

**Е. С. Половинкин**

***ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО***

**УЧЕБНИК**

МОСКВА  
МФТИ  
2014

ББК ????

УДК 517.5

**П О Л О В И Н К И Н Е. С. Теория функций комплексного переменного: учебник.** Издание третье, исправленное и дополненное. – М.: Изд-во ???, 2014. – 253 с.  
ISBN ...

В учебном пособии, представляющем из себя конспект лекций, читаемых автором студентам Московского физико-технического института, излагаются основы теории функций комплексного переменного. Рассматриваются также геометрические принципы аналитических (регулярных) функций, на основе которых построена геометрическая теория конформных отображений. Приводятся некоторые прикладные аспекты функций комплексного переменного.

Рекомендовано Учебно-методическим советом высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области прикладных математики и физики в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 010900 «Прикладная математика и физика» и смежным направлениям и специальностям.

С илл.

## СОДЕРЖАНИЕ

Основные обозначения . . . . .	4
Предисловие . . . . .	6
§ 1. Комплексные числа . . . . .	9
§ 2. Пределы. Ряды. Расширенная комплексная плоскость. Функции комплексного переменного . . . . .	15
§ 3. Дифференцирование функции комплексного переменного	23
§ 4. Регулярные функции. Гармонические функции . . . . .	29
§ 5. Теорема об обратной функции . . . . .	35
§ 6. Интегрирование функции комплексного переменного . .	43
§ 7. Интегральная теорема Коши . . . . .	49
§ 8. Интегральная формула Коши . . . . .	56
§ 9. Ряд Тейлора. Теоремы Вейерштрасса . . . . .	60
§ 10. Некоторые свойства регулярных функций . . . . .	69
§ 11. Ряд Лорана . . . . .	78
§ 12. Изолированные особые точки . . . . .	86
§ 13. Теория вычетов . . . . .	96
§ 14. Приращение аргумента $z$ вдоль контура . . . . .	109
§ 15. Регулярные ветви многозначных функций корня и логарифма $\text{Ln } z$ . . . . .	116
§ 16. Регулярные ветви многозначных функций $\text{Ln } f(z)$ и корня	122
§ 17. Примеры нахождения регулярных ветвей . . . . .	131
§ 18. Примеры вычисления интегралов от регулярных ветвей многозначных функций . . . . .	138
§ 19. Целые и мероморфные функции . . . . .	147
§ 20. Аналитическое продолжение . . . . .	157
§ 21. Полные аналитические функции логарифма и корня и их римановы поверхности . . . . .	166
§ 22. Особые точки аналитических функций . . . . .	174
§ 23. Принцип аргумента. Теорема Руше . . . . .	181
§ 24. Геометрические принципы . . . . .	186
§ 25. Конформные отображения в $\overline{\mathbb{C}}$ . . . . .	193
§ 26. Дробно-линейные отображения . . . . .	199
§ 27. Конформные отображения элементарными функциями. Теорема Римана . . . . .	210
§ 28. Принцип симметрии . . . . .	224
§ 29. Задача Дирихле на плоскости . . . . .	235
Список литературы . . . . .	250
Предметный указатель . . . . .	251

## Основные обозначения

$\triangleq$  — знак равенства по определению

$\mathbb{N}$  — множество всех натуральных чисел

$\mathbb{Z}$  — множество всех целых чисел

$\overline{n, m}$  — множество целых чисел вида  $n, n + 1, n + 2, \dots, m$

$\mathbb{R}$  — множество всех действительных чисел

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное действительное евклидово пространство

$\mathbb{C}$  — множество всех комплексных чисел, комплексная плоскость

$\overline{\mathbb{C}}$  — расширенная комплексная плоскость

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  — модуль комплексного числа  $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$  — число, комплексно-сопряженное числу  $z = x + iy$

$\operatorname{Re} z = x$  — действительная часть числа  $z = x + iy$

$\operatorname{Im} z = y$  — мнимая часть числа  $z = x + iy$

$B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$  — открытый круг радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $z_0$

$\overline{B_r(z_0)} = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$  — замкнутый круг радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $z_0$

$\overset{\circ}{B}_r(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$  — проколота окружность точки  $z_0$

$\overset{\circ}{B}_r(\infty) = \{z \mid |z| > r\}$  — проколота окружность бесконечности

$B_r(\infty) = \overset{\circ}{B}_r(\infty) \cup \infty$  — окрестность бесконечности

$\arg z$  — произвольное значение аргумента числа  $z \neq 0$

$\arg_{\text{гл}} z$  — главное значение аргумента числа  $z \neq 0$ , принадлежащее интервалу  $(-\pi, \pi]$

$\operatorname{Arg} z = \{\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  — множество всех значений аргумента числа  $z \neq 0$

$\lambda_{\psi_0} \triangleq \{z \mid \arg z = \psi_0\} \cup \{0\}$  — луч, выходящий из точки 0, состоящий из точек с аргументом  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$ .

$\gamma_{ab}$  — ориентированная кривая (контур) с началом в точке  $a$  и с концом в точке  $b$ ;

$\gamma^{-1}$  — ориентированная кривая, обход которой производится в обратном направлении по сравнению с направлением кривой  $\gamma$

$\overset{\circ}{\gamma}$  — простая замкнутая ориентированная кривая (контур)

$f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  — функция  $f$  задана на множестве  $G$  со значениями в расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$

$f(G) = \{f(z) \mid z \in G\}$  — множество значений функции  $f$ , заданной на множестве  $G$

$u_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ ,  $u_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$  — частные производные первого порядка функции  $u(x,y)$

$\{\sqrt[n]{z}\}$  — многозначная функция корня  $n$ -й степени  $z$

$\text{Ln } z$  — многозначная функция логарифма  $z$ , аналитическая функция логарифма  $z$

$\{z_n\}$ ,  $\{f_n(z)\}$  — числовая и функциональная последовательности

$C[0,1]$ ,  $(C^1[0,1])$  — пространство действительных непрерывных (непрерывно дифференцируемых) функций, заданных на отрезке  $[0,1]$

$C^2(G)$  — пространство действительных дважды непрерывно дифференцируемых функций, заданных на области  $G \subset \mathbb{R}^2$

$\text{res}_a f$  — вычет функции  $f$  в точке  $a$

$\text{dist}(z, \gamma) = \inf\{|z - \zeta| \mid \zeta \in \gamma\}$  — расстояние от точки  $z$  до кривой  $\gamma$

$\text{diam } G = \sup\{|z - \zeta| \mid z, \zeta \in G\}$  — диаметр множества  $G \subset \mathbb{C}$

## Предисловие

Настоящая книга является достаточно полным конспектом курса лекций по теории функций комплексного переменного, читаемого автором студентам Московского физико-технического института. Это — полуторасеместровый курс в объеме 51 академического часа лекционных занятий.

Эта книга является учебным пособием для студентов высших учебных заведений с углубленным изучением курса математики.

В настоящей книге мы будем изучать свойства функций комплексного переменного. Такие функции нашли многочисленные применения как в различных разделах чистой математики, таких как: алгебра, аналитическая теория чисел, дифференциальные уравнения, так и в различных прикладных математических дисциплинах, таких как: теоретическая физика, небесная механика, гидродинамика, теория упругости и др.

Чтобы понять важность теории функций комплексного переменного, отметим лишь некоторые примеры использования этой теории, которые встречаются студентам младших курсов при изучении ими алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений. Так, утверждение о том, что всякое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один комплексный корень, является основным в алгебре. В интегральном исчислении большое значение имеет тот факт, что рациональная функция представима в виде элементарных дробей с комплексными коэффициентами. Понятие комплексного числа и экспоненциальной функции комплексного переменного имеет важное значение при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Только изучив теорию функций комплексного переменного, можно понять, почему такая хорошая на всей числовой оси функция  $f(x) = 1/(1+x^2)$  может быть представлена в виде степенного ряда  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$  лишь при значениях  $x$ , удовлетворяющих условию  $-1 < x < 1$ .

Несколько слов о плане настоящего курса. В первых параграфах мы будем заниматься развитием в комплексной области известных из действительного анализа основных понятий и операций: предела, производной, интеграла. Опираясь на указанный аналитический аппарат, в основной части курса мы будем изучать свойства регулярных (= голоморфных) функций, т. е. функций комплексного переменного, определенных и непрерывно дифференцируемых в некоторой области на комплексной плоскости. В § 9 – 11 и § 19 будут изучены условия представления таких функций в виде степенных рядов, в виде рядов Лорана, а также рядов из элементарных дробей.

В книге изложены свойства обратных многозначных функций. В § 14 – 17 приведено подробное исследование условий существования и вид однозначных функций, называемых "регулярными ветвями" многозначного корня или многозначного логарифма от регулярной функции. В § 20 – 21 рассмотрены понятия аналитических продолжений и аналитической функции.

В курсе также изложены геометрические принципы регулярных функций, такие как: принцип аргумента, принцип сохранения области, принцип максимума модуля и другие. На их основе построена геометрическая теория конформных отображений, осуществляемых регулярными функциями.

В книге приведены некоторые прикладные аспекты теории функций комплексного переменного. В § 13 и § 18 с помощью теории вычетов показаны эффективные методы вычисления интегралов, в том числе несобственных интегралов от действительных функций. В § 29 на примере задачи Дирихле продемонстрированы возможности комплексного анализа при решении уравнений математической физики.

В книге имеются некоторые упражнения, призванные закрепить теоретический материал. Эти упражнения имеют разный уровень сложности, и поэтому студентам не стоит огорчаться, если они не сразу смогут найти решение некоторых из них.

Для данного курса написан и опубликован в 2006 году «Сборник задач по теории функций комплексного переменного» в издательстве «БИНОМ. Лаборатория знаний», авторы М.И.Шабунин, Е.С. Половинкин и М.И.Карлов [11]. Этот сборник задач содержит не только большое количество задач по курсу ТФКП, но также формулировки основных теорем курса и решения многих наиболее типичных задач.

Первое издание книги вышло в 1999 году. Во втором издании (2003 год) и настоящем третьем издании устранены опечатки и сделаны небольшие изменения в доказательствах некоторых теорем.

Считаю своим долгом выразить признательность своим коллегам — профессорам А. А. Болибруху, В. В. Горяйнову, В. К. Захарову, В. Б. Лидскому, Б. В. Пальцеву, Ю. В. Сидорову, М. И. Шабунину и Г. Н. Яковлеву за полезные обсуждения первого и второго издания книги, а также выражаю большую благодарность А. В. Полозову за помощь в подготовке рукописи первого и второго издания к печати. Особую признательность выражаю моим слушателям — студентам физтеха, которые помогли исправить опечатки в первом издании и сделали ряд интересных замечаний по данному курсу лекций.



## § 1. Комплексные числа

Рассмотрим двумерное линейное евклидово пространство  $\mathbb{R}^2$ , состоящее из векторов  $z = (x, y)$  с двумя действительными компонентами  $x, y$ , в котором как обычно заданы

0) равенство векторов (покомпонентное), т.е.  $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$

1) операция сложения векторов

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

где  $z_k = (x_k, y_k)$ ,  $k \in \overline{1, 2}$ ;

2) операция умножения вектора  $z$  на действительное число  $\lambda$ :

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y);$$

3) расстояние и норма:

$$\rho(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Общие свойства приведенных выше операций Вам должны быть хорошо известны из курса математического анализа.

Обозначим базисные векторы из  $\mathbb{R}^2$  следующим образом:

$$\mathbf{1} \triangleq (1, 0), \quad \mathbf{i} \triangleq (0, 1). \quad (1)$$

В силу (1) всякий вектор  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  можно записать в виде  $z = x \cdot \mathbf{1} + y \cdot \mathbf{i}$ , или проще:  $z = x + iy$ .

Теперь определим в  $\mathbb{R}^2$  операцию *произведения* следующим образом

$$z_1 z_2 \triangleq (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (2)$$

где  $z_k = x_k + iy_k$ .

**Определение 1.** Евклидово пространство  $\mathbb{R}^2$ , в котором определено произведение по формуле (2), называется *множеством (или пространством) комплексных чисел*  $\mathbb{C}$ . Элементы множества  $\mathbb{C}$  называются *комплексными числами*.

Комплексное число  $i$  называется *мнимой единицей*. В силу определения произведения (2) получаем, что  $i^2 = -1$ .

Множество комплексных чисел вида  $x + i0$  изоморфно множеству действительных чисел, так как взаимно однозначное соответствие  $x + i0 \rightarrow x$  сохраняется при выполнении операций сложения и умножения. Поэтому мы не будем различать комплексное число  $x + i0$  и действительное число  $x$ . Соответственно,  $x = \operatorname{Re} z$  называется *действительной (или: вещественной) частью*, а  $y = \operatorname{Im} z$  — *мнимой частью* числа  $z = x + iy$ .

Величина  $|z| \triangleq \sqrt{x^2 + y^2}$  называется *модулем* комплексного числа  $z = x + iy$ .

Число  $\bar{z} \triangleq x - iy$  называется *комплексно-сопряженным числом* к числу  $z = x + iy$ .

Очевидно, что  $z\bar{z} = |z|^2$ .

Легко проверить справедливость следующих свойств:

- 1)  $z_1 z_2 = z_2 z_1$  (коммутативность умножения),
- 2)  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$  (ассоциативность умножения),
- 3)  $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$  (дистрибутивность),
- 4) обратимость операции умножения (2), т.е. для любых  $z_1 \neq 0$  и  $z_2$  уравнение

$$z_1 z = z_2 \tag{3}$$

имеет, и притом единственное, решение, которое будем обозначать  $z \triangleq z_2/z_1$  и называть *результатом деления числа  $z_2$  на число  $z_1$* .

Докажем последнее свойство. Уравнение (3) эквивалентно в силу определения произведения (2) системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 x - y_1 y = x_2, \\ y_1 x + x_1 y = y_2. \end{cases} \tag{4}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + y_1^2 = |z_1|^2 \neq 0,$$

т.е. по правилу Крамера решение системы (4) (т.е. уравнения (3)) существует и единственно.

Решение уравнения (3) можно получить иначе, домножая это уравнение на  $\bar{z}_1$ . Тогда получаем

$$(\bar{z}_1 z_1)z = \bar{z}_1 z_2 \Rightarrow |z_1|^2 z = \bar{z}_1 z_2 \Rightarrow z = \frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{-y_1 x_2 + x_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} i. \quad (5)$$

Решение уравнения  $z_1 z = 1$ ,  $z_1 \neq 0$  называют обратным числом к  $z_1$  и обозначают  $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1}$ .

Множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$  удобно рассматривать как множество точек, принадлежащих евклидовой плоскости, выбрав базисные векторы  $\mathbf{1}$  и  $\mathbf{i}$  из (1) (см. рис. 1). Эту плоскость будем называть *комплексной плоскостью*.

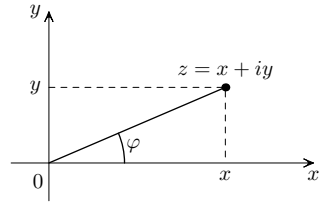


Рис. 1

Перейдем в этой плоскости к полярной системе координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (6)$$

В новых обозначениях получаем, что  $r = |z|$ , т. е.  $r$  есть модуль числа  $z$ , а  $\varphi$  называется *аргументом комплексного числа*  $z \neq 0$  и обозначается  $\arg z$ . В силу периодичности тригонометрических функций аргумент числа  $z \neq 0$  нельзя определить однозначно, лишь с точностью до  $2\pi k$ . Поэтому введем специальные обозначения. Аргумент числа  $z$ , выбираемый в интервале  $(-\pi, \pi]$ , назовем *главным значением аргумента*  $z$  и обозначим

$$\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi]. \quad (7)$$

Тогда множество всех значений аргумента числа  $z$  выражается формулой

$$\text{Arg } z \triangleq \{\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad (8)$$

где через  $\mathbb{Z}$  обозначено множество всех целых чисел. Через  $\mathbb{N}$  будем обозначать множество всех натуральных чисел.

Отметим, что для числа  $z = 0$  аргумент не определен.

Для всякого числа  $z = x + iy \neq 0$ , используя переменные  $(r, \varphi)$  (6), получаем его представление в виде

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \text{где } \varphi \in \text{Arg } z, \quad (9)$$

которое называется *тригонометрической (или полярной) формой задания* комплексного числа.

Отметим, что два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, равны между собой тогда и только тогда, когда равны их модули и множества значений аргумента.

Произведение чисел, заданных в форме (9), в силу формулы (2) принимает вид

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)|z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1||z_2|((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)), \end{aligned}$$

откуда в силу известных формул тригонометрии получаем

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (10)$$

Таким образом, показали, что при перемножении комплексных чисел модули этих чисел перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad (11)$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2. \quad (12)$$

В формуле (12) записано равенство множеств, причем под суммой множеств  $A$  и  $B$  понимается сумма Минковского, т. е. множество вида  $A + B \triangleq \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

Аналогично тому, как это делалось для действительных чисел, для комплексных чисел определяется понятие натуральной степени  $n$  числа  $z$ , а из формулы (10) получаем так называемую *формулу Муавра* вида

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (13)$$

Введем обозначение

$$e^{i\varphi} \triangleq \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (14)$$

называемое *формулой Эйлера*. В силу (14) тригонометрическая форма комплексного числа принимает вид

$$z = |z|e^{i\varphi}. \quad (15)$$

В силу формулы (10) получаем равенство  $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ , а формула Муавра (13) принимает вид

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}. \quad (16)$$

Также легко проверить, что при  $z_1 \neq 0$  справедлива следующая формула деления комплексных чисел

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}, \quad \varphi_k \in \text{Arg } z_k. \quad (17)$$

Для нахождения операции, обратной к операции возведения в натуральную степень, рассмотрим уравнение относительно  $z$  вида

$$z^n = a, \quad (18)$$

где число  $a \in \mathbb{C}$  и натуральное число  $n \geq 2$  заданы, причем  $a \neq 0$ .

Для решения уравнения (18) представим числа  $z$  и  $a$  в форме (15), т. е.  $a = |a|e^{i\alpha}$  и  $z = |z|e^{i\varphi}$ , где  $\alpha \in \text{Arg } a$ . Тогда, учитывая (16) и неоднозначность выбора аргумента комплексного числа, получаем

$$(18) \iff |z|^n e^{in\varphi} = |a|e^{i\alpha} \iff \begin{cases} |z|^n = |a| \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \\ \iff |z| = \sqrt[n]{|a|}; \quad \varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Множества решений (19) уравнения (18) будем обозначать  $\{\sqrt[n]{a}\}$  и называть *корнем  $n$ -й степени комплексного числа  $a$* . Итак, мы получили формулу

$$\{\sqrt[n]{a}\} = \left\{ \sqrt[n]{|a|} \left( \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right) \mid k \in \overline{0, n-1} \right\}. \quad (20)$$

В формуле (20) мы учли, что множество решений (19) состоит ровно из  $n$  различных комплексных значений. Так, например, при  $k = n$  в (19) получается то же комплексное число, что и при  $k = 0$ , и т. д.

