_0 — значение аргумента дроби $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ в точке z_0 , а

$$\Delta_\gamma P_n(z) - \Delta_\gamma Q_n(z) = k_1 \Delta_\gamma \varphi_1 + k_2 \Delta_\gamma \varphi_2 + \dots + k_m \Delta_\gamma \varphi_m - (l_1 \Delta_\gamma \psi_1 + l_2 \Delta_\gamma \psi_2 + \dots + l_j \Delta_\gamma \psi_j). \quad (2.29)$$

В точке z_0 : $\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \Big|_{z_0} = \ln \left| \frac{P_n(z_0)}{Q_n(z_0)} \right| + i\varphi_0$.

Проводим уже хорошо известные обходы. Получаем:
а) после обхода a_l :

$$\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \Big|_{z_0^*} = \ln \left| \frac{P_n(z_0)}{Q_n(z_0)} \right| + i(\varphi_0 + 2\pi i k_l)$$

$\Rightarrow z = a_i$ — точка ветвления;

после обхода $z = \infty$:

$$\begin{aligned} \text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \Big|_{\infty^*} &= \ln \left| \frac{P_n(z_0)}{Q_n(z_0)} \right| + i \left(\varphi_0 + 2\pi \sum_1^m k_l - 2\pi \sum_1^j l_i \right) = \\ &= \ln \left| \frac{P_n(z_0)}{Q_n(z_0)} \right| + i\varphi_0 \end{aligned}$$

\Rightarrow точка $z = \infty$ не является точкой ветвления.

Аналитическая функция $\text{Ln} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ распадается на регулярные ветви

$$f_k(z) = \ln \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| + i(\varphi_{0k} + \Delta_\gamma P_n(z) - \Delta_\gamma Q_n(z)) \quad (2.30)$$

в плоскости с любым разрезом, соединяющим различные корни $P_n(z)$ и $Q_n(z)$, $\varphi_{0k} = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где φ_0 — одно из возможных значений аргумента $\frac{P_n(z_0)}{Q_n(z_0)}$.

Область не односвязна — приращения зависят от γ . ◀

Пример 2.3. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt{z^2 - 4}$ в плоскости с разрезом по кривой: $\gamma = \{|z| = 2, \text{Im} z \geq 0\}$ (см. рис. 2.6), такая, что $f(+\infty) > 0$.

Найдите $f\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $f'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

► Многозначная функция $\sqrt{z^2 - 4}$ имеет две точки ветвления: $z = -2$, $z = 2$. Она распадается на регулярные ветви в плоскости с произвольным разрезом, соединяющим $z = -2$ и $z = 2$. Заданный разрез удовлетворяет этому условию (см. рис. 2.6).

По определению, $f_k(z) = \sqrt{|(z+2)(z-2)|} e^{\frac{i(\varphi_{0k} + \Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2)}{2}}$.

По условию, $f(+\infty) > 0 \Rightarrow e^{\frac{i(\varphi_0)}{2}} = 1 \Rightarrow f(z) = \sqrt{|z^2 - 4|} e^{\frac{i(\Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2)}{2}}$.

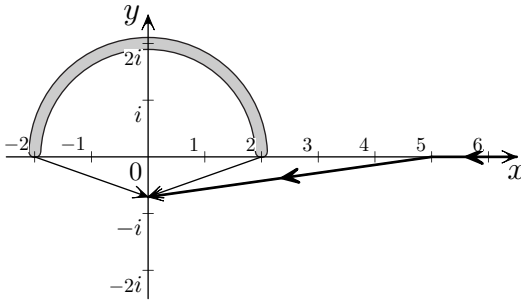


Рис. 2.6

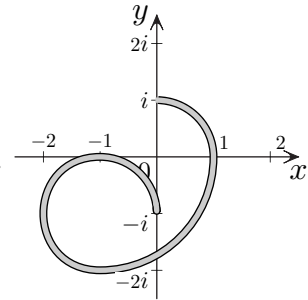


Рис. 2.7

Проведём «путь» γ от $+\infty$ до $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ сначала по прямой $y = 0$, $x \in [5; +\infty)$, а затем по прямой, соединяющей точки $z =$

$= -\frac{i}{\sqrt{2}}$ и $z = 5$ (см. рис. 2.6). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma \varphi_1 &= \Delta_\gamma \arg(z + 2) = -\alpha, \\ \Delta_\gamma \varphi_2 &= \Delta_\gamma \arg(z - 2) = -(\pi - \alpha) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{\frac{i(-(\pi-\alpha)-\alpha)}{2}} = -\frac{3i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Теперь найдём $f'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

Заметим, что $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$ — одна из ветвей $\sqrt{z^2 - 4}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f^2(z) = z^2 - 4 &\iff 2f(z)f'(z) = 2z \iff \\ &\iff f'(z) = \frac{z}{f(z)} \Rightarrow f'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ. $-\frac{3i}{\sqrt{2}}; \frac{1}{3}$. ◀

Пример 2.4. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{(z+1)(z^2+1)}$ в плоскости с разрезом, изображённым на рис. 2.7, такая, что $f(0) = 1$. Найдите $f(-3i)$, $f(-1-i)$.

► Многозначная функция $\sqrt[3]{(z+1)(z^2+1)}$ имеет три точки ветвления: $z = -1$, $z = i$, $z = -i$. Она распадается на регулярные ветви в плоскости с произвольным разрезом, соединяющим точки $z = -1$, $z = i$, $z = -i$. Заданный разрез удовлетворяет этому условию.

По определению,

$$f(z) = \sqrt[3]{|(z+1)(z-i)(z+i)|} e^{\frac{i(\varphi_0 + \Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2 + \Delta_\gamma \varphi_3)}{3}}.$$

Так как $f(0) = 1$, то $f(0) = 1 \cdot e^{\frac{i\varphi_0}{3}} = 1 \iff e^{\frac{i\varphi_0}{3}} = 1$ и

$$f(z) = \sqrt[3]{|(z+1)(z-i)(z+i)|} e^{\frac{i(\Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2 + \Delta_\gamma \varphi_3)}{3}}.$$

Найдём приращения аргументов при движении от $z = 0$ до $z = -3i$ по кривой γ , изображённой на рис. 2.8:

$$\Delta \arg(z - i) = -2\pi, \quad \Delta \arg(z + i) = -\pi, \quad \Delta \arg(z + 1) = -\arctg 3 \Rightarrow$$

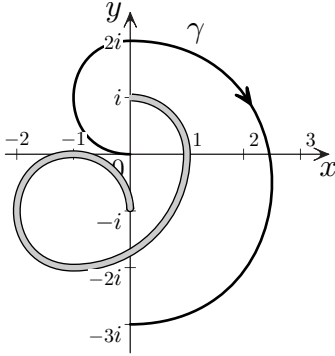


Рис. 2.8

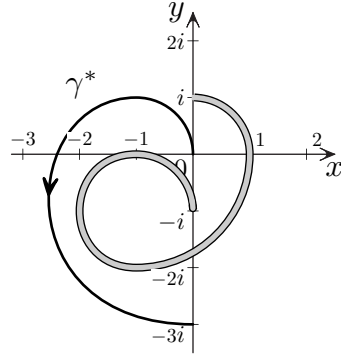


Рис. 2.9

$$\Rightarrow f(-3i) = \sqrt[3]{|(-3i+1)(-9+1)|} e^{\frac{i(-3\pi - \arctg 3)}{3}} = 2\sqrt[6]{10} e^{\frac{i(-3\pi - \arctg 3)}{3}}.$$

А теперь, ради интереса, пройдем в точку $z = -3i$ по другому пути — кривой γ^* , изображенной на рис. 2.9.

Тогдаращения аргументов будут другие:

$$\begin{aligned} \Delta \arg(z-i) &= 0, \Delta \arg(z+i) = \pi, \Delta \arg(z+1) = 2\pi - \arctg 3, \Rightarrow \\ \Rightarrow f(-3i) &= \sqrt[3]{|(-3i+1)(-9+1)|} e^{\frac{i(0+\pi+2\pi-\arctg 3)}{3}} = \\ &= 2\sqrt[6]{10} e^{\frac{i(3\pi-\arctg 3)}{3}} = 2\sqrt[6]{10} e^{\frac{i(3\pi-\arctg 3)}{3}} e^{2\pi i} = 2\sqrt[6]{10} e^{\frac{i(-3\pi-\arctg 3)}{3}}. \end{aligned}$$

Но значение функции, как и должно быть, то же самое.

Найдем теперь значение $f(-1-i)$.

Пройдем по кривой γ (см. рис. 2.10).

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \arg(z-i) &= -\arctg \frac{1}{2}, \quad \Delta \arg(z+i) = -\frac{3\pi}{2}, \\ \Delta \arg(z+1) &= -\frac{\pi}{2}, \Rightarrow \\ \Rightarrow f(-1-i) &= \sqrt[3]{|(-i)(1+2i)|} e^{\frac{i(-\arctg \frac{1}{2}-2\pi)}{3}} = \sqrt{5} e^{\frac{-i(\arctg \frac{1}{2}+2\pi)}{3}}. \end{aligned}$$

Ответ. $2\sqrt[6]{10} e^{\frac{i(-3\pi-\arctg 3)}{3}}, \sqrt{5} e^{\frac{-i(\arctg \frac{1}{2}+2\pi)}{3}}.$ ◀

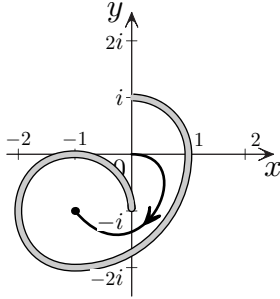


Рис. 2.10

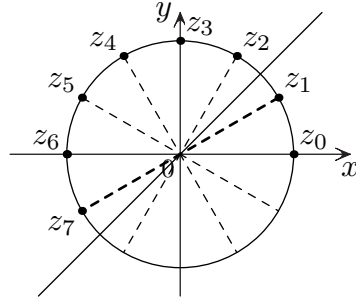


Рис. 2.11

Пример 2.5. Выясните, сколько регулярных ветвей имеет функция $\sqrt[3]{z^2 - \sqrt{z^2}}$ в области $G = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(1 - i)z > 0\}$. Найдите значение этих ветвей в точке $z = e^{\frac{3\pi i}{4}}$.

► Мы знаем, что $\sqrt[3]{w}$ имеет точки ветвления в точках, в которых подкоренное выражение обращается в 0 и в точке, где оно обращается в ∞ . Но знаем также, что у $\sqrt[3]{w^3}$ нет точек ветвления. У нас под корнем сложное выражение — поэтому, если оно где-то обратится в 0, необходимо будет проверить порядок этого нуля.

Аналитическая функция $\sqrt[7]{z^2}$ имеет две точки ветвления: $z = 0$, $z = \infty$, и распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим $z = 0$ и $z = \infty$. Этот разрез можно провести вне заданной области, поэтому в заданной области существуют при этом условии 7 регулярных ветвей: $f_0(z)$, $f_1(z)$, \dots , $f_6(z)$.

По определению, $\sqrt[7]{z^2}_k = \sqrt[7]{|z^2|} e^{i \frac{\varphi_{0k} + 2\Delta\varphi}{7}}$. Выделим ветви $f_k(z)$ в точке $z = 1$:

$$f_k(1) = e^{i \frac{\varphi_{0k}}{7}} = e^{\frac{2\pi i k}{7}} \Rightarrow f_k(z) = \sqrt[7]{|z^2|} e^{\frac{2\pi i k}{7}} e^{i \frac{2\Delta\varphi}{7}}, \quad k = 0, 1, \dots, 6.$$

Найдём нули подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} z^2 - \sqrt{z^2} = 0 &\Rightarrow z^{14} = z^2 \iff \\ &\iff \begin{cases} z = 0, \\ z^{12} = 1 \iff z_m = e^{\frac{2\pi m i}{12}} = e^{\frac{\pi m i}{6}}, \quad m = 0, 1, \dots, 11. \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь выясним их порядок: $(z^2 - f_k(z))' = 2z - f'_k(z)$. Найдём $f'_k(z)$:

$$\begin{aligned} f_k^7(z) = z^2 &\iff 7f_k^6(z)f'_k(z) = 2z \iff f'_k(z) = \frac{2z}{7f_k^6(z)} \implies \\ &\implies (2z - f'_k(z)) = 2z \left(1 - \frac{1}{7f_k^6(z)}\right). \end{aligned}$$

Найдём $(z^2 - f_k(z))'$ в точках $z = z_m$. Заметим, что $|f_k(z_m)| = 1$, поэтому $(z_m^2 - f_k(z_m))' \neq 0$, и все нули подкоренного выражения являются нулями первого порядка. Значит, они — точки ветвления.

Теперь будем выяснять, какие точки будут точками ветвления функции $\sqrt[3]{z^2 - f_{k_0}(z)}$.

Для этого проверим, в каких из точек z_m подкоренное выражение для конкретной ветви $f_{k_0}(z)$ обратится в 0.

Сначала найдём значения подкоренного выражения в точках z_m :

$$\begin{aligned} f_{k_0}(z_m) &= e^{\frac{2\pi i k_0}{7}} e^{i\frac{2m\pi}{7.6}} = e^{\frac{2\pi i k_0}{7}} e^{i\frac{m\pi}{7.3}} = e^{\frac{i(6k_0+m)\pi}{21}} \implies \\ &\implies z_m^2 - f_{k_0}(z_m) = e^{i\frac{m\pi}{3}} = e^{\frac{i(6k_0+m)\pi}{21}} = 0 \iff \\ &\iff \frac{m}{3} = \frac{6k_0 + m}{21} \iff m = k_0, \end{aligned}$$

т. е. точкой ветвления для $\sqrt[3]{z^2 - f_{k_0}(z)}$ является точка $z = z_m$, где $m = k_0$.

Если такая точка для ветви $f_{k_0}(z)$ находится вне заданной области, то в заданной области эту ветвь можно выделить, т. к. разрез можно провести вне её.

На рис. 2.11 видно, что в области находятся точки z_2, z_3, \dots, z_7 . Значит, это точки ветвления $\sqrt[3]{z^2 - f_{k_0}(z)}$ для $f_2(z), f_3(z), \dots, f_7(z)$. Но $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$.

Что такое $f_7(z)$? Это просто $f_0(z)$, т. к. $f_7(z) = \sqrt[7]{|z|^2} e^{\frac{2\pi i 7}{7}} e^{i\frac{2\Delta\varphi}{7}} = f_0(z)$.

Что в итоге? В области G ветви $\sqrt[3]{z^2 - f_{k_0}(z)}$ для $f_2(z), f_3(z), \dots, f_6(z), f_0(z)$ выделить нельзя — для их выделения

надо делать разрезы. Зато точка $z = z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}}$ — точка ветвления $\sqrt[3]{z^2 - f_1(z)}$ находится вне области G , и разрез можно сделать там, а в нашей области будут существовать $g_k(z)$, $k = 0, 1, 2$ — три ветви $\sqrt[3]{z^2 - f_1(z)}$. Теперь найдём значения этих ветвей в точке $z = e^{\frac{3\pi i}{4}}$:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= e^{\frac{2\pi i}{7}} e^{\frac{2i\Delta\varphi}{7}} \Rightarrow \\ \Rightarrow z^2 - f_1(z) \Big|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} &= e^{2\frac{3\pi i}{4}} - e^{\frac{2\pi i}{7}} e^{\frac{2i3\pi}{7\cdot 4}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} - e^{\frac{i\pi}{2}} = -2i = 2e^{\frac{3\pi i}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow g_k \left(\frac{3\pi i}{4} \right) &= \sqrt[3]{2} e^{i \frac{(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k)}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{(3+4k)\pi}{6}}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Ответ. Три ветви. $\sqrt[3]{2} e^{i \frac{(3+4k)\pi}{6}}$, $k = 0, 1, 2$. ◀

Пример 2.6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\text{Ln}(z+1)(z^2+1)$ в плоскости с разрезом, изображённым на рис. 2.12, такая, что $f(0) = 2\pi i$. Найдите $f(-3i)$, $f'(-3i)$.

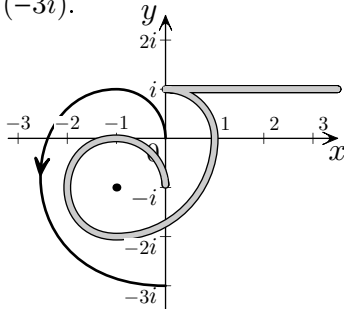


Рис. 2.12

► Сделаем чертёж разреза (см. рис. 2.12).

Так как область односвязна, то $\Delta\varphi_i$ не зависят от γ . По определению,

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln |(z+1)(z^2+1)| + \\ &+ i(\varphi_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3). \end{aligned}$$

По условию, $f(0) = 2\pi i = i\varphi_0 \Rightarrow f(z) = \ln |(z+1)(z^2+1)| + i(2\pi + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3)$. Найдём приращения аргументов при движении по кривой γ от $z=0$ до $z=-3i$ (см. рис. 2.15):

$$\begin{aligned} \Delta \arg(z-i) &= 0, \quad \Delta \arg(z+i) = \pi, \quad \Delta \arg(z+1) = 2\pi - \arctg 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(-3i) &= \ln |(-3i+1)(-9+1)| + i(2\pi + 0 + \pi + 2\pi - \arctg 3) = \\ &= \ln 8\sqrt{10} + i(5\pi - \arctg 3). \end{aligned}$$

Теперь найдём производную в точке $z = -3i$:

$$f(z) = \text{Ln}_*(z+1)(z^2+1) \Rightarrow f'(z) = \frac{3z^2 + 2z + 1}{(z+1)(z^2+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(-3i) = \frac{3(-9) - 6i + 1}{(-3i + 1)(-9 + 1)} = \frac{2 + 21i}{20}.$$

Ответ. $\ln 8\sqrt{10} + i(5\pi - \arctg 3)$; $\frac{2 + 21i}{20}$. ◀

§ 2.2. Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей многозначных функций

До сих пор речь шла о формулах для регулярных ветвей многозначных функций, которые работали в плоскостях с разрезом, соединяющим все точки ветвления.

Регулярная ветвь определялась значением ветви в одной точке.

Сейчас нас будет интересовать поведение и формулы ветвей в *окрестности* точки или в *кольце*, потому что речь пойдёт о разложении ветви в ряд Тейлора или Лорана.

2.2.1. Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln}(z - a)(z - b)$, $\operatorname{Ln} \frac{az+b}{ez+d}$

2.2.1. а) Разложение в ряды Тейлора регулярных ветвей $\operatorname{Ln} z$

Рассмотрим $\operatorname{Ln} z$ и его ветви.

Итак, значение многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в любой точке определяется формулой

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z_0 + \Delta_\gamma \varphi),$$

где $\Delta_\gamma \varphi$ — приращение аргумента z при движении по кривой γ от точки z_0 до точки z . Оно существенно зависит от кривой и является неоднозначной функцией в плоскости.

Известно, что в плоскости с разрезом, соединяющим точки 0 и ∞ , $\operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви $f_*(z)$:

$$f_*(z) = \ln |z| + i(\arg z_0 + \Delta \varphi),$$

где $\Delta \varphi$ — приращение аргумента z при движении от точки z_0 до точки z . Оно уже **не зависит** от кривой γ . Так можно найти значение ветви в **любой** точке плоскости с разрезом.

Так как любая ветвь регулярна в плоскости с разрезом от 0 до ∞ , то в окрестности любой точки z_0 , не принадлежащей разрезу, она разлагается в ряд Тейлора по степеням разности $z - z_0$.

Допустим, что точка $z = 1$ вместе с некоторой окрестностью $|z - 1| < \delta$ находится вне разреза. Очевидно, что δ — это расстояние $z = 1$ до разреза (поэтому $\delta \leq 1$).

Будем рассматривать $f_0(z)$ — ту ветвь $\text{Ln } z$, у которой $f_0(1) = 0$. Заметим сразу, что при *разных* видах разреза это будут *разные* ветви (области определения разные!) и у каждой ветви своя окрестность.

Тогда, в этой окрестности по определению, $f_0(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln|z| + i\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — приращение аргумента z при движении точки из $z = 1$ в рассматриваемую точку z по кривой γ . Но рассматриваемая окрестность односвязна и не содержит начала координат — приращение не зависит от γ . Так как $\text{Ln } z$ рассматривается в окрестности точки, то интеграл берётся по произвольным кривым, принадлежащей этой окрестности, и зависит только от точки z .

Покажем, что в окрестности $|z - 1| < \delta \leq 1$ ветвь $f_0(z)$ представляется в виде ряда Тейлора

$$f_0(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1}, \quad |z-1| < \delta \leq 1, \quad (2.31)$$

► Рассмотрим интеграл в *окрестности* $|z-1| < \rho$ точки $z = 1$. Разложим его в ряд Тейлора по степеням разности $(z-1)$:

$$\begin{aligned} \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} &= \int_1^z \frac{d\xi}{(\xi+1-1)} = \int_1^z \frac{d\xi}{1+(\xi-1)} = \int_1^z \sum_0^{\infty} (-1)^k (\xi-1)^k d\xi = \\ &= \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}, \quad |z-1| < 1. \end{aligned}$$

Получившийся ряд сходится при $|z-1| < 1$ и представляет там регулярную функцию $S(z)$, которая, как видно, при действительных значениях x , $|x-1| < 1$, совпадает с $\ln x$. Ряд пол-

ностью определяется производными ветви $f_0(z)$ в точке $z = 1$, его радиус сходимости, естественно, равен расстоянию от центра разложения $z = 1$ до ближайшей особой точки $z = 0$ — получившийся ряд не «замечает» разреза, который может «не задеть» окрестность $|z - 1| < \rho$. Но по теореме о регулярной функции $S(z)$ и $f_0(z)$ в окрестности $|z - 1| < \delta \leq 1$ совпадают.

Поэтому ветвь $f_0(z)$ многозначной функции $\text{Ln } z$, у которой $f_0(1) = 0$ естественно назвать $\ln z$. При этом $f_0(z)$ в окрестности $|z - 1| < \delta \leq 1$ разлагается в ряд Тейлора

$$\text{Ln}_0(z) = f_0(z) = \ln z = \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1}, \quad |z-1| < \delta \leq 1. \quad (2.32)$$

Заметим, что в окрестности $|z-1| < \delta \leq 1$ ветвь $f_0(z)$ может быть записана в виде

$$\text{Ln}_0(z) = f_0(z) = \ln z = \ln(1 + (z-1)), \quad \text{Ln}_0(1) = 0.$$

Заметим также, что, если разрез пойдёт **вне** положительной полуоси, то $\ln z$ совпадёт с $\ln x$ на всей области определения $\ln x$

$$f_0(z) = \ln z = \ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}, \quad x > 0.$$

Заметим также, что в учебнике Шварцбурда за 11 класс логарифм определён именно так: $\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$, $x > 0$. ◀

Теперь рассмотрим в окрестности $|z - 1| < 1$ произвольную ветвь $\text{Ln}_* z$ многозначной функции $\text{Ln } z$: $\text{Ln}_* z = \text{Ln}_*(z + 1 - 1) = \text{Ln}_*(1 + (z - 1))$. Видно, что в точке $z = 1$ ветвь принимает значение $\text{Ln}_* 1$. Так как ветвь однозначно определяется значением в точке, то эту ветвь можно представить в виде $\text{Ln}_*(z) = \text{Ln}_*(1 + (z - 1)) = \text{Ln}_* 1 + \ln(1 + (z - 1))$, где $\ln(1 + (z - 1))$ — это та ветвь $\text{Ln}(1 + (z - 1))$ (или $\text{Ln } z$), для которой $\text{Ln}(1 + (z - 1))|_{z=1} = 0$. Отсюда следует, что любая ветвь $f_*(z)$, регулярная в некоторой окрестности $|z - 1| < \delta \leq 1$ точки $z = 1$

разлагается в ряд Тейлора:

$$\operatorname{Ln}_* z = f_*(z) = f_*(1) + \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1}, \quad |z-1| < \delta \leq 1. \quad (2.33)$$

Сделав замену переменных $z-1 = \xi$, получим

$$\ln(1 + \xi) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{k}, \quad |\xi| < 1.$$

Чаще всего будем пользоваться именно этой формулой. Запишем её в более обычной форме

$$\ln(1 + z) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}, \quad |z| < 1. \quad (2.34)$$

Поведение $\ln z$ в окрестности $z = 1$ и $\ln(1 + z)$ в окрестности $z = 0$ одинаковы.

Теперь рассмотрим произвольную точку $z_1 \neq 0$, не принадлежащую разрезу. Тогда существует некоторая окрестность $|z - z_1| < \rho$ точки $z_1 \neq 0$, в которой регулярна $f_*(z)$ — любая ветвь $\operatorname{Ln} z$. Очевидно, что ρ — это расстояние $z = z_1$ до разреза.

Покажем, что тогда $f_*(z)$ представима в окрестности $|z - z_1| < \delta \leq |z_1|$ (если $\rho > 1$, то $\delta = |z_1|$; если $\rho \leq |z_1|$, то $\delta = \rho$) в виде суммы ряда Тейлора

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}_* z &= f_*(z_1) + \ln \left(1 + \frac{z - z_1}{z_1} \right) = \\ &= f_*(z_1) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{z - z_1}{z_1} \right)^k, \quad |z - z_1| < \delta \leq |z_1|. \end{aligned} \quad (2.35)$$

► **Первый способ.** Преобразуем подлогарифмическое выражение $\operatorname{Ln}_* z \equiv \operatorname{Ln}_*(z + z_1 - z_1) \equiv \operatorname{Ln}_* z_1 \left(1 + \frac{z - z_1}{z_1} \right)$. Видно, что любая ветвь принимает значение $\operatorname{Ln}_* z_1$ в точке $z_1 \neq 0$. Поэтому можно записать, что

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \operatorname{Ln}_* z_1 \left(1 + \frac{z - z_1}{z_1} \right) = \operatorname{Ln}_* z_1 + \ln \left(1 + \frac{z - z_1}{z_1} \right) = \\ &= f_*(z_1) + \ln \left(1 + \frac{z - z_1}{z_1} \right), \end{aligned}$$

где $\ln\left(1 + \frac{z - z_1}{z_1}\right)$ — та ветвь $\text{Ln}\left(1 + \frac{z - z_1}{z_1}\right)$, для которой $\text{Ln}\left(1 + \frac{z - z_1}{z_1}\right)\Big|_{z=z_1} = 0$. Разложение такой ветви уже известно $\ln\left(1 + \frac{z - z_1}{z_1}\right) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{z - z_1}{z_1}\right)^k$, $|z - z_1| < |z_1|$.

Кроме того, заметим, что на луче $\frac{z - z_1}{z_1} = t$, $t \in \mathbb{R}$, $\iff \iff z = z_1 + z_1 t$, $t > -1$ функция $\ln\left(1 + \frac{z - z_1}{z_1}\right)$ принимает действительные значения и разлагается в классический ряд по степеням t . В силу теоремы единственности, и $\ln\left(1 + \frac{z - z_1}{z_1}\right) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{z - z_1}{z_1}\right)^k$, $|z - z_1| < |z_1|$. Что касается $f_*(z)$, то $\text{Ln}_* z = f_*(z_1) + \ln\left(1 + \frac{z - z_1}{z_1}\right) = f_*(z_1) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{z - z_1}{z_1}\right)^k$, $|z - z_1| < \delta \leq |z_1|$. ◀

Можно это же показать по-другому.

► Пусть ветвь регулярна в некоторой окрестности $|z - z_1| < \rho$ точки z_1 . По определению, $f_*(z) = \int_1^{z_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{z_1}^z \frac{d\xi}{\xi} = f_*(z_1) + \int_{z_1}^z \frac{d\xi}{\xi}$, где интеграл рассматривается в окрестности $|z - z_1| < \rho$.

Разложим интеграл в ряд Тейлора по степеням $z - z_1$:

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^z \frac{d\xi}{\xi + z_1 - z_1} &= \int_{z_1}^z \frac{1}{z_1} \frac{d\xi}{\left(1 + \frac{\xi - z_1}{z_1}\right)} = \\ &= \left[\text{при условии, что } \left| \frac{\xi - z_1}{z_1} \right| < 1 \right] = \\ &= \sum_0^{\infty} \int_{z_1}^z \frac{(-1)^k}{z_1} \left(\frac{\xi - z_1}{z_1}\right) d\xi = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_1^{k+1}} \frac{(z - z_1)^{k+1}}{k + 1}, \quad |z - z_1| < |z_1|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в окрестности $|z - z_1| < \delta \leq |z_1|$ ветвь

$f_*(z)$ разложилась в ряд Тейлора

$$\operatorname{Ln}_* z = f_*(z) = f_*(z_1) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{z_1^k} \frac{(z - z_1)^k}{k}, \quad |z - z_1| < \delta \leq |z_1|. \blacktriangleleft$$

Итак, любая ветвь $f(z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln} z$, если она определена в некоторой окрестности $|z - z_0| < \rho \leq |z_0|$ точки $z = z_0$, приводится к виду

$$f(z) = f(z_0) + \ln \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0} \right) \quad (2.36)$$

и разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (z - z_0)^k}{k (z_0)^k}, \quad |z - z_0| < \rho \leq |z_0|. \quad (2.37)$$

2.2.1. б) Разложение в ряды Тейлора регулярных ветвей $\operatorname{Ln}(z - a)(z - b)$

Теперь рассмотрим ветви, регулярные в окрестности точки $z = c$, более сложной многозначной функции $\operatorname{Ln}(z - a)(z - b)$. Она имеет три точки ветвления: $z = a$, $z = b$, $z = \infty$ и распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, их соединяющих.

Пусть $z = c$ не принадлежит разрезу. Тогда любая ветвь регулярна в некоторой окрестности этой точки, а значит, разлагается в ней в ряд Тейлора.

Приведём формулу любой ветви в виду, удобному для рассмотрения в окрестности точки $z = c$:

$$\begin{aligned} f_*(z) = \operatorname{Ln}_*(z - a)(z - b) &\equiv \operatorname{Ln}_*(z - a - c + c)(z - b - c + c) \equiv \\ &\equiv \operatorname{Ln}_*(c - a)(c - b) \left(1 + \frac{z - c}{c - a} \right) \left(1 + \frac{z - c}{c - b} \right). \end{aligned}$$

Видно, что любая ветвь принимает в точке $z = c$ одно из значений $\operatorname{Ln}(c - a)(c - b)$. Поэтому можно записать, что любая ветвь $f(z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln}(z - a)(z - b)$ в окрестности точки $z = c$ может быть приведена к виду

$$f(z) = f(c) + \ln \left(1 + \frac{z - c}{c - a} \right) + \ln \left(1 + \frac{z - c}{c - b} \right),$$

где «маленькие» логарифмы принимают значения, равные 0 при $z = c$ и имеют стандартные разложения по степеням $(z - c)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(c) + \ln\left(1 + \frac{z-c}{c-a}\right) + \ln\left(1 + \frac{z-c}{c-b}\right) = \\ &= f(c) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-c)^k}{k} \left(\frac{1}{(c-a)^k} + \frac{1}{(c-b)^k}\right), \\ & \quad |z-c| < \delta \leq \min\{|c-a|, |c-b|\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.2.1. в) Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\text{Ln} \frac{az+b}{ez+d}$

Рассмотрим теперь многозначную функцию $\text{Ln} \frac{az+b}{ez+d}$. Она имеет уже только две точки ветвления: $z = -\frac{b}{a}$, $z = -\frac{d}{e}$ (∞ , как мы показали в п. 2.1.7, не является точкой ветвления), и распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, их соединяющих.

Пусть точка $z = c$ не принадлежит разрезу.

► Тогда любая ветвь регулярна в некоторой окрестности $|z - c| < \rho$ этой точки и разлагается в ней в ряд Тейлора (где ρ — расстояние от точки $z = c$ до разреза).

Приведём формулы всех ветвей к виду, удобному для рассмотрения в окрестности точки $z = c$:

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \text{Ln}_* \frac{az+b}{ez+d} \equiv \text{Ln}_* \frac{a(z-c+c)+b}{e(z-c+c)+d} \equiv \\ &\equiv \text{Ln}_* \frac{b+ac}{d+ec} \frac{1 + \frac{a(z-c)}{b+ac}}{1 + \frac{e(z-c)}{d+ec}} = \\ &= \text{Ln}_* \frac{b+ac}{d+ec} + \ln\left(1 + \frac{a(z-c)}{b+ac}\right) - \ln\left(1 + \frac{e(z-c)}{d+ec}\right), \end{aligned}$$

где «маленькие» логарифмы равны 0 при $z = c$ и имеют стандартные разложения при $|z - c| < \delta \leq \min\left\{\left|c + \frac{b}{a}\right|, \left|c + \frac{d}{e}\right|\right\}$. ◀

Теперь заметим, что в отличие от $\operatorname{Ln} z$ и $\operatorname{Ln}(z - a)(z - b)$, у которых $z = \infty$ является точкой ветвления, у полной аналитической функции $\operatorname{Ln} \frac{\alpha z - a}{\beta z - b}$ точка $z = \infty$ не является точкой ветвления. Поэтому любая ветвь в плоскости с разрезом, соединяющим нули числителя и знаменателя, является регулярной в некоторой проколотой окрестности $\rho < |z| < \infty$ точки $z = \infty$ и может быть разложена в ней в ряд Лорана.