**Пример 1.** Найти  $\{\sqrt[4]{i}\}$ . По формуле (20) получаем

$$\{\sqrt[4]{i}\} = \left\{ \left( \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}\right) \right) \mid k \in \overline{0, 3} \right\}.$$

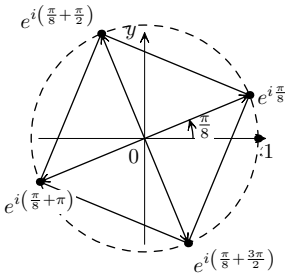


Рис. 2

Изобразим эти значения в виде точек на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  (см. рис. 2). Видно, что все значения корня лежат на единичной окружности, так как их модули равны 1 и являются вершинами квадрата. В общем случае множество (20) образует вершины правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{|a|}$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Подумайте, чем определение произведения комплексных чисел по формуле (2) на ваш взгляд лучше, чем, например, следующее определение произведения:  $z_1 z_2 = x_1 x_2 + i y_1 y_2$ ?

## § 2. Пределы. Ряды. Расширенная комплексная плоскость. Функции комплексного переменного

Чтобы определить сходимость последовательности точек на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , нужно уточнить понятие окрестности точки. Так как  $\mathbb{C}$  является евклидовым пространством  $\mathbb{R}^2$ , то в качестве простейшей окрестности произвольной точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  выбираем круг с центром  $z_0$  произвольного радиуса  $r > 0$ , который обозначаем:

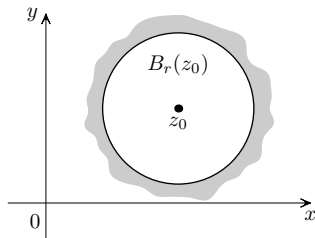


Рис. 3

$$B_r(z_0) \triangleq \{z \mid |z - z_0| < r\}. \quad (1)$$

При этом проколотой окрестностью точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  называем множество вида

$$\overset{\circ}{B}_r(z_0) \triangleq \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}. \quad (2)$$

Будем обозначать

$$\overline{B}_r(z_0) \triangleq \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$$

замкнутый круг с центром в точке  $z_0$  радиуса  $r > 0$  (см. рис. 3).

Остаются в силе основные понятия математического анализа, связанные со сходимостью в  $\mathbb{R}^2$ . Напомним их.

Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  — последовательность комплексных чисел, где  $z_n \triangleq x_n + iy_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , которую кратко записываем как  $\{z_n\}$  или  $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

**Определение 1.** Число  $A = a + ib \in \mathbb{C}$  называется *пределом последовательности*  $\{z_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  такое, что  $\forall n > N(\varepsilon)$  справедливо включение  $z_n \in B_\varepsilon(A)$ . Обозначаем  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  или  $z_n \rightarrow A$ .

**Утверждение 1.**

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \end{cases} \quad (3)$$

Доказательство следует из очевидных неравенств:

$$|z_n - A| \leq |x_n - a| + |y_n - b|;$$

$$|x_n - a| \leq |z_n - A|; \quad |y_n - b| \leq |z_n - A|.$$

**Упражнение 1.** Докажите, что если  $z_n \rightarrow A$ , то  $|z_n| \rightarrow |A|$ , и что обратное верно при  $A = 0$ , однако при  $A \neq 0$  из  $|z_n| \rightarrow |A|$ , в общем случае не следует сходимость  $z_n \rightarrow A$ .

В силу утверждения 1 для последовательностей комплексных чисел сохраняются известные свойства последовательностей действительных чисел и их пределов (о сумме, произведении, частном, критерий Коши).

**Определение 2.** Скажем, что последовательность  $\{z_n\}$  *сходится (стремится) к бесконечности* (обозначаем:  $z_n \rightarrow \infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n| > \varepsilon.$$

Это определение будет следовать из определения 1 при  $A = \infty$ , если окрестность бесконечности определить как дополнение круга  $B_\varepsilon(0)$ , т. е. множество вида

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(\infty) \triangleq \{z \mid |z| > \varepsilon\}. \quad (4)$$

**Определение 3.** Комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ , пополненная присоединением к ней единственной бесконечно удаленной точки  $\infty$  и системой ее окрестностей (4) (т. е. сходимостью к  $\infty$  по определению 2), называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается  $\overline{\mathbb{C}}$ .

При этом обозначим  $B_\varepsilon(\infty) \triangleq \overset{\circ}{B}_\varepsilon(\infty) \cup \{\infty\}$ .

*Замечание 1.* В силу определений сходимости в  $\overline{\mathbb{C}}$  по определениям 1 и 2 следует, что  $\overline{\mathbb{C}}$  есть компактное пространство, т. е. из любой последовательности  $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

В самом деле, если  $\{z_n\}$  ограничена, то наличие сходящейся подпоследовательности — известное свойство ограниченной последовательности на плоскости  $\mathbb{R}^2$  (теорема Больцано – Вейерштрасса). Если  $\{z_n\}$  не ограничена, то для всякого числа  $k \in \mathbb{N}$  существует номер  $n_k$  такой, что  $|z_{n_k}| > k$ , т. е. мы выделили подпоследовательность  $\{z_{n_k}\}$  такую, что  $z_{n_k} \rightarrow \infty$ .



Расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  и ее компактность наглядно иллюстрирует так называемая **сфера Римана**. Дадим строгие определения.

Поместим комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  в действительное трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3 = \{(\xi, \eta, \zeta)\}$ , совместив ее с плоскостью  $\zeta = 0$  (т. е. для всякой точки  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  имеем  $\xi = x, \eta = y, \zeta = 0$ ). Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  сферу  $S$ , касающуюся комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  в точке  $O = (0, 0, 0)$ , радиуса  $\frac{1}{2}$ . Уравнение такой сферы  $S$  имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta. \quad (5)$$

Обозначим через  $P$  точку на сфере  $S$ , диаметрально противоположную точке  $O = (0, 0, 0)$ , т. е.  $P = (0, 0, 1)$ . Каждому числу  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  сопоставим некоторую точку  $Z \in S$ , а именно, точку пересечения сферы  $S$  с отрезком прямой с концами в точках  $P$  и  $(x, y, 0)$ .

Уравнение этого отрезка, очевидно, следующее:

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \zeta = 1 - t, \quad t \in [0, 1]. \quad (6)$$

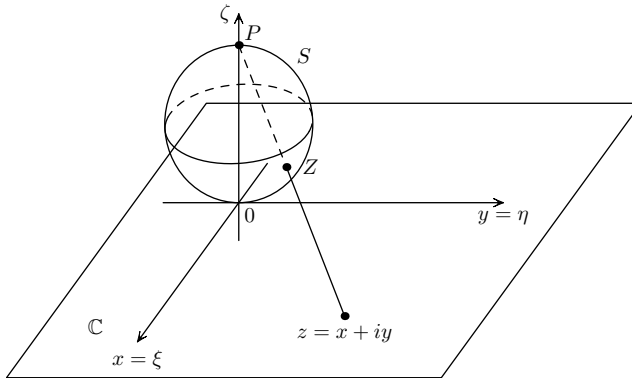


Рис. 4

Найдем точку  $Z$  пересечения отрезка со сферой как решение системы уравнений (5), (6):

$$t^2|z|^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 - t,$$

т. е.

$$t = \frac{1}{1 + |z|^2},$$

откуда координаты точки  $Z = (\xi, \eta, \zeta)$  находим по формулам

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}, \quad (7)$$

и обратно по точке  $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ , принадлежащей сфере  $S$ , можем вычислить точку  $z = x + iy$  на плоскости  $\mathbb{C}$  из выражений

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \quad (8)$$

В силу формул (7), (8) всякой точке  $z \in \mathbb{C}$  взаимно однозначно сопоставлена точка  $Z \in S \setminus P$ . Условимся считать, что точке  $P$  соответствует точка  $\infty$ . В итоге мы получаем взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью  $\overline{\mathbb{C}}$  и сферой  $S$ , которое называется *стереографической проекцией  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $S$* . В дальнейшем мы будем отождествлять  $\overline{\mathbb{C}}$  со сферой  $S$ , которую и называют *сферой Римана*. Это вызвано еще и справедливостью следующих свойств стереографической проекции, которые мы приводим без доказательства.

- 1) Любая прямая или окружность на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  при стереографической проекции переходит в окружность на сфере  $S$ .
- 2) Углы между любыми двумя пересекающимися кусочно-гладкими кривыми на  $\mathbb{C}$  и углы между их образами на  $S$  при стереографической проекции сохраняются.

**У п р а ж н е н и е 2.** Докажите приведенные выше свойства 1) и 2).

Аналогично случаю действительных чисел определяется понятие числового ряда с комплексными членами.

**Определение 4.** Числовым рядом, образованным последовательностью чисел  $\{z_n\}$ , называется последовательность  $\{S_N\}$ , где  $S_N \triangleq \sum_{n=1}^N z_n$ . Говорят, что этот ряд сходится, если существует конечный предел последовательности  $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ , который называется *суммой последовательности  $\{z_n\}$*  или *сум-*

мой числового ряда и обозначается

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n. \quad (9)$$

Члены последовательности  $S_N$  называются *частичными суммами числового ряда*.

Для краткости символом (9) принято обозначать не только сумму числового ряда, но и сам числовой ряд, образованный последовательностью  $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

Из утверждения 1, очевидно, следует

**Утверждение 2.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$  сходится тогда и только тогда, когда сходятся два действительных числовых ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ , где  $z_n = x_n + iy_n$ .

В силу утверждения 2 для таких рядов справедлив критерий Коши, а именно:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \text{ сходится тогда и только тогда, когда}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall p, m : p > m \geq N(\varepsilon) \left| \sum_{n=m}^p z_n \right| < \varepsilon. \quad (10)$$

Центральным понятием нашего курса является понятие функции комплексного переменного.

**Определение 5.** Говорят, что определена *функция*  $f$  на множестве  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , если указан закон, по которому каждому  $z \in G$  ставится в соответствие определенное  $w \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Функцию обозначают

$$f : G \rightarrow D \quad \text{или} \quad w = f(z). \quad (11)$$

Когда задана функция  $w = f(z)$ , говорят, что задано отображение множества  $G$  во множество  $D$ . Множество всех значений  $f(z)$  при  $z \in G$  обозначают  $f(G)$ .

Так как каждое значение функции  $w = f(z)$  имеет две компоненты  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ , то задание функции  $f$  равносильно

заданию двух действительных функций  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , т.е.

$$f(z) \triangleq u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{где } z = x + iy. \quad (12)$$

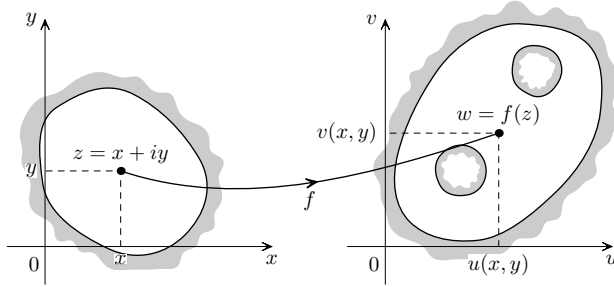


Рис. 5

**Определение 6.** Точка  $z_0 \in \overline{G}$  называется *внутренней точкой* множества  $G \subset \overline{G}$ , если существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что справедливо включение  $B_\varepsilon(z_0) \subset G$ .

**Определение 7.** Точка  $z_0 \in \overline{G}$  называется *предельной точкой* множества  $G \subset \overline{G}$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  в проколотой окрестности  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(z_0)$  имеется по крайней мере одна точка (а потому и бесконечно много точек) из  $G$  (т.е.  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(z_0) \cap G \neq \emptyset$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ).

**Определение 8.** Пусть заданы функция  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  и точка  $z_0$ , предельная для множества  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Число  $A \in \overline{\mathbb{C}}$  называется *пределом функции  $f$  в точке  $z_0$  по множеству  $G$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что справедливо включение  $f(z) \in B_\varepsilon(A)$ ,  $\forall z \in \overset{\circ}{B}_\delta(z_0) \cap G$ .

Обозначается:

$$A \triangleq \lim_{z \xrightarrow{G} z_0} f(z). \quad (13)$$

В случае, когда точка  $z_0$  является внутренней точкой множества  $G$ , то множество  $G$  не влияет на значение предела и обозначение (13) записывается проще:  $A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

Из утверждения 1 следует

**Утверждение 3.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  и  $A = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \iff \begin{cases} a = \lim_{(x,y) \xrightarrow{G} (x_0,y_0)} u(x,y), \\ b = \lim_{(x,y) \xrightarrow{G} (x_0,y_0)} v(x,y). \end{cases}$$

**Определение 9.** Функция  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  называется *непрерывной* в точке  $z_0 \in G$ , если точка  $z_0$  является предельной точкой множества  $G$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\forall z \in B_\delta(z_0) \cap G$  справедливо включение  $f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$ .

**Определение 10.** Функция  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  называется *непрерывной на множестве*  $G$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $G$ .

Из утверждения 3 получаем

**Утверждение 4.** Пусть заданы множество  $G \subset \mathbb{C}$  и функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $f(z) \doteq u(x,y) + iv(x,y)$ . Функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in G$  тогда и только тогда, когда функции  $u, v$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

*Замечание 2.* В силу утверждения 4 в комплексном анализе сохраняются все свойства непрерывных функций из действительного анализа (о непрерывности суммы, произведения и т. д.).

**Пример 1.** Функция  $w = z^n, n \in \mathbb{N}$ , непрерывна в  $\mathbb{C}$ .

**Пример 2.** Функция  $w = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, n, m \in \mathbb{N}$ , где

$$\begin{aligned} P_n(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0, \\ Q_m(z) &= z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0, \end{aligned}$$

непрерывна в  $G = \{z \mid Q_m(z) \neq 0\}$ .

**Пример 3.** Функция  $w = |z|$  непрерывна в  $\mathbb{C}$ .

**Пример 4.** Функция  $w = \bar{z}$  непрерывна в  $\mathbb{C}$ .

**Пример 5.** Функция  $w = \arg_{\text{гл}} z$  непрерывна в  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  (это докажем позже в § 5).

Пусть на множестве  $G \subset \mathbb{C}$  задана последовательность функций  $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$ , где  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Аналогично определению 4 вводится понятие *функционального ряда*, порожденного

этой последовательностью и понятия сходимости и суммы этого ряда. Сумма ряда обозначается как

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z). \quad (14)$$

Аналогично действительному анализу определяются понятия абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда (14). Напомним последнее.

**Определение 11.** Пусть функции  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определены на множестве  $G$  и пусть  $S_n(z) \triangleq \sum_{k=1}^n f_k(z)$ . Функциональный ряд (14) называется равномерно сходящимся на множестве  $G$ , если он сходится в каждой точке  $z \in G$  к некоторому значению  $S(z)$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при любом  $n \geq N(\varepsilon)$  справедливо неравенство  $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$  для всех точек  $z \in G$ .

В силу утверждений 2 и 3 функциональные ряды обладают всеми свойствами, известными для действительных функциональных рядов. Например, справедлив критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда (14). Как и в действительном анализе доказываются следующие утверждения.

**Утверждение 5.** Сумма равномерно сходящегося на  $G$  функционального ряда, порожденного последовательностью непрерывных функций комплексного переменного, есть непрерывная на  $G$  функция.

**Утверждение 6 (признак Вейерштрасса).** Пусть существует числовая последовательность  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$  такая, что  $|f_n(z)| \leq a_n$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$  и  $\forall z \in G$  и пусть числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится. Тогда функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$  сходится абсолютно и равномерно на  $G$ .

### § 3. Дифференцирование функции комплексного переменного

Зафиксируем точку  $z_0 \in \mathbb{C}$  и ее окрестность  $B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ , где  $r > 0$ .

**Определение 1.** Если функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  такова, что существует конечный предел отношения

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0, \quad (1)$$

то этот предел называется *производной функции*  $f$  в точке  $z_0$  и обозначается  $f'(z_0)$ .

Пусть  $\Delta z \triangleq z - z_0$  и  $\Delta f \triangleq f(z) - f(z_0)$ . Определение 1 означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $\Delta z$ :  $0 < |\Delta z| < \delta$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad (3)$$

где функция  $\alpha(\Delta z)$ , определяемая из равенства (3), в силу (2) удовлетворяет условию:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0. \quad (4)$$

*Замечание 1.* Функция  $\alpha$ , удовлетворяющая условию (4), называется *o-малой функцией*, что обозначается как  $o(\Delta z)$ .

**Определение 2.** Говорят, что функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$ , если справедливо представление

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z), \quad \forall \Delta z : 0 < |\Delta z| < r, \quad (5)$$

где  $A$  не зависит от  $\Delta z$ , а функция  $\alpha(\Delta z)$  является  $o(\Delta z)$ .

В силу изложенного выше очевидно справедлива следующая

**Лемма 1.** Функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0$  тогда и только тогда, когда существует производная  $f'(z_0)$ , причем в формуле (5) число  $A = f'(z_0)$ .

Распишем определение 1 через действительные и мнимые компоненты чисел и функции  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ .

Пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z = x + iy$ ,  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ,  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ ,  $\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0)$ ,  $\Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0)$ ,  $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ .

**Теорема 1.** Для того, чтобы функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  была дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ , необходимо и достаточно, чтобы

- 1) функции  $u(x,y)$  и  $v(x,y)$  были дифференцируемы в точке  $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$  (как функции двух действительных переменных  $x$  и  $y$ );
- 2) в точке  $(x_0,y_0)$  были выполнены следующие условия (называемые условиями Коши–Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \quad (6)$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0). \quad (7)$$

Доказательство.

1. Пусть существует производная  $f'(z_0)$ , т. е. справедливы выражения (4), (5), где  $A = f'(z_0)$ .

Обозначим  $A \triangleq a + ib$ ,  $\alpha(\Delta z) \triangleq \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$  и получим из (5) равенства его действительных и мнимых частей, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y), \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из выражения (4) и того, что  $|\alpha_1| \leq |\alpha|$  и  $|\alpha_2| \leq |\alpha|$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\alpha_1(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\alpha_2(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \quad (9) \end{aligned}$$



откуда равенства (8) означают дифференцируемость (по определению) функций  $u(x,y)$  и  $v(x,y)$  в точке  $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ , причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -b, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = b, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = a, \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Используя равенства (10) убеждаемся, что выполнены условия Коши–Римана (6), причем

$$f'(z_0) = a+ib = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

2. Пусть функции  $u(x,y), v(x,y)$  дифференцируемы в точке  $(x_0,y_0)$  и выполнены условия Коши–Римана (6). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + i \Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + \\ &+ i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \right) \stackrel{(6)}{=} \\ &\stackrel{(6)}{=} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = \\ &= A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z), \end{aligned}$$

где число  $A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ , функция  $\alpha = \alpha_1 + i \alpha_2$ , причем компоненты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  удовлетворяют условию (9). Тогда получаем, что

$$\left| \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \right| \leq \frac{|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{|\alpha_2(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \rightarrow 0$$

при  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ , т. е. функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ , и верна формула (7). ■

Аналогично действительному случаю доказываются следующие свойства дифференцируемости функций.

**Утверждение 1.** Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $z_0$ , то в точке  $z_0$ :

- а) функция  $f + g$  дифференцируема и  $(f + g)' = f' + g'$ ,
- б) функция  $fg$  дифференцируема и  $(fg)' = f'g + fg'$ ,

в) функция  $\frac{f}{g}$  дифференцируема, если  $g(z_0) \neq 0$ , и  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

Разберем простейшие примеры вычисления производных.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $w = z^2$ . Исходя из определения 1, для произвольной точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  запишем  $\Delta f = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0 \cdot \Delta z + (\Delta z)^2$ . Очевидно, что  $\Delta f / \Delta z = 2z_0 + \Delta z \rightarrow 2z_0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ , т. е. функция дифференцируема и  $f'(z_0) = 2z_0$ .

Проверим дифференцируемость этой же функции с помощью теоремы 1. Здесь  $u(x,y) = x^2 - y^2$  и  $v(x,y) = 2xy$ . Вычисляя частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

убеждаемся в том, что условия теоремы 1, в том числе условия Коши–Римана (6), выполнены всюду, т. е. функция  $w = z^2$  дифференцируема при каждом  $z \in \mathbb{C}$ , причем по формуле (7) получаем, что  $w' = 2x + i2y = 2z$ .

**Пример 2.** Рассмотрим функцию  $w = |z|^2$ . У нее  $u(x,y) = x^2 + y^2$  и  $v(x,y) = 0$ . Вычисляя частные производные, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0.$$

Отсюда видим, что условия Коши–Римана (6) будут выполнены лишь при условии, что  $x = y = 0$ , т. е. функция  $w = |z|^2$  дифференцируема лишь в точке  $z_0 = 0$ , несмотря на то, что функции  $u(x,y)$  и  $v(x,y)$  являются бесконечно дифференцируемыми в  $\mathbb{R}^2$ .

**Пример 3.** Рассмотрим функцию  $w = \bar{z} = x - iy$ . Для нее  $u(x,y) = x$  и  $v(x,y) = -y$ . Вычисляя частные производные, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Убеждаемся, что условия Коши–Римана (6) не выполнены ни в одной точке  $z \in \mathbb{C}$ , т. е. функция всюду не дифференцируема.

Более сложные примеры дифференцируемых функций разберем позже.

**Следствие 1.** Условия Коши–Римана (6) очевидно эквивалентны следующим трем условиям на векторы  $\mathbf{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  и  $\mathbf{grad} v = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  из  $\mathbb{R}^2$ :

- 1) эти векторы имеют одинаковую длину, т.е.  $|\mathbf{grad} u| = |\mathbf{grad} v|$ ;
- 2) эти векторы ортогональны, т.е.  $(\mathbf{grad} u, \mathbf{grad} v) = 0$ ;
- 3) вектор  $\mathbf{grad} v$  повернут на угол  $\frac{\pi}{2}$  против хода часовой стрелки по отношению к вектору  $\mathbf{grad} u$ .

Геометрические условия 1–3 позволяют найти другие формы представления условий Коши–Римана (6). Рассмотрим два взаимно перпендикулярных единичных вектора  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с той же взаимной ориентацией, что и базисные векторы  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  и  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , идущие по осям  $0x$  и  $0y$ .

Раскладывая векторы  $\mathbf{grad} u$  и  $\mathbf{grad} v$  по новому базису из векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$ , получаем

$$\mathbf{grad} u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial u}{\partial l} \mathbf{l}, \quad \mathbf{grad} v = \frac{\partial v}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial v}{\partial l} \mathbf{l}; \quad (11)$$

Условия 1)–3) в силу формул (11) эквивалентны общей форме условий Коши–Римана вида

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial l}, \quad \frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\partial v}{\partial n}. \quad (12)$$

Для демонстрации формул (12) в плоскости  $\mathbb{R}^2$  зададим полярные координаты (см. формулы (6) в § 1), вследствие чего получаем функции  $\tilde{u}(r, \varphi) = u(x, y)$  и  $\tilde{v}(r, \varphi) = v(x, y)$ . Для любой фиксированной точки  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ , где  $r_0 > 0$ , определим нормальный вектор  $\mathbf{n} = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$  и касательный вектор  $\mathbf{l} = (-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0)$  к окружности  $\{z \mid |z| = |z_0|\}$  в точке  $z_0$  и придем к выражениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= (\mathbf{grad} u, \mathbf{n}) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi_0 + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi_0 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial l} &= (\mathbf{grad} u, \mathbf{l}) = \frac{\partial u}{\partial x} (-\sin \varphi_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

откуда в силу (12) получаем условия Коши–Римана в полярных координатах вида

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}. \quad (13)$$

*Замечание 2.* В дальнейшем, как правило, будем употреблять сокращенную форму записи частных производных функций, например, будет писать  $u_x$  вместо  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , или  $u_y$  вместо  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

## § 4. Регулярные функции. Гармонические функции

Так как множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$  есть евклидово пространство  $\mathbb{R}^2$  с дополнительной операцией умножения, то и основные понятия множеств в  $\mathbb{R}^2$  можно перенести на комплексную плоскость  $\mathbb{C}$ . Аналогично вводятся понятия окрестности точки  $z_0$  (что уже сделано в § 2), открытого множества (для каждой его точки найдется ее окрестность, принадлежащая этому множеству), замкнутого множества (оно содержит все свои предельные точки), области (т. е. открытого и связного множества), односвязной области (т. е. области, у которой любой простой замкнутый контур, целиком лежащий в ней, может быть непрерывной деформацией стянут в точку, оставаясь внутри области).

Приведем простейшие примеры областей.

Круг  $B_1(0) = \{z \mid |z| < 1\}$  есть односвязная область в  $\mathbb{C}$ .

Окрестность бесконечности  $\overset{\circ}{B}_1(\infty) = \{z \mid |z| > 1\}$ , проколота окрестность нуля  $\overset{\circ}{B}_1(0) = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$  и кольцо  $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$  суть примеры неодносвязных областей в  $\mathbb{C}$ .

В расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  эти определения сохраняются, за исключением того, что здесь появляется дополнительная возможность непрерывной деформации через  $\infty$ , осуществляемой на сфере Римана, что приводит к расширению в  $\overline{\mathbb{C}}$  понятия односвязной области. Так, например, область  $B_1(\infty)$  в плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  является односвязной.

*Замечание 1.* Мы не приводим строгого определения односвязной области в  $\overline{\mathbb{C}}$ , которое при желании можно найти, например, в книге [10] ч. 1, гл. 1, § 1.

**Определение 1.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{C}$ . Функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  называется *регулярной* (или *голоморфной* или *аналитической*) в области  $G$ , если она дифференцируема на  $G$  и ее производная  $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$  является непрерывной функцией. Говорят, что функция  $f$  *регулярна в точке*  $z_0$ , если она определена и регулярна в некоторой окрестности этой точки. Говорят,

что функция  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  *регулярна на множестве*  $D \subset \mathbb{C}$ , если функция  $f$  регулярна в каждой точке множества  $D$ .

Как показано в примере 1 из § 3, функция  $w = z^2$  всюду дифференцируема, и так как ее производная  $w'(z) = 2z$  непрерывна, то  $w = z^2$  регулярна во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

Функция же  $w = |z|^2$  не регулярна ни в какой области и ни в какой точке.

Аналогично рассмотрим функцию  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . По определению производной получаем

$$\begin{aligned} w'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{n \cdot \Delta z \cdot z^{n-1} + (\Delta z)^2(\dots)}{\Delta z} = n z^{n-1}, \end{aligned}$$

т. е. производная всюду существует и непрерывна, поэтому  $w = z^n$  регулярна во всей плоскости  $\mathbb{C}$ .

Рассмотрим более сложные примеры регулярных функций.

**Определение 2.** Определим *экспоненциальную функцию комплексного переменного* по формуле

$$e^z \triangleq e^x (\cos y + i \sin y), \quad (1)$$

где  $z = x + iy$ .

В стандартных обозначениях компонент функции  $f = u + iv$  получаем следующие действительную и мнимую части экспоненциальной функции:  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ , причем  $|e^z| = e^x$ ,  $y \in \text{Arg } e^z$ .

Очевидно, что функция (1) непрерывна и является периодической с периодом  $2\pi i$ .

Легко проверить равенства частных производных

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x,$$

т. е. частные производные непрерывны и выполнены условия Коши–Римана (6) из § 3 всюду. По теореме 1 § 3 существует производная функции  $e^z$ , причем по формуле (7) из § 3 она равна

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z, \quad (2)$$

т. е.  $w = e^z$  регулярна во всем пространстве  $\mathbb{C}$ .

**Определение 3.** Определим *тригонометрические функции*  $\sin z$  и  $\cos z$  *комплексного переменного* по формулам

$$\sin z \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \triangleq \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (3)$$

Заметим, что при  $z = x$  (т. е. когда  $z$  является действительным числом) равенства (3) непосредственно следуют из формулы Эйлера (см. § 1).

В силу определения 3 из регулярности экспоненты (1) очевидно следует регулярность функций  $\sin z$  и  $\cos z$  как суммы регулярных функций.

Из формул (1), (3) легко получить формулы для производных

$$(e^{iz})' = i e^{iz}, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z. \quad (4)$$

Более того, из определений 2 и 3 легко доказать справедливость основных элементарных свойств тригонометрических функций, известных в действительном анализе. Например,

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Из периодичности экспоненты получаем, что функции  $\sin z$  и  $\cos z$  также являются периодическими с периодом  $2\pi$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Проверьте равенства (4) и (5).

Однако в отличие от действительного случая функции  $\sin z$  и  $\cos z$  не ограничены на  $\mathbb{C}$ . В самом деле, найдем, например, действительную и мнимую части функции  $\sin z$ :

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) \stackrel{(5)}{=} \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2 x) \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x (\operatorname{ch}^2 y - 1)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}, \end{aligned}$$

т. е.  $|\sin z| \sim |\operatorname{ch} y|$  при  $y \rightarrow \infty$ , а поэтому функция  $\sin z$  не ограничена.

**У п р а ж н е н и е 2.** Рассмотрим функцию  $w = f(z) = e^{-1/z^4}$ , при  $z \neq 0$  и  $f(0) = 0$ . Покажите, что данная функция  $f$  удовлетворяет условиям Коши–Римана (6) из § 3 в точке  $z_0 = 0$ , но тем не менее не дифференцируема в точке  $z_0 = 0$ . Не противоречит ли это теореме 1 § 3?

**Определение 4.** Функция  $u = u(x,y)$  действительных переменных  $x$  и  $y$ , определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в области  $G \subset \mathbb{R}^2$  (т.е.  $u \in C^2(G)$ ), называется *гармонической* в  $G$ , если  $\forall (x,y) \in G$ :

$$\Delta u \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  регулярна в области  $G$  и функции  $u(x,y), v(x,y) \in C^2(G)$ . Тогда функции  $u(x,y)$  и  $v(x,y)$  суть гармонические функции в  $G$ .

**Доказательство.** В самом деле, из условий Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

получаем по определению оператора Лапласа  $\Delta u$ :

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \stackrel{(7)}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0. \quad (8)$$

Аналогично из условий Коши–Римана (7) следует, что  $\Delta v = 0$ , т.е.  $u, v$  суть гармонические функции. ■

**Замечание 2.** В § 8 покажем, что всякая регулярная в области функция  $f$  дифференцируема в этой области любое число раз, и поэтому ее компоненты, т.е. функции  $u$  и  $v$ , являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Поэтому условие теоремы 1 о гладкости функций  $u$  и  $v$  можно было бы опустить, так как оно следует из условия регулярности функции  $f$ .

**Определение 5.** Две гармонические функции  $u(x,y)$  и  $v(x,y)$ , связанные соотношениями Коши–Римана (7), называются *сопряженными*.

Итак, мы показали, что из регулярности в области функции  $f = u + iv$  следует гармоничность ее действительной и мнимой частей  $u$  и  $v$ .



Обратное утверждение имеет место при дополнительном условии односвязности области определения функции. А именно

**Теорема 2.** Пусть задана гармоническая функция  $u(x,y)$  в односвязной области  $G \subset \mathbb{C}$ . Тогда существует регулярная в области  $G$  функция  $f$ , для которой  $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ .

**Доказательство.** Для заданной функции  $u$  определим функции

$$P(x,y) \triangleq -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q(x,y) \triangleq \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (9)$$

Для нахождения функции  $f$  достаточно найти функцию  $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ . Эта функция вместе с функцией  $u(x,y)$  обязана удовлетворять условиям Коши–Римана (7), т. е. ищем функцию  $v(x,y)$ , решая систему уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x,y).$$

Так как функция  $u$  является гармонической, то для определенных в формуле (9) функций  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$  получаем

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x,y) \in G. \quad (10)$$

Равенство (10) и односвязность области  $G \subset \mathbb{R}^2$  являются достаточными условиями того, что непрерывно дифференцируемое векторное поле  $(P(x,y), Q(x,y))$  является потенциальным в области  $G$  (см., например, [6] том 2, глава 13), т. е. выражение

$$dv = P dx + Q dy$$

представляет собой полный дифференциал некоторой непрерывно дифференцируемой (потенциальной) функции  $v(x,y)$  в области  $G$ , которую можно описать формулой:

$$v(x,y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C,$$

т. е. в нашем случае в силу (9) эта функция равна

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (11)$$

при этом интеграл в (11) является криволинейным интегралом второго рода вдоль некоторой ориентированной кривой, лежащей в области  $G$ , с началом в некоторой произвольно выбранной начальной точке  $(x_0, y_0) \in G$  и концом в точке  $(x, y) \in G$ . Очевидно, что полученная в (11) функция  $v(x, y)$  является гармонической в силу выполнения (7), (8), а в силу теоремы 1 § 3 функция  $f(z) \triangleq u(x, y) + iv(x, y)$  является регулярной в  $G$ . ■

*Замечание 3.* Аналогично доказательству теоремы 2 доказывается утверждение о том, что для всякой гармонической функции  $v(x, y)$ , заданной в односвязной области  $G$ , существует регулярная функция  $f$  такая, что  $v(x, y) = \text{Im } f(z)$ .

**Пример 1.** Пусть задана функция  $u(x, y) = xy$ . Очевидно, что она гармоническая, т. е.  $\Delta u = 0$ . Найдем функцию  $v$  из условий Коши–Римана (7).

Из первого условия получаем

$$v_y = u_x = y, \quad \text{откуда} \quad v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \varphi(x) \quad \forall \varphi(\cdot). \quad (12)$$

Из второго условия и формулы (12) получаем

$$v_x = -u_y = -x, \quad \text{т. е.} \quad \varphi'(x) = -x, \quad \text{откуда} \quad \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + C.$$

В итоге

$$v = \frac{y^2 - x^2}{2} + C; \quad f(z) = xy + i \left( \frac{y^2 - x^2}{2} + C \right) = -\frac{iz^2}{2} + iC.$$

## § 5. Теорема об обратной функции

Сначала отметим следующую теорему о сложной функции.

**Теорема 1.** Пусть заданы две области  $D$  и  $H$  в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , две регулярные функции  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  и  $g : H \rightarrow \mathbb{C}$ , причем выполнено условие, что  $f(z) \in H$  для всех  $z \in D$  (т. е.  $f(D) \subset H$ ). Тогда сложная функция  $\zeta = g(f(z))$  регулярна в области  $D$  и справедлива формула дифференцирования

$$\zeta'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad \forall z \in D. \quad (1)$$

Доказательство теоремы сводится к проверке формулы (1). Для этого возьмем произвольную точку  $z_0 \in G$  и пусть  $w_0 \triangleq f(z_0)$ . Приращения функций  $\Delta f$  и  $\Delta g$  по определению дифференцируемости функций принимают вид

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z); \quad \Delta g = g'(w_0)\Delta w + o(\Delta w).$$

Подставляя во второе равенство в качестве  $\Delta w$  значение  $\Delta f$  из первого равенства, переходя к пределу в выражении  $\frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = g'(w_0) \frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ , в итоге получаем формулу (1). Так как

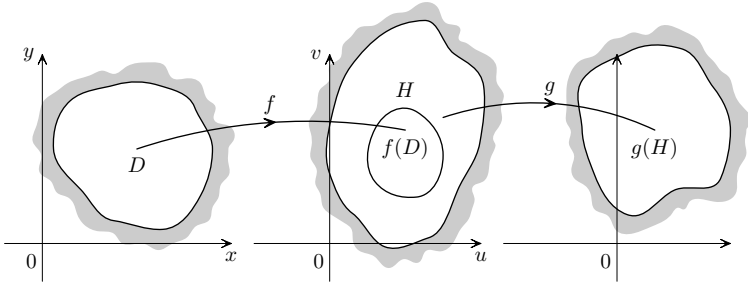


Рис. 6

по условию теоремы функция  $g'(w)$  непрерывна на  $H$ , функции  $f(z), f'(z)$  также непрерывны на области  $D$ , то и функция  $g'(f(z)) \cdot f'(z)$  непрерывна на области  $D$ , т. е. функция  $\zeta = g(f(z))$  регулярна на области  $D$ . ■

**Теорема 2 (об обратной функции).** Пусть на области  $G$  заданы регулярная функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  и точка  $z_0 \in G$ . Пусть

точка  $w_0 \triangleq f(z_0)$  и пусть выполнено условие  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда существуют круги  $B_\delta(z_0) \subset G$  и  $B_\varepsilon(w_0)$  такие, что

- а)  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\delta(z_0)$ ;
- б) Для любой точки  $\hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$  уравнение  $f(z) = \hat{w}$  имеет единственное решение  $\hat{z}$  в круге  $B_\delta(z_0)$ , т. е. на круге  $B_\varepsilon(w_0)$  существует обратная к функции  $f$  функция  $g : B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$  (т. е. функция, для которой  $f(g(w)) = w$  при любом  $w \in B_\varepsilon(w_0)$ );
- в) Обратная функция  $g : B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$  регулярна, причем ее производная вычисляется по формуле

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad \forall w \in B_\varepsilon(w_0). \quad (2)$$

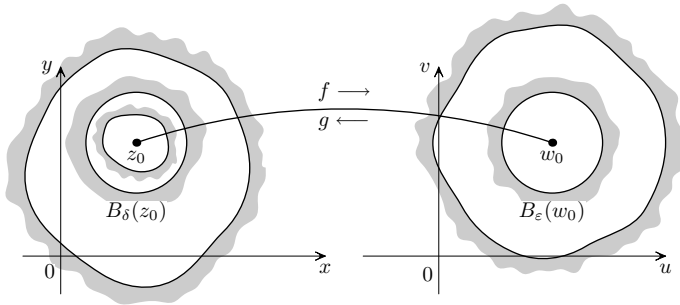


Рис. 7

**Доказательство.** Пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $w_0 = u_0 + iv_0$ ,  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ . Задание функции  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  эквивалентно заданию отображения

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} : G \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Якобиан отображения (3) в силу условий Коши–Римана равен

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2. \quad (4)$$

Отображение (3) непрерывно дифференцируемо, и в силу условия теоремы и формулы (4) получаем, что  $J(x_0, y_0) \neq 0$ ,

т. е. для отображения (3) выполнены условия теоремы об обратном отображении (см., например, [1], § 12.1, теорема 1, или [9], § 28, теоремы 2–3), в силу которой существуют круги  $B_\delta(z_0)$  и  $B_\varepsilon(w_0)$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , такие, что  $J(x, y) \neq 0$ ,  $\forall (x, y) \in B_\delta(z_0)$ , и для каждой фиксированной точки  $(\hat{u}, \hat{v}) \in B_\varepsilon(w_0)$  система уравнений

$$\begin{cases} \hat{u} = u(x, y), \\ \hat{v} = v(x, y) \end{cases} \quad \text{имеет в } B_\delta(z_0) \text{ единственное решение } (x(\hat{u}, \hat{v}), y(\hat{u}, \hat{v})), \text{ т. е. существует отображение}$$

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad \forall (u, v) \in B_\varepsilon(w_0), \quad (5)$$

обратное к отображению (3). Более того, по той же теореме функции  $x(u, v)$  и  $y(u, v)$  непрерывно дифференцируемы в круге  $B_\varepsilon(w_0)$ .