► Воспользуемся предыдущими рассуждениями — приведём все ветви к виду, удобному для рассмотрения в окрестности $z = \infty$:

$$\operatorname{Ln}_* \frac{\alpha z - a}{\beta z - b} \equiv \operatorname{Ln}_* \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1 - \frac{a}{\alpha z}}{1 - \frac{b}{\beta z}} \right) = \operatorname{Ln}_* \frac{\alpha}{\beta} + \ln \left(1 - \frac{a}{\alpha z} \right) - \ln \left(1 - \frac{b}{\beta z} \right).$$

Отсюда следует, что любая ветвь $f(z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln} \frac{\alpha z - a}{\beta z - b}$ в окрестности точки $z = \infty$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\infty) + \ln \left(1 - \frac{a}{\alpha z} \right) - \ln \left(1 - \frac{b}{\beta z} \right) = \\ &= f(\infty) - \sum_1^{\infty} \frac{1}{kz^k} \left(\left(\frac{a}{\alpha} \right)^k - \left(\frac{b}{\beta} \right)^k \right), \max \left\{ \left| \frac{a}{\alpha} \right|, \left| \frac{b}{\beta} \right| \right\} \leq \delta < |z| < \infty. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Все «маленькие» логарифмы равны 0 при $z = \infty$. ◀

2.2.2. Риманова поверхность $\operatorname{Ln} z$

По определению, $\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$. Рассмотрим окрестность $C_0: |z-2| < 2$ (см. рис. 2.13) точки $z = 2$. Тогда можно записать $\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^2 \frac{d\xi}{\xi} + \int_2^z \frac{d\xi}{\xi} = \operatorname{Ln} 2 + \int_2^z \frac{d\xi}{\xi}$, где $|z - 2| < 2$. Окрестность $|z - 2| < 2$ — односвязная область, не содержит начало координат, поэтому значение в любой точке z круга не зависит от того, по какой кривой берётся криволинейный интеграл. Рассмотрим, например, ту ветвь $f_0(z)$, для которой $f_0(2) = \ln 2 + 2\pi k_0 i$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Разложим интеграл в ряд Тейлора:

$$\int_2^z \frac{d\xi}{\xi} = \int_2^z \frac{d\xi}{(\xi + 2 - 2)} = \frac{1}{2} \int_2^z \frac{d\xi}{1 + \frac{\xi - 2}{2}} =$$

$$= \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(z-2)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)}, \quad |z-2| < 2.$$

Тогда $f_0(z) = \ln 2 + 2\pi k_0 i + \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-2)^k}{2^k k}$, $|z-2| < 2$.

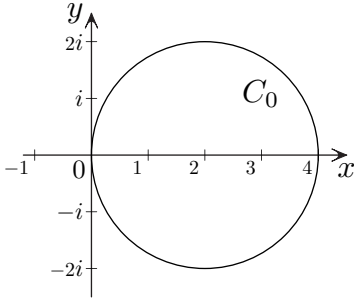


Рис. 2.13

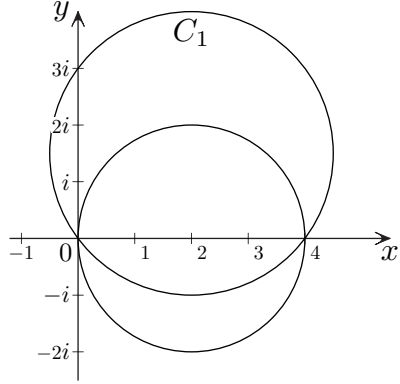


Рис. 2.14

Теперь возьмём точку z_1 в круге C_0 , но такую, что круг $C_1: |z-z_1| < |z_1|$ (см. рис. 2.14) с центром в этой точке радиуса $|z_1|$ частично «выходит» из круга $|z-2| < 2$, например, $z_1 = (2; 1,5)$.

Тогда, $f_1 = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{z_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{z_1}^z \frac{d\xi}{\xi}$. Разложим интеграл в окрестности этой точки:

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^z \frac{d\xi}{(\xi-z_1)+z_1} &= \int_{z_1}^z \frac{1}{z_1} \frac{d\xi}{1+\frac{\xi-z_1}{z_1}} = \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_1^{k+1}} \frac{(z-z_1)^{k+1}}{k+1}, \quad |z-z_1| < |z_1|. \end{aligned}$$

Получаем, что

$$f_1(z) = f_0(z_1) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{z_1^k} \frac{(z-z_1)^k}{k}, \quad |z-z_1| < |z_1|.$$

Таким образом мы получили значение регулярной функции, значения которой совпадают со значениями $\text{Ln } z$ в об-

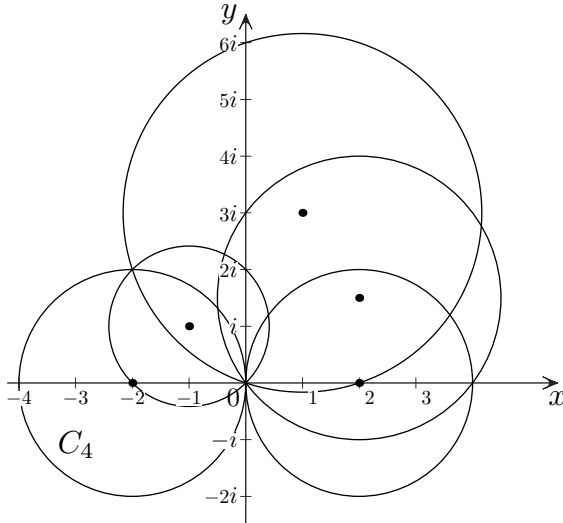


Рис. 2.15

ласти $C_0 \cup C_1$. Продолжим процесс, выбирая точки, например, $z_2 = (1; 3)$, $z_3 = (-1; 1)$, $z_4 = (-2; 0)$ — получим регулярную функцию в области $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ (см. рис. 2.15). На самом деле мы осуществили аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ по выбранной последовательности точек. Теперь вырежем из бумаги полученные кружочки и приклеим их друг на друга, помещая центры в соответствующие точки (как на рис. 2.14). Если положить склеенную фигуру на плоскость, получится рис. 2.15.

Теперь — внимание! Рассмотрим окрестность C_5 с центром в точке $z_5 = -1 - 1, 5i$: $C_5: |z - (-1 - 1, 5i)| < |1 - 1, 5i|$. В ней $f_5(z) = f_4(-1 - 1, i) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{z_5^k} \frac{(z - z_5)^k}{k}$, $|z - z_5| < |z_5|$. Но, если мы нарисуем эту окрестность в исходной плоскости, то она пересечёт окрестность C_0 (см. рис. 2.16).

В «лунке» уже есть $f_0(z)$ и появились значения $f_5(z) = f_0(z) + 2\pi i$. Это очевидно, потому что мы обошли начало координат.

«Исправим» ситуацию с многозначностью — приклеим

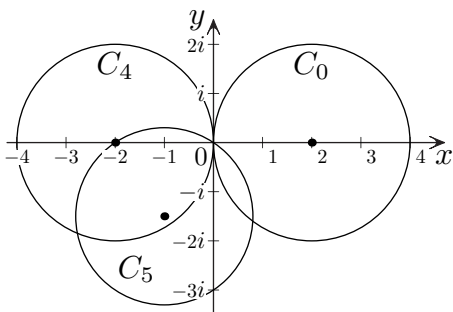


Рис. 2.16

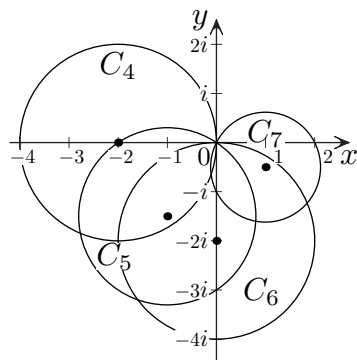


Рис. 2.17

кружок к кружку C_4 . Теперь наша поверхность из кружков уже не поместится на нашу плоскость — начинается «второй экземпляр» плоскости. Продолжим наш процесс, наклеивая, например, последовательно кружки $C_6: |z + 2| < 2$, $C_7: |z - (1 - 0,5i)| < |1 - 0,5i|$ (см. рис. 2.17). Кружочки по такому же принципу можно приклеивать, выбирая соответствующие z_i , чтобы наша поверхность из кружков «разрасталась» и по винтовой поверхности и «вширь» — будет постепенно получаться то, что называется Римановой поверхностью для $\text{Ln } z$. Это будет бесконечная «вверх» и «вниз» специфическая «винтовая» поверхность, на которой $\text{Ln } z$ является однозначной функцией.

2.2.3. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

регулярных ветвей $\sqrt[n]{z}$, $\sqrt[n]{P_m(z)}$, $\sqrt[n]{\frac{P_m(z)}{Q_k(z)}}$

2.2.3. а) Разложение в ряды Тейлора регулярных ветвей $\sqrt[n]{z}$

Как известно, многозначная функция $\sqrt[n]{z}$ распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим точки $z = 0$ и $z = \infty$. Пусть точка $z = a$ не принадлежит разрезу — тогда для любой ветви существует некоторая окрестность $|z - a| < \rho \leq |a|$ этой точки, в которой она регулярна (где ρ — расстоянию от точки $z = a$ до разреза, $\rho \leq |a|$).

Для разных ветвей окрестности, вообще говоря, разные — они определяются разрезом.

Приведём формулу произвольной ветви $f_*(z)$ к виду, удобному для рассмотрения в окрестности точки $z = a$:

$$f_*(z) \equiv \sqrt[n]{z_*} \equiv \sqrt[n]{(z - a + a)_*} \equiv \sqrt[n]{a \left(1 + \frac{z - a}{a}\right)}.$$

Видно, что любая ветвь в точке $z = a$ — центре разложения, принимает одно из значений $\sqrt[n]{a}$. Поэтому формулу можно записать в виде

$$f_*(z) \equiv \sqrt[n]{a_*} \left(1 + \frac{z - a}{a}\right)_0^{\frac{1}{n}} = f_*(a) \left(1 + \frac{z - a}{a}\right)_0^{\frac{1}{n}},$$

где $\left(1 + \frac{z - a}{a}\right)_0^{\frac{1}{n}}$ — это та регулярная ветвь многозначной функции $\left(1 + \frac{z - a}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, которая равна 1 при $z = a$, или, что то же, принимает действительные значения на прямой $\frac{z - a}{a} = y \in \mathbb{R}$, а потому разлагается в окрестности в стандартный ряд Тейлора.

Итак, в окрестности точки $z = a$ любая ветвь $f(z)$ многозначной функции $\sqrt[n]{z}$ имеет вид

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) \left(1 + \frac{z - a}{a}\right)_0^{\frac{1}{n}} = \\ &= f(a) \sum_0^{\infty} C_{\frac{1}{n}}^k \frac{(z - a)^k}{a^k}, \quad |z - a| < \rho \leq |a|. \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.2.3. б) Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\sqrt[n]{P_n(z)}$

Если рассматривать многозначную функцию

$$\sqrt[n]{(z + a)^k (z + b)^{n-k}},$$

то она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим различные нули подкоренного выражения.

Проводя аналогичные рассуждения для конечной точки $z = c$, получим, что в окрестности точки $z = c$ ветвь функции $f_*(z) = \sqrt[n]{(z+a)^k(z+b)^{n-k}}$ примет вид:

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \sqrt[n]{(z+a)^k(z+b)^{n-k}} \equiv \\ &\equiv \sqrt[n]{(z+a-c+c)^k(z+b-c+c)^{n-k}} \equiv \\ &\equiv \sqrt[n]{(a+c)(b+c) \left(1 + \frac{z-c}{a+c}\right)^k \left(1 + \frac{z-c}{b+c}\right)^{n-k}} \equiv \\ &= \sqrt[n]{(a+c)(b+c)} \left(1 + \frac{z-c}{a+c}\right)_0^{\frac{k}{n}} \left(1 + \frac{z-c}{b+c}\right)_0^{\frac{n-k}{n}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в окрестности точки $z = a$ любая ветвь $f(z)$ многозначной функции $\sqrt[n]{(z+a)^k(z+b)^{n-k}}$ имеет вид

$$f(z) = f(c) \left(1 + \frac{z-c}{a+c}\right)_0^{\frac{k}{n}} \left(1 + \frac{z-c}{b+c}\right)_0^{\frac{n-k}{n}}. \quad (2.41)$$

где $g(z) = \left(1 + \frac{z-c}{a+c}\right)_0^{\frac{k}{n}}$ — та ветвь многозначной функции $\left(1 + \frac{z-c}{a+c}\right)^{\frac{k}{n}}$, для которой $g(c) = 1$ и

$$g(z) = \left(1 + \frac{z-c}{a+c}\right)_0^{\frac{k}{n}} = \sum_0^{\infty} C_{\frac{k}{n}}^m \left(\frac{z-c}{a+c}\right)^m, \quad |z-c| < |a+c|.$$

Точка $z = \infty$ не является точкой ветвления, поэтому каждая ветвь регулярна в некотором кольце $\rho < |z| < \infty$, и её можно раскладывать в нём в ряд Лорана.

Приведём формулы всех ветвей к виду, удобному для рассмотрения в окрестности ∞ :

$$f_*(z) = \sqrt[n]{(z+a)^k(z+b)^{n-k}} \equiv \sqrt[n]{z^n \left(1 + \frac{a}{z}\right)^k \left(1 + \frac{b}{z}\right)^{n-k}} \equiv z \left(1 + \frac{a}{z}\right)^{\frac{k}{n}} \left(1 + \frac{b}{z}\right)^{\frac{n-k}{n}}.$$

Видно, что любая ветвь в ∞ принимает одно из значений $\sqrt[n]{z^n}$. Но это значение по модулю равно ∞ — работать с ним не просто.

Можно поступать двояко.

Во-первых, в п. 2.1.3, (2.20), показано, что $\sqrt[n]{z^n}$ — это формула содержит n различных однозначных функций: $\sqrt[n]{z^n} = ze^{\frac{2\pi mi}{n}}$. Поэтому можно записать, что

$$f_m(z) = ze^{\frac{2\pi mi}{n}} \left(1 + \frac{a}{z}\right)_0^{\frac{k}{n}} \left(1 + \frac{b}{z}\right)_0^{\frac{n-k}{n}}, \quad m = 0, 1, \dots, (n-1), \quad (2.41^*)$$

где $g(z) = \left(1 + \frac{a}{z}\right)_0^{\frac{k}{n}}$ — это та ветвь функции $\left(1 + \frac{a}{z}\right)^{\frac{k}{n}}$, для которой $g(\infty) = 1$ и

$$g(z) = \left(1 + \frac{a}{z}\right)_0^{\frac{k}{n}} = \sum_0^{\infty} C_{\frac{k}{n}}^l \left(\frac{a}{z}\right)^l, \quad \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \iff |z| > |a|.$$

Во-вторых, чтобы избежать работы с ∞ , часто рассматривают $\left.\frac{f(z)}{z}\right|_{\infty}$. Подробнее см. в примерах.

2.2.3. в) Разложение в ряды Тейлора и Лорана

регулярных ветвей $\sqrt[n]{\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}}$

Если рассматривать функцию $\sqrt[n]{\frac{a_0(z-a)^m}{b_0(z-b)^m}}$, $m < n$, то она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим нули числителя и знаменателя.

Пусть точка $z = c$ не принадлежит разрезу. Тогда любая ветвь регулярна в некоторой окрестности $|z - c| < \rho$ (где ρ — расстоянию от точки $z = a$ до разреза) и разлагается там в ряд Тейлора.

С помощью преобразований, аналогичных предыдущим, получим, что

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \sqrt[n]{\frac{a_0(z-a)^m}{b_0(z-b)^m}} \equiv \sqrt[n]{\frac{a_0(z-c+c-a)^m}{b_0(z-c+c-b)^m}} \equiv \\ &\equiv \sqrt[n]{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^m \frac{a_0}{b_0} \frac{\left(1 + \frac{z-c}{c-a}\right)^m}{\left(1 + \frac{z-c}{c-b}\right)^m}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[n]{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^m \frac{a_0}{b_0}}_* \left(1 + \frac{z-c}{c-a}\right)_0^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{z-c}{c-b}\right)_0^{-\frac{m}{n}} = \\
&= f_*(c) \left(1 + \frac{z-c}{c-a}\right)_0^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{z-c}{c-b}\right)_0^{-\frac{m}{n}},
\end{aligned}$$

т. е. любая ветвь $f(z)$ многозначной функции $\sqrt[n]{\frac{a_0(z-a)^m}{b_0(z-b)^m}}$ в окрестности точки $z = c$ может быть приведена к виду

$$f(z) = f(c) \left(1 + \frac{z-c}{c-a}\right)_0^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{z-c}{c-b}\right)_0^{-\frac{m}{n}}. \quad (2.42)$$

Точка $z = \infty$ не является точкой ветвления для функции $\sqrt[n]{\frac{a_0(z-a)^m}{b_0(z-b)^m}}$, поэтому любая ветвь регулярна в некотором кольце $\rho < |z| < \infty$, и её можно раскладывать в нём в ряд Лорана:

$$\begin{aligned}
f_*(z) &= \sqrt[n]{\frac{a_0(z-a)^m}{b_0(z-b)^m}}_* \equiv \sqrt[n]{\frac{a_0 \left(1 - \frac{a}{z}\right)^m}{b_0 \left(1 - \frac{b}{z}\right)^m}}_* = \\
&= \sqrt[n]{\frac{a_0}{b_0}}_* \left(1 - \frac{a}{z}\right)_0^{\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{b}{z}\right)_0^{-\frac{m}{n}} = f_*(\infty) \left(1 - \frac{a}{z}\right)_0^{\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{b}{z}\right)_0^{-\frac{m}{n}},
\end{aligned}$$

т. е. любая ветвь $f(z)$ многозначной функции $\sqrt[n]{\frac{a_0(z-a)^m}{b_0(z-b)^m}}$ в окрестности точки $z = \infty$ может быть приведена к виду

$$f(z) = f(\infty) \left(1 - \frac{a}{z}\right)_0^{\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{b}{z}\right)_0^{-\frac{m}{n}}. \quad (2.43)$$

2.2.3. г) Разложение регулярных ветвей $\sqrt[n]{P_m(z)}$, $m < n$ в ряд Тейлора

Если степень многочлена $P_m(z)$ меньше n , то $z = \infty$ является точкой ветвления функции $\sqrt[n]{P_m(z)}$, $m < n$, и любая регулярная ветвь функции разлагается в ряд Тейлора в окрестности любой точки s , не принадлежащей разрезу, соединяющему различные корни многочлена $P_m(z)$ и ∞ .

2.2.3. д) Разложение регулярных ветвей $\sqrt[n]{\frac{P_k(z)}{Q_m(z)}}$, $k < n, m < n, k \neq m$ в ряд Тейлора

Если степень числителя не равна степени знаменателя, то $z = \infty$ является точкой ветвления функции $\sqrt[n]{\frac{P_k(z)}{Q_m(z)}}$, $k < n, m < n, k \neq m$, и любая регулярная ветвь функции разлагается в ряд Тейлора в окрестности любой точки c , не принадлежащей разрезу, соединяющему нули числителя, знаменателя и ∞ .

2.2.4. Ряды Тейлора функций $(1 + x^2)^\alpha$ и $(1 + z^2)^\alpha$, $\ln(1 + x^2)$ и $\ln(1 + z^2)$

Известно, что ряды Тейлора в окрестности $x = 0$ функций $(1 + x)^\alpha$ и $\ln(1 + x)$ имеют радиус сходимости, равный 1. Это естественно, т. к. при $x = -1$ производные, начиная с некоторого n , становятся неограниченными.

Но почему и у функций $(1 + x^2)^\alpha$ и $\ln(1 + x^2)$ радиус сходимости равен 1? Ведь эти функции бесконечно дифференцируемы на всей числовой оси. На этот вопрос на 1-ом курсе ответа нет.

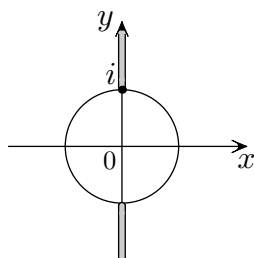


Рис. 2.18

Многозначные функции $(1 + z^2)^\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ и $\text{Ln}(1 + z^2)$ имеют по три точки ветвления: $z = \pm i, z = \infty$. Поэтому распадаются на регулярные ветви в плоскости с разрезом, их соединяющим. Проведем, для примера, разрез по лучам мнимой оси: $(-i\infty; -i] \cup [i; +i\infty)$ (см. рис. 2.18), чтобы ветви существовали на оси Ox .

Рассмотрим сначала $f(z)$ — ту ветвь $(1 + z^2)^\alpha$, для которой $f(0) = 1$. Тогда эта ветвь определена, в частности, на всей действительной оси и совпадает там с функцией $f(x) = (1 + x^2)^\alpha$ (проверьте!)

Функция $f(z)$ регулярна в окрестности $z = 0$, значит, разлагается там в ряд Тейлора по степеням z . Радиус сходимости ряда равен расстоянию до ближайшей особой точки, т. е. $|z| <$

< 1 . А вот «следом» $f(z)$ на действительной оси является функция $f(x) = (1 + x^2)^\alpha$, значит, она раскладывается в ряд Тейлора по степеням x на промежутке $(-1; 1)$, что как раз и совпадает с результатом 1-го курса и одновременно объясняет то, почему радиус сходимости равен 1 (несмотря на то, что функция бесконечно дифференцируема на всей числовой оси!).

Теперь попробуем разложить $f(x) = (1 + x^2)^\alpha$ по степеням разности $(x - a)$, где $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$. Все производные в точке $x = a$ существуют, значит, можно записать, что ряд имеет вид $\sum_0^\infty \frac{f^k(a)}{k!} (x - a)^k$. Но сойдется ли ряд, а, если сойдется, то где и к чему, первокурсник сказать не сможет. Произведя обычную замену переменных: $t = x - a$, можно привести функцию к виду

$$f(x) = \left(1 + ((x - a) + a)^2\right)^\alpha \iff \tilde{f}(t) = (1 + a^2)^\alpha \left(1 + \frac{t^2 + 2at}{1 + a^2}\right)^\alpha.$$

Но квадратный трёхчлен $1 + \frac{t^2 + 2at}{1 + a^2}$ не разлагается на линейные множители с действительными коэффициентами, поэтому свести к произведению известных рядов нельзя.

Попробуем сделать это с помощью ТФКП.

► Так как $(1 + z^2)^\alpha$ распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом (см. рис. 2.19), то любая ветвь регулярна в окрестности $z = a$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ и разлагается в ряд Тейлора по степеням разности $z - a$, радиус которого равен расстоянию от центра разложения до ближайшей особой точки, т. е. радиус сходимости ряда равен $\sqrt{a^2 + 1}$.

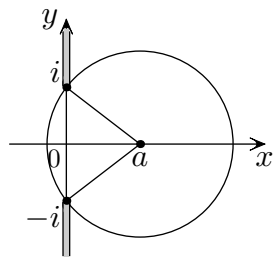


Рис. 2.19

Теперь мы можем ответить на вопросы первокурсника: так как $f(x) = (1 + x^2)^\alpha$ является следом $f(z)$ на ось Ox , то $f(x) = (1 + x^2)^\alpha$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, и радиус сходимости этого ряда равен $\sqrt{a^2 + 1}$.

Посмотрим, как выглядит ряд в ТФКП.

Так как

$$\begin{aligned} (1+z^2)^\alpha &= ((z+i)(z-i))^\alpha \equiv ((z-a+a+i)(z-a+a-i))^\alpha \equiv \\ &\equiv \left((a+i)(a-i) \left(1 + \frac{z-a}{a+i}\right) \left(1 + \frac{z-a}{a-i}\right) \right)^\alpha = \\ &= (a^2+1)_*^\alpha \left(1 + \frac{z-a}{a+i}\right)_0^\alpha \left(1 + \frac{z-a}{a-i}\right)_0^\alpha, \end{aligned}$$

а $f(a) = (1+a^2)_*^\alpha$, то

$$f(z) = f(a) \left(1 + \frac{z-a}{a+i}\right)_0^\alpha \left(1 + \frac{z-a}{a-i}\right)_0^\alpha.$$

Каждый из множителей $\left(1 + \frac{z-a}{a+i}\right)_0^\alpha \left(1 + \frac{z-a}{a-i}\right)_0^\alpha$ разлагается в свой ряд Тейлора, но оба имеют один и тот же радиус сходимости $R = |a \pm i| = \sqrt{a^2+1}$.

Обозначим, для удобства, $z-a = t$, $a+i = b$, $a-i = \bar{b}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{b}\right)_0^\alpha \left(1 + \frac{t}{\bar{b}}\right)_0^\alpha &= \\ &= \left(1 + \alpha \frac{t}{b} + \frac{\alpha(\alpha-1)t^2}{2!b^2} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!b^k} + \dots\right) \times \\ &\times \left(1 + \alpha \frac{t}{\bar{b}} + \frac{\alpha(\alpha-1)t^2}{2!\bar{b}^2} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!\bar{b}^k} + \dots\right) = \\ &= 1 + \alpha t \left(\frac{\bar{b}+b}{\bar{b}b}\right) + t^2 \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\bar{b}^2}\right) + \alpha^2 \frac{1}{\bar{b}b}\right) + \dots \end{aligned}$$

Видно, что коэффициенты разложения действительны. Записать общий член можно, но он выглядит громоздко. Отсюда, в частности, видно, что $f(x) = (1+x^2)^\alpha$, как след $f(z)$, имеет в окрестности точки $x = a$ вид

$$f(x) = (a^2+1)^\alpha \left(1 + \frac{x-a}{a+i}\right)^\alpha \left(1 + \frac{x-a}{a-i}\right)^\alpha,$$

каждый множитель которого является биномом, но с комплексными коэффициентами (этого на 1-ом курсе не проходят). ◀

Более интересным, т. к. получится хороший ряд, будет ряд для $\ln(1+x^2)$ в окрестности $x = a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

► По-прежнему разложить подлогарифмическое выражение на линейные множители с действительными коэффициентами невозможно. Поэтому и разложить в ряд в условиях работы в \mathbb{R} тоже не получится. Так как точки ветвления $\text{Ln}(1+z^2)$ те же, что и у $(1+z^2)^\alpha$, то разрез оставим тот же (см. рис. 2.18). Так как

$$\begin{aligned} \text{Ln}_*(1+z^2) &\equiv \text{Ln}_*(z+i)(z-i) \equiv \text{Ln}_*(z-a+a+i)(z-a+a-i) \equiv \\ &\equiv \text{Ln}_*(a+i)(a-i) \left(1 + \frac{z-a}{a+i}\right) \left(1 + \frac{z-a}{a-i}\right) = \\ &= \text{Ln}_*(a^2+1) + \ln\left(1 + \frac{z-a}{a+i}\right) + \ln\left(1 + \frac{z-a}{a-i}\right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln(a^2+1) + \ln\left(1 + \frac{z-a}{a+i}\right) + \ln\left(1 + \frac{z-a}{a-i}\right) = \\ &= \ln(a^2+1) + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}(z-a)^k}{k} \left(\frac{(a-i)^k + (a+i)^k}{(a^2+1)^k}\right) = \\ &= \ln(a^2+1) + 2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}(z-a)^k \cos k\alpha}{k(a^2+1)^{\frac{k}{2}}}, \quad |z-a| < \sqrt{a^2+1}, \end{aligned}$$

где $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) &= \\ \ln(a^2+1) &+ 2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}(x-a)^k \cos k\alpha}{k(a^2+1)^{\frac{k}{2}}}, \quad |x-a| < \sqrt{a^2+1}, \end{aligned}$$

где $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$.

Получился «красивый» ряд! ◀

Так проблемы математического анализа объясняются и разрешаются с помощью ТФКП.

Теперь будем решать более сложные задачи.

Пример 2.7. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $e^{-z} \cdot \text{Ln}(z-1)$ в плоскости с разрезом по кривой γ : $z = 1 - it$, $t \geq 0$ такая, что $f''(0) = 1 - i\pi$. Найдите первые три члена разложения $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2)$.

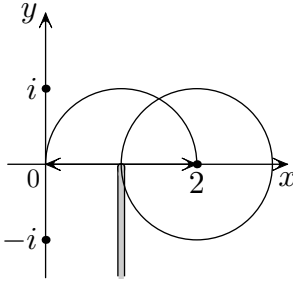


Рис. 2.20

► Многозначная функция $e^{-z} \text{Ln}(z-1)$ имеет, согласно п. 2.1.2, две точки ветвления: $z = 1$, $z = \infty$, значит, распадается на регулярные ветви в плоскости с произвольным разрезом, их соединяющим. Заданный разрез удовлетворяет этому условию (см. рис. 2.20).

Задача любопытная, потому что и формула функции не совсем обычная, и условие выделения ветви не стандартное. Будем рассматривать $(e^{-z} \cdot \text{Ln}(z-1))e^z$, чтобы при дифференцировании не появлялся $\text{Ln}(z-1)$.

Поэтому $f_*(z)e^z = \text{Ln}(z-1)_* = \ln|z-1| + i(\varphi_0 + \Delta\varphi)$, $\varphi_0 = \arg(z-1)$. Чтобы найти φ_0 , воспользуемся условием задачи:

$$\begin{aligned} f(z)e^z = \text{Ln}(z-1)_* &\Rightarrow f(z)e^z + f'(z)e^z = \frac{1}{z-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'(z)e^z &= \frac{1}{z-1} - f(z)e^z \Rightarrow \\ \Rightarrow 2f'(z)e^z + f(z)e^z + f''(z)e^z &= -\frac{1}{(z-1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(z)e^z &= -\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} + f(z)e^z. \end{aligned}$$

По условию, $f''(0) = 1 - i\pi = 1 + f(0) \Leftrightarrow f(0) = -i\pi \Rightarrow f(0) = i\varphi_0 = -i\pi \Rightarrow$

$$f(z)e^z = \ln|z-1| + i(-\pi + \Delta\varphi).$$

Найдём $f(2)$: $f(2)e^2 = -2\pi i$.

Теперь приведём формулы ветвей к виду, удобному для рассмотрения в окрестности $z = 2$:

$$\begin{aligned} f_*(z)e^z = \text{Ln}_*(z-1) &= \text{Ln}_*(z-2+1) = \text{Ln}_* 1 + \ln(1+(z-2)) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(2)e^2 = \text{Ln}_* 1 &\Rightarrow f(z) = (-2\pi i + \ln(1+(z-2)))e^{-z}. \end{aligned}$$

Так как $f(z)$ регулярна в окрестности $|z-2| < 1$ точки $z = 2$, то разложим её в ряд Тейлора. Общий член произведения рядов записать затруднительно.

Поэтому ответим на вопрос задачи — найдём первые три члена:

$$\begin{aligned} f(z) &= (-2\pi i + \ln(1 + (z - 2)))e^{-2}e^{-(z-2)} = \\ &= e^{-2} \left(-2\pi i + (z - 2) - \frac{(z - 2)^2}{2} + o((z - 2)^2) \right) \times \\ &\quad \times \left(1 - (z - 2) + \frac{(z - 2)^2}{2} + o((z - 2)^2) \right) = \\ &= e^{-2} \left(-2\pi i + (1 + 2\pi i)(z - 2) - (\pi i + 1, 5)(z - 2)^2 + o((z - 2)^2) \right). \end{aligned}$$

Ответ.

$$e^{-2} \left(-2\pi i + (1 + 2\pi i)(z - 2) - (\pi i + 1, 5)(z - 2)^2 + o((z - 2)^2) \right). \blacktriangleleft$$

Пример 2.8. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\text{Ln}(z + iz^2)$ в плоскости с разрезом по положительной полуоси и отрезку $[0; i]$, такая, что $\text{Im} f(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$.

- Разложите $f(z)$ в ряд Тейлора в круге с центром в точке $1 + \frac{i}{2}$.
- Найдите сумму ряда в точке $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
- Укажите окрестность точки $z = 1 + \frac{i}{2}$, в которой $S(z) = f(z)$.
- Укажите область, в которой $S(z) = f(z)$.

► Аналитическая функция $\text{Ln}(z + iz^2)$ имеет, как показано в п. 2.1.6, три точки ветвления: $z = \infty$, $z = 0$, $z = i$. Значит, она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим эти точки — заданный разрез этому условию удовлетворяет (см. рис. 2.21).

Как известно, вопрос об отыскании области сходимости ряда Тейлора или Лорана решается без нахождения коэффициентов рядов — важны лишь свойства функции.