Отображению (5) на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  соответствует комплекснозначная функция  $g : B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$  вида

$$z = g(w) \triangleq x(u, v) + iy(u, v), \quad (6)$$

которая в силу задания является обратной к функции  $f$ , т. е.

$$w \equiv f(g(w)), \quad \forall w \in B_\varepsilon(w_0). \quad (7)$$

Покажем, что функция (6) регулярна в  $B_\varepsilon(w_0)$ .

Проверим по определению ее дифференцируемость в круге  $B_\varepsilon(w_0)$ . Выберем произвольную точку  $\hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$ . Пусть  $\hat{z} \in B_\delta(z_0)$  такова, что  $f(\hat{z}) = \hat{w}$ , т. е.  $\hat{z} = g(\hat{w})$ . Выберем произвольную последовательности  $\{w_k\} \subset B_\varepsilon(w_0)$  такую, что  $w_k \neq \hat{w}$  и  $w_k \rightarrow \hat{w}$ , при  $k \rightarrow +\infty$ . Покажем, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(w_k) - g(\hat{w})}{w_k - \hat{w}},$$

не зависящий от выбора последовательности  $\{w_k\}$ . Определим  $z_k \triangleq g(w_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $z_k \in B_\delta(\hat{z})$ ,  $f(z_k) = w_k$  и  $z_k \neq \hat{z}$ . Из непрерывности функции  $g$  следует, что  $z_k \rightarrow \hat{z}$ , при  $k \rightarrow +\infty$ . Так как у функции  $f$  существует производная в точке  $\hat{z}$ , то

$$f'(\hat{z}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(z_k) - f(\hat{z})}{z_k - \hat{z}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{w_k - \hat{w}}{z_k - \hat{z}} \neq 0.$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(w_k) - g(\hat{w})}{w_k - \hat{w}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{z_k - \hat{z}}{w_k - \hat{w}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{w_k - \hat{w}}{z_k - \hat{z}}} = \frac{1}{f'(\hat{z})},$$

который не зависит от выбора последовательности  $\{w_k\}$ , т.е. существует производная  $g'(\hat{w})$  и справедлива формула (2).

Так как производная  $f'(z) \neq 0$  на круге  $B_\delta(z_0)$ , а функции  $f'(z)$  и  $g(w)$  непрерывны, то в силу формулы (2) получаем, что функция  $g'(w)$  непрерывна, т.е.  $g(w)$  регулярна в круге  $B_\varepsilon(w_0)$ . ■

**Определение 1.** Функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  называется *однолистной* (или взаимно однозначной) на  $G$ , если для любых точек  $z_1, z_2$  из  $G$ ,  $z_1 \neq z_2$ , справедливо неравенство  $f(z_1) \neq f(z_2)$ .

Иными словами, функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  однолистка тогда и только тогда, когда на множестве  $G^* = f(G)$  существует обратная ей функция  $g : G^* \rightarrow \mathbb{C}$ . Из теоремы 2 получаем очевидное следствие.

**Следствие 1.** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна и однолистка на области  $G \subset \mathbb{C}$ , причем  $f'(z) \neq 0$  при всех  $z \in G$ . Тогда множество  $G^* = f(G)$  есть область, и обратная функция  $g : G^* \rightarrow G$  регулярна на области  $G^*$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку  $\hat{w} \in G^*$ . Тогда существует точка  $\hat{z} \in G$  такая, что  $f(\hat{z}) = \hat{w}$ . Так как по условию  $f'(\hat{z}) \neq 0$ , то по теореме 2 существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $B_\varepsilon(\hat{w}) \subset f(G) = G^*$ , т.е. множество  $G^*$  открыто. Для любых точек  $w_1, w_2 \in G^*$  существуют точки  $z_1, z_2 \in G$  такие, что  $f(z_k) = w_k$  при  $k = 1, 2$ . Так как множество  $G$  является областью, то существует гладкая кривая  $\gamma_{z_1 z_2} \subset G$  с концевыми точками  $z_1, z_2$ . Тогда ее образ  $f(\gamma_{z_1 z_2}) \subset G^*$  является гладкой кривой, с концевыми точками  $w_1, w_2 \in G^*$ . Таким образом доказали, что множество  $G^*$  является областью. Так как по теореме 2 функция  $g : G^* \rightarrow G$  регулярна в каждой точке  $\hat{w} \in G^*$ , то функция  $g$  регулярна на  $G^*$ . ■

*Замечание 1.* В § 24 покажем, что в следствии 1 условие  $f'(z) \neq 0$  при всех  $z \in G$  можно специально не оговаривать,

так как это условие будет следовать из условия однолиственности заданной функции  $f$  на области  $G$ .

Рассмотрим некоторые примеры элементарных функций и областей их задания, на которых эти функции будут однолиственными.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . В § 1 мы показали, что функция  $w = z^n$  на всей плоскости  $\mathbb{C}$  не однолистна. А именно, показали, что для любого заданного числа  $w \neq 0$  уравнение  $w = z^n$  относительно величины  $z$  имеет ровно  $n$  различных решений:

$$z \in \{\sqrt[n]{w}\} \triangleq \left\{ \sqrt[n]{|w|} e^{i\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)} \mid k \in \overline{0, n-1} \right\}. \quad (8)$$

**Определение 2.** Пусть задано  $G \subset \mathbb{C}$ . Если каждой точке  $z \in G$  поставлено в соответствие некоторое непустое подмножество из  $\mathbb{C}$ , то говорят, что на  $G$  задана многозначная функция. Многозначные функции будем обозначать заглавными буквами, например,  $F : G \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$ , где  $2^{\mathbb{C}}$  означает множество всех подмножеств из  $\mathbb{C}$ .

В частности, функция  $\zeta = F(w) \triangleq \{\sqrt[n]{w}\}$  в силу (8) есть многозначная функция, определенная на всей плоскости  $\mathbb{C}$ .

Рассмотрим угловую область вида  $G_{\alpha, \beta} \triangleq \{z \mid z \neq 0, \alpha < \arg z < \beta\}$ .

Очевидно, что угловая область  $G_{\alpha, \beta}$  при отображении  $w = z^n$  отобразится на угловую область  $G_{n\alpha, n\beta}$ , так как число  $z = re^{i\varphi}$  отобразится в число  $w = r^n e^{in\varphi}$ . При этом луч  $l_{\varphi_0} \triangleq \{z \mid z = re^{i\varphi_0}, r > 0\}$ , где угол  $\varphi_0 \in (\alpha, \beta)$  зафиксирован, отобразится на луч  $l_{n\varphi_0} \triangleq \{w \mid w = te^{in\varphi_0}, t > 0\}$ . Дуга окружности  $\{z \mid z = r_0 e^{i\varphi}, \varphi \in (\alpha, \beta)\}$ , где радиус  $r_0 > 0$  зафиксирован, отобразится на дугу  $\{w \mid w = r_0^n e^{i\psi}, \psi \in (n\alpha, n\beta)\}$ . При этом  $w'(z) = nz^{n-1} \neq 0$  в угловой области  $G_{\alpha, \beta}$ .

Выберем область  $G_{\alpha, \beta}$  так, чтобы функция  $w = z^n$  была однолистной на ней. Это означает, что нет пары чисел  $z_1, z_2$  из  $G_{\alpha, \beta}$  таких, что  $z_1 \neq z_2$  и  $z_1^n = z_2^n$ . Последнее равенство

означает, что  $r_1^n e^{in\varphi_1} = r_2^n e^{in\varphi_2}$ , т. е.  $r_1 = r_2$  и  $n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2\pi k$  при некотором  $k \neq 0$ .

Таким образом, функция  $z^n$  однолистна на области  $G_{\alpha, \beta}$ , если  $0 < n\beta - n\alpha \leq 2\pi$ .

Выберем  $\alpha = -\frac{\pi}{n}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{n}$ . Как показано выше, функция  $w = z^n$  однолистно отображает область  $G_{-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}}$  на область  $G^* \triangleq \mathbb{C}/(-\infty, 0]$  (см. рис. 8).

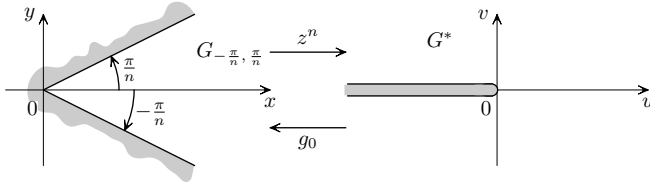


Рис. 8

Следовательно, существует обратная функция вида

$$z = g_0(w) \triangleq |w|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg_{\text{ГЛ}} w}{n}}, \quad \text{где} \quad -\pi < \arg_{\text{ГЛ}} w < \pi. \quad (9)$$

По следствию 1 функция  $g_0(w)$  (9) является регулярной функцией на области  $G^*$ .

**Определение 3.** Пусть  $F : G \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$  — многозначная функция и  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — функция (которая по определению одноточечная) такая, что для любого  $z \in G$  значение  $f(z)$  содержится во множестве  $F(z)$ . Тогда говорят, что функция  $f$  есть *ветвь многозначной функции  $F$* . Если к тому же функция  $f$  непрерывна (или регулярна) на  $G$ , то говорят, что функция  $f$  есть *непрерывная (или регулярная) ветвь* многозначной функции  $F$ .

Таким образом, функция  $g_0(w)$ , определенная формулой (9), дает пример регулярной ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$  на области  $G^* = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . По теореме об обратной функции (по формуле (2)) можно вычислить производную этой



регулярной ветви (9) многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$  в каждой точке  $w \in G^*$ , а именно:

$$(g_0(w))' = \frac{1}{nz^{n-1}} \Big|_{z=g_0(w)} = \frac{1}{n(g_0(w))^{n-1}}. \quad (10)$$

Так как впоследствии будем изучать различные регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$ , то функцию (9) назовем *главной регулярной ветвью многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$* .

**Пример 2.** Рассмотрим функцию

$$w = w(z) \triangleq e^z \triangleq e^x (\cos y + i \sin y).$$

Как показано в § 4, эта функция  $w(z)$  регулярна на плоскости  $\mathbb{C}$ . Так как  $|e^z| = e^x > 0 \forall z \in \mathbb{C}$  и  $w'(z) = w(z)$ , то  $w'(z) \neq 0$  в каждой точке  $z \in \mathbb{C}$ .

Решая уравнение  $w = e^z$  относительно  $z$  при фиксированном  $w \neq 0$ , из того, что  $w = |w|e^{i\alpha}$  и  $z = x + iy$ , получаем  $|w| = e^x$ ,  $y = \alpha + 2\pi k \in \text{Arg } w$ , т. е.

$$z \in \ln |w| + i \text{Arg } w.$$

**Определение 4.** Множество решений уравнения  $w = e^z$  относительно  $z$  называется логарифмом  $w$  и обозначается

$$\text{Ln } w \triangleq \ln |w| + i \text{Arg } w. \quad (11)$$

Итак, мы получили еще одну многозначную функцию  $\text{Ln } w$ .

Для однолиственности функции  $e^z$  в некоторой области  $G$  нужно, чтобы  $\forall z_1, z_2 \in G$ ,  $z_1 \neq z_2$  следовало, что  $e^{z_1} \neq e^{z_2}$ . Из равенства  $e^{z_1} = e^{z_2}$  получаем  $e^{z_1 - z_2} = 1 = e^{2\pi ki}$ , т. е.  $z_1 = z_2 + 2\pi ki$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Отсюда для однолиственности на  $G$  функции  $e^z$  необходимо и достаточно, чтобы  $\forall z \in G$  следовало, что  $z + 2\pi i \notin G$ .

Например, рассмотрим область  $G_0 \triangleq \{z \mid -\pi < \text{Im } z < \pi\}$ , в которой функция  $w = e^z$  по доказанному будет однолистна.

Определим образ  $G^*$  области  $G_0$  при отображении  $w = e^z$ . Для этого рассмотрим образы простейших кривых.

1) Всякая прямая  $\{z \mid z = x + iy_0, -\infty < x < \infty\} \subset G_0$  функцией  $w = e^z$  отображается на луч  $l_{y_0} \triangleq \{w \mid w = e^x (\cos y_0 + i \sin y_0), -\infty < x < +\infty\}$ , причем граничные для

области  $G_0$  прямые  $\{z \mid z = x \pm i\pi, -\infty < x < +\infty\}$ , отображаются в один луч  $(-\infty, 0)$ .

2) Всякий отрезок  $\{z \mid z = x_0 + iy, -\pi < y < \pi\}$  отображается на дугу окружности  $\{w \mid w = e^{x_0} e^{iy}, -\pi < y < \pi\}$ .

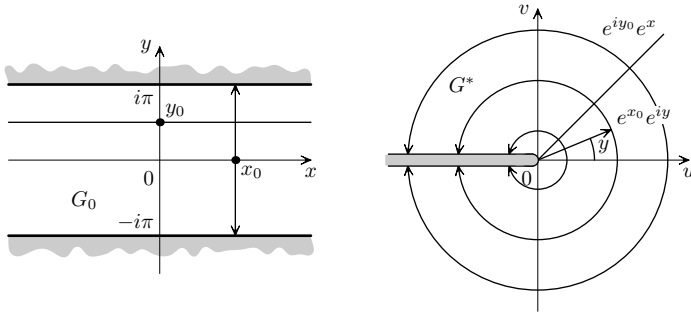


Рис. 9

В итоге получаем, что полоса  $G_0$  однолистно отображается функцией  $w = e^z$  на область  $G^* \triangleq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  (см. рис. 9). Следовательно, ее обратная функция  $h_0$ , действующая из области  $G^*$  на полосу  $G_0$ , такова, что  $\text{Im } h_0(w) \in (-\pi, \pi), \forall w \in G^*$ . Учитывая формулу (11), отсюда получаем, что

$$h_0(w) = \ln |w| + i \arg_{\text{гл}} w, \quad w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (12)$$

где  $\arg_{\text{гл}} w \in (-\pi, \pi)$ .

По следствию 1 функция  $h_0(w)$  регулярна на  $G^*$ , т. е.  $h_0(w)$  есть регулярная ветвь многозначной функции  $\text{Ln } w$ . Будем называть ее *главной регулярной ветвью* многозначной функции  $\text{Ln } w$ . По теореме 2 вычислим ее производную

$$h'_0(w) = \left. \frac{1}{e^z} \right|_{z=h_0(w)} = \frac{1}{w}. \quad (13)$$

**У п р а ж н е н и е 1.** С помощью теоремы об обратной функции и следствия 1 покажите, что функция

$$h_1(w) = \ln |w| + i \arg w, \quad \arg w \in (0, 2\pi),$$

также является регулярной ветвью многозначной функции логарифма  $\text{Ln } w$  в области  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ .

## § 6. Интегрирование функции комплексного переменного

Напомним некоторые определения из математического анализа на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**Определение 1.** *Непрерывной кривой* называется геометрическое место точек  $z$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , удовлетворяющих некоторому уравнению  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  — непрерывные функции действительного параметра  $t$  на некотором отрезке  $[t_0, t_1]$ . Непрерывная кривая состоит более чем из одной точек.

Непрерывная кривая  $\gamma$  называется *простой кривой* (или *кривой Жордана*), если различным значениям параметра  $t$  (кроме, быть может, его значений  $t = t_0$  и  $t = t_1$ ) соответствуют различные значения  $z(t)$ . Простая кривая называется *замкнутой*, если  $z(t_0) = z(t_1)$ .

Жорданом была доказана теорема о том, что *любая простая замкнутая кривая делит расширенную комплексную плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$  на две односвязные области, внешнюю (содержащую точку  $z = \infty$ ) и внутреннюю.*

При изменении параметра  $t$  на отрезке  $[t_0, t_1]$  в одном направлении (от  $t_0$  к  $t_1$  или обратно) точка  $z(t)$  совершает обход кривой  $\gamma$ . Выбор направления обхода кривой  $\gamma$  называется *ориентацией* кривой  $\gamma$ , а кривая с выбранной ориентацией называется *ориентированной кривой* или *контуром*.