Видно (см. рис. 2.22), что любая ветвь регулярна в окрестности $\left| z - \left(1 + \frac{i}{2} \right) \right| < \frac{1}{2}$, значит, она разлагается в ней в ряд Тейлора. Но радиус сходимости ряда Тейлора, построенного в окрестности точки $z = \left(1 + \frac{i}{2} \right)$ равен расстоянию от центра

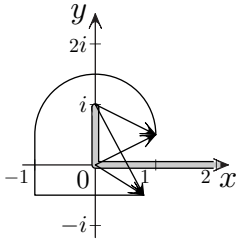


Рис. 2.21

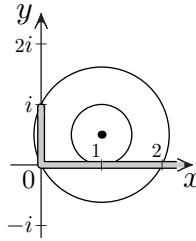


Рис. 2.22

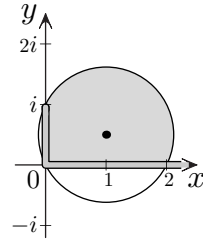


Рис. 2.23

разложения до ближайшей особой точки. В нашем примере $R = \left|1 + \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (см. рис. 2.22).

Ряд не «чувствует» разреза — он мог пойти, например, по отрицательной полуоси и лучу $[1; +i\infty)$.

Обозначим сумму ряда $S(z)$.

с) Тогда, если говорить об окрестности точки $z = 1 + \frac{i}{2}$, в которой $S(z) = f(z)$, то $S(z) = f(z)$ в окрестности $\left|z - \left(1 + \frac{i}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}$ (см. рис. 2.22).

д) Если говорить об области, в которой $S(z) = f(z)$, то это часть круга $\left|z - \left(1 + \frac{i}{2}\right)\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$, ограниченная границами разреза (см. рис. 2.23).

Теперь перейдём к пункту а).

1. Найдём формулу ветви. По определению, $f_*(z) = \text{Ln}_* iz(z - i) = \ln |iz(z - i)| + i(\varphi_{0*} + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)$. Так как $\text{Im} f(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = i\varphi_0 = 0$, то

$$f(z) = \ln |iz(z - i)| + i(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2),$$

$$\Delta\varphi_1 = \Delta \arg z, \quad \Delta\varphi_2 = \Delta \arg(z - i).$$

2. Приведём все ветви к виду, удобному для рассмотрения в окрестности центра разложения:

$$\text{Ln}_*(z + iz^2) \equiv \text{Ln}_* iz(z - i) \equiv$$

$$\equiv \text{Ln}_* i \left(z - \left(1 + \frac{i}{2}\right) + \left(1 + \frac{i}{2}\right) \right) \left(-i + z - \left(1 + \frac{i}{2}\right) + \left(1 + \frac{i}{2}\right) \right)_*$$

— выражение громоздкое.

Сделаем замену, положив $t = z - \left(1 + \frac{i}{2}\right)$, $1 + \frac{i}{2} = a$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}_* i(t+a)(t+\bar{a}) &\equiv \\ &\equiv \operatorname{Ln}_* ia\bar{a}\left(1 + \frac{t}{a}\right)\left(1 + \frac{t}{\bar{a}}\right) \equiv \operatorname{Ln}_* \frac{5i}{4}\left(1 + \frac{t}{a}\right)\left(1 + \frac{t}{\bar{a}}\right) = \\ &= \operatorname{Ln}_* \frac{5i}{4} + \ln\left(1 + \frac{t}{a}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{\bar{a}}\right) = f_*(0) + \ln\left(1 + \frac{t}{a}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{\bar{a}}\right). \end{aligned}$$

3. Найдём $f\left(1 + \frac{i}{2}\right) = f(t)|_{t=0}$.

$$\begin{aligned} f\left(1 + \frac{i}{2}\right) &= \ln \frac{5}{4} - i\left(\left(2\pi - \frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = \ln \frac{5}{4} - i \frac{7\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Теперь можно записать ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} S(t) &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{\bar{a}^n}\right) = \\ &= \ln \frac{5}{4} - i \frac{7\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n+1} t^n \cos n \operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{5^{\frac{n}{2}} n}, \quad |t| < \frac{\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S(z) &= \ln \frac{5}{4} - i \frac{7\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n+1} \left(z - 1 - \frac{i}{2}\right)^n \cos n \operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{5^{\frac{n}{2}} n}, \\ &\quad \left|z - 1 - \frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

б) Найдём сумму ряда в точке $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Подставим в формулу $S(z) = \ln |iz(z-i)| + i(\varphi_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)$, $\varphi_0 = (\arg(iz(z-i)))_{1+\frac{i}{2}}$, известное значение $S\left(1 + \frac{i}{2}\right)$ в центре разложения в ряд, где $S\left(1 + \frac{i}{2}\right) = f\left(1 + \frac{i}{2}\right)$:

$$S\left(1 + \frac{i}{2}\right) = \ln \left| i\left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 - \frac{i}{2}\right) \right| + i(\varphi_0) = \ln \frac{5}{4} - i \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{7\pi}{2}.$$

Поэтому $S(z) = \ln |iz(z-i)| + i\left(-\frac{7\pi}{2} + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2\right)$.

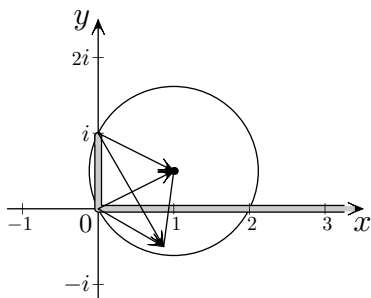


Рис. 2.24

Найдём приращения аргументов, пройдя по прямой от центра круга до точки $z=e^{-\frac{\pi i}{6}}$, т. е. от $(1; \frac{1}{2})$ до $(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$ (см. рис. 2.24):

$$\Delta\varphi_1 = -\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right),$$

$$\Delta\varphi_2 = -\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Получим: $S(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \frac{1}{2} \ln 3 - 4\pi i$.

Ответ. $\frac{1}{2} \ln 3 - 4\pi i$. ◀

Пример 2.9. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt{\frac{9z^2-1}{z^2}}$ в плоскости с разрезом по кривой γ :

$|z - \frac{i}{4}| = \frac{5}{12}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, такая, что $f(\frac{i}{2}) = \sqrt{13}$.

- а) Разложите $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности $z = \infty$.
- б) Найдите границы кольца сходимости полученного ряда.
- в) Вычислите сумму ряда в точке $z = \frac{i}{2}$.
- г) Укажите кольцо, в котором сумма ряда равна $f(z)$.

► Задача не самая простая. Какие точки ветвления у функции?

Первый способ. В числителе два корня различные. В знаменателе корни одинаковы — это значит, что после обхода $z = 0$ приращение аргумента z равно 4π , и значение не изменится. Отсюда следует, что $\sqrt{\frac{9z^2-1}{z^2}}$ имеет только две точки ветвления: $z = \pm \frac{1}{3}$ и, в силу предыдущего пункта, распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, их соединяющим. Заданный разрез удовлетворяет этому условию (см. рис. 2.25а).

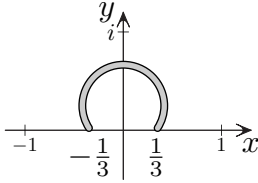


Рис. 2.25 а

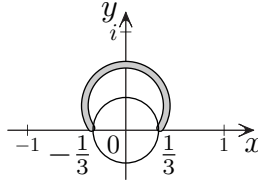


Рис. 2.25 б

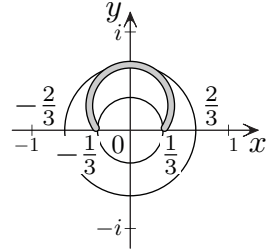


Рис. 2.25 в

По определению,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{9z^2 - 1}{z^2}}_* &= \sqrt{\left| \frac{9z^2 - 1}{z^2} \right|} e^{\frac{i(\varphi_0 + \Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2 - 2\Delta_\gamma \varphi_3)}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f\left(\frac{i}{2}\right) = \sqrt{13} = \sqrt{13} e^{\frac{i(\varphi_0)}{2}} \iff e^{\frac{i(\varphi_0)}{2}} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z) = \sqrt{\left| \frac{9z^2 - 1}{z^2} \right|} e^{\frac{i(\Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2 - 2\Delta_\gamma \varphi_3)}{2}}. \end{aligned}$$

Любая ветвь, определённая в нашей плоскости с разрезом, регулярна в кольце $\frac{2}{3} < |z| < \infty$, поэтому разлагается в нём в ряд Лорана. Теперь рассмотрим произвольную ветвь в окрестности $z = \infty$:

$$\sqrt{\frac{9z^2 - 1}{z^2}}_* \equiv \sqrt{9\left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)}_* = \sqrt{9}_* \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}} = f_*(\infty) \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}}.$$

Найдём $f(+\infty)$:

$$\Delta_\gamma \varphi_1 = \Delta_\gamma \arg\left(z + \frac{1}{3}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2},$$

$$\Delta_\gamma \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg\left(z - \frac{1}{3}\right) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{2},$$

$$\Delta_\gamma \varphi_3 = \Delta_\gamma \arg z = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(+\infty) = 3e^{i\pi} = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = -3 \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}}.$$

Разложим $-3 \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}}$ в ряд Лорана

$$-3 \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}} = -3 \sum_0^\infty C_{\frac{1}{2}}^k \frac{(-1)^k}{(9z^2)^k}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \infty.$$

Ряд сходится в кольце $\frac{1}{3} < |z| < \infty$ (см. рис. 2.25б), но его сумма $S(z)$ совпадает с $f(z)$ только в области $D = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\left| z - \frac{i}{2} \right| < \frac{5}{12} \cup |z| < \frac{1}{3} \right)$ (см. рис. 2.25в). Если говорить о том, в каком кольце они совпадают, то $S(z) = f(z) = -3 \sum_0^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k \frac{(-1)^k}{(9z^2)^k}, \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} < |z| < \infty$ (см. рис. 2.25в). Теперь будем искать $S\left(\frac{i}{2}\right)$. Разрез мы задали по своей воле, а ряд построен по «поведению» ветви в окрестности ∞ и имеет своё кольцо сходимости — он не «видит» разреза — радиус внутренней границы кольца «диктуют» особые точки $z = \pm \frac{1}{3}$. А разрез вполне мог находиться внутри круга $|z| < \frac{1}{3}$.

Видно, что при наличии разреза «продвинуться» из ∞ , где известно значение $S(\infty)$, в точку $z = \frac{i}{2}$, минуя внутренность круга $|z| < \frac{1}{3}$, где $S(z)$ не существует, невозможно. Найдём формулу $S(z)$ в кольце $|z| > \frac{1}{3}$:

$$\sqrt{\frac{9z^2 - 1}{z^2}}_{**} = \sqrt{\left| \frac{9z^2 - 1}{z^2} \right|} e^{\frac{i(\varphi_0 + \Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2 - 2\Delta_\gamma \varphi_3)}{2}}.$$

Так как $S(\infty) = -3 = 3e^{\frac{i(\varphi_0)}{2}} \iff e^{\frac{i(\varphi_0)}{2}} = -1$, то

$$S(z) = -\sqrt{\left| \frac{9z^2 - 1}{z^2} \right|} e^{\frac{i(\Delta_\gamma \varphi_1 + \Delta_\gamma \varphi_2 - 2\Delta_\gamma \varphi_3)}{2}} \Rightarrow S\left(\frac{i}{2}\right) = -\sqrt{13},$$

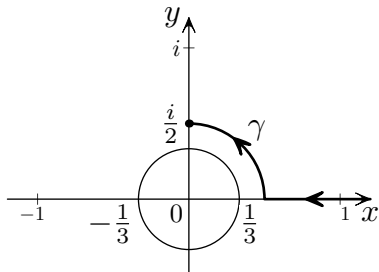


Рис. 2.26

т. к. $\Delta_\gamma \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$, $\Delta_\gamma \varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$, $\Delta_\gamma \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, где $\Delta_\gamma \varphi_i$ — приращение соответствующего вектора при движении из $z = +\infty$ в точку $z = \frac{i}{2}$ (см. рис. 2.26).

Ответ. $-3 \sum_0^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k \frac{(-1)^k}{(9z^2)^k}$,

$\frac{1}{3} < |z| < \infty$; $S\left(\frac{i}{2}\right) = -\sqrt{13}$; $S(z) = f(z), \frac{2}{3} < |z| < \infty$. ◀

Второй способ. Задачу можно оформить и по-другому.

► Так как $\sqrt[n]{z^n} = ze^{\frac{2\pi ki}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, (n-1)$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{9z^2-1}{z^2}}_* &= \frac{\sqrt{9z^2-1}_*}{\sqrt{z^2}} = \frac{\sqrt{9z^2-1}_*}{ze^{\frac{2\pi ki}{2}}} \iff \\ &\iff z\sqrt{\frac{9z^2-1}{z^2}}_* = e^{-\pi ki}\sqrt{9z^2-1}_*, \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Тогда, по определению,

$$\begin{aligned} zf(z) &= e^{-\pi ki}\sqrt{|9z^2-1|}e^{\frac{i(\varphi_{0*}+\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{i}{2}f\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2}\sqrt{13} = \frac{\sqrt{13}}{2}e^{-\pi ki}e^{\frac{i(\varphi_{0*})}{2}} \iff e^{-\pi ki}e^{\frac{i(\varphi_{0*})}{2}} = i \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z)z = i\sqrt{|9z^2-1|}e^{\frac{i(\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(+\infty) = \frac{i\sqrt{|9z^2-1|}e^{\frac{i(\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{2}}}{z} = \\ &= \frac{i|z|\sqrt{\left|9-\frac{1}{z^2}\right|}e^{\frac{i(\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{2}}}{|z|} = -3. \end{aligned}$$

В окрестности ∞ :

$$\sqrt{\frac{9z^2-1}{z^2}}_* = f_*(\infty)\left(1-\frac{1}{9z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(z) = -3\left(1-\frac{1}{9z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}}, \quad z \in D.$$

Далее, как в первом способе. ◀

Пример 2.10. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z(2-z)^2}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0; 2]$, такая, что $f(1+i0) = 1$.

а) Разложите $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности $z = \infty$.

б) Найдите $f'(3)$.

► Аналитическая функция $\sqrt[3]{z(2-z)^2}$ имеет две точки ветвления: $z = 0$, $z = 2$. Значит, она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим эти точки — заданный разрез этому условию удовлетворяет (см. рис. 2.28).

Видно (см. рис. 2.27), что любая ветвь регулярна в кольце $2 < |z| < \infty$ — значит, разлагается в нём в ряд Лорана.

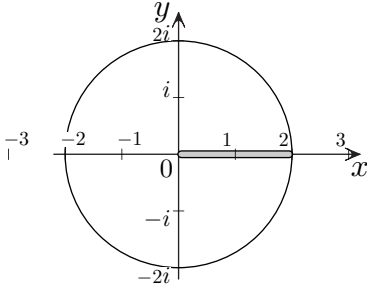


Рис. 2.27

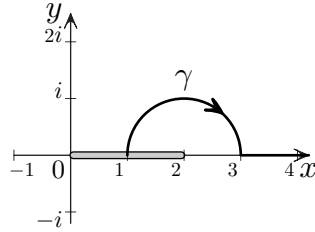


Рис. 2.28

Первый способ.

1. По определению (мы вывели и формулу, но зачем помнить то, что можно не помнить?),

$$f_*(z) = \left(\sqrt[3]{z(2-z)^2} \right)_* = \sqrt[3]{|z(2-z)^2|} e^{i \frac{\varphi_0 + \Delta\gamma\varphi_1 + 2\Delta\gamma\varphi_2}{3}}.$$

По условию,

$$f(1+i0) = 1 = 1 \cdot e^{i \frac{\varphi_0}{3}} \Rightarrow f(z) = \sqrt[3]{|z(2-z)^2|} e^{i \frac{\Delta\gamma\varphi_1 + 2\Delta\gamma\varphi_2}{3}}.$$

2. Приведём все ветви к виду, удобному для рассмотрения в окрестности центра разложения. Видно, что модуль $f(z)$ в ∞ равен ∞ . С этим не всем удаётся справиться.

Поэтому рассмотрим $\frac{f(z)}{z}$:

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z} \left(\sqrt[3]{z^3 \left(1 - \frac{2}{z}\right)^2} \right)_* = \frac{1}{z} \left(\sqrt[3]{z^3} \right)_* \left(1 - \frac{2}{z}\right)_0^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{f_*(z)}{z} \right) \left(1 - \frac{2}{z}\right)_0^{\frac{2}{3}}.$$

Так как $\frac{f_*(z)}{z} = \frac{\left(\sqrt[3]{z(2-z)^2} \right)_*}{z} = \frac{\sqrt[3]{|z(2-z)^2|}}{z} e^{i \frac{\Delta\gamma\varphi_1 + 2\Delta\gamma\varphi_2}{3}}$, то

$$\begin{aligned} \left. \frac{f(z)}{z} \right|_{+\infty} &= \frac{1}{z} \left. \sqrt[3]{z^3} \right|_{+\infty} = \frac{\sqrt[3]{|z(2-z)^2|}}{|z|} e^{i \frac{\Delta\gamma\varphi_1 + 2\Delta\gamma\varphi_2}{3}} = \\ &= e^{i \frac{\Delta\gamma\varphi_1 + 2\Delta\gamma\varphi_2}{3}} = e^{i \frac{0 - 2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Поэтому $f(z) = ze^{-i\frac{2\pi}{3}} \left(1 - \frac{2}{z}\right)_0^{\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{2}{3}} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n-1}}$, $|z| > 2$ в окрестности $z = \infty$.

а) **Ответ.** $e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{2}{3}} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n-1}}$, $|z| > 2$.

Второй способ. (для более «смелых»).

1. По определению,

$$\sqrt[3]{z(2-z)^2} = \sqrt[3]{|z(2-z)^2|} e^{i\frac{\varphi_0 + \Delta\gamma\varphi_1 + 2\Delta\gamma\varphi_2}{3}}.$$

По условию,

$$f(1+i0) = 1 = 1 \cdot e^{i\frac{\varphi_0}{3}} \Rightarrow f(z) = \sqrt[3]{|z(2-z)^2|} e^{i\frac{\Delta\gamma\varphi_1 + 2\Delta\gamma\varphi_2}{3}}.$$

2. Найдём $f(\infty)$.

Воспользуемся тем, что $\sqrt[n]{z^n}_* = e^{\frac{2\pi ki}{n}} z$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $(n-1)$ — это n однозначных функций (см. п. 2.1.3).

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z(2-z)^2}_* &\equiv \sqrt[3]{z^3 \left(1 - \frac{2}{z}\right)^2}_* = \sqrt[3]{z^3}_* \left(1 - \frac{2}{z}\right)_0^{\frac{2}{3}} = \\ &= ze^{\frac{2\pi ki}{3}} \left(1 - \frac{2}{z}\right)_0^{\frac{2}{3}}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Идём в } +\infty: f(+\infty) &= +\infty \cdot e^{i\frac{0-2\pi}{3}} = e^{\frac{2\pi ki}{3}} \cdot +\infty \iff e^{\frac{2\pi ki}{3}} = \\ &= e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow f(z) = e^{-\frac{2\pi i}{3}} z \left(1 - \frac{2}{z}\right)_0^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Можно пойти и в $-i\infty$, например:

$$f(\infty) = f(-i\infty) = +\infty \cdot e^{i\frac{3\pi+\pi}{3}} = -i\infty \cdot e^{\frac{2\pi ki}{3}} \iff e^{\frac{2\pi ki}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Подставляем и получаем тот же результат:

$$f(z) = e^{-\frac{2\pi i}{3}} z \left(1 - \frac{2}{z}\right)_*^{\frac{2}{3}}.$$

Теперь найдём $f'(z)$:

$$f^3(z) = z(z-2)^2 \iff$$

$$\iff 3f^2(z)f'(z) = (z-2)^2 + 2z(z-2) \iff f'(z) = \frac{7}{3f^2(z)}.$$

Найдём $f(3)$: $f(3) = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{0-2\pi}{3}} \Rightarrow f'(3) = \frac{7\sqrt[3]{3}}{9}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

б) **Ответ.** $\frac{7\sqrt[3]{3}}{9}e^{i\frac{4\pi}{3}}$. ◀

§ 2.3. Вычисление интегралов от регулярных ветвей

Прежде всего надо вспомнить формулировку теоремы о вычетах.

Теорема. Пусть в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей функция $f(z)$ регулярна всюду, кроме, быть может, конечного числа изолированных особых точек однозначного характера a_1, a_2, \dots, a_n и $f(z)$ непрерывна на \overline{D} . Тогда

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Обращаем внимание на то, что речь идёт об однозначных функциях. Поэтому теорема применима лишь к ветвям многозначных функций.

Рассмотрим любопытные примеры.

Пример 2.11. Что можно сказать о значении интеграла

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{z}-1}?$$

► Значение интеграла $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{z}-1}$ не существует.

Почему?

Во-первых, потому, что под знаком интеграла стоит многозначная функция — теорема о вычетах не применима. Понятно.

А тогда, может быть, можно посчитать интегралы от ветвей? Многозначная функция \sqrt{z} распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим 0 и ∞ . Как бы его ни проводить, он обязательно пересечёт заданную окружность, и знаменатель на всей окружности не будет однозначной функцией.

Ответ. Значение интеграла не существует. ◀

Пример 2.12. Что можно сказать о значении интеграла

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{\sqrt{z}-1}?$$

► Под знаком интеграла стоит многозначная функция — теорема о вычетах не применима. Понятно.

А тогда, может быть, можно посчитать интегралы от ветвей? Многозначная функция \sqrt{z} распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим 0 и ∞ .

Если провести разрез, идущий вне круга $|z-1| \leq \frac{1}{2}$, то в круге $|z-1| = \frac{1}{2}$ будут существовать две регулярные ветви многозначной функции \sqrt{z} : $f_1(z)$, $f_1(1) = 1$ и $f_2(z)$, $f_2(1) = -1$.

Тогда $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{f_2(z)-1} = 0$, а

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{f_1(z)-1} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=1} \frac{1}{f_1(z)-1} = \frac{2\pi i}{f_1'(1)},$$

$$f_1^2(z) = z \Rightarrow 2f_1'f_1 = 1 \Rightarrow \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{f_1(z)-1} = 4\pi i.$$

Ответ. Значение интеграла не существует, но можно вычислить значения интеграла от ветвей. ◀

Пример 2.13. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^3(2i-z)}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0; 2i]$ такая, что $f(2) = 2\sqrt[8]{2}e^{\frac{3\pi i}{16}}$. Вычислите $\oint_{|z|=4} \frac{zf(z)}{z+i} dz$.

► Сделаем эскиз разреза и контура интегрирования (см. рис. 2.29a).

Аналитическая функция $\sqrt[4]{z^3(2i-z)}$ имеет, как показано в п. 2.1.4, две точки ветвления: $z = 0$, $z = 2i$. Значит, она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим эти точки — заданный разрез этому условию удовлетворяет (см. рис. 2.29a).

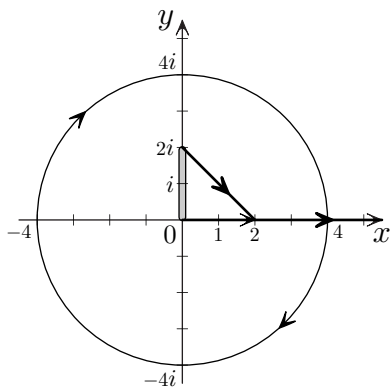


Рис. 2.29а

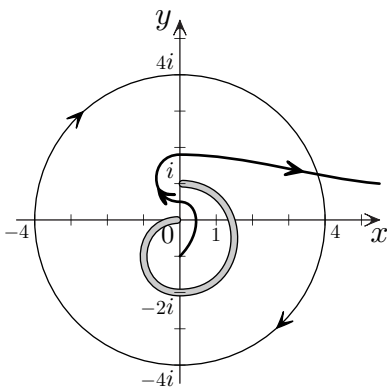


Рис. 2.29б

Точки ветвления находятся внутри заданного контура — теорема о вычетах не применима. Будем считать интеграл по внешности: $\oint_{|z|=4} \frac{zf(z)}{z+i} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{zf(z)}{z+i}$.

Найдём формулу ветви. По определению, $\sqrt[4]{z^3(2i-z)}_* = \sqrt[4]{z^3(2i-z)} e^{\frac{i(\varphi_0+3\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{4}}$.

Найдём $e^{i\varphi_0}$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi i}{16}} \Rightarrow 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{i(\varphi_0)}{4}} \iff e^{\frac{i(\varphi_0)}{4}} = e^{\frac{3\pi i}{16}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z) = \sqrt[4]{z^3(2i-z)} e^{\frac{3\pi i}{16}} e^{\frac{i(3\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{4}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left. \frac{f(z)}{z} \right|_{+\infty} = \frac{\sqrt[4]{z^3(2i-z)}}{|z|} e^{\frac{3\pi i}{16}} e^{\frac{i(3\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{4}} \Bigg|_{+\infty} = e^{\frac{3\pi i}{16}} e^{\frac{i\pi}{16}} = e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

В окрестности $z = \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{z^3(2i-z)}_*}{z} &= \frac{\sqrt[4]{-z^4}}{z} \left(1 - \frac{2i}{z}\right)_0^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \frac{f(z)}{z} \right|_{+\infty} = \left(\frac{\sqrt[4]{-z^4}}{z} \right)_{+\infty} = e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{z} = e^{\frac{i\pi}{4}} \left(1 - \frac{2i}{z}\right)_0^{\frac{1}{4}} \iff f(z) = ze^{\frac{i\pi}{4}} \left(1 - \frac{2i}{z}\right)_0^{\frac{1}{4}}.$$

Теперь будем искать вычет:

$$\begin{aligned} \frac{zf(z)}{z+i} &= \frac{f(z)}{1+\frac{i}{z}} = ze^{\frac{\pi i}{4}} \left(1 - \frac{2i}{z}\right)_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{i}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots\right) = \\ &= ze^{\frac{\pi i}{4}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{2i}{z} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{2i}{z}\right)^2 + \dots\right) \left(1 - \frac{i}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots\right) = \\ &= -\frac{9}{8} e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{1}{z} + \text{слагаемые, не содержащие } \frac{1}{z} \Rightarrow \\ \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= \frac{9}{8} e^{\frac{\pi i}{4}} \quad \text{и} \quad \oint_{|z|=4} \frac{zf(z)}{z+i} dz = -\pi i \frac{9}{4} e^{\frac{3\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Ответ. $-\frac{9}{4} \pi i e^{\frac{3\pi i}{4}}$. ◀

Пример 2.14. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2(i-z)}$ в плоскости с разрезом по кривой: $\gamma = \left\{z: \left|z + \frac{i}{2}\right| = \frac{3}{2}, \operatorname{Im} z \geq 0, |z+i| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\right\}$ такая, что $f(-i) = \sqrt[3]{2} e^{\frac{i7\pi}{6}}$. Вычислите $\oint_{|z|=4} \frac{f(z)}{1+e^{\frac{z}{2}}} dz$.

► Сделаем чертёж разреза и контура интегрирования (см. рис. 2.29б). Заметим, что внутри контура находится неизолированная особая точка $z=0$ — теорема о вычетах не применима. Поэтому будем считать по внешности окружности:

$$\oint_{|z|=4} \frac{f(z)}{1+e^{\frac{z}{2}}} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{f(z)}{1+e^{\frac{z}{2}}}.$$

Первый способ.

Теперь займёмся подынтегральной функцией. Область не односвязна — приращения зависят от γ .

По определению,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z^2(i-z)}_* &= \sqrt[3]{|z^2(i-z)|} e^{\frac{i(\varphi_0+2\Delta\gamma\varphi_1+\Delta\gamma\varphi_2)}{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(-i) &= \sqrt[3]{2} e^{\frac{i7\pi}{6}} = \sqrt[3]{2} e^{\frac{i(\varphi_0)}{3}} \iff e^{\frac{i(\varphi_0)}{3}} = e^{\frac{i7\pi}{6}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sqrt[3]{|z^2(i-z)|} e^{\frac{i7\pi}{6}} e^{\frac{i(2\Delta\gamma\varphi_1 + \Delta\gamma\varphi_2)}{3}}.$$

Так как $f_*(\infty) = \infty$, то проще искать $\left. \frac{f(z)}{z} \right|_{+\infty}$, где $|z| = z$.

Теперь приведём формулы ветвей к виду, удобному для рассмотрения в окрестности $z = \infty$: $\frac{f_*(z)}{z} = \frac{\sqrt[3]{-z^3}}{z} \left(1 - \frac{i}{z}\right)_0^{\frac{1}{3}}$.

$$\left. \frac{f(z)}{z} \right|_{+\infty} = \left. \frac{f(z)}{|z|} \right|_{+\infty} = e^{\frac{i7\pi}{6}} e^{\frac{i(2(2\pi + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2})}{3}} = -1.$$

Отсюда следует, что $f(z) = -z \left(1 - \frac{i}{z}\right)_0^{\frac{1}{3}}$ в окрестности $z = \infty$.

Разлагаем в ряд Лорана числитель и знаменатель. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{1 + e^{\frac{2}{z}}} &= - \frac{z \left(1 - \frac{i}{3z} - \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2z^2} + o\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right)}{2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + o\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right)} = \\ &= - \frac{z}{2} \left(1 - \frac{i}{3z} + \frac{1}{9z^2} + o\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{f(z)}{1 + e^{\frac{2}{z}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{i}{3}\right) = \frac{(1 + 3i)}{18} \quad \text{и} \\ &\oint_{|z|=4} \frac{f(z)}{1 + e^{\frac{2}{z}}} dz = \frac{\pi(3 - i)}{9}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi(3 - i)}{9}$.

Второй способ.

Теперь приведём формулы ветвей к виду, удобному для рассмотрения в окрестности $z = \infty$ по-другому:

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \sqrt[3]{z^2(i-z)}_* \equiv \sqrt[3]{-z^3 \left(1 - \frac{i}{z}\right)}_* = \\ &= \sqrt[3]{-z^3} \left(1 - \frac{i}{z}\right)_0^{\frac{1}{3}} = -ze^{\frac{2\pi im}{3}} \left(1 - \frac{i}{z}\right)_0^{\frac{1}{3}}, \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt[3]{z^2(i-z)}}{z} e^{\frac{i7\pi}{6}} e^{\frac{i(2\Delta\gamma\varphi + \Delta\gamma\varphi)}{3}}, \text{ то } \frac{f(z)}{z} \Big|_{+\infty} = -e^{\frac{2\pi im}{4}} = -1.$$

Отсюда следует, что $f(z) = -z \left(1 - \frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{3}}$ в окрестности $z = \infty$.

$$\begin{aligned} \text{(Можно сделать и так: } f(+\infty) &= +\infty \cdot e^{\frac{i7\pi}{6}} e^{\frac{i(2(2\pi + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2})}{3}} = \\ &= -\infty = -\infty \cdot e^{\frac{2\pi im}{4}} \Rightarrow f(z) = -z \left(1 - \frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Остальное так же, как в первом способе. ◀

Пример 2.15. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{1-z^2}$ в плоскости с разрезом по кривой: $\gamma = \{z: z = e^{it}, t \in [0; \pi], z = 1 + it, t \in [0; +\infty)\}$ такая, что $f(0) = 1$. Пусть $S(z) = \sum_0^{\infty} a_k(z-3i)^k$ — регулярная в области сходимости ряда функция, совпадающая с $f(z)$ в некоторой окрестности точки $z = 3i$. Найдите $f\left(\frac{3i}{4}\right)$, радиус сходимости ряда $S(z)$ и вычислите интеграл

$$\oint_{|z-3i|=\frac{5}{2}} \frac{S(z) dz}{\left(z - \frac{3i}{4}\right)^2}.$$

► Нарисуем разрез (см. рис. 2.30).

У функции $\sqrt[4]{1-z^2}$ три точки ветвления: $z = \pm 1, z = \infty$. Поэтому она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим эти точки. Заданный разрез этому условию удовлетворяет — регулярная ветвь существует. Заметим, что $f(z)$ регулярна в окрестности $|z-3i| < 1$, а потому разлагается там в ряд Тейлора. В силу теоремы единственности разложения в ряд Тейлора, это и есть заданный ряд.

Известно, что радиус сходимости ряда Тейлора равен расстоянию до ближайшей особой точки — до точек $z = 1$ и $z = -1$, т. е. $R = \sqrt{10}$, и $S(z)$ определена в окрестности $|z-3i| < \sqrt{10}$. При этом $S(z) = f(z)$, по крайней мере, в окрестности $|z-3i| < 1$.

Ряд полностью определяется поведением $f(z)$ в окрестности центра разложения и не «замечает» разреза, который мы выбираем произвольно (лишь бы соединить точки ветвления). Разрез может быть «опрокинутым» в нижнюю полуплоскость, и тогда весь круг сходимости оказался бы в области регулярности ветви (но другой, отличной от $f(z)$, т. к. была бы другая область существования).

Итак, сумма $S(z)$ определена в круге $|z - 3i| < \sqrt{10}$, контур интегрирования находится внутри, поэтому будем вычислять интеграл.

Подынтегральная функция имеет в точке $z = \frac{3}{4}i$ полюс второго порядка, а тогда

$$\oint_{|z-3i|=\frac{5}{2}} \frac{S(z) dz}{\left(z - \frac{3i}{4}\right)^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\frac{3i}{4}} \frac{S(z)}{\left(z - \frac{3i}{4}\right)^2} = 2\pi i S' \left(\frac{3i}{4}\right).$$

Осталось найти $S' \left(\frac{3i}{4}\right)$: $1 - z^2 = S^4(z) \Rightarrow -2z = = 4S^3(z)S'(z) \iff S'(z) = -\frac{z}{2S^3(z)}$. Теперь ясно, что для вычисления интеграла нам надо найти $S \left(\frac{3i}{4}\right)$. Это значение можно было бы найти, если $z = \frac{3i}{4}$ подставить в ряд и вычислить его сумму, что сделать нереально. Нельзя сразу связать $f \left(\frac{3i}{4}\right)$ и $S \left(\frac{3i}{4}\right)$, т. к. $z = \frac{3}{4}i$ находится под разрезом, а там $S(z) \neq f(z)$. Нам надо знать $S(z)$ в какой-нибудь точке, а затем найти $S \left(\frac{3i}{4}\right)$. Например, известно, что $S(3i) = f(3i)$.

Найдём формулу нашей ветви $f(z)$.

Так как $\sqrt[4]{1 - z^2} = \sqrt[4]{|1 - z^2|} e^{\frac{i(\varphi_{0*} + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)}{4}}$, $\Delta\varphi_1 = \Delta \arg(z - 1) \equiv \Delta \arg(1 - z)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta \arg(z + 1)$, а $f(0) = 1$, то на нашей ветви $f(0) = e^{\frac{i(\varphi_0)}{4}} = 1 \Rightarrow$

$$f(z) = \sqrt[4]{|1 - z^2|} e^{\frac{i(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)}{4}}.$$

Эта формула даёт значение ветви в любой точке плоскости.

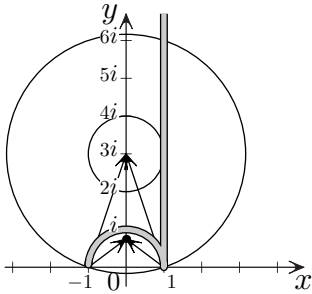


Рис. 2.30

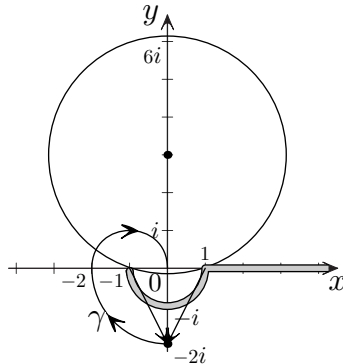


Рис. 2.31

Можем сразу найти ответ на один из вопросов задачи — пройдем по оси Oy от 0 до $\frac{3i}{4}$ — найдем $f\left(\frac{3i}{4}\right) = \sqrt[4]{\frac{5}{4}} e^{\frac{i(\varphi-\varphi)}{4}} = \sqrt[4]{\frac{5}{4}}$.

Это значение вычисляется для того, чтобы потом было видно, что $f\left(\frac{3i}{4}\right) \neq S\left(\frac{3i}{4}\right)$.

$$\text{Находим } f(3i) = \sqrt[4]{10} e^{\frac{i(-\pi - \arctg 3 - (\pi - \arctg 3))}{4}} = -i \sqrt[4]{10} = S(3i).$$

Теперь находим формулу для $S(z)$:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1-z^2} &= \sqrt[4]{|1-z^2|} e^{\frac{i(\varphi_{0*} + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)}{4}} \Rightarrow \\ \Rightarrow S(3i) &= \sqrt[4]{10} e^{\frac{i(\varphi_{0*})}{4}} = -i \sqrt[4]{10} \Rightarrow S(z) = -i \sqrt[4]{|1-z^2|} e^{\frac{i(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)}{4}}. \end{aligned}$$

«Спустившись» по оси Oy из $z = 3i$ в $z = \frac{3i}{4}$, находим

$$\begin{aligned} S\left(\frac{3i}{4}\right) &= -i \sqrt[4]{\frac{5}{4}} e^{\frac{i(-\theta+\theta)}{4}} = -i \sqrt[4]{\frac{5}{4}} \Rightarrow \\ \Rightarrow S'\left(\frac{3i}{4}\right) &= -\frac{3i}{4 \cdot 2 \left(-i \sqrt[4]{\frac{5}{4}}\right)^3} = -\frac{3\sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

и тогда

$$\oint_{|z-3i|=\frac{5}{2}} \frac{S(z) dz}{\left(z - \frac{3i}{4}\right)^2} = -\frac{6\pi\sqrt{5}}{25} i.$$

Ответ. $\sqrt{10}, \sqrt{\frac{5}{4}}, -\frac{6\pi\sqrt{5}}{25}i$. ◀

Пример 2.16. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\text{Ln}(z^2 - 1)$ в плоскости с разрезом по кривой: $\gamma = \{z = e^{it}, t \in [-\pi; 0], z = t, t \in [1; +\infty)\}$ такая, что $\text{Im } f(-2i) = 3\pi$.

Вычислите интеграл

$$\oint_{|z-3i|=\frac{22}{7}} z \left(\frac{f(z)}{f(z) - \pi i} \right)^2 dz.$$

► Нарисуем разрез (см. рис. 2.31).

Примечание. Рисунок сделан в реальном масштабе, и кажется, что заданная окружность проходит через точки ветвления. Если было бы так, мы интеграл не знали бы, как считать. На самом деле радиус окружности меньше $\sqrt{10} \left(\left(\frac{22}{7} \right)^2 = \frac{484}{49} < 10 \right)$, но очень не намного!

У функции $\text{Ln}(z^2 - 1)$ три точки ветвления: $z = \pm 1, z = \infty$. Поэтому она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим эти точки. Заданный разрез этому условию удовлетворяет — регулярная ветвь $f(z)$ существует. Найдём сначала точки, в которых знаменатель может обратиться в 0.

Пусть $\text{Ln}_*(z^2 - 1)$ — ветвь многозначной функции $\text{Ln}(z^2 - 1)$. Тогда $\text{Ln}_*(z^2 - 1) = \pi i \Rightarrow z^2 - 1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow z = 0$.

Найдём формулу нашей ветви. Для любой ветви $\text{Ln}_*(z^2 - 1) = \ln|z^2 - 1| + i(\varphi_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)$, где $\Delta\varphi_1 = \Delta \arg(z + 1)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta \arg(z - 1)$, а у нас $\text{Im } f(-2i) = 3\pi \Rightarrow \varphi_0 = 3\pi$, и тогда

$$f(z) = \ln|1 - z^2| + i(3\pi + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2).$$

Найдём $f(0) = i(3\pi - (2\pi - \varphi) - \varphi) = \pi i$.

Отсюда следует, что $z = 0$ — полюс 2-го порядка для подынтегральной функции.

Приведём все ветви к виду, удобному для рассмотрения в окрестности $z = 0$:

$$\text{Ln}_*(z^2 - 1) \equiv \text{Ln}_*(-1)(1 - z^2) =$$

$$= \operatorname{Ln}_*(-1) + \ln(1 - z^2) = f_*(0) + \ln(1 - z^2).$$

Так как $f(0) = \pi i$, то

$$f(z) = \pi i + \ln(1 - z^2) = \pi i - z^2 - \frac{z^4}{2} + o(|z|^4).$$

Найдём коэффициент при $\frac{1}{z}$, разложив подынтегральную функцию в окрестности $z = 0$:

$$\begin{aligned} z \left(\frac{f(z)}{f(z) - \pi i} \right)^2 &= \frac{(\pi i - z^2 + o(|z|^2))^2}{z^3 \left(1 + \frac{z^2}{2} + o(|z|^2) \right)^2} = \frac{-\pi^2 \left(1 - \frac{z^2}{\pi i} + o(|z|^2) \right)^2}{z^3 (1 + z^2 + o(|z|^2))} = \\ &= -\frac{\pi^2}{z^3} \left(1 - \frac{2z^2}{\pi i} + o(|z|^2) \right) (1 - z^2 + o(|z|^2)) = \\ &= -\frac{\pi^2}{z} \left(-1 - \frac{2}{\pi i} \right) + \text{слагаемые, не содержащие } \frac{1}{z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{res}_{z=\infty} \left(\frac{f(z)}{f(z) - \pi i} \right)^2 = \pi^2 \left(1 + \frac{2}{\pi i} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_{|z-3i|=\frac{22}{7}} z \left(\frac{f(z)}{f(z) - \pi i} \right)^2 dz = 2\pi^3 \left(i + \frac{2}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Ответ. $2\pi^3 \left(i + \frac{2}{\pi} \right)$. ◀

Пример 2.17. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1 + z^2)$ в плоскости с разрезом по кривой: $\gamma = \left\{ z = e^{it}, t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right], z = i + t, t \in [0; +\infty) \right\}$ такая, что

$\operatorname{Im} f(0) = 0$. Вычислите интеграл $\oint_{|z-3i|=\frac{7}{4}} \left(\frac{f(z)}{f(z) + \pi i} \right)^2 dz$.

► Эта задача, на первый взгляд, кажется такой же, как предыдущая. Но будет видно, что она окажется более громоздкой.

Нарисуем эскиз разреза (см. рис. 2.32).

У функции $\operatorname{Ln}(1 + z^2)$ три точки ветвления: $z = \pm i, z = \infty$.

Поэтому она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим эти точки. Заданный разрез этому условию удовлетворяет — регулярная ветвь $f(z)$ существует.

Найдём сначала точки, в которых знаменатель может обратиться в 0.

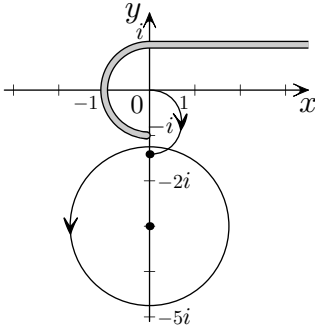


Рис. 2.32

Пусть $\text{Ln}_*(1 + z^2)$ — ветвь многозначной функции $\text{Ln}(1 + z^2)$. Тогда $\text{Ln}_*(1 + z^2) = -i\pi \Rightarrow 1 + z^2 = -1 \iff z = \pm i\sqrt{2}$. Точка $z = i\sqrt{2}$ лежит вне заданной окружности — поэтому надо проверить, обращается ли в 0 знаменатель только в точке $z = -i\sqrt{2}$.

Найдём формулу нашей ветви.

Для любой ветви $\text{Ln}_*(1 + z^2) = \ln|1 + z^2| + i(\varphi_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)$, а для нашей $\text{Im } f(0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$, откуда следует, что

$$f(z) = \ln|1 + z^2| + i(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2).$$

Тогда для нашей ветви $f(-i\sqrt{2}) = i(-\pi + 0) = -i\pi$. Значит, в точке $z = -i\sqrt{2}$ полюс второго порядка и

$$\oint_{|z-3i|=\frac{7}{4}} \left(\frac{f(z)}{f(z) + \pi i} \right)^2 dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-i\sqrt{2}} \left(\frac{f(z)}{f(z) + \pi i} \right)^2.$$

Видно, что обычная формула вычета будет выглядеть довольно громоздко.

Попробуем вычислить вычет «в лоб», разложив функцию в окрестности $z = -i\sqrt{2}$.

Приведём все ветви к виду, удобному для рассмотрения в окрестности $z = -i\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \text{Ln}_*(1 + z^2) \equiv \text{Ln}_*(z + i)(z - i) \equiv \\ &\equiv \text{Ln}_*(z + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} + i)(z + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} - i) \equiv \\ &\equiv \text{Ln}_*(-i\sqrt{2} + i)(-i\sqrt{2} - i) \left(1 + \frac{z + i\sqrt{2}}{(-i\sqrt{2} + i)} \right) \left(1 + \frac{z + i\sqrt{2}}{(-i\sqrt{2} - i)} \right). \end{aligned}$$

Обозначим, для удобства, $at = \frac{z + i\sqrt{2}}{i(1 - \sqrt{2})}$, $bt = -\frac{z + i\sqrt{2}}{i(1 + \sqrt{2})}$ и получим

$$\begin{aligned} f_*(z) &= g(t) = \text{Ln}_*(-1)(1 + at)(1 - bt) = \\ &= f_*(-i\sqrt{2}) + \ln(1 + at) + \ln(1 - bt). \end{aligned}$$

Для нашей ветви $f(-i\sqrt{2}) = -i\pi$, и поэтому

$$f(z) = -i\pi + \ln(1 + at) + \ln(1 - bt).$$

Теперь разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(z)}{f(z) + \pi i} \right)^2 &= \frac{(-i\pi + \ln(1 + at) + \ln(1 + bt))^2}{(\ln(1 + at) + \ln(1 + bt))^2} = \\ &= \frac{-\pi^2 \left(1 - \frac{at}{i\pi} - \frac{bt}{i\pi} + o(|t|) \right)^2}{t^2(a + b)^2 \left(1 - \frac{t(a^2 + b^2)}{2(a + b)} + o(|t|) \right)} = \\ &= -\frac{\pi^2}{t^2(a + b)^2} \left(1 - \frac{2t(a + b)}{i\pi} + o(|t|) \right) \left(1 + \frac{t(a^2 + b^2)}{(a + b)} + o(|t|) \right) = \\ &= -\frac{\pi^2}{t(a + b)^2} \left(-\frac{2(a + b)}{i\pi} + \frac{(a^2 + b^2)}{(a + b)} \right) + \end{aligned}$$

+ слагаемые, не содержащие $\frac{1}{z}$.

Вычислим коэффициент при $\frac{1}{t}$. Так как

$$\begin{aligned} a + b &= -\frac{1}{i(\sqrt{2} - 1)} - \frac{1}{i(\sqrt{2} + 1)} = -\frac{2\sqrt{2}}{i} \Rightarrow (a + b)^2 = -8, \\ a^2 + b^2 &= \left(\frac{1}{i(\sqrt{2} - 1)} \right)^2 + \left(\frac{1}{i(\sqrt{2} + 1)} \right)^2 = -6, \end{aligned}$$

то

$$-\frac{\pi^2}{t(a + b)^2} \left(-\frac{2(a + b)}{i\pi} + \frac{(a^2 + b^2)}{(a + b)} \right) = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{3i}{\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \right),$$

и

$$\oint_{|z+i|=\frac{7}{3}} \left(\frac{f(z)}{f(z) + \pi i} \right)^2 dz = 2\pi i \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{3i}{\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \right) = -\frac{\pi^3}{4\sqrt{2}} \left(3 + \frac{8i}{\pi} \right).$$

Ответ. $-\frac{\pi^3}{4\sqrt{2}} \left(3 + \frac{8i}{\pi} \right).$ ◀

Пример 2.18. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\text{Ln } z$ в области $G = |z - e| < 1$, такая, что $f(e) = 1$. Доказать, что аналитическая функция $F(z) = \sqrt{f(z)}$ распадается в области G на регулярные ветви. Пусть g — регулярная ветвь $F(z)$, такая, что $g(e) = -1$.

Вычислите интеграл $\oint_{|z|=15} g\left(\frac{ez}{z+e}\right) dz$.

► $\text{Ln } z$ имеет две точки ветвления: 0 и ∞ . Значит, функция $\text{Ln } z$ распадается на регулярные ветви в плоскости с любым разрезом, соединяющим 0 и ∞ . Так как ветвь задана в круге $|z - e| < e$, то разрез можно провести вне этого круга. Функция $\sqrt{f(z)}$ имеет точки ветвления там, где $f(z)$ обращается в 0 или ∞ . В круге таких точек нет, область односвязна, значит, $\sqrt{f(z)}$ тоже распадается на регулярные ветви.

Ветвь $g(z)$ задана в круге $|z - e| < e$. Проверим, где при этом существует $g\left(\frac{ez}{z+e}\right)$:

$$\left| \frac{ez}{z+e} - e \right| < e \iff \left| \frac{e^2}{z+e} \right| < e \iff |z+e| > e \quad (\text{см. рис. 2.33}).$$

Значит, $\oint_{|z|=15} g\left(\frac{ez}{z+e}\right) dz$ существует. Но внутри контура нахо-

дится точка $z = 0$, в которой $g\left(\frac{ez}{z+e}\right)$ не определена, поэтому будем вычислять интеграл по внешности круга.

Первый способ.

В кольце $15 < |z| < \infty$ функция $g\left(\frac{ez}{z+e}\right)$ регулярна, поэтому

$$\oint_{|z|=15} \frac{dz}{g\left(\frac{ez}{z+e}\right)} = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{g\left(\frac{ez}{z+e}\right)}.$$

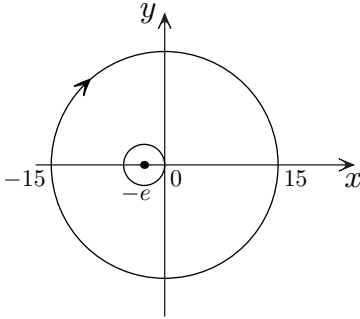


Рис. 2.33

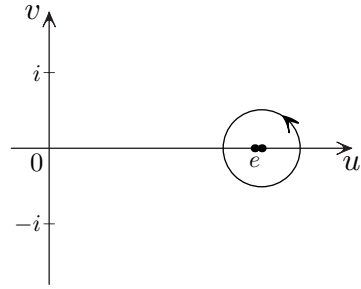


Рис. 2.34

Заметим, что $g(e) = g(z)|_{z=\infty}$. Приведём формулы всех ветвей $\text{Ln} \frac{ez}{z+e}$ к виду, удобному для рассмотрения в окрестности $z = \infty$:

$$\begin{aligned} \text{Ln}_* \frac{ez}{z+e} &\equiv \text{Ln}_* \frac{e}{1+\frac{e}{z}} = \text{Ln}_* e - \ln\left(1 + \frac{e}{z}\right) = \\ &= f_*(e) - \ln\left(1 + \frac{e}{z}\right) \Rightarrow f(z) = 1 - \ln\left(1 + \frac{e}{z}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} g\left(\frac{ez}{z+e}\right) &= \sqrt{1 - \ln\left(1 + \frac{e}{z}\right)}_* = g(e) \left(1 - \ln\left(1 + \frac{e}{z}\right)\right)_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= -1 \cdot \left(1 - \ln\left(1 + \frac{e}{z}\right)\right)_0^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Найдём коэффициент при $\frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g\left(\frac{ez}{z+e}\right)} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \ln\left(1 + \frac{e}{z}\right)}_0} = -\frac{1}{1 - \frac{e}{2z} + o\left(\frac{e}{z}\right)} = \\ &= -\frac{e}{2z} + \text{слагаемые, не содержащие } \frac{1}{z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{res}_{z=\infty} g\left(\frac{ez}{z+e}\right) = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\oint_{|z|=15} \frac{dz}{g\left(\frac{ez}{z+e}\right)} = -e\pi i$.

Ответ. $-\pi i$.

Примечание. Вычет можно было считать и по формуле для УОТ в ∞ .

Второй способ.

Сделаем замену переменных: $\frac{ez}{z+e} = t \iff z = \frac{te}{e-t}$. Окружность преобразовалась в окружность (можно проверить в «лоб», расписав $\left| \frac{te}{e-t} \right| = 15$). При этом

$$t(0) = 0, \quad 0 < t(15) = \frac{15e}{15+e} < e, \quad t(-15) = \frac{15e}{15-e} > e > t(15),$$
$$t(15i) = \frac{15i}{15i+e} = \frac{15i(15i-e)}{-15^2-e^2} = \frac{15^2+15ie}{15^2+e^2}.$$

Координаты центра

$$\frac{1}{2} \left(\frac{15e}{15+e} + \frac{15e}{15-e} \right) = \frac{15^2e}{15^2-e^2},$$
$$r = \frac{15^2e}{15^2-e^2} - \frac{15e}{15+e} = \frac{15e^2}{15^2-e^2}.$$

Отсюда следует, что внешность окружности $|z| = 15$ перешла во внутренность окружности C^* : $\left| t - \frac{225e}{225-e^2} \right| = \frac{15e^2}{225-e^2}$ (т. к. $z = 0$ переходит в точку $t = 0$, находящуюся вне окружности C^*), проходимой в противоположном направлении (т. к. $t(15i)$ находится в верхней полуплоскости) (см. рис. 2.34).

Делаем замену в интеграле: $dz = \frac{e^2}{(t-e)^2} dt$.

Поэтому

$$\oint_{|z|=15} \frac{dz}{g\left(\frac{ez}{z+e}\right)} = - \oint_{C^*} e^2 \frac{dt}{g(t)(t-e)^2} =$$
$$= -2\pi i e^2 \operatorname{res}_{t=e} \frac{1}{g(t)(t-e)^2} = 2\pi i e^2 \frac{g'(e)}{g^2(e)}.$$

Вычислим $g'(e)$:

$$g^2(t) = f(t) \iff 2g(t)g'(t) = f'(t) \Rightarrow g'(e) = \frac{f'(e)}{2g(e)}.$$

$$\text{Но } f'(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e} \Rightarrow \oint_{|z|=15} \frac{dz}{g\left(\frac{ez}{z+e}\right)} = -\pi ie.$$

Ответ. $-\pi ie$.

П р и м е ч а н и е. Интересно, что это решение и ответ не зависит от значения ветви $f(e)$, а зависит только от значения

$$g(e): \oint_{|z|=15} \frac{dz}{g\left(\frac{ez}{z+e}\right)} = \frac{\pi ie}{g^3(e)}.$$

Правда, по значению $g(e)$ восстанавливается значение $f(e)$:
 $g_{km}(e) = \sqrt{*} \operatorname{Ln}_* e = \sqrt{*} 1 + 2\pi ik = |1 + 2\pi ik| e^{\frac{i(\arg(1+2\pi ik)+2\pi m)}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$, $m = 1, 2$.

Видно, что, если $g(e) = -1$, то $f(e) = 1$. ◀

§ 2.4. Вычисление интегралов от функций действительного переменного

2.4.1. Выбор контура интегрирования и регулярных ветвей

При вычислении интегралов от функций действительного переменного, содержащих радикалы или логарифмы, приходится выбирать замкнутый контур интегрирования и иметь дело с интегралами от регулярных ветвей многозначных функций. При этом надо иметь в виду некоторые особенности при подходе к решению таких задач.

- 1) Часть выбираемого контура должна совпадать с отрезком, по которому ведётся интегрирование заданной функции действительного переменного, или отрезком любой длины, если вычисляется несобственный интеграл по бесконечному промежутку.
- 2) Если интеграл содержит логарифм или корень, то придётся вычислять интеграл по контуру от регулярных ветвей соответствующих многозначных функций. А многозначная функция распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим точки ветвления. Так как мы хотим вычислить интеграл по той или другой части действительной оси, то ветви должны существовать в плоскости с

разрезом именно по действительной оси. Поэтому разрез или его часть будет границей будущего контура.

- 3) Так как теория вычетов применяется к интегралам по замкнутому контуру, то «замыкание» осуществляется так, что, либо по дополнительным контурам интегралы будут равны 0, либо мы их сможем вычислить, либо их значения известны.
- 4) Регулярные ветви, применяемые при вычислении интегралов от функции действительного переменного, это всегда функции, принимающие действительные значения на той или иной части действительной оси.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся функции.

1. Так как всегда $\sqrt[2n]{P_m(x)} \geq 0$, то регулярная ветвь $f(z)$ функции $\sqrt[2n]{P_m(z)}$, принимающая неотрицательные значения на некотором отрезке действительной оси, имеет вид

$$f(z) = \sqrt[2n]{|P_m(z)|} e^{\frac{\Delta\gamma \arg(P_m(z))}{n}},$$

т. к. если $\sqrt[2n]{P_m(x)} = \sqrt[2n]{|P_m(x)|} e^{\frac{\arg(P_m(x+i0))}{n}} \geq 0$, то $e^{\frac{\arg(P_m(x+i0))}{n}} = 1$.

2. Что касается функции $\sqrt[2n+1]{P_m(z)}$, то ситуация может быть двоякой

- а) Регулярная ветвь, принимающая *неотрицательные* значения в некоторой точке на действительной оси, имеет вид

$$f(z) = \sqrt[2n+1]{|P_m(z)|} e^{\frac{\Delta\gamma \arg(P_m(z))}{n}}.$$

- б) Регулярная ветвь, принимающая *отрицательные* значения в некоторой точке на действительной оси, имеет вид

$$f(z) = -\sqrt[2n+1]{|P_m(z)|} e^{\frac{\Delta\gamma \arg(P_m(z))}{n}}.$$

т. к., если

$$\sqrt[2n+1]{P_m(x_0)} = \sqrt[2n+1]{|P_m(x_0)|} e^{\frac{\arg(P_m(x_0+i0))}{n}} < 0,$$

$$\text{то } e^{\frac{\arg(P_m(x_0+i0))}{n}} = -1.$$

3. Регулярная ветвь $\text{Ln } P_n(z)$, принимающая действительные значения в некоторой точке x_0 , имеет вид

$$f(z) = \ln |P_n(z)| + i\Delta_\gamma \arg P_n(z),$$

т. к., если $P_n(x_0) > 0$, то $\text{Ln } P_n(z) = \ln |P_0(z)| + i(\arg P_n(z_0) + \Delta_\gamma \arg P_n(z)) \Rightarrow \text{Ln } P_n(x_0) = \ln |P_n(x_0)| + i \arg P_n(x_0)$, а $f(x_0) = \ln |P_n(x_0)| \Rightarrow \arg P_n(x_0) = 0$.

2.4.2. На контуре интегрирования нет особых точек

Пример 2.19. Вычислите

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}.$$

► Придётся иметь дело с регулярной ветвью $\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}$, а она существует в плоскости с разрезом, соединяющим точки ветвления $z = 0$ и $z = 1$. Так как задан интеграл по отрезку $[0; 1]$, то разрез проведём именно по этому отрезку с «берегами» l_1 и l_2 . Интеграл несобственный — поэтому «изолируем» особые точки окружностями C_{ρ_1} и C_{ρ_2} . Получился контур на рис. 2.35.

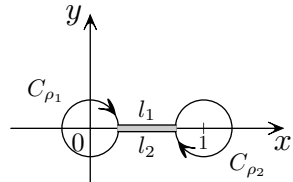


Рис. 2.35

Будем рассматривать $\oint_C \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)}$, где $C = C_{\rho_1} \cup l_1 \cup C_{\rho_2} \cup l_2$,

а $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[5]{z^2(1-z)^2}$, принимающая положительные значения на верхнем берегу l_1 разреза. Тогда интеграл по верхнему берегу

$$\int_{\rho_1}^{1-\rho_1} \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} \xrightarrow{\rho_1 \rightarrow 0} I = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}.$$

Выделим эту ветвь: $f(z) = \sqrt[5]{|z^2(1-z)^3|} e^{\frac{i(2\Delta_\gamma\varphi_1+3\Delta_\gamma\varphi_2)}{5}}$. Область не односвязна — $\Delta\varphi$ зависит от γ .

По теореме о вычетах

$$\int_C \frac{dx}{(z-2)^2 f(z)} = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=2} \frac{1}{(z-2)^2 f(z)} + \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{(z-2)^2 f(z)} \right).$$

Очевидно, что $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{(z-2)^2 f(z)} = 0$.

В точке $z = 2$ полюс второго порядка, поэтому

$$\operatorname{res}_{z=2} \frac{1}{(z-2)^2 f(z)} = -\frac{f'(2)}{f^2(2)}.$$

Найдём $f'(2)$:

$$\begin{aligned} f^5(z) = -z^2(z-1)^3 &\Rightarrow 5f^4(z)f'(z) = -2z(z-1)^3 - 3z^2(z-1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(2) = \frac{-16}{5f^4(2)}. \end{aligned}$$

Найдём $f(2)$:

$$f(2) = \sqrt[5]{4} e^{\frac{i(0-3\pi)}{5}} \Rightarrow \oint_C \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)} = 2\pi i \frac{16}{5f^6(2)} = \frac{8\pi i e^{-\frac{2\pi i}{5}}}{5\sqrt[5]{4}}.$$

Итак, с одной стороны, интеграл вычислен.

Теперь, с другой стороны, рассмотрим интегралы по частям границы:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)} &= \oint_{C_{\rho_1}} \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)} + \int_{l_1} \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} + \\ &+ \oint_{C_{\rho_2}} \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)} + \int_{l_2} \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)}. \end{aligned}$$

Так как интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}$ сходится, то легко показать, что интегралы по C_{ρ_1} и по C_{ρ_2} стремятся к 0, когда $\rho_1 \rightarrow 0$ и $\rho_2 \rightarrow 0$. Остался интеграл по нижнему берегу разреза, на котором $f(x)|_{l_2} = e^{\frac{i(4\pi+0)}{5}} \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}$:

$$\int_{l_1} \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)} = -e^{-\frac{4\pi i}{5}} \int_{\rho_1}^{1-\rho_2} \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} \xrightarrow{\rho_2 \rightarrow 0} -e^{-\frac{4\pi i}{5}} I.$$

Поэтому

$$\oint_C \frac{dz}{(z-2)^2 f(z)} \xrightarrow[\rho_2 \rightarrow 0]{\rho_1 \rightarrow 0} I(1 - e^{-\frac{4\pi i}{5}})$$

и тогда

$$\frac{8\pi i e^{-\frac{2\pi i}{5}}}{5\sqrt[5]{4}} = I(1 - e^{-\frac{4\pi i}{5}}) \iff I = \frac{2\sqrt[5]{8}\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}}.$$

Ответ. $\frac{2\sqrt[5]{8}\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}}.$

Примечание. Желательно иметь в виду, что вычислялся интеграл от функции вещественного переменного — ответ должен быть действительным. В нашем случае подынтегральное выражение неотрицательно на всём промежутке — ответ должен быть положительным. Эти условия у нас выполнены — это даёт уверенность в том, что вычисления верны. ◀

Пример 2.20. Вычислите

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(z+1)(x+2)} dx.$$

► Для вычисления интеграла придётся рассматривать ветви $\operatorname{Ln} z$ и \sqrt{z} . Для обеих функций $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления. Значит, функции распадаются на регулярные ветви в плоскости с разрезом, их соединяющим, например, по действительной оси. Проведём

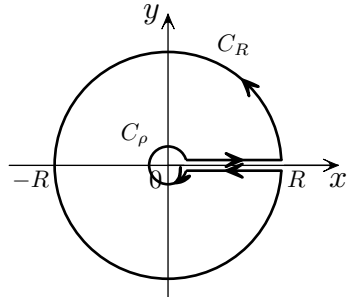


Рис. 2.36

этот разрез. Замкнём контур окружностью $|z| = R$. Так как $z = 0$ — точки ветвления, то отделим её окружностью $|z| = \rho$. Итак, получился контур $C: C_\rho \cup [\rho; R] \cup C_R \cup [R; \rho]$ (см. рис. 2.36).

Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь $\operatorname{Ln} z$, $g(z)$ — регулярная ветвь \sqrt{z} , такие, которые принимают действительные значения на верхнем берегу разреза, т. е. $\operatorname{Im} f(x+i0) = 0$ и $g(x+i0) > 0$.

Тогда

$$f(z) = \ln |z| + i\Delta_\gamma \arg z,$$

$$g(z) = \sqrt{|z|}e^{i\Delta_\gamma \arg z}.$$

Теперь, с одной стороны, по теореме о вычетах (внутри находится два полюса 1-го порядка):

$$\oint_C \frac{f(z)g(z)}{(z+1)(z+2)} dz =$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=-2} \frac{f(z)g(z)}{(z+1)(z+2)} + \operatorname{res}_{z=-1} \frac{f(z)g(z)}{(z+1)(z+2)} \right) =$$

$$= 2\pi i (-f(-2)g(-2) + f(-1)g(-1)).$$

Вычислим $f(-2)$, $g(-2)$, $f(-1)$, $g(-1)$. Заметим, что при движении с положительной полуоси в точки $z = -2$, и $z = -1$ приращение аргумента одно и то же и равно π . Поэтому

$$f(-2) = \ln 2 + i\pi, \quad g(-2) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$f(-1) = i\pi, \quad g(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f(z)g(z)}{(z+1)(z+2)} dz = 2\pi(\sqrt{2}\ln 2) + (2\sqrt{2} - 2)\pi^2 i.$$

На верхнем берегу функции известны $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$, а на противоположном берегу разреза ветви принимают другие значения — приращение аргумента равно 2π : $f(x) = \ln x + 2\pi i$, $g(x) = \sqrt{x}e^{i\pi}$.