Скажем, что на кривой  $\gamma$  выбрана *ориентация, индуцированная заданной параметризацией*  $z(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , если на кривой выбрано направление движения, соответствующее возрастанию параметра  $t$ . Точки  $z(t_0)$  и  $z(t_1)$  называются *концевыми точками* контура, или, более точно, *начальной и конечной точками* контура  $\gamma$  соответственно.

**Определение 2.** Непрерывная кривая  $\gamma \subset \mathbb{C}$  называется *гладкой*, если для нее существует параметрическое представление с помощью комплекснозначной функции действительного переменного  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , у которой

функции  $x(t)$  и  $y(t)$  непрерывны, имеют непрерывные производные  $x'(t)$  и  $y'(t)$  и  $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$  всюду на отрезке  $[t_0, t_1]$ , причем если кривая замкнута, то  $z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$ .

**Определение 3.** Пусть задан непрерывный контур  $\gamma$  в  $\mathbb{C}$  с параметризацией  $z = z(t), t \in [t_0, t_1]$ . Пусть существует конечное разбиение  $\{\theta_k\}_{k=0}^m$  отрезка  $[t_0, t_1]$ , т.е.  $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = t_1$  такое, что контуры  $\gamma_k$ , определяемые функциями  $z = z(t), t \in [\theta_{k-1}, \theta_k]$ , являются различными гладкими контурами с той же, что и у контура  $\gamma$ , ориентацией. Тогда контур  $\gamma$  называется *кусочно-гладким контуром*, или *объединением гладких контуров*  $\{\gamma_k\}$ , т.е.  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_m$ .

*Замечание 1.* Далее, если не оговорено противное, будем считать, что ориентация контура  $\gamma$  совпадает с ориентацией, индуцированной его параметризацией  $z(t)$ .

Пусть задан кусочно-гладкий контур  $\gamma$  с параметризацией  $z = z(t), t \in [t_0, t_1]$ , где  $z(t_0)$  — начальная, а  $z(t_1)$  — конечная точки контура  $\gamma$ .

Пусть выбрано конечное разбиение отрезка  $[t_0, t_1]$  вида

$$\lambda \triangleq \{\tau_k \mid k \in \overline{0, m_\lambda}, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m_\lambda} = t_1\}. \quad (1)$$

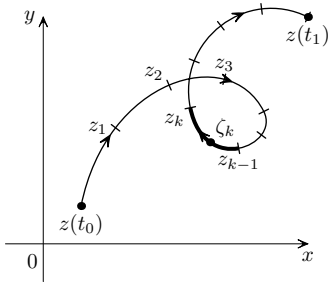


Рис. 10

Мелкостью разбиения  $\lambda$  назовем величину

$$|\lambda| \triangleq \max\{\tau_k - \tau_{k-1} \mid k \in \overline{1, m_\lambda}\}.$$

Пусть при каждом  $k \in \overline{1, m_\lambda}$  произвольно выбрана точка

$$\zeta_k \in \{z(t) \mid t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]\}, \quad (2)$$

т.е. точка  $\zeta_k$  принадлежит дуге  $\overline{z_{k-1}, z_k} \subset \gamma$ , где  $z_k \triangleq z(\tau_k)$ .

**Определение 4.** Пусть на кусочно-гладком контуре  $\gamma$  задана непрерывная функция  $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ . Определим выражение

$$\sigma(\lambda) \triangleq \sum_{k=1}^{m_\lambda} f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \text{где} \quad \Delta z_k \triangleq z_k - z_{k-1}, \quad (3)$$

которое будем называть интегральной суммой функции  $f$  вдоль  $\gamma$ , соответствующей разбиению  $\lambda$ . Если существует конечный предел интегральных сумм (3) при  $|\lambda| \rightarrow 0$ , не зависящий от выбора разбиения  $\lambda$  (1) и точек  $\{\zeta_k\}$  (2), то этот предел называется *интегралом от функции  $f$  по контуру  $\gamma$* , который обозначается

$$\int_{\gamma} f(z) dz. \quad (4)$$

**Теорема 1.** При сделанных выше в определении 4 предположениях интеграл (4) существует и справедлива формула

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u(x,y) dx - v(x,y) dy) + i \int_{\gamma} (v(x,y) dx + u(x,y) dy), \quad (5)$$

где  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ , и стоящие справа в формуле (5) два интеграла являются криволинейными интегралами второго рода от действительных функций действительных переменных по контуру  $\gamma$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**Доказательство.** Записав интегральную сумму (3) через действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda) &= \sum_{k=1}^{m_{\lambda}} (u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)) (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{m_{\lambda}} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) + \\ &+ i \sum_{k=1}^{m_{\lambda}} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k) \triangleq \sigma_1(\lambda) + i\sigma_2(\lambda). \quad (6) \end{aligned}$$

В итоге показали, что  $\sigma(\lambda)$  может быть представлена формулой (6) в виде двух интегральных сумм  $\sigma_1(\lambda)$  и  $\sigma_2(\lambda)$ , соответствующих криволинейным интегралам второго рода действительных функций от действительных переменных  $x, y$  по кривой  $\gamma$  на плоскости. Как показано в курсе математического анализа (см., например, § 50 [9]), условий теоремы 1 (т. е. функции  $u, v$  непрерывны на кусочно-гладком контуре  $\gamma$ ) достаточно, чтобы существовали пределы этих интегральных сумм при  $|\lambda| \rightarrow 0$ , откуда и следует утверждение теоремы и формула (5).



**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 справедлива формула

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t) dt, \quad (7)$$

где в правой части равенства (7) стоит интеграл от комплекснозначной функции действительного переменного, который определяется по формуле

$$\int_{t_0}^{t_1} (u(t) + iv(t)) dt \triangleq \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt + i \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt. \quad (8)$$

Доказательство непосредственно следует из формулы (5) и из формулы представления криволинейного интеграла второго рода через интеграл по параметру контура:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Из теоремы 1 и свойств криволинейного интеграла второго рода действительных функций от действительных переменных по кривой на плоскости следуют свойства интеграла (4):

1 °. *Линейность:*

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2 °. Обозначим через  $\gamma^{-1}$  контур, полученный из  $\gamma$  заменой ориентации на противоположную. Тогда

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3 °. Пусть кусочно-гладкий контур  $\gamma$  является объединением двух кусочно-гладких контуров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (т. е.  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  по определению 3). Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

4 °. Справедлива оценка интеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_{t_0}^{t_1} |f(x(t) + iy(t))| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \triangleq \\ &\triangleq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|, (9) \end{aligned}$$

где справа в неравенстве стоит криволинейный интеграл первого рода от действительной функции  $|f(z)|$  действительных переменных  $x, y$  по контуру  $\gamma$ .

**Доказательство 4°.** Из формулы (3) получаем оценку

$$|\sigma(\lambda)| = \left| \sum_{k=1}^{m_\lambda} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{m_\lambda} |f(\zeta_k)| |\Delta z_k|. \quad (10)$$

Справа в неравенстве (10) стоит интегральная сумма криволинейного интеграла первого рода, и так как функция  $|f(z)|$  непрерывна на кусочно-гладком контуре  $\gamma$  по переменным  $x, y$ , то, как известно из курса математического анализа (см., например, § 50 [9]) криволинейный интеграл первого рода от действительной функции  $|f(z)|$  существует. Слева в (10), в силу равенства  $\lim_{|\lambda| \rightarrow 0} |\sigma(\lambda)| = |\lim_{|\lambda| \rightarrow 0} \sigma(\lambda)|$ , в пределе получаем левую часть неравенства (9). ■

**5°.** *Инвариантность.* Интеграл (3) не зависит от выбора параметризации  $z(t)$  контура  $\gamma$  при условии, что каждая такая параметризация индуцирует одну и ту же ориентацию контура  $\gamma$ .

**Доказательство** следует из аналогичного свойства для криволинейных интегралов второго рода от действительных функций, определенных на  $\mathbb{R}^2$ , и из формулы (5). ■

**Пример 1.** Пусть  $a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}, r > 0$ . Пусть  $\gamma_r$  есть окружность  $\{z \mid |z - a| = r\}$ , ориентированная движением против хода часовой стрелки. Вычислить интеграл

$$I_k = \int_{\gamma_r} (z - a)^k dz. \quad (11)$$

**Решение.** Выберем параметризацию окружности  $\gamma_r$  вида  $z(t) = a + re^{it}$ , где  $t \in [0, 2\pi]$ . Тогда по следствию 1 имеем

$$I_k = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} r i e^{it} dt = i r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt.$$

В итоге

$$1) \text{ при } k = -1 \text{ получаем } I_{-1} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i;$$

2) при  $k \neq -1$  получаем

$$I_k = ir^{k+1} \left( \int_0^{2\pi} \cos(k+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(k+1)t dt \right) = 0.$$

**Теорема 2.** Пусть в области  $G$  заданы непрерывные функции  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$  и кусочно-гладкий контур  $\gamma$ . Пусть функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$  сходится к своей сумме  $S(z)$  равномерно на контуре  $\gamma$ . Тогда этот ряд можно почленно интегрировать по контуру  $\gamma$ , т. е. справедливо равенство

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (12)$$

**Доказательство.** Определим частичные суммы ряда через  $S_N(z) = \sum_{n=1}^N f_n(z), N \in \mathbb{N}$ . Они очевидно непрерывны на  $G$ , и в силу равномерной сходимости ряда на контуре  $\gamma$ , аналогично утверждению 5 из § 2, получаем, что сумма  $S(z)$  данного ряда также непрерывна на контуре  $\gamma$ , т. е. интегрируема на кривой  $\gamma$ . Так как данный ряд сходится равномерно на  $\gamma$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N(\varepsilon)$  такой, что для всех номеров  $N \geq N(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\sup_{z \in \gamma} |S(z) - S_N(z)| \leq \frac{\varepsilon}{l(\gamma)},$$

где  $l(\gamma) = \int_{\gamma} |dz|$  — длина контура  $\gamma$ . Поэтому при всех  $N \geq N(\varepsilon)$  в силу оценки (8) получаем

$$\left| \int_{\gamma} S(z) dz - \sum_{n=1}^N \int_{\gamma} f_n(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |S(z) - S_N(z)| |dz| < \varepsilon,$$

что по определению суммы ряда означает равенство (12). ■



## § 7. Интегральная теорема Коши

В этом параграфе мы докажем теорему Коши — основную теорему теории регулярных функций. Сделаем это в три этапа. Начнем со случая односвязной области.

**Теорема 1 (Коши).** Для всякой регулярной функции  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , заданной в односвязной области  $G$ , справедливо равенство

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (1)$$

где интеграл берется по любому простому замкнутому кусочно-гладкому контуру  $\gamma$ , принадлежащему области  $G$  (см. рис. 11).

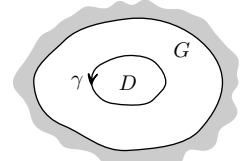


Рис. 11

**Доказательство.** Для заданного в теореме контура  $\gamma$  перепишем формулу (5) из §6 в виде

$$\int_{\gamma} f(z) dz = J_1 + iJ_2, \quad (2)$$

где

$$J_1 \triangleq \int_{\gamma} u dx - v dy; \quad J_2 \triangleq \int_{\gamma} v dx + u dy. \quad (3)$$

Через  $D$  обозначим односвязную подобласть  $G$ , границей которой является данный контур  $\gamma$ .

Из курса математического анализа (см., например, [6], гл. 13) известна следующая формула Грина:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4)$$

где  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$  — действительные функции переменных  $x, y$ , непрерывные со своими частными производными первого порядка в замкнутой области  $\bar{D} = D \cup \gamma$ .

В силу непрерывной дифференцируемости функций  $u$  и  $v$  на односвязной области  $G$ , следующей из регулярности функ-

ции  $f$ , формула Грина (4) и условия Коши–Римана дают для интегралов (3)

$$J_1 = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \stackrel{\text{К.-Р.}}{=} 0,$$

$$J_2 = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \stackrel{\text{К.-Р.}}{=} 0,$$

т. е. равенство (1) доказано. ■

*Замечание 1.* Условие непрерывной дифференцируемости функции  $f$  в теореме 1 является избыточным. Э. Гурса доказал, что в теореме 1 достаточно потребовать лишь дифференцируемость функции  $f$  в каждой точке области  $G$ . Доказательство этого факта можно найти, например, в книге [8].

*Замечание 2.* Условие односвязности области  $G$  в теореме 1 существенно, что показывает пример функции  $f(z) = 1/z$ , заданной на неодносвязной области  $\overset{\circ}{B}_2(0)$ , интеграл от которой по единичной окружности равен  $2\pi i$  (см. пример 1 § 6).

Однако можно изменить формулировку теоремы, допускающую распространение теоремы 1 на случай интегрирования по границе неодносвязной области определенного ниже типа.

**Определение 1.** Областью с кусочно-гладкой границей будем называть область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , границу  $\Gamma$  которой можно представить в виде объединения конечного числа гладких ограниченных кривых  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  (ненулевой длины), пересечение которых возможно лишь в концевых точках, причем точка может

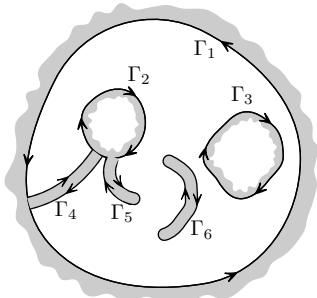


Рис. 12

быть концевой не более чем у двух кривых. Эти кривые  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  будем называть гладкими компонентами границы  $\Gamma$  области  $G$ . Эти компоненты бывают двух типов:

1) Кривая  $\Gamma_k$  такова, что в каждой окрестности каждой точки  $z_0 \in \Gamma_k$  находятся как точки из области  $G$ , так и из  $\mathbb{C} \setminus (G \cup \Gamma)$ . Такая

кривая  $\Gamma_k$  называется правильной гладкой компонентой границы  $\Gamma$ .

2) Кривая  $\Gamma_k$  такова, что для каждой точки  $z_0 \in \overset{\circ}{\Gamma}_k$  (обозначение  $\overset{\circ}{\Gamma}_k$  означает кривую  $\Gamma_k$  без концевых точек) существует окрестность  $B_{\varepsilon_0}(z_0)$  такая, что  $B_{\varepsilon_0}(z_0) \setminus \Gamma_k \subset G$ . Такая компонента  $\Gamma_k$  называется разрезом, причем каждая точка  $z_0 \in \overset{\circ}{\Gamma}_k$  называется внутренней точкой разреза.

На рис. 12 кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  суть правильные гладкие компоненты, а кривые  $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$  суть разрезы.

**Определение 2.** Областью  $G$  с положительно ориентированной кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  называется область  $G$  с кусочно-гладкой границей (см. определение 1), если на  $\Gamma$  задана ориентация так, что при движении по всем правильным гладким компонентам границы область  $G$  остается слева, а каждый разрез обходится дважды в противоположных направлениях. При этом обходе разрез представляется в виде двух берегов, при движении по каждому из них область  $G$  должна оставаться слева (справа будет находиться другой берег разреза) (см. рис. 12).

В соответствии с этим уточним понятие *непрерывности функции*  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  на замыкании области  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ , а именно, в точках границы  $\Gamma$ .

Для всякой точки, принадлежащей лишь одной из правильных гладких компонент границы  $\Gamma$ , или являющейся концевой точкой лишь одного разреза, непрерывность функции в этой точке определяется через совпадение ее значения в этой точке с пределом функции в этой точке по области  $G$ .

Для любой внутренней точки  $z_0$  произвольного разреза  $\Gamma_k$ , не являющейся концевой точкой никакого другого разреза, в силу определения 1 найдется достаточно малая окрестность  $B_\varepsilon(z_0)$  такая, что множество  $B_\varepsilon(z_0) \setminus \Gamma_k \subset G$  делится разрезом  $\Gamma_k$  на две подобласти, которые обозначим  $B^+$  и  $B^-$ . При этом считаем, что точка  $z_0$  разбилась на две точки  $z_0^+$  и  $z_0^-$  такие, что точка  $z_0^+$  принадлежит берегу разреза, принадлежащему границе области  $B^+$ , а точка  $z_0^-$  принадлежит берегу

разреза, принадлежащему границе области  $B^-$ . Тогда говорят, что функция  $f$  непрерывна в граничной точке  $z_0^+$  (или точке  $z_0^-$ ), если значение функции в этой точке  $z_0^+$  ( $z_0^-$ ) совпадает с пределом функции  $f$  в точке  $z_0$  по множеству  $B^+$  (по множеству  $B^-$ ).

Если же концевая точка одного из разрезов принадлежит и другим компонентам границы, то малая окрестность этой точки компонентами границы может быть разбита на три и более подобластей, в каждой из которых непрерывная функция в этой концевой точке определяется через предельное значение в соответствующей подобласти.

**Теорема 2.** Пусть задана ограниченная односвязная область  $G$  с положительно ориентированной кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Пусть функция  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на области  $G$  и непрерывна на замыкании области  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (5)$$

**Доказательство** теоремы 2 приведем для класса областей  $G$ , когда добавлением к ее границе  $\Gamma$  конечного числа разрезов оставшиеся точки области  $G$  можно представить в виде объединения конечного числа, так называемых, *звездных областей*. При этом в силу того, что интегралы по разрезам в сумме равны нулю, интеграл по  $\Gamma$  равен сумме интегралов по границам звездных областей. Таким образом, достаточно доказать теорему для звездной области.

**Определение 3.** Ограниченная область  $G$  называется звездной областью, если граница  $\Gamma$  области  $G$  может быть задана в виде

$$\Gamma = \{z \mid z = z_0 + z_1(t), \alpha \leq t \leq \beta, z_1(\alpha) = z_1(\beta)\}, \quad (6)$$

где  $z_0 \in G$  называется центром звездной области,  $z_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  — кусочно-гладкая функция, причем для каждой кривой

$$\Gamma_{\lambda} \triangleq \{z \mid z = z_0 + \lambda z_1(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad \lambda \in (0, 1), \quad (7)$$

справедливо включение

$$\Gamma_\lambda \subset G, \forall \lambda \in (0,1).$$

Приведем примеры некоторых звездных областей.

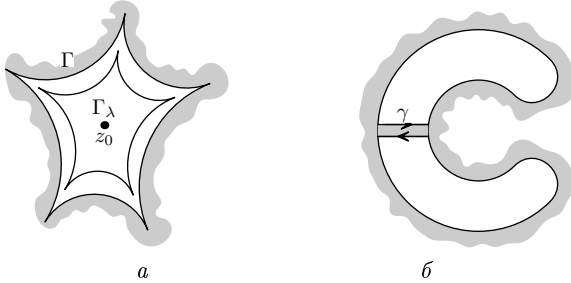


Рис. 13

**Пример 1.** Каждое ограниченное выпуклое открытое множество с кусочно-гладкой границей является звездной областью, причем ее центром может служить любая точка этого множества.