А тогда, с другой стороны,

$$2\pi(\sqrt{2}\ln 2) + (2\sqrt{2} - 2)\pi^2 i = \oint_C \frac{f(z)g(z)}{(z+1)(z+2)} dz =$$

$$= \oint_{C_\rho} \frac{f(z)g(z)}{(z+1)(z+2)} dz + \int_\rho^R \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)(x+2)} dx +$$

$$+ \oint_{C_R} \frac{f(z)g(z)}{(z+1)(z+2)} dz + \int_R^\rho \frac{\sqrt{x}e^{i\pi}(\ln x + 2i\pi)}{(x+1)(x+2)} dx \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\substack{\rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{} 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)(x+2)} dx + 2i\pi \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x+2)} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)(x+2)} dx = \pi\sqrt{2} \ln 2. \end{aligned}$$

(Так как заданный несобственный интеграл абсолютно сходится в 0 и в ∞ , то легко показать, что при $R \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$ интегралы по окружностям стремятся к 0).

Ответ. $\pi\sqrt{2} \ln 2$. ◀

2.4.3. Особые точки на контуре интегрирования

Пример 2.21. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx.$$

► **Первый способ.** Выберем контур интегрирования (см. рис. 2.37) $C = [-R; -1 - \rho_1] \cup C_{\rho_1} \cup [-1 + \rho_2; -\rho_2] \cup C_{\rho_2} \cup [\rho_2; 1 - \rho_3] \cup C_{\rho_3} \cup [1 + \rho_3; R] \cup C_R$, где C_{ρ_i} — полуокружности радиуса ρ_i с центрами в точках $-1, 0, 1$ соответственно. C_R — полуокружность радиуса R с центром в 0 (см. рис. 2.37).

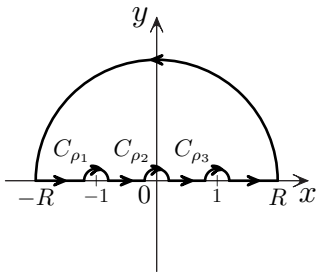


Рис. 2.37

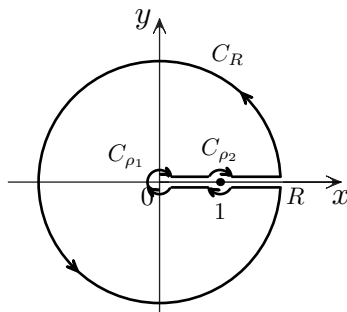


Рис. 2.38

Точки ветвления $\text{Ln } z: z = 0, z = \infty$ находятся вне контура — регулярная ветвь существует.

Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь $\text{Ln } z$, такая, что $f(z)$ на положительной полуоси принимает действительные значения, т. е. $f(z) = \ln |z| + i\Delta \arg z$.

Будем рассматривать $\oint_C \frac{f(z)}{z^2-1} dz$ (см. рис. 2.37). Внутри контура нет особых точек, следовательно, $\oint_C \frac{f(z)}{z^2-1} dz = 0$.

Теперь рассмотрим интегралы по полуокружностям.

Так как $z = -1$ — полюс первого порядка, то

$$\begin{aligned} \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(z)}{z^2-1} dz &= \int_{C_{\rho_1}} \left(\frac{a_{-1}}{z+1} + \sum_0^{\infty} a_k (z+1)^k \right) dz = [z+1 = \rho_1 e^{i\varphi}] = \\ &= i \int_{\pi}^0 \left(\frac{a_{-1}}{\rho_1 e^{i\varphi}} + \sum_0^{\infty} a_k \rho_1^k e^{ik\varphi} \right) \rho_1 e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= -i\pi a_{-1} + i \sum_0^{\infty} a_k \rho_1^{k+1} (1 - (-1)^{k+1}) \xrightarrow{\rho_1 \rightarrow 0} -i\pi \operatorname{res}_{z=-1} \frac{f(z)}{z^2-1}. \end{aligned}$$

Так как $z = 1$ — устранимая особая точка, то

$$\int_{C_{\rho_3}} \frac{f(z)}{z^2-1} dz = \int_{C_{\rho_3}} \sum_0^{\infty} a_k (z+1)^k dz \xrightarrow{\rho_3 \rightarrow 0} 0.$$

Мы практически доказали ещё раз, что, если $a \in \mathbb{C}$ — полюс 1-го (П1) порядка или устранимая особая точка (УОТ), то $\int_{C_\rho} F(z) dz \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} i\pi \operatorname{res}_{z=a} F(z)$, если полуокружность «пробегается» против часовой стрелки.

Можно показать стандартным способом, что

$$\int_{C_R} \frac{f(z)}{z^2-1} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{и} \quad \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(z)}{z^2-1} dz \xrightarrow{\rho_2 \rightarrow 0} 0.$$

Тогда

$$0 = \oint_C \frac{f(z)}{z^2-1} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-R}^{-1-\rho_1} \frac{\ln(-x) + i\pi}{x^2 - 1} dx + \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{-1+\rho_1}^{-\rho_2} \frac{\ln(-x) + i\pi}{x^2 - 1} dx + \\
&\quad + \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{\rho_2}^{1-\rho_3} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx + \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz + \\
&\quad + \int_{1+\rho_3}^R \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz \xrightarrow[\substack{\rho_1 \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{} \\
&\quad \xrightarrow[\substack{\rho_1 \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{} \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(-x) + i\pi}{x^2 - 1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx - \pi i \frac{i\pi}{2(-1)} = \\
&\quad = 2I - \frac{\pi^2}{2} + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} 2I - \frac{\pi^2}{2} = 0, \\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi^2}{4}$. ◀

Второй способ. Теперь выберем другой контур (см. рис. 2.38): $C = C_{\rho_1} \cup [\rho_1; 1 - \rho_2] \cup C_{\rho_2} \cup [1 + \rho_2; R] \cup C_R \cup [R; 1 + \rho_2] \cup \overline{C_{\rho_2}} \cup [1 - \rho_2; \rho_3]$, где C_{ρ_1} — окружность радиуса ρ_1 с центром в 0, C_R — окружность радиуса R с центром в 0, C_{ρ_2} и $\overline{C_{\rho_2}}$ — полуокружности радиуса ρ_2 с центрами в точках $1 + i0$ и $1 - i0$ соответственно (см. рис. 2.38).

Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь $\text{Ln } z$, такая, что на верхнем берегу разреза принимает действительные значения, т. е. $f(z) = \ln |z| + i\Delta \arg z$. Тогда, с одной стороны,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} \frac{f(z)}{z^2 - 1} = -\pi i f(-1).$$

С другой стороны,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz = \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{\rho_1}^{1-\rho_2} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(z)}{z^2-1} dz + \int_{1+\rho_3}^R \frac{\ln x}{x^2-1} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^2-1} dz + \int_R^{1+\rho_2} \frac{\ln x + 2i\pi}{x^2-1} dx + \\
& \quad + \int_{\overline{C_{\rho_2}}} \frac{f(z)}{z^2-1} dz + \int_{1-\rho_2}^{\rho_1} \frac{\ln x + 2i\pi}{x^2-1} dx \xrightarrow[\substack{\rho_1 \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{} \\
& \xrightarrow[\substack{\rho_1 \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{} \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\ln x + 2i\pi}{x^2-1} dx - \pi i \frac{2i\pi}{2} = \\
& \qquad \qquad \qquad = \int_{-\infty}^0 \frac{2i\pi}{x^2-1} dx - \pi i \frac{2i\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Видно, что $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$ сократился.

Поэтому будем рассматривать $\oint_C \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz$.

► С одной стороны,

$$\oint_C \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} \frac{f^2(z)}{z^2-1} = -\pi i f^2(-1) = -\pi i (\pi i)^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\pi^2 i & = \oint_C \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz = \int_{C_{\rho_1}} \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz + \int_{\rho_1}^{1-\rho_2} \frac{\ln^2 x}{x^2-1} dx + \\
& \quad + \int_{C_{\rho_2}} \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz + \int_{1+\rho_3}^R \frac{\ln^2 x}{x^2-1} dx + \int_{C_R} \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz + \\
& \quad + \int_R^{1+\rho_2} \frac{(\ln x + 2i\pi)^2}{x^2-1} dx + \int_{\overline{C_{\rho_2}}} \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz + \int_{1-\rho_2}^{\rho_1} \frac{(\ln x + 2i\pi)^2}{x^2-1} dx \xrightarrow[\substack{\rho_i \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{} \\
& \quad \text{(т. к. интеграл по нижней полуокружности } \int_{\overline{C_{\rho_2}}} \frac{f^2(z)}{z^2-1} dz \xrightarrow{\rho_2 \rightarrow 0}
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\rho_2 \rightarrow 0} -\pi i \frac{f^2(1)}{2} = -\pi i \frac{(2\pi i)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\substack{\rho_1 \rightarrow 0 \\ R \rightarrow 0}]{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 - 1} dx - \int_0^{\infty} \frac{(\ln x + 2i\pi)^2}{x^2 - 1} dx - \pi i \frac{(2i\pi)^2}{2} = \\ & = - \int_0^{\infty} \frac{4i\pi \ln x + (2i\pi)^2}{x^2 - 1} dx + 2\pi^3 i = \pi^3 i \iff \begin{cases} I = \frac{\pi^2}{4}, \\ \int_0^{\infty} \frac{(2i\pi)^2}{x^2 - 1} dx = 0. \end{cases} \\ & \text{Ответ. } \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Третий способ. Выберем теперь не совсем обычный контур, т.к. сразу не ясно, как ведёт себя интеграл по вертикали (см. рис. 2.39).

Итак, контур состоит из C_{ρ_1} — четверти окружности с центром в начале координат, C_{ρ_2} — полуокружности с центром в точке $z = 1$, полуокружности C_R с центром в начале координат и отрезков $[\rho_1; 1 - \rho_2]$, $[1 + \rho_2; R]$, $[iR; i\rho_1]$. Тогда

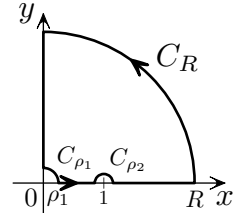


Рис. 2.39

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz = \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{\rho_1}^{1 - \rho_2} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx + \int \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz + \\ &+ \int_{1 + \rho_2}^R \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{\rho_1}^R \frac{\ln |iy| + i \frac{C_{\rho_2}}{2}}{(iy)^2 - 1} i dy \xrightarrow[\substack{R \rightarrow \infty, \\ \rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0}]{\infty} \\ &\xrightarrow[\substack{R \rightarrow \infty, \\ \rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0}]{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{\ln y}{y^2 + 1} dy - \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}, \text{ т.к.} \end{aligned}$$

$$\left| \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \rho_1 + i\varphi}{\rho_1^2 e^{2i\varphi} - 1} i \rho_1 d\varphi \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\rho_1 \ln \rho_1}{\rho_1^2 + 1} + \frac{\pi^2 \rho_1}{8(\rho_1^2 + 1)} \xrightarrow{\rho_1 \rightarrow \infty} 0$$

Интеграл $\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz \xrightarrow{\rho_2 \rightarrow 0} 0$, потому что $z = 1$ — УОТ, а

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz \right| = \left| \int_{C_R} \frac{\ln R + i\varphi}{z^2 - 1} i R d\varphi \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{R \ln R}{R^2 + 1} + \frac{\pi^2 R}{8(R^2 + 1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Как видно, на вертикали появился лишний интеграл, но он имеет чисто мнимое значение.

Ответ. $\frac{\pi^2}{4}$. ◀

ГЛАВА III. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 3.1. Элементарные конформные отображения

Определение. Отображение $w = f(z)$ называется конформным в точке z_0 , если в некоторой окрестности точки

- 1) все окружности переходят в окружности с одним и тем же коэффициентом растяжения,
- 2) углы между кривыми, исходящими из точки z_0 , сохраняются.

Из геометрического смысла модуля и аргумента производной следует, что, если $f'(z_0) \neq 0$, то отображение является конформным в этой точке.

Определение. Отображение области на область называется конформным, если выполнены два условия.

1. Отображение биективно, т. е. взаимно однозначно.
2. Отображение конформно в каждой точке области.

Часто считают, что, если функция $f(z)$ регулярна в области и производная $f'(z) \neq 0$ в любой точке, то отображение конформно — забывают о первом условии. А, может быть, оно выполнено автоматически в этом случае?

Приведём пример отображения, осуществляемого с помощью функции $w = e^z$.

Во всей плоскости $w' = e^z \neq 0$. Однако, из периодичности $w = e^z$ ясно, что любые две точки, находящиеся на вертикали на расстоянии $2\pi k$, отображаются в одну точку. Следовательно, проверка первого условия **обязательна**.

Второе условие проверяется легко — достаточно, чтобы производная в области была отлична от 0.

Определение. Отображение $w = f(z)$ называется конформным в точке $z = \infty$, если отображение $f\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi(z)$, дополненное предельным значением $w = f(z)$ при $z \rightarrow \infty$, является конформным в 0.

Определение. Отображение $w = f(z)$ называется конформным в полюсе $z = z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, если отображение $\frac{1}{f(z)}$, дополненное предельным значением $\frac{1}{f(z)}$ при $z \rightarrow z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, является конформным в точке z_0 .

Имеет место

Теорема. Отображение области D на область \overline{D} является конформным тогда и только тогда, когда $w = f(z)$ регулярна в D , кроме, быть может, одного полюса первого порядка.

В дальнейшем наши усилия будут направлены на проверку именно первого условия. Сейчас мы рассмотрим отображения, которые осуществляются функциями $w = z^n$, $w = z^2$, $w = e^z$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Все они легко дифференцируются, а потому основное внимание будет уделено нахождению для них так называемых областей однолиственности, т. е. областей, которые отображаются взаимно однозначно.

3.1.1. $w = z^n$ и регулярные ветви $\sqrt[n]{z}$. Изменение углов в n раз на границе

Отображение $w = z^n$ трудно записать в декартовых координатах — поэтому запишем в полярных координатах:

$$w = z^n = r^n e^{in\varphi} = R e^{i\psi} \iff \begin{cases} R = r^n, \\ \psi = n\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Найдём точки, которые отображаются в одну:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 &\iff z_1^n = z_2^n \iff r_1^n e^{in\varphi_1} = r_2^n e^{in\varphi_2} \iff \\ &\iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ n\varphi_2 = n\varphi_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n} k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Это точки, лежащие на одной окружности на «угловых» расстояниях друг от друга, равных $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому никакой угол, больше, чем $\frac{2\pi}{n}$, с помощью функции $w = z^n$ не может куда-либо отобразиться взаимно однозначно, т. е. конформно.

Найдём образ полярной сетки.

$$\text{а) } r = r_0: \begin{cases} R = r_0^n \iff r_0 = \sqrt[n]{R}, \\ \psi + 2\pi k = n\varphi. \end{cases} \quad (3.1)$$

Видно, что дуга окружности «размером» $(\varphi_0; \varphi_0 + \frac{2\pi}{n})$ взаимно однозначно переходит в окружность $(n\varphi_0; n\varphi_0 + 2\pi)$ с радиусом $R = r_0^n$. Теперь найдём образ луча.

$$б) \varphi = \varphi_0: \begin{cases} R = r_0^n, \\ \psi + 2\pi k = n\varphi_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Видно, что луч $\varphi = \varphi_0$ взаимно однозначно переходит в луч $\psi = n\varphi_0$, а угол $\varphi_2 - \varphi_1$ в угол $\psi_2 - \psi_1 = n(\varphi_2 - \varphi_1)$, т. е. увеличивается в n раз.

Отображение $w = z^n$ состоит как бы в раскрытии «веера» и «растяжении» каждой окружности: $r_0 \rightarrow r_0^n$. Только окружность радиуса 1 переходит в себя.

Отсюда, в частности следует, что угол $(\varphi_0; \varphi_0 + \frac{2\pi}{n})$ взаимно однозначно переходит в плоскость с разрезом по лучу $n\varphi_0$.

Рассмотрим, например, угол $(0; \frac{2\pi}{6})$ и $w = z^6$.

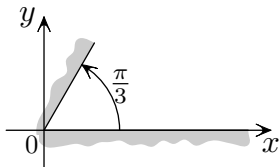


Рис. 3.1а

$$\begin{aligned} w &= z^6 \\ z &= \sqrt[6]{w_*}, \\ z(-1) &= e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

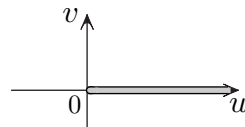


Рис. 3.1б

Угол $\frac{\pi}{3}$ конформно отобразился на плоскость с разрезом по положительной полуоси (см. рис. 3.1а–3.1б).

Значит, существует и обратное отображение. Ясно, что оно связано с функцией $z = \sqrt[6]{w}$. Образы точек $z = 0$ и $z = \infty$ — это точки $w = 0$, $w = \infty$. Они являются точками ветвления функции $z = \sqrt[6]{w}$ и находятся на разрезе. Поэтому $z = \sqrt[6]{w}$ распадается в этой области на регулярные ветви. Одна из регулярных ветвей $z = \sqrt[6]{w}$ осуществляет обратное конформное отображение. Обозначим эту ветвь $\sqrt[6]{w_*}$.

Тогда, так как $w(e^{i\frac{\pi}{6}}) = -1$, её можно выделить, например, условием

$$z = \sqrt[6]{w_*}, \quad z(-1) = e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{или} \quad z(1+i0) = 1+i0. \quad (3.3)$$

Если использовать условие $z = \sqrt[6]{w_*}$, $z(-1) = e^{i\frac{\pi}{6}}$, то $z = \sqrt[6]{w_*}$, $z(-1) = e^{i\frac{\pi}{6}} \iff z = \sqrt[6]{|w|} e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\Delta\varphi}{6}}$, где $\Delta\varphi$ — приращение аргумента w при движении от точки $w = -1$ в точку w . Если же воспользоваться условием $z(1+i0) = 1+i0$, то $z = \sqrt[6]{w_*}$, $z(1+i0) = 1+i0 \iff z = \sqrt[6]{|w|} e^{i\frac{\Delta\varphi}{6}}$, где $\Delta\varphi$ — приращение аргумента w при движении от точки $w = 1+i0$ в точку w .

Отметим при этом, что $w' \neq 0$ внутри угла, но $w'(0) = 0$, и в этой точке *нарушается конформность* — угол увеличился в 6 раз.

Если отображать с помощью функции $w = z^6$ угол, где $\varphi \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, то он тоже конформно отобразится на плоскость с разрезом по положительной полуоси, но обратное отображение уже осуществляется второй ветвью $z = \sqrt[6]{w}$. Заметим, что теперь в точку $z = -1$ отображается не $e^{i\frac{\pi}{6}}$, а $z = i$. Поэтому обратное отображение можно записать в виде $z = \sqrt[6]{w_{**}}$, $z(-1) = i$ (см. рис. 3.2а–3.2б).

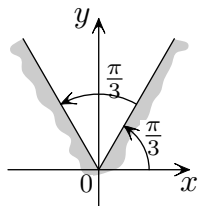


Рис. 3.2а

$$\begin{aligned} w &= z^6 \\ z &= \sqrt[6]{w_{**}}, \\ z(-1) &= i \end{aligned}$$

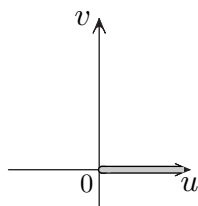


Рис. 3.2б

Областью *однолиственности* отображения $w = z^n$ является любой угол размера $\frac{2\pi}{n}$.

3.1.2. Функция $w = z^2$ и регулярные ветви \sqrt{z}

Теперь рассмотрим более простую, на первый взгляд, функцию $w = z^2$.

В первую очередь найдём точки, которые отображаются в одну:

$$z_1^2 = z_2^2 \iff \begin{cases} z_1 = z_2, \\ z_1 = -z_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 = -z_2. \quad (3.4)$$

Как расположены эти точки?

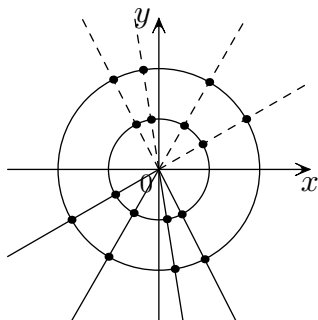


Рис. 3.3

Если провести произвольную прямую через начало координат, то точки пересечения этой прямой с любой окружностью с центром в начале координат, удовлетворяют условию $z_1 = -z_2$, т.е. будут отображаться в одну точку (см. рис. 3.3).

Поэтому ни одна область, содержащая окрестность начала координат, никуда не отобразится биективно. А вот каждая из соответствующих полуплоскостей может отобразиться «куда-то» взаимно однозначно, т.к. «парные» точки находятся в разных полуплоскостях.

Запишем отображение в декартовых координатах

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \iff \begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases} \quad (3.5)$$

Найдём отображение координатных осей:

$$\text{а) } x = x_0, \quad x_0 \neq 0: \begin{cases} u = x_0^2 - y^2, \\ v = 2x_0y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{v}{2x_0}, \\ u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Видно, что вертикаль взаимно однозначно отображается на параболу с вершиной $u = x_0^2$, расположенной в правой полуплоскости.

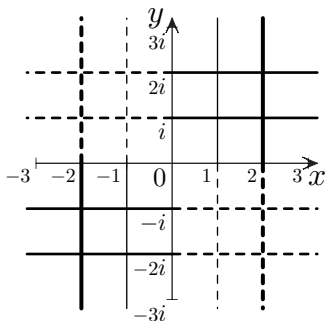


Рис. 3.4а

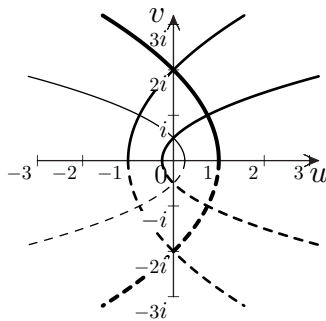


Рис. 3.4б

Заметим, что в формуле параболы x_0 входит в квадрате. Поэтому на ту же параболу взаимно однозначно отображается и вертикаль $x = -x_0$. Но, как видно на рис. 3.4а–3.4б вертикаль с $x_0 > 0$ и парабола $u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$ проходятся в **одном и том же** направлении, а вертикаль с $x_0 < 0$ и парабола $u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$ проходятся в **противоположных** направлениях.

Видно, что при уменьшении x_0 парабола «сжимается» и, в конце концов, «схлопывается» в разрез по отрицательной полуоси: $x = 0$: $\begin{cases} u = -y^2, \\ v = 0. \end{cases}$

Заметим, что при отображении правой полуплоскости разрез проходит как ось Oy , а при отображении левой полуплоскости разрез проходит в противоположном к оси Oy направлении.

Теперь рассмотрим отображение горизонталей:

$$\text{б) } y = y_0, \quad y_0 \neq 0: \begin{cases} u = x^2 - y_0^2, \\ v = 2xy_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{v}{2y_0}, \\ u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Видно, что горизонталь взаимно однозначно отображается на параболу с вершиной $u = -y_0^2$ в левой полуплоскости.

Так как y_0 входит в уравнение параболы в квадрате, то на ту же параболу отображается и горизонталь $y = -y_0$. Но, как видно на рис. 3.4а–3.4б, вертикаль с $y_0 > 0$ и парабола $u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$ проходятся в одном и том же направлении, а вертикаль с $y_0 < 0$ и парабола $u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$ проходятся в противоположных направлениях.

Видно, что при уменьшении y_0 парабола «сжимается» и, в конце концов, «схлопывается» в разрез положительной полуоси: $y = 0$: $\begin{cases} u = x^2, \\ v = 0. \end{cases}$

Заметим, что при отображении верхней полуплоскости разрез проходит как ось Oy , а при отображении нижней полуплоскости разрез проходит в противоположном к оси Oy направлении (см. рис. 3.5а–3.5б).

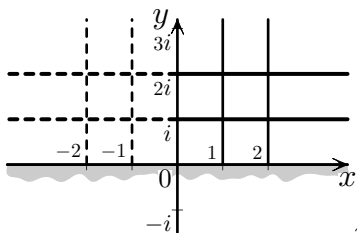


Рис. 3.5а

$$w = z^2$$

$$z = \sqrt{w_*},$$

$$z(-1) = i$$

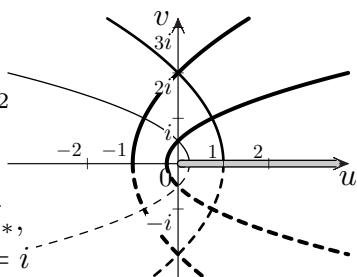


Рис. 3.5б

Видно, что при отображении горизонтали «свёртываются» в параболы, а полувертикали при «растяжении» и «сгибании» полуплоскости «изгибаются» и превращаются в полупараболы.

Видно, что верхняя полуплоскость взаимно однозначно отобразилась на плоскость с разрезом по положительной полуоси. Кроме того, в каждой точке полуплоскости $w' = 2z \neq 0$. Значит, полуплоскость отобразилась на плоскость с разрезом конформно.

А это значит, что существует обратное преобразование, и оно тоже конформно. Оно осуществляется одной из регулярных ветвей функции $z = \sqrt{w}$, которая существует, т. к. точки ветвления $z = \sqrt{w}$ — это $w = 0$, $w = \infty$, которые находятся на разрезе. Обозначим эту ветвь $\sqrt{w_*}$. Тогда её можно выделить, например, условием

$$z = \sqrt{w_*}, \quad z(-1) = i. \quad (3.8)$$

Отметим, что $w'(0) = 0$, и в этой точке нарушается конформность — угол на границе увеличился в 2 раза.

Областью однолиственности отображения $w = z^2$ является любая полуплоскость, граница которой проходит через начало координат.

Спрашивается, а куда отобразится с помощью $w = z^2$ нижняя полуплоскость?

Чаще всего мгновенный ответ неверен. Нарисуем картинку (см. рис. 3.6а–3.6б).

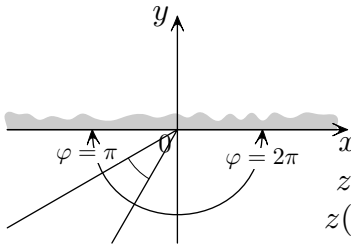


Рис. 3.6а

$$w = z^2$$

$$z = \sqrt{w_{**}},$$

$$z(-1) = -i$$

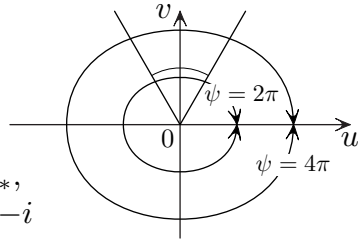


Рис. 3.6б

Стало очевидным, что нижняя полуплоскость отображалась туда же, что и верхняя. Зачем тогда приводить этот пример? Интересно то, что обратное конформное отображение переводит ту же плоскость с разрезом в нижнюю полуплоскость с помощью другой ветви $z = \sqrt{w}$. Обозначим эту ветвь $\sqrt{w_{**}}$. Тогда её можно выделить, например, условием

$$z = \sqrt{w_{**}}, \quad z(-1) = -i. \quad (3.9)$$

Так мы увидели геометрическую интерпретацию двух ветвей $z = \sqrt{w}$. Ещё некоторые можно увидеть в каталоге элементарных отображений.

3.1.3. Как выделяется регулярная ветвь?

На самом деле, выделить регулярную ветвь, отображающую плоскость с разрезом по положительной полуоси, можно бесчисленным количеством способов.

Например, выше мы воспользовались тем, что при отображении $w = z^2$ верхней полуплоскости $w(i) = -1$. Тогда обратное отображение мы записали в виде

$$z = \sqrt{w_*}, \quad z(-1) = i.$$

Формула этого отображения имеет вид: $z = i\sqrt{|w|}e^{\frac{i\Delta\varphi}{2}}$ (проверьте!), где $\Delta\varphi$ — приращение аргумента w при движении точки из $w = -1$ в рассматриваемую точку.

Можно увидеть, что при отображении $w = z^2$ верхней полуплоскости луч $\varphi = 0$ переходит в луч $\psi = 0$, а точка $z = 1 + i0$ в точку $z = 1 + i0$. Тогда эту же ветвь обратного отображения можно выделить другим условием: например, $z = \sqrt{w_*}$,

$z(1 + i0) = 1 + i0$. Формула этой же ветви будет уже другая: $z = \sqrt{|w|}e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}}$, где теперь $\Delta\varphi$ — приращение аргумента w при движении точки из $w = 1 + i0$ в рассматриваемую точку.

При отображении нижней полуплоскости луч $\varphi = \pi$ переходит в луч $\psi = 2\pi$, а в точку $z = 1 + i0$ переходит точка $z = -1 - i0$ — тогда ветвь обратного отображения можно выделить условием $z = \sqrt{w_{**}}$, $z(1 + i0) = -1 - i0$.

3.1.4. $w = e^z$ и регулярные ветви $\text{Ln } z$

Сразу заметим, что в предыдущих отображениях существовали точки, в которых производная равна 0 и в них нарушалась конформность.

Теперь рассматриваем функцию $w = e^z$, производная которой **никогда** не обращается в 0. Нарушится ли здесь где-нибудь конформность?

Да, такие точки есть, и связано это с тем, что $w = e^z$ периодична с периодом $T = 2\pi i$:

$$w_1 = w_2 \iff e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_2 = z_1 + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому никакая область, в которой находится хотя бы одна пара точек, расстояние между которыми по вертикали равно $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ не может быть отображена конформно!

Следовательно, областью однолиственности может быть любая горизонтальная полоса шириной 2π .

Запишем отображение в экспоненциальной форме:

$$w = e^z = e^x e^{iy} = Re^{i\psi} \iff \begin{cases} R = e^x, \\ \psi = y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Найдём образ горизонтали:

$$y = y_0 \Rightarrow \begin{cases} R = e^x, \\ \psi = y_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Видно, что эта прямая взаимно однозначно отображается на луч $\psi = y_0$, причём, если $x \leq 0$, то полупрямая $y = y_0$ отображается на часть луча, расположенного внутри единичной окружности, а, если $x \geq 0$, то полупрямая $y = y_0$ отображается на часть луча, расположенного вне единичной окружности (см. рис. 3.7а–3.7б).

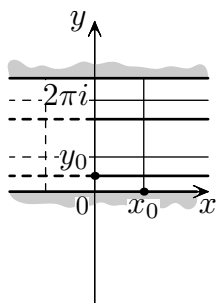


Рис. 3.7а

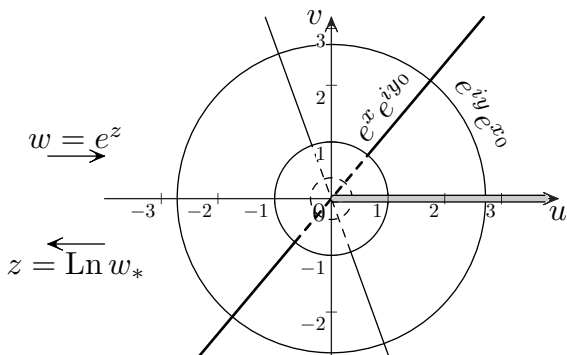


Рис. 3.7б

Найдём образ вертикали:

$$x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} R = e^{x_0}, \\ \psi = y. \end{cases} \quad (3.12)$$

Образ вертикали «лежит» на окружности $R = e^{x_0}$.

Сразу видно, что, если $x_0 < 0$, то радиус окружности образа $e^{x_0} < 1$, если $x_0 > 0$, то радиус $e^{x_0} > 1$.

Посмотрим внимательнее на уравнение окружности. В роли полярного угла выступает y . Поэтому вертикаль $x = x_0$, $y \in (0 + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ взаимно однозначно отображается на окружность, причём, точки $(x_0; 0 + 2\pi k)$ и $(x_0; 2\pi + 2\pi k)$ отображаются в одну — формируется разрез по положительному лучу (см. рис. 3.7б).

Если представить, что все прямые, параллельные оси Ox , начинаются в «точке» $z = -\infty + iy$, представляя собой «пучок», то отображение состоит в том, что этот «пучок», сохраняя форму лучей — прямых, раскрывается, как веер, растягивая горизонталь в окружности. При этом крайние «лучи» $y = 0$ и $y = 2\pi$ образуют разрез.

Любая горизонтальная полоса, где $y \in (\alpha; \alpha + 2\pi)$, шириной 2π взаимно однозначно отображается на плоскость с разрезом по лучу $\psi = \alpha$ (см. рис. 3.8а–3.8б), $\alpha = -1$.

Обратная функция $\text{Ln } w$, как известно, распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим 0 и ∞ . Наш разрез этому условию удовлетворяет.

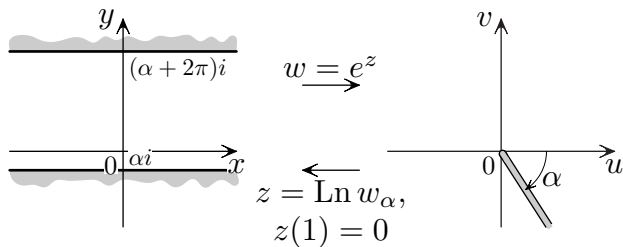


Рис. 3.8а

Рис. 3.8б

Итак, горизонтальная полоса от $y = 0$ до $y = 2\pi$ конформно отобразилась на плоскость с разрезом по положительной полуоси, значит, существует обратное конформное отображение, которое определится одной из ветвей $\text{Ln } w$. Обозначим эту ветвь $f_0(w) = \text{Ln}_* w$. Тогда её можно выделить, например, условием $f_0(-1) = \text{Ln}_*(-1) = \pi i$ — она переводит плоскость с разрезом по положительной полуоси на полосу, где $y \in (0; 2\pi)$ (см. рис. 3.9а–3.9б). Конформность нарушена опять в точке $z = 0$: угол между прямыми $y = 0$ и $y = 2\pi$ нулевой, а между образами угол равен 2π . Образ точки $z = 0$ — опять точка ветвления.

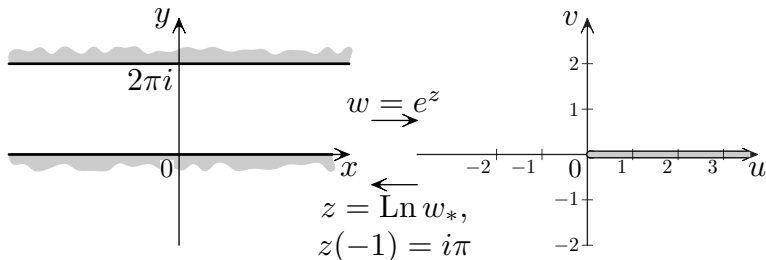


Рис. 3.9а

Рис. 3.9б

А что делают остальные ветви?

Например, ветвь $f_1(w) = \text{Ln}_{**}(w)$, $\text{Ln}_{**}(-1) = 3\pi i$ переводит плоскость с разрезом по положительной полуоси на полосу, где $y \in (2\pi; 4\pi)$ (см. рис. каталога), а ветвь $f_\alpha(w) = \text{Ln}_{***}(w)$, $\text{Ln}_{***}(1) = 0$ переводит плоскость с разрезом по лучу $\psi = \alpha$ на полосу, где $y \in (\alpha; \alpha + 2\pi)$, $\alpha < 0$ (см. рис. 3.8а–3.8б), и т. д.

Образцы некоторых других областей приведены в каталоге — см. стр. 161–162.

3.1.5. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ и регулярные ветви обратной функции

1. Это отображение активно использовалось Н. Е. Жуковским при проектировании профилей дозвуковых самолётов.

Найдём точки, которые отображаются в одну:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 &\iff \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right) \iff \\ &\iff (z_2 - z_1) \left(1 - \frac{1}{z_2 z_1} \right) = 0 \Rightarrow z_2 z_1 = 1, \end{aligned}$$

т. е., если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, то $z_2 = \frac{1}{r_1} e^{-i\varphi_1}$. (3.13)

Эти точки расположены так, как показано на рис. 3.10.

Поэтому областью однолистности может быть, и на самом деле являются, либо круг радиуса 1, либо внешность единичного круга, либо верхняя или нижняя полуплоскость.

2. Найдём, где производная обращается в 0: $w' = 0 \iff \frac{z^2 - 1}{z^2} = 0 \iff z = \pm 1$ — в этих точках может нарушаться конформность.

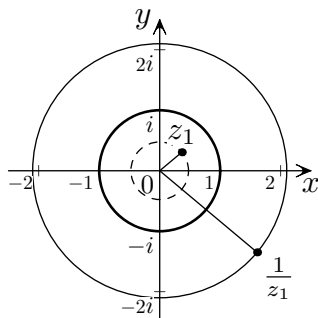


Рис. 3.10

Запишем z в экспоненциальной форме, а отображение при этом запишется в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(r e^{i\varphi} + \frac{e^{-i\varphi}}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \iff \begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Найдём образ полярной сетки.

а) Сначала найдём образ окружности:

$$r = r_0, \quad r_0 \neq 1: \begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin \varphi \end{cases} \iff$$

$$\iff \frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2} = 1. \quad (3.15)$$

Видно, что в параметрической форме задано уравнение эллипса.

Видно также, что у всего семейства эллипсов одно и то же значение $c^2 = \frac{1}{4} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2 \equiv 1$, т. е. эллипсы софокусны.

Видно также, что окружности радиуса $r = r_0$ и $r = \frac{1}{r_0}$ отображаются на один и тот же эллипс. Но!

- 1) Окружность радиуса $r = r_0 > 1$ отображается на эллипс, проходимый в том же направлении.
- 2) Окружность радиуса $r = \frac{1}{r_0} < 1$ отображается на тот же эллипс, но проходимый в противоположном направлении.

Если $r_0 = 1$: $\begin{cases} u = \cos \varphi, \\ v = 0, \end{cases}$ то образом является отрезок, проходимый от 1 до 0 и обратно — разрез (см. рис. 3.11а–3.11б).

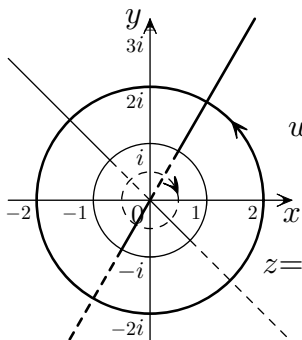


Рис. 3.11а

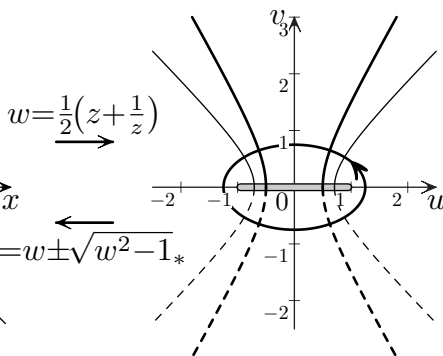


Рис. 3.11б

б) Теперь найдём образ луча:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \neq 0 : \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi_0, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi_0 \end{cases} \iff \\ \iff \frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1. \quad (3.16)$$

Заметим, что $c^2 = \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \equiv 1$. Видно, что и гиперболы софокусны.

Мало того, и *эллипсы*, и *гиперболы* софокусны!

Так как в уравнение гипербол φ входит как $\cos^2 \varphi$, $\sin^2 \varphi$, то на части одной и той же гиперболы отображаются лучи

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = -\varphi_0, \quad \varphi = (\pi - \varphi_0), \quad \varphi = (\pi + \varphi_0).$$

Осталось разобраться, что на что отображается.

Из параметрического задания видно, что лучи, для которых $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ($\sin \varphi > 0$, $\cos \varphi > 0$), отображаются на правую полугиперболу (см. рис. 3.11а–3.11б), причём, часть луча, находящаяся внутри единичной окружности, отображается на половину полугиперболы, находящуюся в нижней полуплоскости, а часть луча, находящаяся вне единичной окружности, отображается на половину полугиперболы, находящуюся в верхней полуплоскости.

Лучи, для которых $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ ($\sin \varphi > 0$, $\cos \varphi < 0$) (см. рис. 3.11а–3.11б), отображаются на левую полугиперболу, причём, часть луча, находящаяся внутри единичной окружности, отображается на половину полугиперболы, находящуюся в нижней полуплоскости, а часть луча, находящаяся вне единичной окружности, отображается на половину полугиперболы, находящуюся в верхней полуплоскости.

Учитывая, что точки z_1 и z_2 , для которых $z_1 z_2 = 1$, отображаются в одну точку, легко понять, как отображаются лучи из нижней полуплоскости.

Теперь найдём образы лучей осей координат:

$$\cos \varphi = 0 \iff \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

а)
$$\varphi = \frac{\pi}{2} : \begin{cases} u = 0, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \end{cases} \quad (3.17)$$

— ось Ov , проходимая в том же направлении, что и луч — «распрямялась» полуэллипса,

б)
$$\varphi = \frac{3\pi}{2} : \begin{cases} u = 0, \\ v = -\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

ось Ov , проходимая в противоположном направлении.

$$\sin \varphi = 0 \iff \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \pi \end{cases} \Rightarrow$$

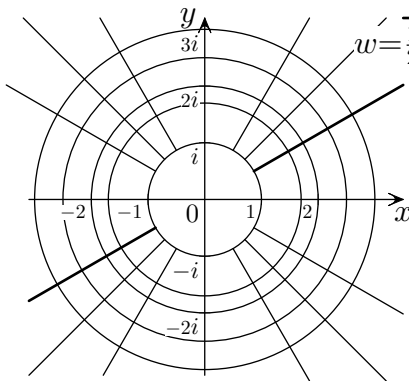


Рис. 3.12а

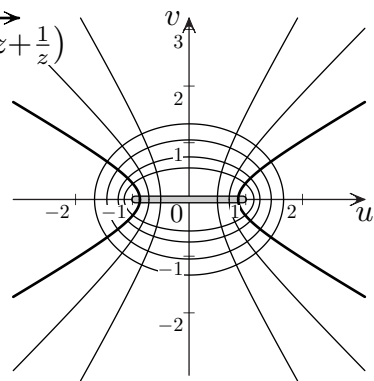


Рис. 3.12б

в)
$$\varphi = 0 : \begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \\ v = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

— разрез по лучу $[1; +\infty)$ — «схлопнулась» правая полуэллипса,

г)
$$\varphi = \pi : \begin{cases} u = -\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \\ v = 0 \end{cases}$$

— разрез по лучу $(-\infty; -1]$ — «схлопнулась» левая полугипербола.

Отсюда, в частности, следует, что внешность единичного круга конформно отображается на внешность единичного отрезка $[-1; 1]$ (см. рис. 3.12а–3.13б).

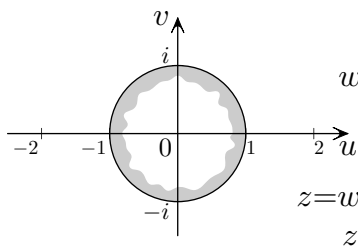


Рис. 3.13а

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}_{**},$$

$$z(\infty) = \infty$$

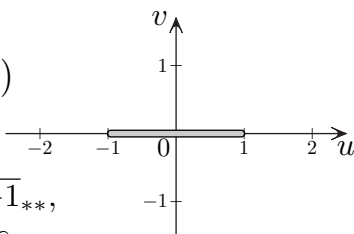


Рис. 3.13б

При отображении точки $z = \pm 1$ остаются на месте. Окружности, радиус которых больше 1, вытягиваются в эллипсы. Причём видно, что, чем меньше радиус окружности, тем меньше становится его малая полуось — он вытесняет окружность единичного радиуса на второй лист (при этом добавляется преобразование инверсии $z \rightarrow \frac{1}{z}$), и, в конце концов, эллипс «схлопывается» в отрезок.

У обратной функции $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ точки $w = \pm 1$ — точки ветвления. Поэтому она распадается на регулярные ветви в плоскости с разрезом, соединяющим $w = 1$ и $w = -1$. Наш разрез этому условию удовлетворяет. Так как это отображение конформно, то и обратное конформно и определяется одной из ветвей функции, обратной к функции Жуковского. Например, ясно, что и прообраз, и образ неограниченные области, поэтому $z = w + \sqrt{w^2 - 1}_{**}$, $z(\infty) = \infty$.

А куда отображается внутренность круга?

Ответ часто бывает неверным. Но ведь во внутренности находятся все точки, связанные с точками вне круга соотношением $z_1 z_2 = 1$, которые отображаются в одну точку — значит, и внутренность круга конформно отображается тоже на внешность единичного отрезка (см. рис. 3.14а–3.14б).

А обратное отображение? Оно даётся другой ветвью обратной функции. Ясно, что ограниченная область (круг) перешла в неограниченную, а $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ переводит ∞ в 0 или ∞ . Поэтому искомая ветвь $z = w + \sqrt{w^2 - 1}_*$, $z(\infty) = 0$ (см. рис. 3.14а–3.14б).

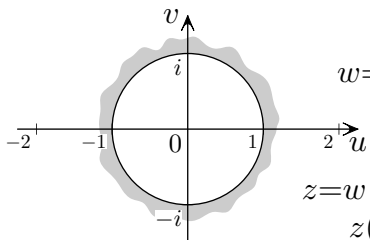


Рис. 3.14а

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}_*$$

$$z(\infty) = 0$$

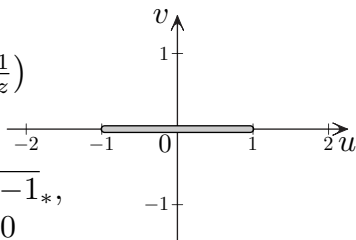


Рис. 3.14б

Конформность нарушена в точках $z = \pm 1$ — углы между единичной окружностью и осью в этих точках и их образами разные (см. рис. 3.14а–3.14б).

Теперь рассмотрим отображение верхней полуплоскости (см. рис. 3.15а–3.15б). Образы полуосей $(0; +\infty)$ и $(-\infty; 0)$ «схлопнулись» в разрезы, «унесли» 0 в ∞ , а с ним и основания лучей, растягивая их в гиперболы, и «вывернув» единичный круг в полуплоскость.

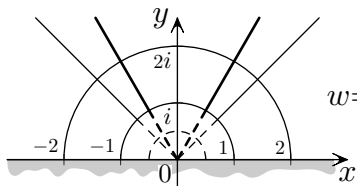


Рис. 3.15а

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}_*$$

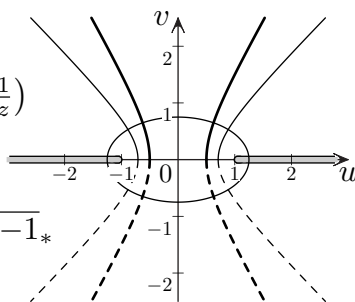


Рис. 3.15б

Верхняя полуплоскость отобразилась конформно на плоскость с разрезами по лучам $[1; +\infty)$ и $(-\infty; -1]$.

Функция $w + \sqrt{w^2 - 1}$ распалась на регулярные ветви. Теперь и 0 «ушёл» в ∞ и ∞ в ∞ .

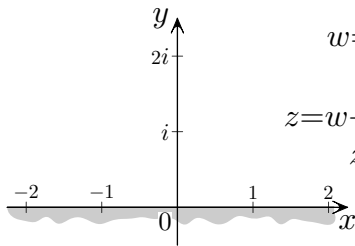


Рис. 3.16а

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\longleftarrow$$

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}_{***},$$

$$z(0) = i$$

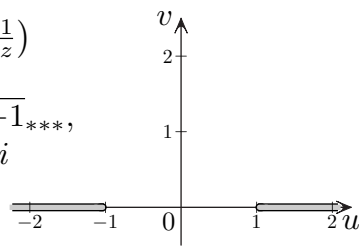


Рис. 3.16б

Поэтому выделим ветвь по-другому. Заметив, что точка $z = i$ перешла в 0, обратное отображение переводит 0 в i , выделим ветвь, отображающую внешность лучей $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ на верхнюю полуплоскость, условием $z = w + \sqrt{w^2 - 1}_{***}$, $z(0) = i$ (см. рис. 3.16а–3.16б).

Примеры других отображений см. в каталоге.

3.1.6. Каталог элементарных отображений

Основные результаты рассмотренных отображений мы решили свести в единый каталог, чтобы при необходимости можно было понять, каким элементарным отображением удобно будет воспользоваться, когда заданы основной или промежуточный прообраз и образ.

I. Отображение $w = z^2$

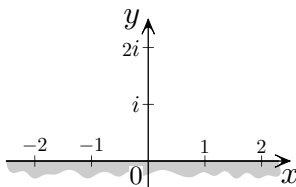


Рис. 3.17а

$$w = z^2$$

$$\longleftarrow$$

$$z = \sqrt{w}_*,$$

$$z(-1) = i$$

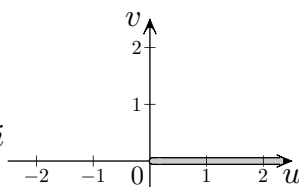


Рис. 3.17б

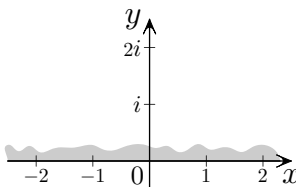


Рис. 3.18а

$$w = z^2$$

$$\longleftarrow$$

$$z = \sqrt{w}_{**},$$

$$z(-1) = -i$$

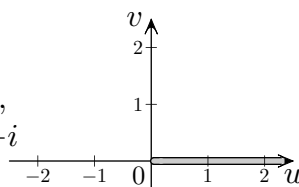


Рис. 3.18б

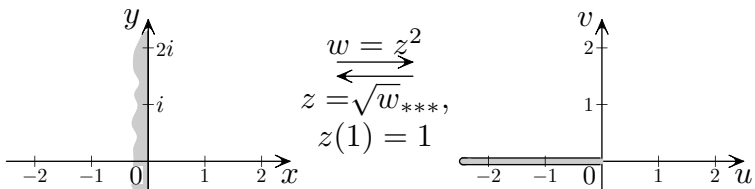


Рис. 3.19а

Рис. 3.19б

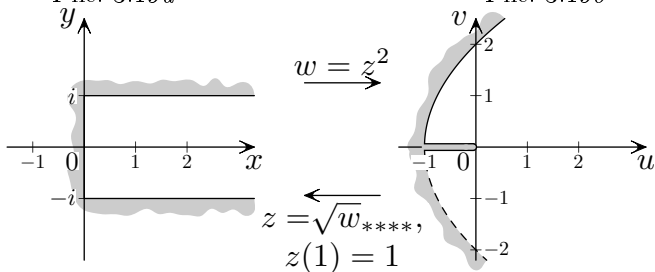


Рис. 3.20а

Рис. 3.20б

II. Отображение $w = z^n$

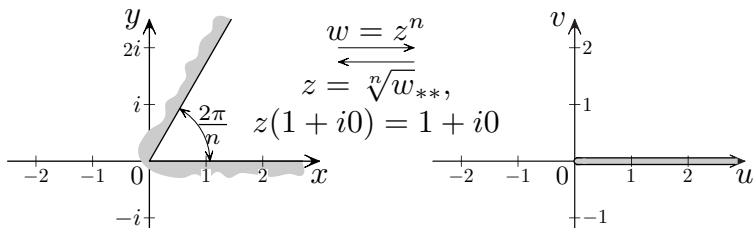


Рис. 3.21а

Рис. 3.21б

III. Отображение $w = e^z$

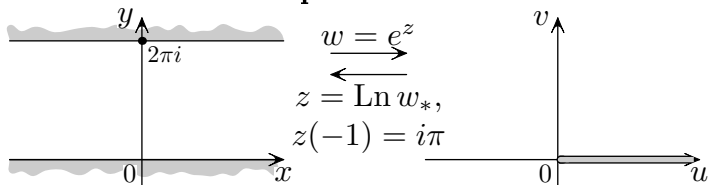


Рис. 3.22а

Рис. 3.22б

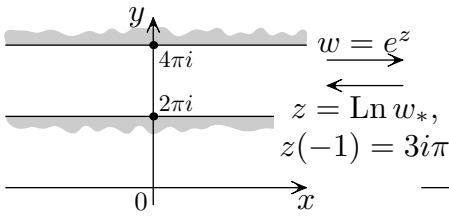


Рис. 3.23а

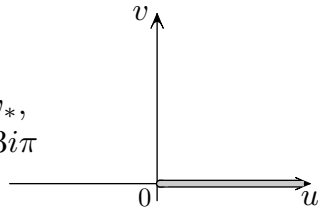


Рис. 3.23б

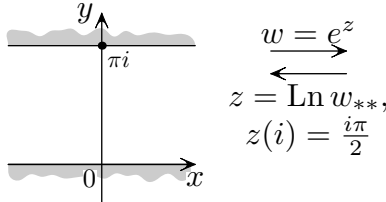


Рис. 3.24а

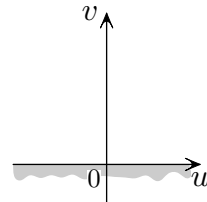


Рис. 3.24б

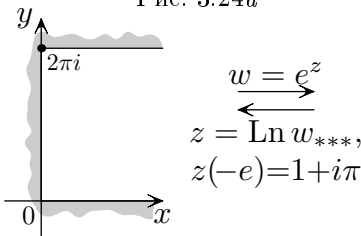


Рис. 3.25а

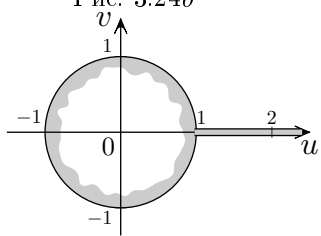


Рис. 3.25б

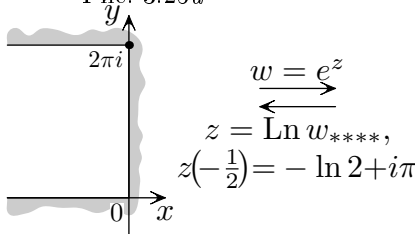


Рис. 3.26а

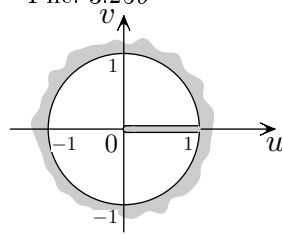


Рис. 3.26б

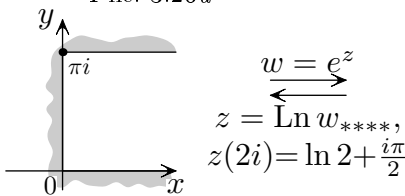


Рис. 3.27а

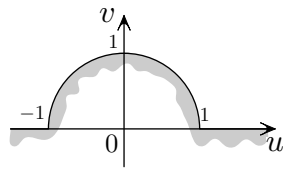


Рис. 3.27б

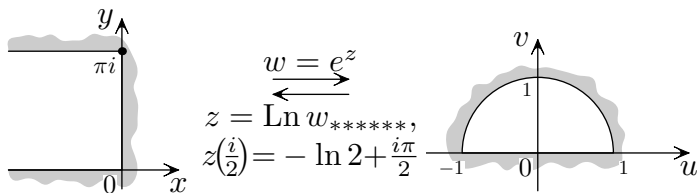


Рис. 3.28а

Рис. 3.28б

IV. Отображение $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

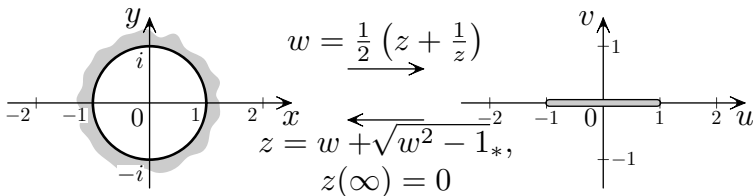


Рис. 3.29а

Рис. 3.29б

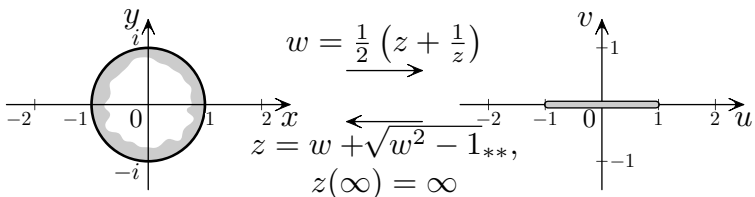


Рис. 3.30а

Рис. 3.30б

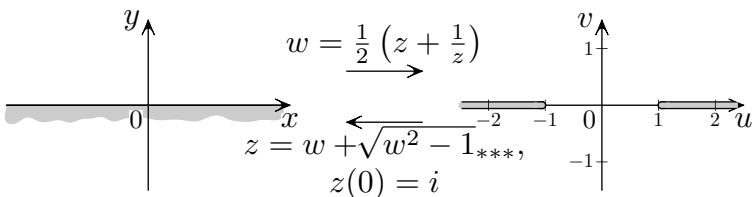


Рис. 3.31а

Рис. 3.31б

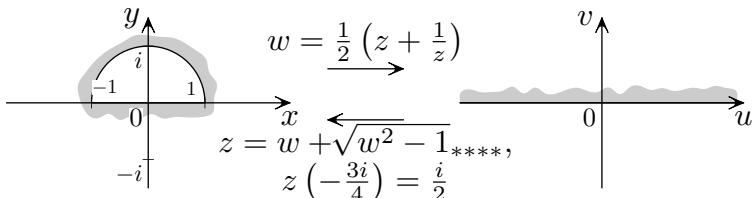


Рис. 3.32а

Рис. 3.32б

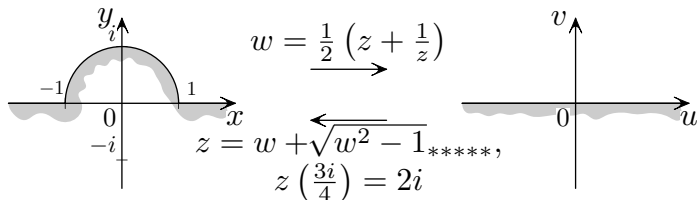


Рис. 3.33а

Рис. 3.33б

3.1.7. Тригонометрические и гиперболические функции

Теперь рассмотрим более сложные отображения, которые осуществляются с помощью классических тригонометрических и гиперболических функций и являются композицией изученных отображений.

Заметим, однако, что на практике лучше проводить соответствующие отображения последовательно, а не пользоваться готовыми формулами (3.20)–(3.23), т. к. там не просто выделять регулярные ветви.

1. Рассмотрим сначала, например, $w = \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Очевидно, что имеет место композиция двух известных отображений. Вот тут-то и пригодится каталог.

Функция имеет период $2\pi i$. Поэтому придётся отображать горизонтальную полосу шириной не более 2π . Но нам она не подойдёт, т. к. $\operatorname{ch} z$ — чётная функция, и симметричные точки отобразятся в одну. Подойдёт либо полоса шириной π , либо полуполоса шириной 2π , не содержащие симметричных точек.

Заглядываем в каталог.

Полоса шириной π с помощью $w_1 = e^z$ отобразится в верхнюю полуплоскость, которая с помощью $w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)$ — функции Жуковского — отобразится в плоскость с разрезами по лучам $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ (см. рис. 3.34а–3.34б).

Заметим, что при этом интервал мнимой оси перешёл на интервал $(0; 1)$. Случайно? Конечно, нет — ведь $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} iy = \cos iz = \cos y$, $y \in (0; \pi) \Rightarrow \operatorname{ch} y \in (-1; 1)$. А вот полуоси границ «схлопнулись», т. к. $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(-x)$, $\operatorname{ch}(x + i\pi) = \operatorname{ch}(-x + i\pi)$.

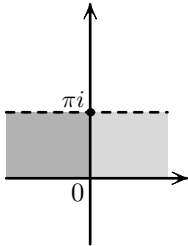


Рис. 3.34а

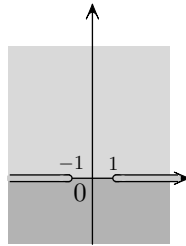


Рис. 3.34б

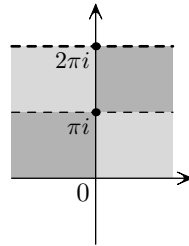


Рис. 3.34в

Полоса шириной π , но расположенная от $y = \pi i$ до $y = 2\pi i$ отобразится туда же, т. к. состоит из симметричных точек. Это хорошо видно на рис. 3.34в.

Раз разрез, значит, в обратном отображении могут быть какие-то особенности в точках $w = \pm 1$, $w = \infty$.

Найдём формулу обратной функции:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} &\iff e^{2z} - 2we^z + 1 = 0 \iff e^z = w + \sqrt{w^2 - 1} \iff \\ &\iff z = \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1}) = \operatorname{Arch} w. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Как видно, обратная функция довольно сложная — это композиция двух многозначных функций. Теперь мы уже знаем, что такое логарифм и радикал. Видно, что $w = \pm 1$ — точки ветвления. Выясним, обращается ли подлогарифмическое выражение в 0 в конечной точке: $w + \sqrt{w^2 - 1} = 0 \iff \iff w^2 - 1 = w^2 \iff \emptyset$ — не обращается.

Заметим, что $w = \infty$ тоже является точкой ветвления: для одной ветви $\sqrt{w^2 - 1}$ подлогарифмическое выражение обращается в ∞ , а для другой в 0.

Так как наше отображение конформно, то обратное тоже конформно. Выделить ветвь обратного отображения уже не так просто — надо выделять ветвь радикала и логарифма. В данном случае обратное можно задать формулой

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Ln}_*(w + \sqrt{w^2 - 1}_*), \\ z(0) &= \frac{\pi i}{2}, \quad \sqrt{-1}_* = i, \quad \operatorname{Ln}_* i = \frac{\pi i}{2}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Можно рассмотреть ещё одну область, не содержащую симметричных точек, — полуполосу шириной 2π . В каталоге видно, что правая полуполоса отображается на внешность единичного круга с разрезом по лучу $[1; +\infty)$, а эта область отображится с помощью функции Жуковского на плоскость с разрезом по лучу $[-1; +\infty)$ (см. рис. 3.35б). Кроме того, это видно и из рис. 3.35а — так как мнимый промежуток $(0; \pi i)$, а, значит, и $(\pi i; 2\pi i)$ отображаются в один промежуток $(-1; 1)$, то разрез пойдёт по лучу $[-1; +\infty)$ (см. рис. 3.35а–3.35б).

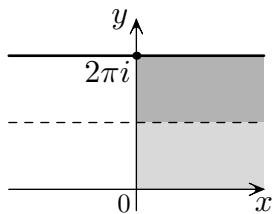


Рис. 3.35а

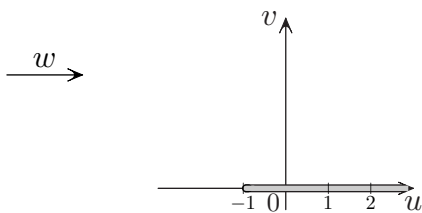


Рис. 3.35б

Левая полуполоса шириной 2π отобразится туда же, т. к. состоит из симметричных точек. В частности, можно получить ещё картинки. Например, отображение полуполосы шириной π (см. рис. 3.36а–3.36б).

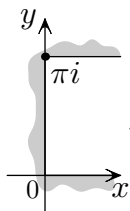


Рис. 3.36а

$$w = \operatorname{ch} z$$

$$z = \operatorname{Arch} w_* = \operatorname{Ln} (w + \sqrt{w^2 - 1_*}),$$

$$z(0 + i0) = +0 + \frac{i\pi}{2}$$

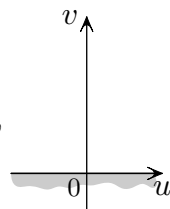


Рис. 3.36б

Можно в нашем случае выделить ветвь, например, условиями: $\sqrt{*} - 1 = i$, $\operatorname{Ln}_*(0 + i) = \frac{\pi i}{2}$.

В силу принципа симметрии, между прочим, можно сразу сказать, что левая полуполоса отобразится в нижнюю полу-плоскость.

2. Теперь рассмотрим $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Заметим, что $\cos z = \operatorname{ch} iz$. Поэтому рассмотрим плоскость с вертикальными полосами (см. рис. 3.37а) и повернём её на

угол $-\frac{\pi}{2}$ с помощью отображения $w_1 = -iz$. А дальше работает $w_2 = \operatorname{ch} w_1$.

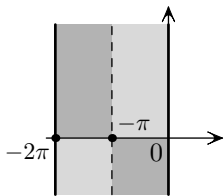


Рис. 3.37а

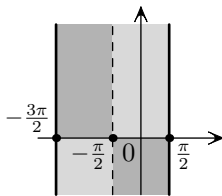


Рис. 3.37б

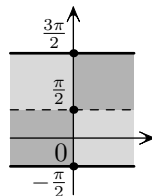


Рис. 3.37в

Соответствующие полосы и полуполосы отобразятся на соответствующие плоскости и полуплоскости (см. рис. 3.34а–3.37в).

Найдём формулу обратной функции — разрешим $w = \cos z$ относительно z .

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &\iff e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 \iff \\ &\iff e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1} \iff \\ &\iff z = -i \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1}) = \operatorname{Arccos} w. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Поэтому можно, например, сразу изобразить образ вертикальной полосы шириной π (см. рис. 3.38а–3.38б).

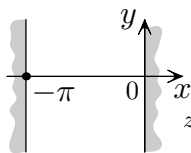


Рис. 3.38а

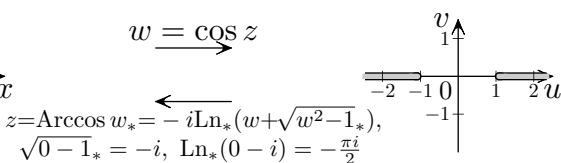


Рис. 3.38б

Отсюда следует и отображение полуполосы шириной π (см. рис. 3.39а–3.39б). Легко видеть, что полуполоса шириной 2π отобразится на плоскость с разрезом по лучу $[-1; +\infty)$.