**Пример 2.** Область, изображенная на рис. 13а, является звездной.

**Пример 3.** Область, изображенная на рис. 13б, не является звездной, но ее можно некоторым разрезом  $\gamma$  разбить на две звездные подобласти.

*Замечание 3.* Примеры 1–3 показывают, что класс областей, являющихся звездными или представимых в виде объединения конечного числа звездных подобластей, достаточно большой.

Без ограничения общности доказательство теоремы 2 проведем для случая, когда область  $G$  является звездной с центром в точке  $z_0 = 0$ .

В самом деле, допустим, что ее центр  $z_0 \neq 0$ . Сделав замену  $\tilde{z} = z - z_0$ ,  $\tilde{\Gamma} = \Gamma - z_0$ ,  $\tilde{G} = G - z_0$ , получим звездную область  $\tilde{G}$  с центром в точке 0, причем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(\tilde{z} + z_0) d\tilde{z} = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{f}(\tilde{z}) d\tilde{z},$$

где  $\tilde{f}(\tilde{z}) \triangleq f(\tilde{z} + z_0)$  есть регулярная функция, и если покажем, что последний интеграл равен нулю, то и исходный равен нулю.

Итак, считаем, что центр области  $G$  есть точка  $z_0 = 0$ . Тогда кривая  $\Gamma_\lambda$  из (7) принимает вид:

$$\Gamma_\lambda = \{z \mid z = \lambda z_1(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad \lambda \in (0,1).$$

Так как по определению 3 звездной области справедливы включения  $\Gamma_\lambda \subset G$ , то по теореме 1 справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_\lambda} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad \forall \lambda \in (0,1). \quad (8)$$

Выберем произвольное число  $\lambda \in (0,1)$  и сделаем замену переменного  $\zeta = \lambda z$ . Тогда включение  $\zeta \in \Gamma_\lambda$  эквивалентно включению  $z \in \Gamma$ . В силу этого равенство (8) принимает вид

$$\int_{\Gamma} f(\lambda z) \lambda dz = 0, \text{ откуда } \int_{\Gamma} f(\lambda z) dz = 0, \forall \lambda \in (0,1). \quad (9)$$

Так как функция  $f$  непрерывна на ограниченном замкнутом множестве  $\overline{G}$ , то по известному свойству она равномерно непрерывна на  $\overline{G}$ . Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall z', z'' \in \overline{G}, \quad |z' - z''| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Кроме того, для любого  $z \in \Gamma$  получаем  $|z - \lambda z| = (1 - \lambda)|z| \leq (1 - \lambda)C_0$ , где  $C_0 \triangleq \max\{|z| \mid z \in \Gamma\} < +\infty$ .

Выбрав  $\lambda_\varepsilon \in (0,1)$ , удовлетворяющее неравенству  $(1 - \lambda_\varepsilon) < \delta(\varepsilon)/C_0$ , получаем, что  $|z - \lambda_\varepsilon z| < \delta(\varepsilon)$ ,  $\forall z \in \Gamma$ . Поэтому из (9) следует:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} (f(z) - f(\lambda_\varepsilon z)) dz \right| \leq \\ \leq \int_{\Gamma} |f(z) - f(\lambda_\varepsilon z)| |dz| \leq \varepsilon \int_{\Gamma} |dz|.$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем равенство (5). ■

**Теорема 3 (обобщённая теорема Коши).** Пусть задана ограниченная область  $G$  с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma$ . Пусть функция  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на области  $G$  и непрерывна на замыкании области  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (10)$$

**Доказательство.** В силу ограниченности области  $G$  одна группа компонент образует внешний кусочно-гладкий замкнутый контур, который отделяет точки области  $G$  от бесконечной точки и поэтому ориентирован против хода часовой стрелки (для простоты рассуждений будем считать, что это одна компонента  $\Gamma_1$ ). Все другие компоненты границы  $\Gamma$  будут внутренними, соответственно

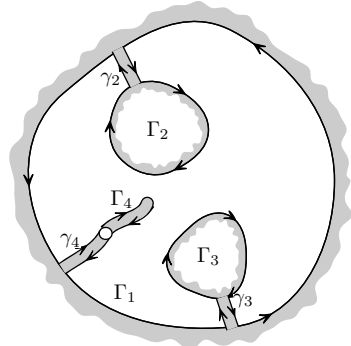


Рис. 14

обход их (для разрезов — обход по их берегам) будет проводиться по направлению движения часовой стрелки (см. рис. 14).

Построим положительно ориентированную многокомпонентную кривую  $\tilde{\Gamma}$ , включающий в себя границу  $\Gamma$ , добавлением к каждой внутренней компоненте границы  $\Gamma_k$  дополнительного разреза  $\gamma_k \subset G$ , соединяющего  $\Gamma_k$  с внешней компонентой  $\Gamma_1$ , причем так, чтобы все дополнительные разрезы попарно не пересекались, и каждый обходил дважды в противоположных направлениях.

Так как дополнительные разрезы находятся в области регулярности функции  $f$ , то интеграл от функции  $f$  по каждому дополнительному разрезу (обойденному дважды в противоположных направлениях) равен нулю.

Поэтому интеграл по ориентированной кривой  $\tilde{\Gamma}$  совпадает с интегралом по границе  $\Gamma$ . Но построенная нами кривая  $\tilde{\Gamma}$  ограничивает некоторую односвязную область  $\tilde{G} \subset G$ , и по теореме 2 интеграл по ее границе  $\tilde{\Gamma}$  равен нулю, то есть справедливо равенство (10). ■

## § 8. Интегральная формула Коши

Получим представление функций, регулярных в ограниченной области, при помощи интеграла по границе этой области. С помощью этого представления покажем, что всякая регулярная в области функция бесконечно дифференцируема.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}$  с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma$ . Пусть функция  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на  $G$  и непрерывна на  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Тогда для любой точки  $z \in G$  справедлива интегральная формула Коши вида

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1)$$

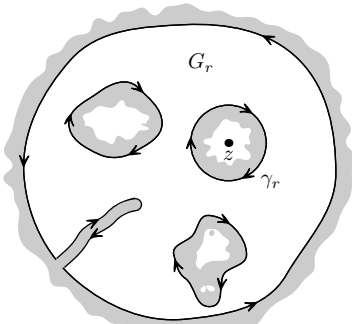


Рис. 15

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку  $z \in G$ . Функция  $\zeta \rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  регулярна в области  $G \setminus \{z\}$ . Выберем число  $r_0 > 0$  такое, что выполнено включение  $\overline{B_{r_0}(z)} \subset G$ . Для каждого  $r \in (0, r_0)$  обозначим через  $\gamma_r \triangleq \{\zeta \mid |\zeta - z| = r\}$  окружность с центром в точке  $z$  радиуса  $r$ , ориентированную против хода часовой стрелки. Также обозначим множества  $G_r \triangleq G \setminus \overline{B_r(z)}$  и  $\Gamma_r \triangleq \Gamma \cup \gamma_r^{-1}$ . По построению каждое множество  $G_r$  является областью с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma_r$  (см. рис. 15).

По теореме 3 из § 7 получаем

$$0 = \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2)$$

Итак,

$$J \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall r : 0 < r < r_0. \quad (3)$$



Как показано в примере 1 §6, справедливо равенство  $1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ , откуда

$$J - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall r \in (0, r_0).$$

Так как  $f(\zeta)$  непрерывна в точке  $z \in G$ , то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) \in (0, r_0)$  такое, что для  $\forall \zeta : |\zeta - z| < \delta(\varepsilon)$  следует  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . Поэтому, выбирая  $r \in (0, \delta(\varepsilon))$ , получаем

$$|J - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} \int_{\gamma_r} |d\zeta| = \varepsilon. \quad (4)$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольное число, то из (3), (4) следует  $J = f(z)$ , т. е. доказана формула (1). ■

**Определение 1.** Пусть  $\gamma$  — кусочно-гладкий контур в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и пусть  $w = q(z)$  — непрерывная на  $\gamma$  функция. Тогда интеграл вида

$$I(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \quad (5)$$

называется интегралом типа Коши по контуру  $\gamma$  от функции  $q$ .

**Теорема 2.** При сформулированных в определении 1 условиях функция  $I : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  из (5) определена и дифференцируема бесконечное число раз, причем для производных справедлива формула

$$I^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

**Доказательство.** 1. Докажем формулу (6) при  $n = 1$ . Так как функция  $q(\zeta)$  непрерывна на контуре  $\gamma$ , то существует число  $M < +\infty$  такое, что  $|q(\zeta)| \leq M$  при  $\zeta \in \gamma$ .

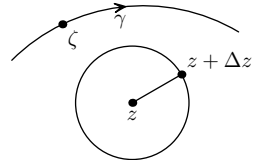


Рис. 16

Зафиксируем точку  $z \notin \gamma$ . Пусть  $d \triangleq \text{dist}(z, \gamma)$  — расстояние от точки  $z$  до кривой  $\gamma$ . Очевидно, что  $d > 0$ . Выберем число

$r \in (0, \frac{d}{2})$  и возьмем произвольное число  $\Delta z \in \mathbb{C}$  так, чтобы  $0 < |\Delta z| < r$ . Тогда для  $\forall \zeta \in \gamma$  получаем

$$|\zeta - (z + \Delta z)| \geq |\zeta - z| - |\Delta z| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}. \quad (7)$$

Оценим выражение

$$\begin{aligned} & \frac{I(z + \Delta z) - I(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} q(\zeta) \left[ \left( \frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right) \frac{1}{\Delta z} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (8)$$

Упростим выражение в прямых скобках под интегралом (8):

$$\begin{aligned} & [\dots] = \\ & = \frac{\zeta - z - (\zeta - z - \Delta z)}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} \cdot \frac{1}{\Delta z} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} = \frac{\Delta z}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)}. \end{aligned}$$

Поэтому для (8) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Delta I}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|q(\zeta)| |\Delta z| |d\zeta|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z - \Delta z|} \leq \\ & \leq \frac{|\Delta z|}{\pi d^3} \int_{\gamma} |q(\zeta)| |d\zeta| \leq \frac{|\Delta z| \cdot M}{\pi d^3} \int_{\gamma} |d\zeta| \rightarrow 0, \quad \Delta z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в пределе получаем равенство

$$I'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (9)$$

2. Общий случай  $n$ -й производной получается аналогично первому случаю из формулы (6) для  $(n - 1)$ -й производной и воспользовавшись равенством

$$(\zeta - z - \Delta z)^n = (\zeta - z)^n - n\Delta z(\zeta - z)^{n-1} + O(\Delta z^2),$$

которое легко проверяется, например, методом математической индукции. ■

**Теорема 3.** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G \subset \mathbb{C}$ . Тогда эта функция имеет в  $G$  производные всех порядков, т. е. является бесконечно дифференцируемой функцией в области  $G$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in G$ , тогда существует число  $r_0 > 0$  такое, что  $\overline{B_{r_0}(z_0)} \subset G$ . Пусть окружность  $\gamma_{r_0} \triangleq \{z \mid |z - z_0| = r_0\}$  ориентирована положительно относительно внутренности круга (т. е. движением против хода часовой стрелки). Тогда по теореме 1 справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in B_{r_0}(z_0). \quad (10)$$

Так как в формуле (10) функция  $\zeta \rightarrow f(\zeta)$  непрерывна на  $\gamma_{r_0}$ , то интеграл в (10) удовлетворяет определению интеграла типа Коши, и по теореме 2 он бесконечно дифференцируем в круге  $B_{r_0}(z_0)$ , т. е. в силу равенства (10) функция  $f$  бесконечно дифференцируема в этом круге  $B_{r_0}(z_0)$ , при этом из (6) следует формула:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in B_{r_0}(z_0). \quad (11)$$

Так как точка  $z_0 \in G$  была произвольной, то функция  $f$  бесконечно дифференцируема во всей области  $G$ . ■

## § 9. Ряд Тейлора. Теоремы Вейерштрасса

Опираясь на интегральную формулу Коши, в этом параграфе покажем, что функция регулярна в окрестности некоторой точки тогда и только тогда, когда в этой окрестности она представима в виде суммы степенного ряда.

**Определение 1.** Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad (1)$$

где точка  $a \in \mathbb{C}$  и коэффициенты  $c_n \in \mathbb{C}$  заданы.

**Теорема 1 (Абель).** Если степенной ряд (1) сходится в точке  $z_0 \neq a$ , то ряд (1) сходится абсолютно в любой точке из круга  $B_{|z_0-a|}(a)$ , а в любом замкнутом круге  $\overline{B_r(a)}$ , где  $0 < r < |z_0 - a|$ , этот ряд сходится равномерно.

*Доказательство.* Так как по условию числовой ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_0 - a)^n$  сходится, то из критерия Коши следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n(z_0 - a)^n| = 0$ , поэтому существует число  $\alpha > 0$  такое, что  $|c_n(z_0 - a)^n| \leq \alpha$  для всех  $n$ .

1) Пусть точка  $z \in B_{|z_0-a|}(a)$ . Тогда  $|c_n(z - a)^n| = |c_n(z_0 - a)^n| \cdot \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n \leq \alpha q_z^n$ , где  $q_z \triangleq \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right| < 1$ . Так как числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q_z^n$  очевидно сходится, то по признаку сравнения ряд (1) сходится и абсолютно в точке  $z$ .

2) Определим  $q_0 \triangleq \frac{r}{|z_0-a|}$ . Аналогично пункту 1 получаем оценку:  $|c_n(z - a)^n| \leq \alpha q_0^n$  для всех  $z \in \overline{B_r(a)}$ . Так как числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q_0^n$  очевидно сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. утверждение 6 §2) ряд (1) сходится равномерно на круге  $\overline{B_r(a)}$ . ■

Эта теорема 1 позволяет получить представление об области сходимости степенного ряда (1).

Определим для степенного ряда (1) понятие *радиуса сходимости*:

$$R \triangleq \sup\{|z - a| \mid \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^n \text{ сходится}\}. \quad (2)$$

Тогда, если  $0 < R < +\infty$ , то в силу теоремы 1 в каждой точке круга  $B_R(a)$  ряд (1) сходится, а в каждой точке  $z \notin \overline{B_R(a)}$  ряд (1) расходится. Круг  $B_R(a)$  называется *кругом сходимости* ряда (1).

Радиус сходимости  $R$  степенного ряда (1) может быть вычислен по известной *формуле Коши-Адамара*

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (3)$$

Доказательство этой формулы можно найти, например, в книгах [12] или [10].

**Пример 1.** Рассмотрим ряд вида  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ , являющийся суммой бесконечной геометрической прогрессии. Этот ряд очевидно сходится при  $|z| < 1$  к функции  $\frac{1}{1-z}$ . В самом деле, преобразовав частичную сумму к виду:

$$S_N(z) \triangleq \sum_{n=0}^N z^n = \left( \sum_{n=0}^N z^n \right) \frac{1-z}{1-z} = \frac{1-z^{N+1}}{1-z},$$

убеждаемся, что  $S_N(z) \rightarrow \frac{1}{1-z}$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.** Пусть у функции  $f : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$  существуют в точке  $a$  производные  $f^{(n)}(a)$  любого порядка  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad (4)$$

называется рядом Тейлора функции  $f$  с центром в точке  $a$ .

**Теорема 2.** Если функция  $f$  регулярна в круге  $B_r(a)$ , где  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ , то она представима в этом круге  $B_r(a)$  в виде суммы сходящегося ряда Тейлора, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad \forall z \in B_r(a), \quad (5)$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (6)$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольную точку  $z \in B_r(a)$ . Тогда существует число  $r_1 > 0$  такое, что  $|z - a| < r_1 < r$ .

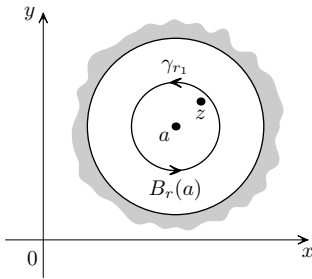


Рис. 17

Пусть  $\gamma_{r_1} \triangleq \{\zeta \mid |\zeta - a| = r_1\}$  — ориентированная движением против хода часовой стрелки окружность (см. рис. 17). Запишем интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (7)$$

Преобразуем функцию  $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta - z}$ ,

где  $\zeta \in \gamma_{r_1}$ , к виду

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)}.$$

Здесь  $\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| = \frac{|z - a|}{r_1} \triangleq q$ ,  $q < 1$ . Как и в примере 1, получаем разложение в сходящийся ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left( 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

В итоге, подынтегральная функция в (7) представима сходящимся на  $\gamma_{r_1}$  рядом

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta), \quad \forall \zeta \in \gamma_{r_1}. \quad (8)$$

Так как для членов ряда (8) справедлива оценка

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta) \right| \leq \frac{M}{r_1} \cdot q^n, \quad \text{где} \quad M \triangleq \sup_{\zeta \in \gamma_{r_1}} |f(\zeta)| < +\infty,$$

а ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (8) сходится равномерно на окружности  $\gamma_{r_1}$ . Поэтому в силу теоремы 2 из § 6 ряд (8) можно почленно интегрировать по окружности  $\gamma_{r_1}$ . В результате из формул (7), (8) получаем равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \cdot (z-a)^n, \quad (9)$$

т. е. степенной ряд вида (1) с коэффициентами

$$c_n \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta. \quad (10)$$

Эти коэффициенты  $c_n$  не зависят от выбора точки  $z$  или окружности  $\gamma_{r_1}$ , так как, воспользовавшись формулой для производной (11) из § 8, получаем для  $c_n$  формулу (6). Таким образом, ряд (9) есть ряд Тейлора функции  $f$ . В силу произвольности  $z \in B_r(a)$  ряд (9) сходится во всем круге  $B_r(a)$ , а поэтому его радиус сходимости  $R \geq r$ . ■

**Следствие 1.** Пусть функция  $f$  регулярна в области  $G$  и пусть выбрана точка  $a \in G$ . Тогда функция  $f$  представима в виде ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n,$$

который сходится по крайней мере в круге  $B_R(a)$  максимального радиуса  $R > 0$ , при котором этот круг содержится в области  $G$  (см. рис. 18).