3. Рассмотрим $w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Здесь ситуация посложнее, потому что надо как-то свести формулу к виду «преобразования Жуковского». Заметим, что $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому рассмотрим полосу от

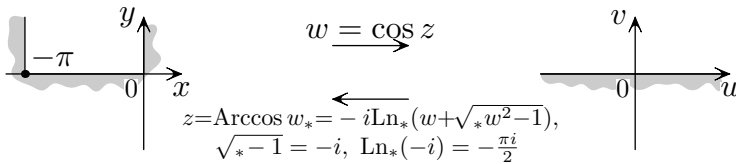


Рис. 3.39а

Рис. 3.39б

$x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 3.37б) и сделаем сдвиг плоскости на $\frac{\pi}{2}$: $w_1 = z - \frac{\pi}{2} \iff z = w_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = -\frac{\pi}{2} \rightarrow w_1 = -\pi$, $z = \frac{\pi}{2} \rightarrow w_1 = 0$ — полоса от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$ отобразилась в полосу от $x = -\pi$ до $x = 0$ (см. рис. 3.38а).

Так как при этом $w = \sin z = \frac{e^{i(w_1 + \frac{\pi}{2})} - e^{i(w_1 + \frac{\pi}{2})}}{2i} = \cos w_1$, то дальше работают разобранные отображения.

Найдём обратную функцию:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \iff e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0 \iff \\ &\iff e^{iz} = iw + \sqrt{1 - w^2} \iff \\ &\iff z = -i \operatorname{Ln}(iw + \sqrt{1 - w^2}) = \operatorname{Arcsin} w. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Поэтому можно сразу изобразить, например, отображение полулобуса шириной π (см. рис. 3.40а–3.40б).

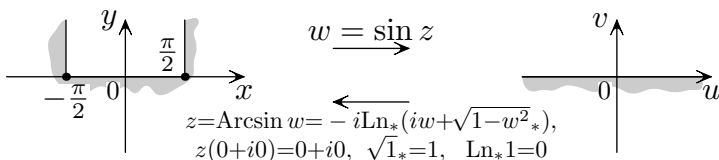


Рис. 3.40а

Рис. 3.40б

Легко получить отображение и полулобуса шириной 2π и другие.

4. Теперь рассмотрим $w = \operatorname{sh} z$.

Так как $w = \operatorname{sh} z = -i \sin iz$, то удобно сначала повернуть плоскость, положив $w_1 = iz$, затем применим $w_2 = \sin w_1$.

А так как $w_2 = \sin w_1$ «работает» с вертикальными полосами и полуполосами от $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ до $x = -\frac{\pi}{2} + \pi + \pi k$, то «исходными» будут горизонтальные полосы и полуполосы

от $y = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ до $y = -\frac{\pi}{2} + \pi + \pi k$ (см. рис. 3.41а). Затем полученный образ повернём на $(-\frac{\pi}{2})$.

Найдём обратную функцию:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \Leftrightarrow e^{2z} - 2we^z - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^z = w + \sqrt{w^2 + 1} \Leftrightarrow z = \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 + 1}) = \operatorname{Arsh} w. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В результате получим, например, отображение горизонтальной полуполосы шириной π (см. рис. 3.41а–3.41б), и т. д.

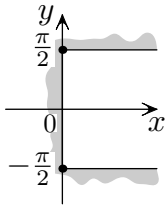


Рис. 3.41а

$$\begin{aligned} w &\xrightarrow{\operatorname{sh}} z \\ z &\xleftarrow{\operatorname{Arsh}} w_* = \operatorname{Ln}_*(w + \sqrt{w^2 + 1}), \\ &\quad \sqrt{*_1} = 1, \operatorname{Ln}_* 1 = 0 \end{aligned}$$

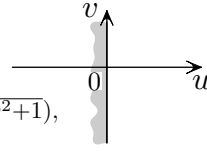


Рис. 3.41б

3.1.8. Дробно-линейные отображения

Мы приведём только те свойства дробно-линейных отображений, которыми будем постоянно пользоваться.

1. В отличие от рассмотренных в предыдущих пунктах отображений, у которых обратные отображения являлись многозначными функциями, дробно-линейные отображения образуют группу относительно композиции отображений. В частности, обратное отображение тоже дробно-линейно и конформно.
2. Предыдущие отображения где-нибудь да были не конформны. Дробно-линейные отображения — это единственный класс отображений, которые конформны **во всей расширенной плоскости** $\overline{\mathbb{C}}$.

В частности, сохраняются углы не только внутри областей, но и на границе (чего не было в предыдущих пунктах).

3. Круговое свойство: прямые и окружности на плоскости переходят в прямые или окружности.

Свойство называется круговым, потому что на сфере Римана образом окружности является окружность, не проходящая через северный полюс, а образом прямой является окружность, проходящая через северный полюс. Поэтому свойство формулируется так: окружности на сфере Римана переходят в окружности.

4. Точки, симметричные относительно прообраза, переходят в точки, симметричные относительно образа.

Симметрия относительно прямой всем известна (см. рис. 3.42). Напомним понятие симметричности точек относительно окружности (см. рис. 3.43).

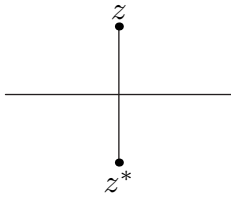


Рис. 3.42

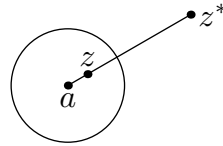


Рис. 3.43

Точки z и z^* называются симметричными относительно окружности радиуса R с центром в точке a , если

- 1) они находятся на одном луче: $z^* - a = \alpha(z - a)$, $\alpha > 0$ и
- 2) $|z - a||z^* - a| = R^2$.
- 3) Центр окружности симметричен с ∞ .

Приведём прежде всего пример, ярко демонстрирующий роль применения кругового свойства и свойства сохранения симметрии при дробно-линейных отображениях.

Пример 3.1. Отобразите верхнюю полуплоскость в единичный круг.

► Воспользуемся дробно-линейным отображением — тогда, в силу кругового свойства, граница — ось Ox — перейдёт в прямую или окружность. Нам надо, чтобы в окружность.

Тогда воспользуемся свойством 4; переведём точки, симметричные относительно оси — i и $-i$ в точки, симметричные относительно окружности с центром в начале координат — 0 и ∞ .

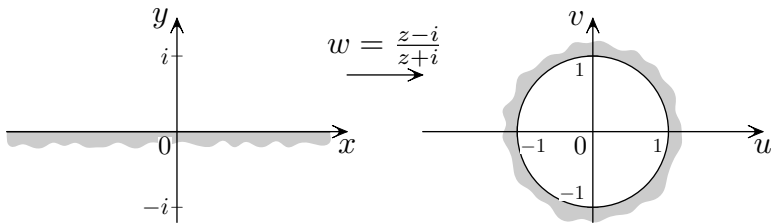


Рис. 3.44а

Рис. 3.44б

Пусть $w_1(i) = 0$, $w_1(-i) = \infty \Rightarrow w_1 = \frac{z-i}{z+i}$. Осталось найти радиус окружности: $w_1(0) = -1 \Rightarrow R = 1$ (см. рис. 3.44а–3.44б). Задача решена. Ответ. $w = \frac{z-i}{z+i}$. ◀

Часто дробно-линейные отображения используют для «выпрямления» границ, если они представляют собой дуги окружностей — первый способ в примере 3.2, а также для «перетягивания» разреза, когда из двух разрезов-лучей на числовой оси желательно сделать один — второй способ в примере 3.2.

Пример 3.2. Отобразите область на рис. 3.45а на верхнюю полуплоскость.

► **Первый способ.** Сначала «распрявим» границы.

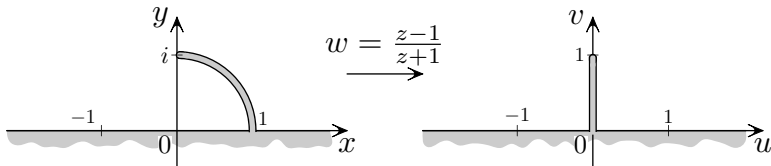


Рис. 3.45а

Рис. 3.45б

Заметим, что границы имеют две общие точки, любую из которых можно отправить в ∞ . Тогда образ обеих границ будет содержать ∞ — значит, и прямая, и окружность перейдут в прямые, т. к. никакой окружности не принадлежит ∞ .

Какую лучше?

Отправим в ∞ точку $z = -1$, а точку $z = 1$ отправим в 0 , чтобы не искать потом точку пересечения границ: $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$.

Из формулы сразу следует, что действительные z переходят в действительные \Rightarrow действительная ось перешла в действительную. Разрез пересекает Ox под прямым углом,

а дробно-линейные отображения конформны **во всей** расширенной плоскости, а потому сохраняют углы всюду, включая границы — значит, образ пойдёт по мнимой оси. Вверх или вниз? Найдём $w_1(i) = \frac{i-1}{i+1} = \frac{-2i}{-2} = i \Rightarrow$ вверх (см. рис. 3.45а–3.45б).

Теперь «выстроим» границы в одну линию — увеличим углы в точке $z = 0$ в два раза: $w_2 = w_1^2$. Получилась плоскость с разрезом от -1 до $+\infty$. Сделаем сдвиг, чтобы разрез начинался в точке $z = 0$, ибо только в ней может изменяться угол (нам предстоит уменьшение угла в 2 раза, чтобы **вся** граница стала единой прямой): $w_3 = w_2 + 1$ (см. рис. 3.46а).

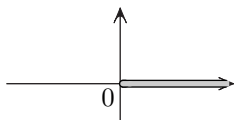


Рис. 3.46а

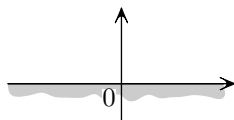


Рис. 3.46б

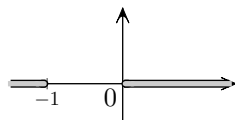


Рис. 3.46в

Наконец, можно «развернуть» плоскость в верхнюю полуплоскость: $w_4 = \sqrt{w_3}$, $w_4(-1) = i$ (см. рис. 3.46б). Композиция $w_4(w_3(w_2(w_1)))$ даёт ответ.

Второй способ. Можно сразу выпрямить границы. Для этого необходимо знать свойства функции Жуковского, которая и дугу единичной окружности, и ось Ox переводит в части действительной оси. Воспользуемся функцией Жуковского: $w_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Найдём образ. Из каталога видно, что верхняя полуплоскость переходит в плоскость с разрезом по лучам $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$. Из свойств преобразования Жуковского следует, что дуга единичной окружности переходит на отрезок действительной оси. Так как $w_1(1) = 1$, $w_1(i) = 0$, то это отрезок $[0; 1]$ (см. рис. 3.46в).

Теперь «перетянем» два разреза в один. Разрезы «соединены» в ∞ . Применим дробно-линейное отображение $w_2 = \frac{w_1}{w_1 + 1}$. Переведя 0 в 0 , -1 в ∞ , мы перевели отрезок $[-1; 0]$ в одну полуось, а два разреза — в другую полуось. В какую полуось перешли два разреза? Так как $w_2(1) = \frac{1}{2}$, то правую

(см. рис. 3.46а). «Разворачиваем» в верхнюю полуплоскость: $w_3 = \sqrt{w_2}$, $w_1(-1) = i$ (см. рис. 3.46б).

П р и м е ч а н и е. Какой способ выбрать? Свойства отображения с помощью функции Жуковского усваиваются довольно сложно. ◀

Пример 3.3. Отобразите внутренность единичного полуокружности (см. рис. 3.47а) на верхнюю полуплоскость.

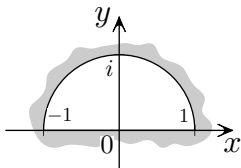


Рис. 3.47а

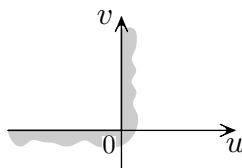


Рис. 3.47б

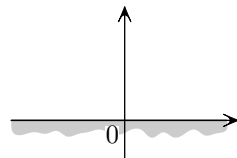


Рис. 3.47в

Первый способ.

► Распрявим границы. Для этого можно отправить любую общую точку границ в ∞ . Для этого достаточно было бы, например, отображения $w = \frac{1}{z+1}$ (можно и $w = \frac{1}{z-1}$). Но, чтобы не искать потом точку пересечения новых границ, отправим точку пересечения прямой и окружности в 0 — применим дробно-линейное отображение $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$. Находим образ.

1. Так как $z = -1$ принадлежит окружности и действительной оси, то и то, и другое переходит в прямые.
2. Из формулы видно, что действительные z переходят в действительные w . Значит, действительная ось переходит в действительную.
3. Так как одна граница — отрезок $[-1; 1]$, а $z = -1$ переходит в 0 и $z = 1$ в ∞ , то отрезок переходит в луч действительной оси. Какой? Левый, т. к. $w_1(0) = -1$.
4. Вторая граница — дуга окружности — тоже переходит в луч. Какой? Окружность пересекает ось в точке $z = 1$ под прямым углом. Так как дробно-линейные отображения конформны **во всей** расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, то они сохраняют углы всюду, включая **границы** областей.

Поэтому в точке $w_1 = 0$ лучи взаимно перпендикулярны, т. е. второй луч пойдёт по верхней или нижней мнимой полуоси. По какой именно? Найдём $w_1(i) = \frac{i-1}{i+1} = i$, значит — верхняя полуось (см. рис. 3.47б).

5. Получилось два угла: один величиной $\frac{\pi}{2}$, другой — $\frac{3\pi}{2}$. Какой наш? Первый. Опять же, потому что углы сохраняются в \bar{C} .

Перевести получившийся угол в верхнюю полуплоскость уже не составит труда: $w_2 = -w_1^2$ (см. рис. 3.47в).

Ответ. $w_2 = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. ◀

Второй способ.

► При работе первым способом мы вроде бы много писали. Но всё это надо чётко знать и не писать. А вот сейчас сделаем всего лишь одно отображение, но оно на самом деле самое сложное из элементарных. Про него все слышали, но мало кто чётко знает, что на что и почему отображается.

В нашем каталоге (см. рис. 3.32а–3.32б) сразу находим, что задачу решает функция Жуковского:

$$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3.4. Отобразите область рис. 3.48а на верхнюю полуплоскость.

► При решении этого примера студенты чаще всего ошибаются — мгновенный ответ: $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

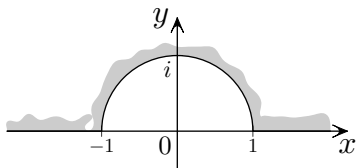


Рис. 3.48а

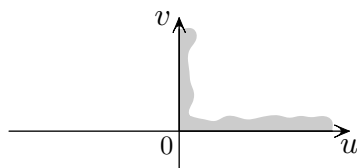


Рис. 3.48б

Но это далеко не так! Они забывают, что заданная на рис. 3.48а область **больше** области однолиственности функции Жуковского, — функция Жуковского не работает!

Поэтому применим дробно-линейное отображение $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$. Оно выпрямит все границы. Найдём образ.

- 1) Из формулы следует, что действительная ось переходит в действительную, а наши лучи переходят в луч $[0; +\infty)$, т. к. внутренняя точка $z = 0$ переходит в $w_1(0) = -1$.
- 2) Полуокружность перейдёт в луч, перпендикулярный действительной оси. Но какой? Вверх или вниз? Найдём $w_1(i) = \frac{i-1}{i+1} = i \Rightarrow$ вверх.

Получилось два угла. Какой наш? Так как дробно-линейные отображения конформны во всей расширенной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, то оно всюду сохраняет углы, включая границы. Между полуокружностью и прямой угол в $\frac{3\pi}{2}$, значит, наш угол — больший (см. рис. 3.48б).

Теперь, для удобства, повернём наш угол: $w_2 = w_1 e^{-i\frac{\pi}{2}}$, чтобы угол начинался с $\varphi = 0$.

И последнее отображение $w_1 = w_2^{\frac{2}{3}}$, $w_3(1+i0) = 1+i0$. ◀

Пример 3.5. Отобразите внешность «совка» (рис. 3.49а) на верхнюю полуплоскость.

► Попробуем применить дробно-линейное отображение $w_1 = \frac{z-i}{z+i}$.

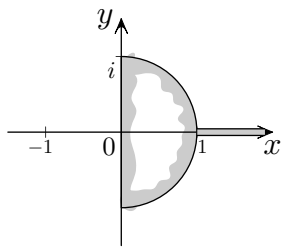


Рис. 3.49а

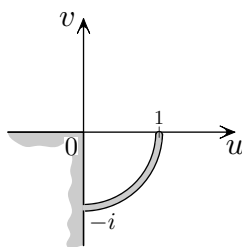


Рис. 3.49б

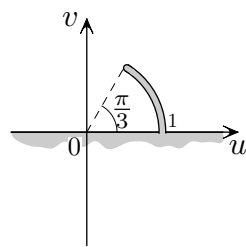


Рис. 3.49в

Найдём образ.

Мнимая ось переходит в действительную. Отрезок $[-i; i]$ и дуга окружности переходят в лучи. Отрезок — в луч на действительной оси, но какой? Так как $w_1(0) = -1$, то это отрицательная полуось. Дуга окружности переходит в луч мнимой

оси, т. к. дуга и отрезок взаимно перпендикулярны. Но вверх или вниз? Так как $w_1(1) = \frac{1-i}{1+i} = -i$, то вниз, на отрицательную мнимую полуось. Луч $[1; +\infty)$ перейдёт в дугу окружности с центром в начале координат, т. к. точки $\pm i$, симметричные относительно прямой $y = 0$, перешли в 0 и ∞ — точки, симметричные относительно окружности с центром в начале координат. А это значит, что ось Ox переходит в окружность с центром в $z = 0$. Зная две точки образа: $w_1(1) = -i$, $w_1(+\infty) = 1$ понимаем, что они принадлежат окружности единичного радиуса (см. рис. 3.49б).

Повернём все на угол $\frac{\pi}{2}$: $w_2 = w_1 e^{i\frac{\pi}{2}}$. Теперь угол в $\frac{3\pi}{2}$ «превратим» в угол π ; $w_3 = w_2^{\frac{2}{3}}$, $w_3(1+i0) = 1+i0$ — получилась верхняя полуплоскость с разрезом по дуге единичной окружности с углом $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}$ (см. рис. 3.49в).

Теперь два пути: либо дробно-линейное, либо функция Жуковского — см. пример 3.2. ◀

Пример 3.6. Отобразите внешность «весов» (рис. 3.50а) на верхнюю полуплоскость.

► Эта задача вызывает затруднения в том, с чего начать.

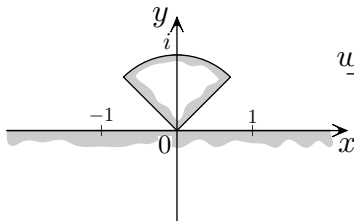


Рис. 3.50а

$$w = z^2$$

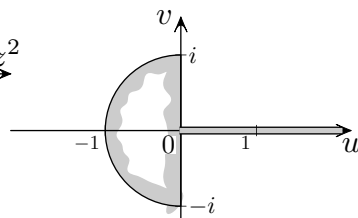


Рис. 3.50б

Начнём с $w_1 = z^2$. Получилась внешность «лопатки» (см. рис. 3.50б). Дальше будем действовать и рассуждать аналогично предыдущему примеру: $w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$. Отсюда сразу следует, что отрезок $[-i; i]$ переходит в луч $(-\infty; 0]$, т. к. $w_2(0) = -1$. Полуокружность переходит в луч $[0; +i\infty)$, т. к. $w_2(-1) = \frac{-1-i}{-1+i} = i$. Луч $[0; +\infty)$ переходит в дугу окружности с центром в начале координат. Причём, так как $w_2(\infty) =$

$= 1$, $w_2(0) = -1$, то радиус окружности равен 1 — получается рис. 3.51а.

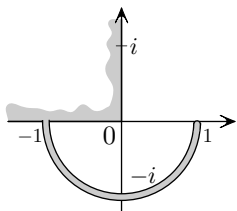


Рис. 3.51а

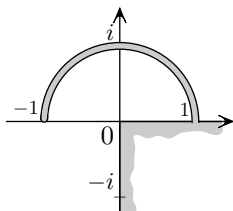


Рис. 3.51б

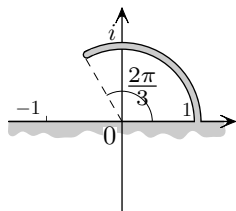


Рис. 3.51в

Далее $w_3 = w_2 e^{i\pi}$ — рис. 3.51б, а потом $w_4 = w_3^{\frac{2}{3}}$, $w_4(1 + i0) = 1 + i0$ — рис. 3.51в. Далее, как в примере 3.2. ◀

Пример 3.7. Отобразите внешность «яблока» (рис. 3.52а) на верхнюю полуплоскость.

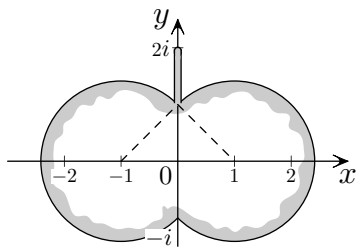


Рис. 3.52а

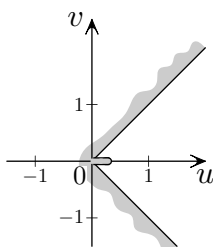


Рис. 3.52б

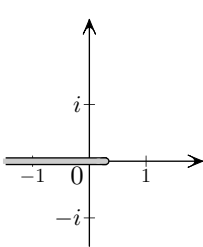


Рис. 3.52в

► **Первый способ.** «Распрявим» границы: $w_1 = \frac{z-i}{z+i}$. Найдём образ. Из формулы следует, что мнимая ось переходит в действительную, разрез перешёл в разрез по отрезку $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, т. к. $w_1(2i) = \frac{2i-i}{2i+i} = \frac{1}{3}$, а дуги окружностей, пересекающие мнимую ось под углом $\frac{\pi}{4}$, переходят в лучи (см. рис. 3.52б).

Теперь «выстроим» границы в одну линию: $w_2 = w_1^4$ (см. рис. 3.52в). Далее всё ясно — сдвиг и «разворот» плоскости в полуплоскость:

$$w_3 = -\left(w_2 - \frac{1}{3^4}\right), \quad w_4 = \sqrt{w_3}, \quad w_4(-1) = i.$$

Второй способ. Часто первым делают отображение $w_1 = \frac{z+i}{z-i}$. Тогда образ будет другой — рис. 3.53а.

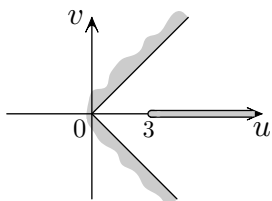


Рис. 3.53а

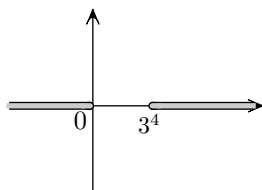


Рис. 3.53б

Теперь $w_2 = w_1^4$ — рис. 3.53б.

Осуществим так называемое «перетягивание» разреза: из двух разрезов сделаем один (на сфере Римана это просто перетягивание) — начало одного луча отправляем в 0, а другого — в ∞ : $w_2 = \frac{w_1}{w_1 - 3^4}$, $w_2(1) = \frac{1}{1 - 3^4} < 0 \Rightarrow$ разрез пойдёт по положительной полуоси (см. рис. 3.46а). Теперь $w_3 = \sqrt{w_2}$, $w_3(-1) = i$. Получилось даже короче. ◀

Пример 3.8. Отобразите внешность области в виде буквы «ф» (рис. 3.54а) на верхнюю полуплоскость.

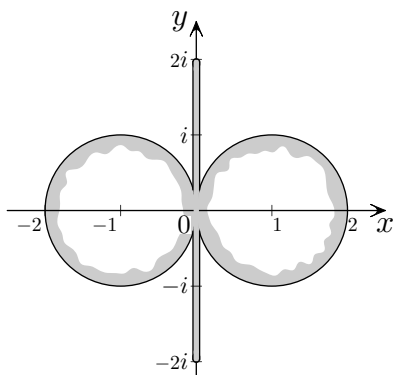


Рис. 3.54а

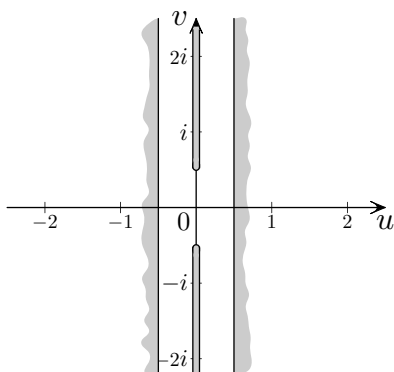


Рис. 3.54б

► Видно, что все границы, состоящие из отрезков прямой и окружностей, пересекаются в начале координат. Поэтому распрямим их с помощью дробно-линейного отображения $w_1 = \frac{1}{z}$. Из формулы следует, что действительная ось переходит

в действительную, мнимая в мнимую. Поэтому разрезы перейдут на мнимую ось от $\pm \frac{i}{2}$ до $\pm i\infty$ соответственно. Окружности перейдут в прямые $x = \pm \frac{1}{2}$, перпендикулярные оси Ox . Получилась вертикальная полоса с разрезами — рис. 3.54б.

В каталоге элементарных отображений горизонтальные полосы отображаются с помощью $w = e^z$. Поэтому повернём нашу полосу на угол $\frac{\pi}{2}$, растянем до ширины 2π и поднимем вверх на π : $w_2 = w_1 2\pi e^{i\frac{\pi}{2}} + i\pi$ (см. рис. 3.55а).

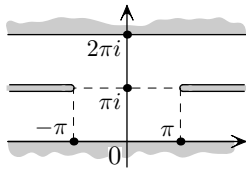


Рис. 3.55а

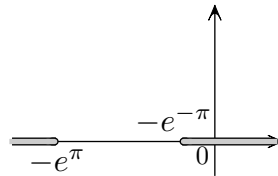


Рис. 3.55б

Теперь применим $w_3 = e^{w_2} = e^{u_2} e^{iv_2}$ — получим плоскость с двумя разрезами: разрез $v_2 = \pi$, $u_2 \in [\pi; +\infty)$ перешёл в разрез $w_3 = e^{u_2} e^{i\pi} = -e^{u_2} \in (-\infty; -e^\pi]$, а разрез $v_2 = \pi$, $u_2 \in [-\infty; -\pi)$ перешёл в разрез $w_3 = e^{u_2} e^{i\pi} = -e^{u_2} \in (-e^\pi; 0]$ (см. рис. 3.55б).

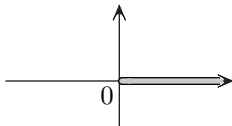


Рис. 3.56а

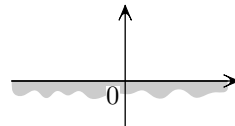


Рис. 3.56б

«Перетянем» разрезы $w_3 = \frac{w_2 + e^{-\pi}}{w_2 + e^\pi}$ (см. рис. 3.56а). Теперь «развернём» плоскость в верхнюю полуплоскость $w_4 = \sqrt{w_3}$, $w_4(-1) = i$ (см. рис. 3.56б). ◀

§ 3.2. Принцип симметрии

Принцип симметрии. Пусть область D расположена по одну сторону от прямой l , и пусть отрезок $[a; b]$ этой прямой является частью границы области D .

Пусть область D отображается на область G , расположенную по одну сторону от прямой L так, что образом отрезка

$[a, b]$ является отрезок $[A; B]$ принадлежащий L . Пусть отображение осуществляется с помощью регулярной в области D функции $f(z)$, непрерывной на $D \cup [a; b]$. Тогда в области D^* , симметричной области D относительно $[a; b]$, существует регулярная в D^* и непрерывная на $D^* \cup [a; b]$ функция $\tilde{f}(z)$, аналитическое продолжение $f(z)$ на область D^* , которая отображает область D^* на область G^* , симметричную области G относительно $[A; B]$.

Этот принцип часто применяется к отображению областей, имеющих одну или несколько осей симметрии.

Пример 3.9. Отобразить внешность «серпа» (рис. 3.57) на верхнюю полуплоскость.

► На первый взгляд, область никакой симметрией не обладает.

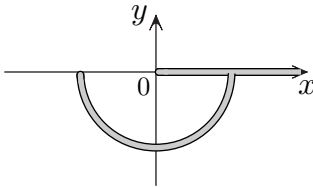


Рис. 3.57

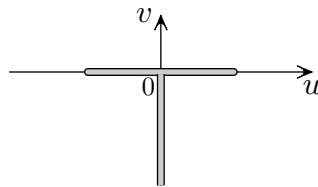


Рис. 3.58

Но посмотрим, что получится после первого отображения. Попробуем выпрямить границы, т. к., во-первых, все части границы имеют вид или прямой, или дуги окружности, а, во-вторых, имеют даже две общих точки. Воспользуемся дробнолинейной функцией $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$: отправим, для выпрямления, точку $z = -1$ в ∞ , а точку $z = 1$ в 0 , чтобы не искать точку пересечения образов — получим картинку рис. 3.58.

Вот теперь нам придётся воспользоваться симметричностью области. Для удобства, повернём сначала плоскость на угол $\frac{\pi}{2}$: $w_2 = w_1 e^{i\frac{\pi}{2}}$, а затем «разрежем» плоскость по действительной оси — получим хорошо знакомую область (см. рис. 3.59а). Выстроим границу в одну линию: $w_3 = w_2^2$ (см. рис. 3.59б).

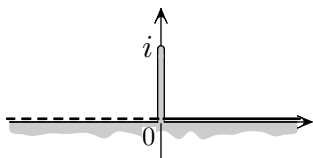


Рис. 3.59а

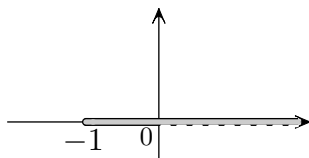


Рис. 3.59б

Сдвинем плоскость: $w_4 = w_3 + 1$. «Развернём» плоскость в верхнюю полуплоскость: $w_5 = \sqrt{w_{4*}}$, $w_5(-1) = i$ (см. рис. 3.60а).

Теперь применим принцип симметрии $w_6 = \sqrt{w_4}$ (см. рис. 3.60б), пунктир стёрся.

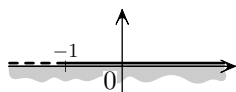


Рис. 3.60а

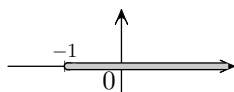


Рис. 3.60б

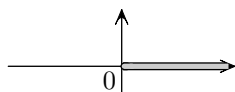


Рис. 3.60в

Обратили внимание? Мы только убрали значок «*». Это потому что $w_5 = \sqrt{w_{4*}}$, $w_5(-1) = i$ вместе со своим аналитическим продолжением является полной аналитической функцией $w_5 = \sqrt{w_3}$, и вторая ветвь $w_5 = \sqrt{w_3}$ отобразит область, симметричную изображённой на рис. 3.60а, на нижнюю полуплоскость. Дальше всё понятно: $w_7 = w_6 + 1$ (см. рис. 3.60в) и наконец $w_8 = \sqrt{w_7}$, $w_8(-1) = i$. ◀

Пример 3.10. Отобразить внешность «трёхлопастного пропеллера» (рис. 3.61а) на единичный круг.

► Наша цель — отобразить границы «лопастей» на границу круга.

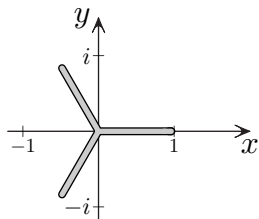


Рис. 3.61а

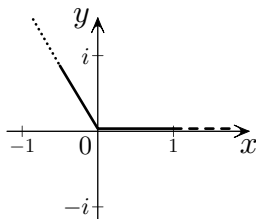


Рис. 3.61б

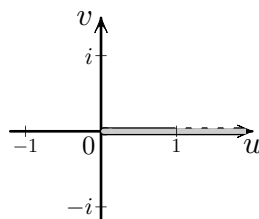


Рис. 3.61в

Вырежем из плоскости угол от 0 до $\frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 3.61б). Теперь применим преобразование $w_1 = z^3$ — угол перейдёт в плоскость с разрезом по положительной полуоси (см. рис. 3.61в).

«Растянем» плоскость в 2 раза, и сдвинем плоскость на 1 влево: $w_2 = 2w_1 - 1$ (см. рис. 3.62).

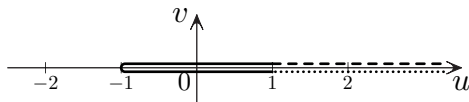


Рис. 3.62

Теперь применим преобразование, обратное к преобразованию Жуковского, чтобы получить круг. Из каталога видно, что и внешность единичного круга, и внутренность единичного круга отображаются на внешность отрезка. Отобразим во внешность единичного круга, чтобы верхний берег разреза перешёл в верхний, а нижний в нижний — при отображении с помощью функции Жуковского окружности радиуса, большего 1, переходят в эллипсы, проходимые в том же направлении (при отображении внутрь «берега» поменяются местами): $w_3 = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1}$, $w_3(\infty) = \infty$ (см. рис. 3.63а).