**Пример 2.** Пусть  $w = e^z$ . По формуле (2) из § 4 имеем  $w'(z) = \dots = w^{(n)}(z) = e^z$ . Так как функция  $e^z$  регулярна в

круге  $B_R(0)$  при любом  $R > 0$ , то, вычисляя непосредственно коэффициенты ряда по формуле (6), получаем ряд

$$w = e^z = w(0) + \frac{1}{1!}w'(0)z + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (11)$$

При этом в силу следствия 1 ряд (11) сходится всюду в  $\mathbb{C}$ , т. е.  $R = +\infty$ .

**Пример 3.** Функция  $w = \sin z \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  регулярна в  $\mathbb{C}$  (см. § 4). По теореме 1, вычисляя коэффициенты (6), получаем формулу

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k, \quad R = +\infty. \quad (12)$$

Аналогично для регулярной в  $\mathbb{C}$  функции  $w = \cos z \triangleq \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  получаем формулу

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} (-1)^k, \quad R = +\infty. \quad (13)$$

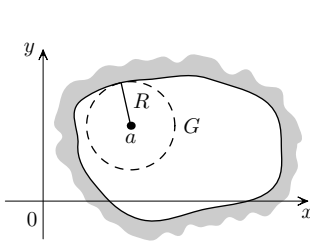


Рис. 18

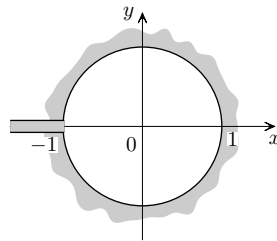


Рис. 19

**Пример 4.** Пусть  $w = h_0(z) \triangleq \ln|z| + i \arg_{\text{гл}} z$ , где  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$ , т. е.  $h_0(z)$  — главная регулярная ветвь многозначной функции  $\text{Ln } z$  в области  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

По теореме об обратной функции (см. теорему 2 § 5 и формулу (13) из § 5) имеем

$$w' = h_0'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in G. \quad (14)$$



Сделаем замену  $z$  на  $z + 1$ . Получим, что функция  $w = h_0(z + 1)$  регулярна в области  $\tilde{G} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ , т. е., в частности, функция  $h_0(z + 1)$  регулярна в круге  $B_1(0)$  (см. рис. 19).

Из формулы (14) получаем выражения для производных

$$(h_0(1+z))' = \frac{1}{1+z}; \quad (h_0(1+z))'' = -\frac{1}{(1+z)^2}; \quad \dots;$$

$$(h_0(1+z))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Вычисляя по формуле (6) коэффициенты  $c_n$ , в силу теоремы 2 получаем сходящийся в круге  $B_1(0)$  ряд Тейлора для регулярной ветви  $h_0(1+z)$ :

$$h_0(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots; \quad z \in B_1(0). \quad (15)$$

Определим в области  $\tilde{G} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$  функцию  $f(z) = -z + (1+z)h_0(1+z)$ . Из формулы (15) получаем для нее сходящийся в круге  $B_1(0)$  ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1}. \quad (16)$$

Этот ряд (16) интересен тем, что он сходится абсолютно на границе своего круга сходимости, а именно, в каждой точке окружности  $|z| = 1$ .

Перейдем к рассмотрению функциональных рядов

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z), \quad z \in G, \quad (17)$$

членами которых являются регулярные функции  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ , заданные в некоторой области  $G$ . Ослабим понятие равномерной сходимости ряда (17) на области  $G$  (ср. определение 11 §2).

**Определение 3.** Говорят, что функциональный ряд (17) сходится локально равномерно на области  $G$ , если для каждой точки  $z \in G$  существует круг  $B_r(z)$ ,  $r > 0$ , содержащийся в области  $G$ , на котором ряд (17) сходится равномерно.

Отметим, что в силу свойства компактности любого замкнутого ограниченного множества на плоскости  $\mathbb{C}$ , из локально равномерной сходимости ряда (17) на области  $G$  следует, что ряд (17) сходится равномерно на любом замкнутом ограниченном подмножестве области  $G$ .

**Теорема 3 (Вейерштрасса).** Пусть функциональный ряд (17), составленный из регулярных функций  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ , сходится локально равномерно на области  $G$ . Тогда

- 1) сумма  $S(z)$  ряда (17) есть тоже регулярная функция на  $G$  (Первая теорема Вейерштрасса);
- 2) ряд (17) можно почленно дифференцировать на  $G$  любое число раз, т. е. для  $\forall k \in \mathbb{N}$  имеет место формула

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in G, \quad (18)$$

причем каждый ряд (18) сходится локально равномерно на области  $G$  (Вторая теорема Вейерштрасса).

**Доказательство.** Обозначим через  $S_N(z)$  частичную сумму ряда (17), т. е.

$$S_N(z) \triangleq \sum_{n=1}^N f_n(z). \quad (19)$$

1. Зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in G$  и возьмем такие  $r > 0$ ,  $r_1 > 0$ , чтобы  $\overline{B_{r+r_1}(z_0)} \subset G$ . Так как для всякого  $N \in \mathbb{N}$  функция  $S_N(z)$  регулярна в  $G$ , то согласно интегральной формуле Коши имеем

$$S_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in B_r(z_0), \quad (20)$$

где  $\gamma_{r+r_1} \triangleq \{\zeta \mid |\zeta - z_0| = r + r_1\}$  — окружность, ориентированная положительно (т. е. против хода часовой стрелки).

В силу локально равномерной сходимости функционального ряда (17) на  $G$  и непрерывности функций  $f_n(z)$  из утверждения 5 § 2 следует, что и сумма ряда  $S(z)$  также есть непрерыв-

ная функция на  $G$ . Кроме того, из равномерной сходимости на  $\overline{B_{r+r_1}(z_0)}$  ряда (17) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall N \geq N(\varepsilon) : \sup_{\zeta \in \gamma_{r+r_1}} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \leq \varepsilon. \quad (21)$$

Для любой точки  $z \in B_r(z_0)$  и натурального числа  $N \geq N(\varepsilon)$ , где  $N(\varepsilon)$  из (21), получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{|S_N(\zeta) - S(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r_1} \cdot 2\pi(r + r_1) = \varepsilon \cdot \frac{r + r_1}{r_1}. \quad (22)$$

В силу произвольности числа  $\varepsilon > 0$  из (20) и (22) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in B_r(z_0),$$

т. е.

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in B_r(z_0). \quad (23)$$

Выражение справа в равенстве (23) является интегралом типа Коши от непрерывной функции  $S(\zeta)$  (определение см. в § 8). По его основному свойству (теорема 2 § 8) этот интеграл бесконечно дифференцируем, т. е. сумма ряда  $S(z)$  есть регулярная функция в окрестности произвольной точки  $z_0$  из  $G$ , откуда следует, что сумма ряда  $S(z)$  регулярна во всей области  $G$ .

Итак, функции  $S_N(z)$  и  $S(z)$  регулярны в области  $G$ , т. е. в этой области  $G$  существуют производные  $S_N^{(k)}(z)$  и  $S^{(k)}(z)$  при  $\forall k \in \mathbb{N}$  (см. теорему 3 § 8).

2. Опять зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in G$  и произвольный круг  $B_r(z_0)$ ,  $r > 0$ , такой, что  $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ . Это значит, что найдется число  $r_1 > 0$  такое, что  $\overline{B_{r+r_1}(z_0)} \subset G$ . По

формуле (11) из теоремы 3 § 8 для любого  $k \in \mathbb{N}$  и регулярных функций  $S_N(z)$  и  $S(z)$  получаем

$$S_N^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in \overline{B_r(z_0)}, \quad (24)$$

$$S^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in \overline{B_r(z_0)}. \quad (25)$$

Отсюда для всякого  $\varepsilon > 0$ , выбирая  $N(\varepsilon)$  в силу (21), при любом  $N \geq N(\varepsilon)$  получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| S_N^{(k)}(z) - S^{(k)}(z) \right| &= \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta) - S(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{k!}{2\pi \cdot r_1^{k+1}} \cdot \sup_{\zeta \in \gamma_{r+r_1}} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \cdot 2\pi(r + r_1) < \\ &< \frac{k!(r + r_1)}{r_1^{k+1}} \varepsilon, \quad \forall z \in \overline{B_r(z_0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность частичных сумм  $S_N^{(k)}(z)$  равномерно на  $\overline{B_r(z_0)}$  сходится к функции  $S^{(k)}(z)$ . В силу произвольности выбора  $z_0 \in G$  и круга  $B_r(z_0)$  последнее означает, что последовательность  $S_N^{(k)}(z)$  сходится к  $S^{(k)}(z)$  локально равномерно на области  $G$ . ■

Из теоремы 1 Абея и теорем Вейерштрасса получаем

**Следствие 2.** Сумма степенного ряда (1) в круге его сходимости  $B_R(a)$  представляет собой регулярную функцию, причем степенной ряд (1) в круге его сходимости можно почленно дифференцировать произвольное число раз.

**Следствие 3.** Регулярность функции  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  в области  $G$  и возможность представления этой функции  $f$  на всяком круге  $B_r(a) \subset G$  в виде сходящегося степенного ряда (1) по степеням  $(z - a)$  эквивалентны.

## § 10. Некоторые свойства регулярных функций

Продолжим изучение свойств регулярных функций.

**Теорема 1 (единственности).** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G \subset \mathbb{C}$ . Пусть существует последовательность различных точек  $\{z_n\} \subset G$ , сходящаяся к некоторой точке  $a \in G$  и такая, что  $f(z_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f(z) = 0$  при всех  $z$  из области  $G$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $\Gamma$  — граница области  $G$  и число  $\rho_0 \triangleq \text{dist}(a, \Gamma)$  — расстояние от точки  $a$  до границы  $\Gamma$ . Тогда очевидно, что  $0 < \rho_0 \leq +\infty$ . Так как функция  $f$  регулярна на круге  $B_{\rho_0}(a) \subset G$ , то по теореме 2 из § 9 функция  $f$  представима в этом круге в виде сходящегося ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n. \quad (1)$$

Покажем, что коэффициенты  $c_n = 0$  при всех  $n = 0, 1, \dots$ . Прежде всего в силу непрерывности  $f$  в точке  $a$  из условия теоремы следует, что  $c_0 = f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = 0$ . Допустим, что найдется наименьший индекс  $m \geq 1$ , при котором  $c_m \neq 0$ . Тогда ряд (1) принимает вид

$$f(z) = (z - a)^m (c_m + c_{m+1}(z - a) + \dots), \quad (2)$$

т. е. функцию  $f$  можно представить в виде

$$f(z) = (z - a)^m h(z), \quad (3)$$

где функция  $h$  как сумма сходящегося степенного ряда (в силу следствия 2 § 9) регулярна в круге  $B_{\rho_0}(a)$ , причем  $h(a) = c_m \neq 0$ . В силу этого и в силу непрерывности  $h$  существует число  $r_0 \in (0, \rho_0)$  такое, что  $h(z) \neq 0 \forall z \in B_{r_0}(a)$ . Так как  $(z - a)^m \neq 0$  при любом  $z \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$ , то из равенства (3) получаем, что  $f(z) \neq 0$  при всех  $z \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$ . Но это противоречит условию, согласно которому  $f(z_n) = 0$ , причем  $z_n \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$  при достаточно больших  $n$ . Следовательно, все коэффициенты  $c_n = 0$  в ряде (1), а потому  $f(z) \equiv 0$  на круге  $B_{\rho_0}(a)$ .

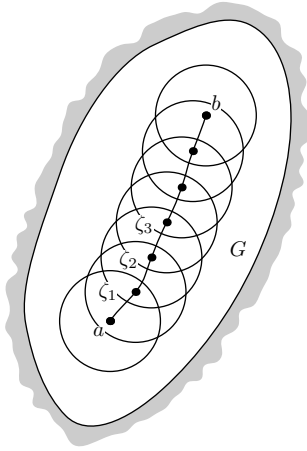


Рис. 20

включение  $\zeta_{k+1} \in B_k \cap B_{k+1}$  для всех  $k \in \overline{0, K-1}$  (см. рис. 20).

Так как  $\rho_0 \geq \rho$ , то по доказанному в пункте 1 функция  $f(z) = 0$  на круге  $B_0 = B_\rho(a)$ .

Рассмотрим функцию  $f$  на круге  $B_1$ . Так как  $f(z) = 0$  при всех  $z \in B_0 \cap B_1$ , и так как очевидно существует нестационарная последовательность  $\{z_n^1\} \subset B_0 \cap B_1$  такая, что  $z_n^1 \rightarrow \zeta_1$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $f(z_n^1) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , то отсюда аналогично пункту 1) следует, что  $f(z) \equiv 0$  в круге  $B_1$ . Продолжая аналогичные рассуждения, из того, что при любом  $k \in \overline{1, K} : f(z) \equiv 0$  в круге  $B_{k-1}$ , и справедливо включение  $[\zeta_{k-1}, \zeta_k] \subset B_{k-1} \cap B_k$ , получаем, что  $f(z) \equiv 0$  в круге  $B_k$ , что в итоге на последнем шаге дает равенство  $f(b) = 0$ . ■

**Следствие 1.** Пусть заданы область  $G$  и множество  $E \subset G$ , содержащее последовательность различных точек, сходящуюся к некоторой точке из  $G$ . Пусть функции  $f$  и  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярны в области  $G$  и  $f(z) = g(z)$  при всех  $z \in E$ . Тогда  $f \equiv g$  в области  $G$ .

**Доказательство.** Введем функцию  $h(z) \triangleq f(z) - g(z)$ , она регулярна в области  $G$  и по условию  $h(z) = 0 \forall z \in E$ . Тогда по теореме 1 функция  $h(z) \equiv 0$  на  $G$ , что и влечет требуемое равенство. ■

*Замечание 1.* Утверждение теоремы 1 может оказаться несправедливым, если  $a \notin G$ . Например, рассмотрим функцию

2) Докажем, что  $f(b) = 0$  в произвольной точке  $b \in G \setminus B_{\rho_0}(a)$ . Соединим точки  $a$  и  $b$  произвольным кусочно-гладким контуром  $\gamma \subset G$ .

Пусть  $\rho \triangleq \text{dist}(\gamma, \Gamma)$ . Очевидно, что  $\rho > 0$ ,  $\rho \leq \rho_0$ . Рассмотрим конечное множество кругов  $B_0, B_1, \dots, B_K$  одинакового радиуса  $\rho > 0$ , т. е.  $B_k \triangleq B_\rho(\zeta_k) \subset G$  таких, что их центры  $\zeta_k$  принадлежат кривой  $\gamma$ ,  $\zeta_0 = a$ ,  $\zeta_l = b$ , и справедлива оценка  $|\zeta_k - \zeta_{k-1}| \leq \rho/2 \forall k \in \overline{1, K}$ . По построению очевидно

$f(z) = \sin \frac{1}{z}$ , определенную на области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Она регулярна, а при  $z_n = \frac{1}{2\pi n}$  функция  $f(z_n) = 0$ , но очевидно, что  $\sin \frac{1}{z} \not\equiv 0$  в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Пример 1.** Рассмотрим две функции

$$f(z) = \sin z \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{и} \quad g(z) \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n.$$

Еще раз докажем их равенство, опираясь на теорему 1.

В самом деле, функции  $f$  и  $g$  регулярны в  $\mathbb{C}$ , причем, как было показано в математическом анализе,  $f(x) = g(x)$  при всех действительных  $x$ . Тогда по теореме единственности  $f \equiv g$  на плоскости  $\mathbb{C}$ .

**Пример 2.** Докажем равенство  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$  при всех  $z \in \mathbb{C}$ . Определим функцию  $f(z) \triangleq \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ . Она, очевидно, регулярна, и так как  $f(x) \equiv 0$  для любого действительного значения  $x$ , то по теореме 1  $f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

**Пример 3.** Докажем формулу

$$\cos(z + \zeta) = \cos z \cos \zeta - \sin z \sin \zeta \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{C}.$$

1) Зафиксируем произвольное действительное значение  $\zeta$ . Функция  $f(z) \triangleq \cos(z + \zeta) - \cos z \cos \zeta + \sin z \sin \zeta$  такова, что она регулярна в  $\mathbb{C}$ , и  $f(x) = 0$  для любого действительного  $x$ . Следовательно, по теореме единственности  $f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

2) Зафиксируем далее произвольное комплексное значение  $z$ . Функция  $h(\zeta) \triangleq \cos(z + \zeta) - \cos z \cos \zeta + \sin z \sin \zeta$  регулярна в  $\mathbb{C}$  и при каждом действительном значении  $\zeta$  в силу доказанного в пункте 1  $h(\zeta) = 0$ . По теореме единственности получаем, что  $h(\zeta) \equiv 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$ . Это и доказывает требуемое равенство.

**Определение 1.** Пусть заданы область  $G$  и функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Функция  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  называется *первообразной* функции  $f$  в области  $G$ , если функция  $g$  дифференцируема в области  $G$  и справедливо равенство  $g'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in G$ .

**Теорема 2 (о существовании первообразной).** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна в области  $G$ . Пусть для каждого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$  справедливо равенство

$$\int_{\overset{\circ}{\gamma}} f(z) dz = 0. \quad (4)$$

Тогда у функции  $f$  существует регулярная первообразная вида

$$g(z) \triangleq \int_a^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in G, \quad (5)$$

где  $a$  — произвольно выбранная точка из  $G$ , а интеграл берется по любому кусочно-гладкому контуру в  $G$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ .

**Доказательство.** Зафиксируем некоторую точку  $a \in G$ . Докажем, что интеграл (5) не зависит от выбора пути интегрирования. В самом деле, если  $\gamma_{az}$  и  $\tilde{\gamma}_{az}$  — два различных кусочно-гладких контура с общими началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ , то контур  $\overset{\circ}{\gamma} \triangleq \gamma_{az} \cup \tilde{\gamma}_{az}^{-1}$  является замкнутым контуром, принадлежащим области  $G$ . По условию теоремы справедливо равенство (4), откуда следует равенство

$$\int_{\gamma_{az}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(\zeta) d\zeta.$$

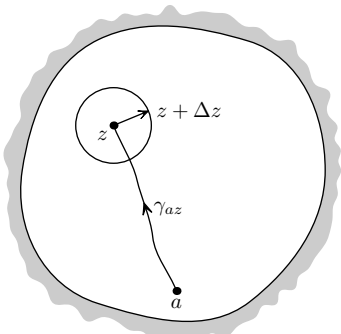


Рис. 21

Итак показали, что интеграл (5) является функцией конечной точки  $z$ . Покажем теперь, что функция  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  из (5) есть первообразная функции  $f$ . Зафиксируем произвольную точку  $z \in G$  и кусочно-гладкий контур  $\gamma_{az}$ , соединяющий точку  $a$  с точкой  $z$ .