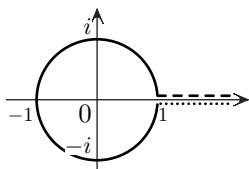


Рис. 3.63а

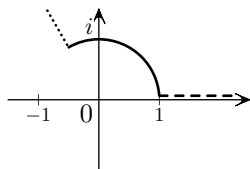


Рис. 3.63б

Теперь уменьшим угол в 3 раза, выбрав ветвь, для которой $w_4(8 + i0) = 2 + i0$: $w_4 = \sqrt[3]{w_3} = \sqrt[3]{|w_3|} e^{i\frac{\Delta\varphi}{3}}$, $\Delta\varphi \in [0; 2\pi]$ (см. рис. 3.63б).

Теперь будем применять принцип симметрии. Видно, что части границы — прямые со штриховкой — перешли в прямые. Поэтому принцип можно применять к любой из заштрихованных прямых. Применим его к прямой, на которой нанесена мелкая штриховка на рис. 3.61б. Тогда вторая ветвь $\sqrt[3]{w_3} =$

$= \sqrt[3]{|w_3|} e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{i\Delta\varphi}{3}}$, $\Delta\varphi \in [0; 2\pi]$ отобразит область, симметричную относительно этой штриховки на область, симметричную такой же штриховке на рис. 3.63б. Третья ветвь $\sqrt[3]{w_3^{***}} = \sqrt[3]{|w_3|} e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{\frac{i\Delta\varphi}{3}}$, $\Delta\varphi \in [0; 2\pi]$ отобразит третий угол рис. 3.61б на третий угол рис. 3.63б. Отображение внешности «пропеллера» во внешность круга (все три ветви) можно записать в виде $w_4 = \sqrt[3]{w_3}$. Отображение $w_5 = \frac{1}{w_4}$ переведёт внешность круга в круг. ◀

Пример 3.11. Отобразить область рис. 3.64 (бесконечные «грабли») на верхнюю полуплоскость.

▶ Бесконечные «грабли» — это верхняя полуплоскость с разрезами:

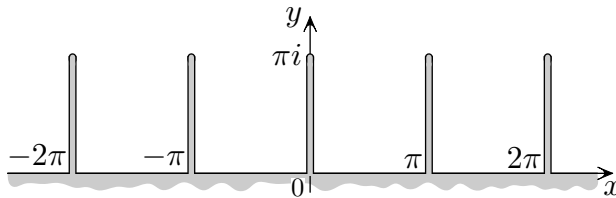


Рис. 3.64

«Вырежем» один прямоугольник — например, первый — от $x = 0$ до $x = \pi$ (см. рис. 3.65а). Наша задача — «перетянуть» настоящую границу на ось.

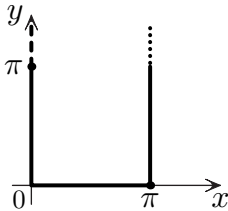


Рис. 3.65а

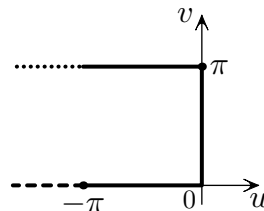


Рис. 3.65б

Теперь повернём его на угол $\frac{\pi}{2}$: $w_1 = ze^{i\frac{\pi}{2}}$ (см. рис. 3.65б). Взглянув в каталог, видим, что можно отобразить на полукруг $w_2 = e^{w_1}$ (см. рис. 3.66а).

Заметим, что дуга окружности — это образ отрезка $[0; \pi i]$. Применим функцию Жуковского: $w_3 = \frac{1}{2} \left(w_2 + \frac{1}{w_2} \right)$ — получилась нижняя полуплоскость (см. рис. 3.66б), где образом «жи-

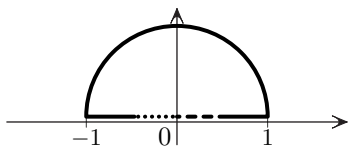


Рис. 3.66a

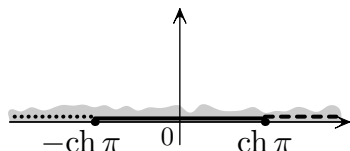


Рис. 3.66б

вой» границы является сплошной отрезок $[-\operatorname{ch} \pi; \operatorname{ch} \pi]$. «Сожмём» отрезок $[-\operatorname{ch} \pi; \operatorname{ch} \pi]$ до стандартного $[-1; 1]$ для функции Жуковского: $w_4 = \frac{w_3}{\operatorname{ch} \pi}$. А теперь применим преобразование, обратное к функции Жуковского, чтобы сплошной отрезок отобразился на полуокружность: $w_5 = w_4 + \sqrt{w_4^2 - 1}$, $w_5(-i) = (\sqrt{2} - 1)i$ (см. рис. 3.67a).

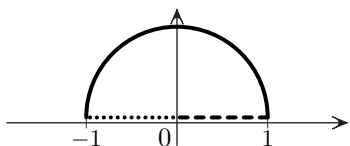


Рис. 3.67a

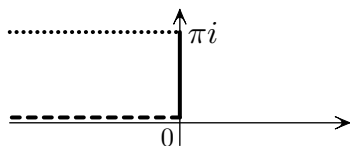


Рис. 3.67б

Осталось отобразить рис. 3.67a на горизонтальную полуполосу:

$$w_6 = \operatorname{Ln} w_{5*}, \quad w_6\left(\frac{i}{2}\right) = -\ln 2 + i \frac{\pi}{2}.$$

Наконец, применим принцип симметрии к любой из пунктирных границ, например, к соседней справа, — вторая ветвь логарифма переведёт эту полуполосу на рис. 3.64 в полуполосу $[\pi i; 2\pi i]$, пунктир «сотрётся» — получится полуполоса шириной 2π . Применим к ней опять принцип симметрии и т. д. Тогда полная аналитическая функция

$$w_7 = \operatorname{Ln} w_6$$

отобразит бесконечные «грабли» с рис. 3.64 на левую полуплоскость. И последнее: $w_8 = w_7 e^{-i \frac{\pi}{2}}$ — получили верхнюю полуплоскость. ◀

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. Найдите решение уравнения $z^2 - z|z| + |z|^2 = 0$.
2. Разложите функцию $f(z) = \frac{5z + 2i}{z^2 + z(1+i) - 6 - 2i}$ в ряд Лорана по степеням $z + 2$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 2i - 2$. Укажите границы кольца сходимости
3. Найдите и исследуйте все особые точки функции $f(z) = \frac{(\pi^2 - 9z^2)e^{\frac{1}{\sin z}}}{(\sin z + \sin 5z) \cos^2 \frac{1}{z}}$. Ответ обосновать.
4. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы
 - 1) $\oint_{|z+i|=\frac{3}{2}} \left(\frac{z-i}{z-1} \right) \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \frac{\pi}{z}} dz$, 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{i(2x+1)}}{x^3 + 2ix^2 + x + 2i} dx$,
 - 3) $\int_3^7 \frac{x^2 dx}{(x-2) \sqrt[3]{(x-3)(x-7)^2}}$.
5. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} \frac{z-i}{3i+z}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \{z: |z+i|=2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, такая, что $\operatorname{Im} g(2i) = 2\pi$. Разложите $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+i)$ в окрестности точки $z = -i$ и вычислите интеграл $\oint_{|z+i|=1} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2} dz$.
6. Отобразить область, изображённую на рис. 4.1 на верхнюю полуплоскость.

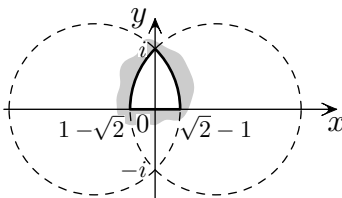


Рис. 4.1

Вариант II

1. Найдите решение уравнения $\sin z = \cos z - \frac{i}{2}$.
2. Разложите функцию $f(z) = \frac{(2-i)z + 2(1-2i)}{z^2 + 4}$ в ряд Лорана по степеням $(z - 1 + i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 3$. Укажите границы кольца сходимости.

3. Найдите и исследуйте все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin z + \cos z}{\cos 2z} \cos\left(\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} 2z}\right).$$

Ответ обосновать.

4. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы

$$1) \oint_{|2z-i|=2} \frac{2(z-1)^2}{z^2+1} e^{\frac{1}{z}} dz, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2) \cos(3-2x)}{x^2-6x+13} dx,$$

$$3) \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(x-10)^2 \sqrt[3]{x-2}}.$$

5. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ в области $G = \{z \in \mathbb{C} : |z-8| < 1\}$ такая, что $g(8) = 2$. Докажите, что многозначная функция $F(z) = \operatorname{Ln}(g(z) - 1)$ имеет в области G регулярные ветви. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь $F(z)$ в области G такая, что $h(8) = 2\pi i$. Вычислите

$$\text{интеграл } \oint_{|z|=20} \frac{dz}{h\left(\frac{8z}{z+2}\right)}.$$

6. Отобразить область, изображённую на рис. 4.2 на верхнюю полуплоскость.

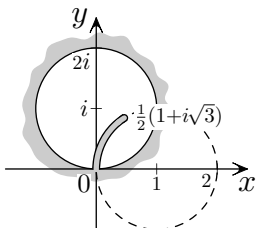


Рис. 4.2

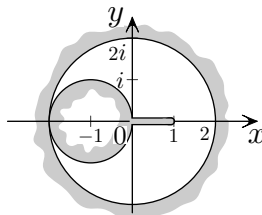


Рис. 4.3

Вариант III

1. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{z - 1 - 5i}{z^2 - 2z + 2} + \frac{3z - 1 - 3i}{z^2 - z(1 + 2i) - 1 + i}$$

в ряд Лорана по степеням $(z - 2i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 0$. Укажите границы кольца сходимости.

2. Найдите и исследуйте все особые точки функции

$$f(z) = \frac{e^{\operatorname{tg} 2z}(\pi z - \pi + 2)}{1 - \sin \frac{1}{1-z}}.$$

Ответ обосновать.

3. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы

$$1) \oint \frac{3z - iz^2 e^{\frac{3\pi}{z}}}{z^2 + 9} dz, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos(3-x)}{x^2 - 6x + 10} dx,$$

$$3) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x^3}(6-x)}{(x-4)^2} dx.$$

4. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z(z-1)}$ в плоскости с разрезом по кривым: $\gamma_1 = \{z: z = it, [0; +\infty)\}$, $\gamma_2 = \{z: z = 1 - it, t \in [0; 2]; z = t - 2i, t \in (-\infty; 1]\}$ такая, что $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Пусть $S(z) = \sum_0^{\infty} a_k(z + 3i)^k$ регулярная в области сходимости ряда функция, совпадающая с $f(z)$ в некоторой окрестности точки $z = -3i$. Найдите радиус сходимости ряда $S(z)$ и вычислите интеграл

$$\oint_{|z+3i|=\frac{5}{2}} \frac{S(z) dz}{(z+i)^2}.$$

5. Отобразить область, изображённую на рис. 4.3 на верхнюю полуплоскость.

Вариант IV

1. Разложите функцию $f(z) = \frac{(1 + 3i)z + i}{3z^2 + (6i - 1)z - 2i}$ в ряд Лорана по степеням $(z + 1 - i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 4i - 1$. Укажите границы кольца сходимости.

2. Найдите и исследуйте все особые точки функции

$$f(z) = \frac{(4z^2 + 9\pi^2)(e^{\frac{z}{z-1}} - 1) \operatorname{ctg} z}{\operatorname{ch} z}.$$

Ответ обосновать.

3. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы

$$1) \oint_{|z - \frac{2\pi i}{3}| = \frac{2\pi}{3}} \frac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} 2z} dz, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(1 - 3x)}{x - 2 + \frac{5}{x}} dx,$$

$$3) \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{x^2 - 4} dx.$$

4. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2 + 1}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ где $\gamma_1 = \{z: |z| = 1, \arg z \in [0; \frac{3\pi}{2}]\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z = -1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ такая, что $g(0) = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Вычислите интеграл

$$\oint_{|z+3|=1} \left(\frac{g(z)}{g(z) - 2} \right)^2 dz.$$

5. Отобразить область, изображённую на рис. 4.4 на верхнюю полуплоскость.

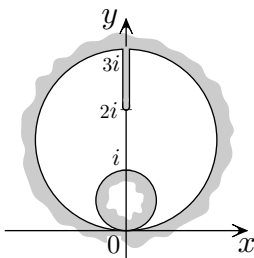


Рис. 4.4

Вариант V

1. Разложите функцию $f(z) = \frac{z^2 + (4 - 2i)z - 9}{(z - i)((2 + i)z - z^2 - 2i)}$ в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = i - 1$. Укажите границы кольца сходимости.
2. Найдите и исследуйте все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z} + \frac{i}{\pi}\right)}{z^2(e^{2z} - 1)(1 - \cos z)}.$$

Ответ обосновать.

3. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы

$$1) \oint_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{2i}{z}}}{z - 2i} dz, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 2) \sin(3 - 2x)}{x^2 + 2x + 37} dx,$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{(x + 1)^2 \sqrt[4]{x^3(1 - x)}}.$$

4. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} \frac{z^2 + 1}{z^2}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-i; i]$, такая, что $\operatorname{Im} h\left(\frac{1}{5}\right) = 0$. Разложите $h(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z - 1)$. Найдите радиус сходимости полученного ряда и вычислите сумму ряда в точке $z = \frac{1}{5}$.
5. Отобразить область, изображённую на рис. 4.5 на верхнюю полуплоскость.

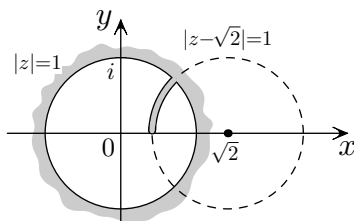


Рис. 4.5

Вариант VI

1. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{(i+1)z - 2i}{z^2 - (4+2i)z + 4 + 4i} + \frac{z}{z - 2 - 2i}$$

в ряд Лорана по степеням $(z - 2i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = -2 - 2i$. Укажите границы кольца сходимости.

2. Найдите и исследуйте все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin \frac{\pi}{z} + 1}{(3z^2 + z - 2)(1 - \cos(2\pi z))}.$$

Ответ обосновать.

3. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы

$$1) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z-i}{z+2i} \sin \frac{z+i}{z-i} dz, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos(3-x)}{x^2 - 4x + 5} dx,$$

$$3) \int_{-1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} \cdot \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx.$$

4. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{2z^4 - 8z^2}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-2; 2]$, такая, что $g(-2\sqrt{2}) = 2i\sqrt{2}$. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=\sqrt{7}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{g(z) + iz} dz$.

5. Отобразить область, изображённую на рис. 4.6 на верхнюю полуплоскость.

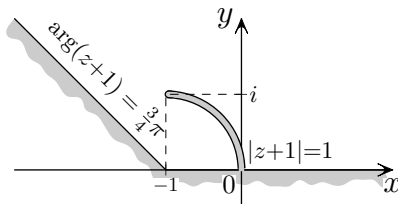


Рис. 4.6

Вариант VII

1. Найдите решение уравнения $2 \operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z = 3i$.
2. Разложите функцию $f(z) = \frac{z+4}{(z+1)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z+1-i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 0$. Укажите границы кольца сходимости.
3. Найдите и исследуйте все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin^2\left(z + \frac{1}{z}\right) - \sin^2\left(z - \frac{1}{z}\right)}{\cos 2z \cdot \sin \frac{2}{z}} \operatorname{cth} \frac{1}{z-i}.$$

Ответ обосновать.

4. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы

$$1) \oint_{|z|=25} \frac{z dz}{\cos \frac{1}{z} + \cos \frac{2}{z}}, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(4-2x)}{x^2 - 3x + 4} dx,$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt[5]{x^2(1-x^3)}}.$$

5. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2+1}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ где $\gamma_1 = \{z: |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\gamma_2 = \{z: \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4}\}$, такая, что $g(0) = 1$. Вычислите интеграл $\oint_{|z-5+5i|=6} \frac{dz}{g^2(z) - 2g(z) - 8}$.

6. Отобразить область, изображённую на рис. 4.7 на верхнюю полуплоскость.

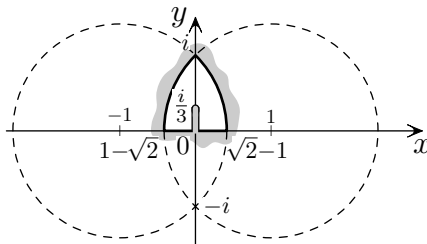


Рис. 4.7

Вариант VIII

1. Найдите решение уравнения $\sin z + 6i \cos z = 1$.
2. Разложите функцию $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 8i} + \frac{4 - iz}{z^2 + 2z(1 + i)}$ в ряд Лорана по степеням $(z+2)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 2i - 1$. Укажите границы кольца сходимости.
3. Найдите и исследуйте все особые точки функции

$$f(z) = \frac{(1 + e^z)^3 \sin\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{3\pi}\right)}{(z - 3\pi i)^3 (1 + \sin z)^2}.$$

Ответ обосновать.

4. Применяя теорию вычетов вычислить интегралы

$$1) \oint_{|z-2|=\sqrt{5}} \left(\frac{e^z}{z^2 + 1} - \frac{ze^{\frac{z}{2}}}{z + 1 + i} \right) dz, \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{(2x^2 + 1) dx}{x^4 + 4},$$

$$3) \int_{-1}^1 \frac{x^2(x+2) dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Выясните, сколько регулярных ветвей имеет многозначная функция $\sqrt[5]{z^3 + \sqrt[3]{z}}$ в области $G = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Найдите значение этих ветвей в точке $z_0 = i$.
6. Отобразить область, изображённую на рис. 4.8 на верхнюю полуплоскость.

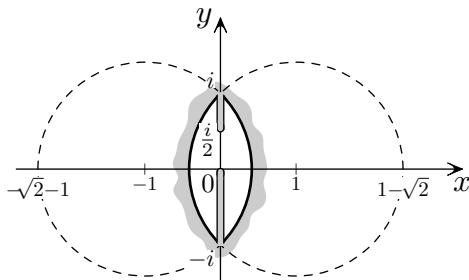


Рис. 4.8

Ответы к заданиям для самостоятельной работы

Ответы варианта I

1. $z = 0, z = re^{\pm \frac{i\pi}{3}}, r > 0.$
2. $f(z) = -\sum_0^{\infty} \frac{(z+2)^2}{2^{2n+1}} + 3 \sum_1^{\infty} \frac{(-1-i)^{n-1}}{(z+2)^n}, \sqrt{2} < |z+2| < 4.$
3. КОТ: $z_n = \pi n, n \neq 0, n \in \mathbb{Z},$ УОТ: $z = \pm \frac{\pi}{3},$ П1: $z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},$
 $z_m = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m, k, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0,$ П2: $z_k = \frac{2}{\pi(2k+1)}, k \in \mathbb{Z},$
 НОТ: $z = 0, z = \infty.$
4. 1) $-2\pi i \left(\frac{1+i}{\pi^2} - \frac{1-i}{2} \right),$ 2) $\frac{\pi e^{-2}}{3} (-\sin 1 + i \cos 1),$
 3) $\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} \left(\frac{23}{3} + \frac{4}{\sqrt[3]{25}} \right).$
5. $g(z) = 3\pi i - 2 \sum_0^{\infty} \frac{(z+i)^{2n+1}}{(2n+1)(2i)^{2n+1}}, |z+i| < 2; I = 2\pi i - 6\pi^2 - 2\pi.$

Ответы варианта II

1. $z = \left(-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \mp \frac{i}{2} \ln 2, k \in \mathbb{Z}.$
2. $f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(z-1+i)^k}{(-1+3i)^{k+1}} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1-i)^{k-1}}{(z-1+i)^k}, \sqrt{2} < |z-1+i| < \sqrt{10}.$
3. КОТ: $z_k = i \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z},$ УОТ: $z_k = i\pi k, z_l = -\frac{\pi}{4} + \pi l,$
 $k, l \in \mathbb{Z}.$ П1: $z_l = \frac{\pi}{4} + \pi l, l \in \mathbb{Z},$ НОТ: $z = \infty.$
4. 1) $\pi \left((1+2i)^2 e^{-1} - 8(1+i) \right),$ 2) $\frac{\pi}{2} e^{-4} (\cos 3 - 2 \sin 3),$ 3) $-\frac{\pi}{24\sqrt{3}}.$
5. $-\frac{2i}{3\pi}$

Ответы варианта III

1. $f(z) = -3 \sum_0^{\infty} \frac{(z-2i)^k}{(1-3i)^{k+1}} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(z-2i)^k}, 1 < |z-2i| < \sqrt{10}, z \neq 1+i.$
2. COT: $z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},$ П2: $z_0 = 1 - \frac{2}{\pi(1+4k)}, k \neq 0,$ П1: $z = 1 - \frac{2}{\pi},$ HOT: $z = 1, z = \infty.$
3. 1) $6\pi^2,$ 2) $4\pi e^{-1},$ 3) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$ 4. $R = 3, I = -\frac{2\pi(1+2i)}{3\sqrt[3]{4}}.$

Ответы варианта IV

1. $-i \sum_0^{\infty} (1-3i)^{-k-1} (z+1-i)^k + \sum_1^{\infty} \frac{(4-3i)^{k-1}}{3^k (z+1-i)^k}, \frac{5}{3} < |z+1-i| < \sqrt{10}.$
2. COT: $z = 1,$ YOT: $z = 0, z = \pm \frac{3\pi i}{2},$ П1: $z_k = \pi k, k \neq 0, k \in \mathbb{Z}, z_n = \frac{\pi i}{2} + \pi n i, n \neq 1, n \neq -2, k, n \in \mathbb{Z}.$
3. 1) $\frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{4\pi}{9\sqrt{3}} - i \right),$ 2) $-\frac{\pi e^{-6}}{2} (2 \cos 2 + \sin 2),$
3) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[3]{\frac{3}{16}} - 1 \right).$ 4. $-\frac{384\pi i}{7\sqrt{7}}.$

Ответы варианта V

1. $f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_1^{\infty} \frac{4ni^{n-1}}{z^{n+1}}, 1 < |z| < 2.$
2. COT: $z = 0,$ YOT: $z = \pi i,$ П1: $z_k = i\pi k, k \neq 1, k \in \mathbb{Z},$ П2: $z_k = 2\pi k, k \neq 0, k \in \mathbb{Z},$ HOT: $z = \infty.$
3. 1) $4\pi(e-2),$ 2) $\frac{\pi e^{-12}}{6} (\sin 5 - 6 \cos 5),$ 3) $\frac{7\sqrt[4]{2}}{8} \pi.$
4. $\ln 2 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n} - 2 \right) (z-2)^n, |z-2| < 1,$
 $S\left(\frac{1}{5}\right) = \ln 26.$

Ответы варианта VI

1. $f(z) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{i(2-2i)^{n-1} + (3+2i)2^{n-1}}{(z-2i)^n}, |z-2i| > 2\sqrt{2}.$
2. COT: $z = 0$, YOT: $z = \frac{2}{3}$, $z = -2$, ПЗ: $z = -1$, П2: $z_k = k$, $k \neq 0, -1, -2$, $k \in \mathbb{Z}$. HOT: $z = \infty$.
3. 1) $2\pi \left(-3 \sin \frac{1}{3} - 2 \cos 1 + 3 \sin 1 \right)$, 2) $\pi e^{-1} (3 \cos 1 + \sin 1)$,
3) $\pi\sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$. 4. $2\pi \left(4e^{\frac{1}{8}} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right)$.

Ответы варианта VII

1. $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k - i \ln \sqrt{3}, k \in \mathbb{Z}.$
2. $f(z) = 4i \sum (-1)^k (1-2i)^{-k-1} (z+1-i)^k + 3 \sum_2^{\infty} \frac{(1-k)i^{-k}}{(z+1-i)^k},$
 $1 < |z+1-i| < \sqrt{5}.$
3. YOT: $z = 0$, $z_n = \frac{2}{\pi n}, n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$, П1: $z_k = \frac{\pi k - 1}{\pi k}, z_n =$
 $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, k, m \in \mathbb{Z}$, HOT: $z = i, z = \infty.$
4. 1) $\frac{5\pi}{4}$, 2) $\frac{\pi e^{-\sqrt{7}}}{\sqrt{7}} (3 \sin 1 - \sqrt{7} \cos 1)$, 3) $\frac{2\pi \sqrt[5]{8}}{5 \sin \frac{2\pi}{5}}$. 5. $-\frac{2\pi}{3}.$

Ответы варианта VIII

1. $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, z_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n - i \ln 2, k, n \in \mathbb{Z}.$
2. $f(z) = -\sum_0^{\infty} (4+2i)^{-k-1} (z+2)^k + (1+i) \sum_3^{\infty} \frac{2^{k-1}}{(z+2)^k}, 2 < |z+2| < 2\sqrt{5}.$
3. COT: $z = 0$, YOT: $z = 3\pi i$, П4: $z_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, ПЗ:
 $z = \frac{3\pi}{2}$, HOT: $z = \infty.$
4. 1) $\pi(ri + 2 + 2i) + 2\pi e^{-1}(i-1)(\cos 1 + i \sin 1)$, 2) $\frac{5\pi}{8}$,
3) $\pi \left(\frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{17}{2} \right)$. 5. 5 ветвей: $h_k(i) = 2^{\frac{1}{5}} \exp \left(\frac{(4k-1)\pi i}{10} \right),$
 $k = \overline{0, 4}.$

Литература

1. *Половинкин Е. С., Шабунин М. И., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Бином, 2006.
2. *Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматкнига, 2003.
3. *Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Теория функций комплексного переменного. – М.: Лаборатория знаний, 2016.
4. Варианты семестровых контрольных работ МФТИ по ТФКП разных лет.

Оглавление

Предисловие	3
Глава I. Однозначные функции	5
§ 1.1. Операции с комплексными числами.	
Решение уравнений $z^n = a$, $e^z = b$, $a, b \in \mathbb{C}$	6
<i>Примеры 1.1–1.4</i>	12
§ 1.2. Новые свойства «старых знакомых»: e^z, $\sin z$,	
$\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$	14
<i>Примеры 1.5–1.8</i>	16
§ 1.3. Регулярные функции. Ряд Тейлора	17
<i>Примеры 1.9–1.11</i>	20
§ 1.4. Ряд Лорана	21
1.4.1. Функция $f(z)$ и сумма $S(z)$ её ряда Тейлора или Лорана	22
<i>Примеры 1.12–1.14</i>	24
1.4.2. Ряд Лорана для e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ в ∞	29
§ 1.5. Особые точки регулярных функций	30
1.5.1. Классификация изолированных особых точек	30
1.5.2. $z = \infty$ — всегда особая точка в $\overline{\mathbb{C}}$	32
<i>Примеры 1.15–1.16</i>	34
1.5.3. Функции $e^{-\frac{1}{z^2}}$ и $e^{-\frac{1}{z^2}}$	38
§ 1.6. Вычеты	39
1.6.1. Вычет для e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ в ∞	42
<i>Примеры 1.17–1.20</i>	42
§ 1.7. Вычисление интегралов по замкнутому контурю с помощью вычетов	44
<i>Примеры 1.21–1.23</i>	45
§ 1.8. Вычисление интегралов от функций действительного переменного	48
1.8.1. Выбор контура интегрирования	48
<i>Пример 1.24</i>	49
1.8.2. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax \, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax \, dx$	50
1.8.2. а) На контуре интегрирования нет особых точек. Лемма Жордана	51
<i>Пример 1.25</i>	52
1.8.2. б) Особые точки на контуре интегрирования	53
<i>Примеры 1.26–1.28</i>	54

Глава II. Многозначные функции	62
§ 2.1. Многозначные функции. Определение.	
Регулярные ветви	63
2.1.1. Определение $\text{Ln } z$	63
2.1.2. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления $\text{Ln } z$. Регулярные ветви $\text{Ln } z$ в плоскости с разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$. Производная ветви $\text{Ln}_* z$, $\text{Ln}_* f(z)$	67
2.1.3. Функция z^α	70
2.1.3. а) Функция z^n , $n \in \mathbb{Z}$ является однозначной функцией в $\overline{\mathbb{C}}$	70
2.1.3. б) Функция $\sqrt[n]{z}$ имеет две точки ветвления: $z = 0$ и $z = \infty$. Производная ветви. Арифметический корень n -й степени, ${}^{2n}\sqrt{x}$, ${}^{2n+1}\sqrt{x}$	70
2.1.3. в) Функция $\sqrt[n]{z^n}$ не имеет точек ветвления. Формула $\sqrt[n]{z^n}$ представляет собой n различных однозначных в $\overline{\mathbb{C}}$ функций	72
<i>Примеры 2.1–2.2</i>	73
2.1.3. г) Функция z^α	73
2.1.4. Точки ветвления и регулярные ветви $\sqrt[n]{P_n(z)}$. Производная ветви	74
2.1.5. Точки ветвления и регулярные ветви $\sqrt[n]{\frac{P_l(z)}{Q_l(z)}}$	76
2.1.6. Точки ветвления и регулярные ветви $\text{Ln } P_n(z)$. Производная ветви	78
2.1.7. Точки ветвления и регулярные ветви $\text{Ln } \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$	80
<i>Примеры 2.3–2.6</i>	81
§ 2.2. Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей многозначных функций	87
2.2.1. Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\text{Ln } z$, $\text{Ln}(z - a)(z - b)$, $\text{Ln } \frac{az+b}{ez+d}$	87
2.2.1. а) Разложение в ряды Тейлора регулярных ветвей $\text{Ln } z$	87
2.2.1. б) Разложение в ряды Тейлора регулярных ветвей $\text{Ln}(z - a)(z - b)$	92
2.2.1. в) Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\text{Ln } \frac{az+b}{ez+d}$	93
2.2.2. Риманова поверхность $\text{Ln } z$	94
2.2.3. Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\sqrt[n]{z}$, $\sqrt[n]{P_m(z)}$, $\sqrt[n]{\frac{P_m(z)}{Q_k(z)}}$	97
2.2.3. а) Разложение в ряды Тейлора регулярных ветвей $\sqrt[n]{z}$	97

2.2.3. б)	Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\sqrt[n]{P_n(z)}$	98
2.2.3. в)	Разложение в ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей $\sqrt[n]{\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}}$	100
2.2.3. г)	Разложение регулярных ветвей $\sqrt[n]{P_m(z)}$, $m < n$ в ряд Тейлора	101
2.2.3. д)	Разложение регулярных ветвей $\sqrt[n]{\frac{P_k(z)}{Q_m(z)}}$, $k < n, m < n, k \neq m$ в ряд Тейлора	102
2.2.4.	Ряды Тейлора функций $(1+x^2)^\alpha$ и $(1+z^2)^\alpha$, $\ln(1+x^2)$ и $\ln(1+z^2)$	102
	<i>Примеры</i> 2.7–2.10	105
§ 2.3.	Вычисление интегралов от регулярных ветвей	116
	<i>Примеры</i> 2.11–2.18	116
§ 2.4.	Вычисление интегралов от функций действительного переменного	131
2.4.1.	Выбор контура интегрирования и регулярных ветвей	131
2.4.2.	На контуре интегрирования нет особых точек	133
	<i>Примеры</i> 2.19–2.20	133
2.4.3.	Особые точки на контуре интегрирования	137
	<i>Пример</i> 2.21	137
	Глава III. Конформные отображения	142
§ 3.1.	Элементарные конформные отображения	142
3.1.1.	$w = z^n$ и регулярные ветви $\sqrt[n]{z}$. Изменение углов в n раз на границе	143
3.1.2.	Функция $w = z^2$ и регулярные ветви \sqrt{z}	145
3.1.3.	Как выделяется регулярная ветвь?	149
3.1.4.	$w = e^z$ и регулярные ветви $\text{Ln } z$	150
3.1.5.	Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ и регулярные ветви обратной функции	153
3.1.6.	Каталог элементарных отображений	159
3.1.7.	Тригонометрические и гиперболические функции	163
3.1.8.	Дробно-линейные отображения	168
	<i>Примеры</i> 3.1–3.8	169
§ 3.2.	Принцип симметрии	178
	<i>Примеры</i> 3.9–3.11	179
	Задания для самостоятельной работы	184
	Ответы к заданиям для самостоятельной работы	192
	Литература	194

Учебное издание

ТФКП в задачах

Учебное пособие
по курсу *Теория функций комплексного переменного*

Составитель **Колесникова Софья Ильинична**

Редактор *О.П. Котова*. Корректор *Л.В. Себова*

Подписано в печать ???.?.2016. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 2,5.
Уч.-изд. л. 2,3. Тираж ??? экз. Заказ № ??.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–58–22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–84–30, e-mail: polygraph@mipt.ru