Так как  $G$  — область, то существует число  $r > 0$  такое, что  $B_r(z) \subset G$ . Для любого  $\Delta z$  такого, что  $0 < |\Delta z| < r$ , определим контур  $\gamma_{a(z+\Delta z)}$  такой, что  $\gamma_{a(z+\Delta z)} = \gamma_{az} \cup [z, z + \Delta z]$ , где



$[z, z + \Delta z]$  — прямолинейный отрезок, соединяющий концевые точки (см. рис. 21).

Вычисляя значения  $g(z)$  и  $g(z + \Delta z)$  через интегралы (5) по контурам  $\gamma_{az}$  и  $\gamma_{a(z+\Delta z)}$ , получаем равенство

$$\frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

где интеграл справа взят по направленному отрезку  $[z, z + \Delta z]$ .

В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $z$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ,  $\delta \leq r$ , такое, что для всех  $\zeta : |\zeta - z| < \delta$  справедливо неравенство  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . Поэтому из равенства (6) при  $|\Delta z| < \delta(\varepsilon)$  получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| < \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

Это означает, что существует производная  $g'(z)$ , причем справедливо равенство  $g'(z) = f(z)$ . Так как функция  $f$  непрерывна, то в итоге получаем, что функция  $g$  регулярна на области  $G$ . ■

**Следствие 2.** Если область  $G$  односвязна, то у всякой регулярной функции  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  существует ее регулярная первообразная вида (5).

**Доказательство.** По теореме Коши (теорема 1 § 7) в односвязной области  $G$  справедливо равенство (4), т. е. выполнены все условия теоремы 2. ■

**Теорема 3 (Морера).** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна в области  $G$  и удовлетворяет условию

$$\int_{\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (8)$$

для любого треугольного контура  $\Delta$ , принадлежащего области  $G$ . Тогда функция  $f$  регулярна в области  $G$ .

**Доказательство.**

1. Из условия (8) для любого круга  $B_r(a) \subset G$  и любой замкнутой ломаной ориентированной кривой  $\gamma \subset B_r(a)$  следует равенство  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$ .

2. Зафиксируем произвольные точку  $a \in G$ , круг  $B_r(a) \subset G$  и точку  $z \in B_r(a)$ . Для любого контура  $\gamma_{az} \subset B_r(a)$ , являющегося ломаной линией с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ , рассмотрим интеграл  $\int_{\gamma_{az}} f(\zeta) d\zeta$ . В силу пункта 1 значение этого интеграла не зависит от вида ломаной  $\gamma_{az}$ , соединяющей точки  $a$  и  $z$ , а зависит лишь от точки  $z$ , т.е. это функция аргумента  $z$ . Обозначим ее  $g(z)$ . Повторяя доказательство теоремы 2, получаем существование производной  $g'(z)$  и справедливость равенства  $g'(z) = f(z) \forall z \in B_r(a)$ , откуда следует, что функция  $g$  регулярна на  $B_r(a)$ , т.е. в силу теоремы 3 из § 8 она бесконечно дифференцируема. Поэтому функция  $f$  как производная бесконечно дифференцируемой функции  $g$  является регулярной на  $B_r(a)$ . ■

**Следствие 3.** Если функция  $f$  удовлетворяет условиям теоремы 2, то она является регулярной.

**Теорема 4 (о стирании разреза).** Пусть односвязная область  $G$  интервалом  $(A, B) \subset G$  (где точки  $A$  и  $B$  принадлежат границе области  $G$ ) разделена на две односвязные подобласти  $G_1$  и  $G_2$ , т.е.  $G = G_1 \cup G_2 \cup (A, B)$ . Пусть для каждого  $k \in \overline{1, 2}$  задана функция  $f_k : G_k \cup (A, B) \rightarrow \mathbb{C}$ , регулярная в области  $G_k$  и непрерывная на множестве  $G_k \cup (A, B)$ . Пусть справедливо равенство  $f_1(z) = f_2(z)$  при всех  $z \in (A, B)$ . Тогда функция  $f$ , равная  $f_1(z)$  при  $z \in G_1 \cup (A, B)$  и равная  $f_2(z)$  при  $z \in G_2$ , регулярна на всей области  $G$ .

**Доказательство.** Так как функция  $f$  очевидно непрерывна на области  $G$ , то для доказательства регулярности

функции  $f$  воспользуемся теоремой Морера, по которой достаточно проверить равенство

$$\int_{\Delta DEC} f(z) dz = 0 \quad (9)$$

для любого треугольного контура  $\Delta DEC \subset G$ .

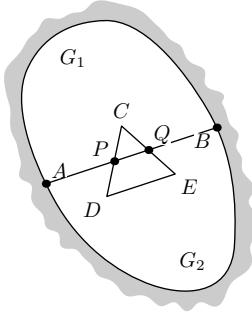


Рис. 22

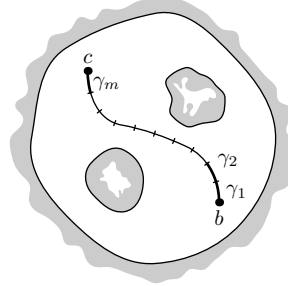


Рис. 23

Если контур  $\Delta DEC$  целиком лежит в одном из множеств  $G_k \cup (A, B)$ , то равенство (9) следует из интегральной теоремы Коши (теорема 2 из § 7) для регулярной в односвязной области  $G_k$  функции  $f_k$ . Пусть  $\Delta DEC \cap G_k \neq \emptyset, \forall k \in \overline{1, 2}$ . Обозначим через  $G_{DEC}$  замкнутую область, границей которой является контур  $\Delta DEC$ , и пусть отрезок  $[P, Q] = G_{DEC} \cap (A, B)$ . Тогда (см. рис. 22) для многоугольников  $PCQ$  и  $PQED$  выполнены условия теоремы 2 из § 7, из которой следует, что

$$\int_{PCQ} f(z) dz = 0, \quad \int_{PQED} f(z) dz = 0.$$

Отсюда, складывая эти интегралы, в сумме получаем равенство (9). ■

**Лемма 1.** Любые две первообразные регулярной функции  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  в области  $G$  отличаются друг от друга на постоянную.

**Доказательство.** Пусть  $g_1$  и  $g_2$  — две первообразные функции  $f$  на области  $G$ . Тогда функция  $h(z) \triangleq g_1(z) - g_2(z)$

регулярна и  $h'(z) = f'(z) - f'(z) \equiv 0 \forall z \in G$ . Выберем произвольную точку  $a \in G$  и пусть число  $r > 0$  такое, что справедливо включение  $B_r(a) \subset G$ . По теореме 2 из § 9 представим функцию  $h$  в круге  $B_r(a)$  в виде степенного ряда Тейлора. Так как  $h'(z) \equiv 0$ , то получаем, что все коэффициенты ряда Тейлора равны нулю, кроме  $c_0$ . Следовательно,  $h(z) = c_0, \forall z \in B_r(a)$ , откуда по теореме 1 получаем, что  $h(z) = c_0, \forall z \in G$ . ■

**Теорема 5.** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна на области  $G$  и имеет на ней первообразную  $g_1$ . Тогда для любых точек  $b, c \in G$  и любого кусочно-гладкого контура  $\gamma_{bc} \subset G$  с началом в точке  $b \in G$  и концом в точке  $c \in G$  имеет место следующая формула (формула Ньютона–Лейбница):

$$\int_{\gamma_{bc}} f(\zeta) d\zeta = g_1(c) - g_1(b). \quad (10)$$

**Доказательство.** 1. Покажем, что в условиях теоремы функция  $f$  будет регулярной на  $G$ . В самом деле, так как  $f$  непрерывна и существует  $g_1'(z) = f(z)$  на  $G$ , то функция  $g_1$  регулярна на  $G$  по определению. По теореме 3 из § 8 регулярная функция  $g_1$  бесконечно дифференцируема на  $G$ , откуда и ее производная, т. е. функция  $f$ , также бесконечно дифференцируема на  $G$ , поэтому она регулярна.

2. Пусть область  $G$  односвязна. По следствию 2 у регулярной функции  $f$  существует первообразная  $g$  вида (5) с начальной точкой  $a \in G$ , откуда в силу теоремы Коши (§ 7) для любых кусочно-гладких контуров  $\gamma_{ab} \subset G$  и  $\gamma_{ac} \subset G$  получаем

$$\int_{\gamma_{bc}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{ac}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{ab}} f(\zeta) d\zeta = g(c) - g(b) = g_1(c) - g_1(b).$$

Последнее равенство получено в силу того, что первообразные  $g$  и  $g_1$  отличаются на константу (см. лемму 1).

3. Пусть область  $G$  не односвязна, причем пусть  $\Gamma$  — граница области  $G$ . Определим  $\rho \triangleq \text{dist}(\gamma_{bc}, \Gamma)$ . Так как по условию теоремы  $\gamma_{bc} \subset G$ , то  $\rho > 0$ . Как и при доказательстве теоремы 1 разобьем  $\gamma_{bc}$  на конечное число гладких контуров  $\gamma_1, \dots, \gamma_K$  с концевыми точками соответственно  $\zeta_0 = b, \zeta_1, \dots, \zeta_K = c$ , и

так, что их длины  $l(\gamma_k) \leq \rho/2 \quad \forall k \in \overline{1, K}$  (см. рис. 23). Тогда каждый контур  $\gamma_k$  содержится в односвязной области — в круге  $B_\rho(\zeta_k) \subset G$ . Поэтому можем воспользоваться результатом пункта 2 и записать

$$\int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta = g_1(\zeta_k) - g_1(\zeta_{k-1}), \quad \forall k \in \overline{1, K}.$$

В итоге, суммируя по всем контурам  $\{\gamma_k\}$ , получаем

$$\int_{\gamma_{bc}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^K \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta = g_1(c) - g_1(b). \quad \blacksquare$$

**Следствие 4.** *Непрерывная функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  имеет на области  $G$  первообразную тогда и только тогда, когда для любого кусочно гладкого замкнутого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$  справедливо равенство  $\int_{\overset{\circ}{\gamma}} f(z) dz = 0$ .*

**Пример 4.** Пусть заданы область  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и функция  $f(z) = \frac{1}{z^n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Тогда очевидно, что эта функция  $f$  регулярна в области  $G$ , а функция  $g(z) = -\frac{1}{(n-1)z^{n-1}}$  является первообразной функции  $f$  в области  $G$ . Из теоремы 5 следует, что по формуле Ньютона–Лейбница (10) можно вычислить следующий интеграл:

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta^n} = g(1) - g(1) = 0.$$

**Пример 5.** Пусть задана функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Эта функция, очевидно, регулярна. Однако в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  она не имеет первообразной. Это следует из того, что интеграл этой функции по окружности отличен от нуля (см. пример 1 из § 6), т.е.

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i,$$

что в силу теоремы 5 означает отсутствие в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  первообразной у функция  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

## § 11. Ряд Лорана

**Определение 1.** Рядом Лорана с центром в точке  $a \in \mathbb{C}$  называется выражение вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad (1)$$

понимаемое как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad (2)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}(z-a)^{-m}. \quad (3)$$

Ряд (2) является обычным степенным рядом и в силу теоремы Абеля (теорема 1 § 9) областью его сходимости является некоторый круг  $B_R(a)$ , где  $R$  — радиус сходимости ряда (2). Ряд (3) заменой  $\frac{1}{z-a} = \zeta$  приводится к степенному ряду  $\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$ , и по той же теореме Абеля его область сходимости — тоже некоторый круг  $|\zeta| < \alpha_0$ . Следовательно, ряд (3) сходится в области  $|z-a| > \frac{1}{\alpha_0} \triangleq \rho \geq 0$ . Если  $\rho > R$ , то суммарный ряд (1) не сходится ни в одной точке, если же  $\rho < R$ , то ряд (1) сходится в кольце:

$$K_{\rho,R}(a) \triangleq \{z \mid \rho < |z-a| < R\}. \quad (4)$$

В последнем случае кольцо  $K_{\rho,R}(a)$ , где  $R$  — радиус сходимости ряда (2), а  $\frac{1}{\rho}$  — радиус сходимости ряда  $\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$ , называется *кольцом сходимости ряда Лорана* (1).

По теореме Абеля и по определению 3 из § 9 ряд (2) сходится локально равномерно в круге сходимости  $B_R(a)$ , в частности, равномерно в  $\overline{B_{R_1}(a)}$  при любом  $R_1 \in (0, R)$ , а ряд (3) сходится локально равномерно в кольце  $|z-a| \geq \rho$ , в частности, равномерно на множестве  $|z-a| \geq \rho_1$  при любом  $\rho_1 > \rho$ . Следовательно, ряд Лорана (1) сходится локально равномерно

в его кольце сходимости  $K_{\rho,R}(a)$  (см. (4)), в частности, равномерно в любом кольце вида

$$K_{\rho_1,R_1}(a) = \{z \mid \rho_1 \leq |z - a| \leq R_1\}, \quad \text{где} \quad \rho < \rho_1 < R_1 < R.$$

Так как к тому же каждый член ряда (1) в кольце сходимости является регулярной функцией, то по теореме Вейерштрасса (теорема 3 § 9) сумма ряда Лорана в кольце сходимости также является регулярной функцией, причем ряд Лорана в этом кольце можно почленно дифференцировать любое число раз.

Имеет место и обратное утверждение, а именно,

**Теорема 1 (Лорана–Вейерштрасса).** *Всякая функция  $f : K_{\rho,R}(a) \rightarrow \mathbb{C}$ , регулярная в кольце  $K_{\rho,R}(a) = \{z \mid \rho < |z - a| < R\}$ , где  $0 \leq \rho < R \leq +\infty$ , представима в этом кольце суммой сходящегося ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n,$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

при любом  $r \in (\rho, R)$ , где  $\gamma_r \triangleq \{\zeta \mid |\zeta - a| = r\}$  – окружность с положительной ориентацией, т. е. ее обход производится против хода часовой стрелки.

**Доказательство.** 1. Прежде всего покажем, что каждый коэффициент  $c_n$  в формуле (5) не зависит от выбора  $r \in (\rho, R)$ . Функция  $\zeta \rightarrow \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$  регулярна в кольце  $K_{\rho,R}(a)$ . Для любых чисел  $r_1, r_2$ :  $\rho < r_1 < r_2 < R$  определим окружности  $\gamma_k$  с центром в точке  $a$  и радиуса  $r_k$ ,  $k \in \overline{1,2}$ , ориентированные положительно. Множество  $\Gamma \triangleq \gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}$  является положительно ориентированной границей кольца  $K_{r_1,r_2}(a)$  и по обобщенной теореме Коши (теорема 3 § 7) получаем, что

$$\int_{\gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = 0,$$

откуда следует равенство

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

которое и требовалось для доказательства независимости интеграла (5) от выбора значения  $r \in (\rho, R)$  при каждом  $n \in \mathbb{Z}$ .

2. Зафиксируем произвольную точку  $z_0$  в кольце  $K_{\rho, R}(a)$ . Выберем числа  $r_1, r_2$  такие, что  $\rho < r_1 < |z_0 - a| < r_2 < R$ , и окружности  $\gamma_k \triangleq \{z \mid |z - a| = r_k\}$  при  $k \in \overline{1, 2}$ , ориентированные положительно. Тогда множество  $\Gamma \triangleq \gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}$ , является положительно ориентированной границей кольца  $K_{r_1, r_2}(a) \triangleq \{z \mid r_1 < |z - a| < r_2\}$ , в котором по интегральной формуле Коши (теорема 1 §8) получаем

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \triangleq I_2 + I_1. \quad (6) \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл  $I_2$  из равенства (6). Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2 §9, для всех  $\zeta \in \gamma_2$  подынтегральную функцию представляем в виде суммы геометрической прогрессии (см. пример 1 §9) вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z_0 - a}{\zeta - a}\right)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta). \quad (7) \end{aligned}$$

Из справедливости оценки

$$\left| f(\zeta) \frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r_2} \cdot (q_2)^n, \quad \forall \zeta \in \gamma_2,$$



где  $q_2 \triangleq \frac{|z_0 - a|}{r_2} < 1$ ,  $M \triangleq \sup\{|f(z)| \mid r_1 \leq |z - a| \leq r_2\} < +\infty$ , и из того, что ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} (q_2)^n$  сходится, по признаку Вейерштрасса получаем, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно на  $\gamma_2$ . По теореме 2 из § 6 ряд (7) можно почленно интегрировать по  $\gamma_2$ , т. е. получим, что

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} dz \stackrel{(7)}{=} \stackrel{(7)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \cdot (z_0 - a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z_0 - a)^n, \quad (8)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

3. Рассмотрим интеграл  $I_1$  из (6). Представим  $-\frac{1}{\zeta - z_0}$  в виде суммы ряда (см. пример 1 § 9)

$$-\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{(z_0 - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z_0 - a}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}}. \quad (10)$$

По признаку Вейерштрасса ряд (10) сходится равномерно по  $\zeta$  на  $\gamma_1$ , так как

$$\left| \frac{\zeta - a}{z_0 - a} \right| = \frac{r_1}{|z_0 - a|} \triangleq q_1 < 1, \quad \forall \zeta \in \gamma_1.$$

Так как  $|f(\zeta)| \leq M$  при  $\zeta \in \gamma_1$ , то в выражении

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}}, \quad \zeta \in \gamma_1, \quad (11)$$

ряд справа также сходится равномерно на  $\gamma_1$ , и аналогично случаю вычисления  $I_2$  по теореме 2 § 6 его можно почленно интегрировать по  $\gamma_1$ . После интегрирования из равенства (11) получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta \right) \frac{1}{(z_0 - a)^{n+1}}. \quad (12)$$

Заменяя в формуле (12) номер  $(n + 1)$  на  $(-m)$ , получаем ра-

венство

$$I_1 = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m (z_0 - a)^m, \quad (13)$$

где

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta, \quad m = -1, -2, \dots \quad (14)$$

В силу пункта 1) в формулах (9), (14) контуры  $\gamma_1, \gamma_2$  можно заменить на любую окружность  $\gamma_r = \{z \mid |z - a| = r\}$ , где  $\rho < r < R$ , т.е. верна общая формула коэффициентов (5). Так как точка  $z_0$  была выбрана в данном кольце  $K_{\rho,R}(a)$  произвольно, то, складывая ряды (8) и (13), получаем ряд Лорана с коэффициентами (5), сходящийся во всем кольце  $K_{\rho,R}(a)$  к функции  $f$ . ■

**Следствие 1.** Если функция  $f : B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на  $B_R(a)$ , то ее ряд Лорана с центром в точке  $a$ , полученный в теореме 1, совпадает с ее рядом Тейлора с центром в точке  $a$ .

В самом деле, при отрицательных  $m = -1, -2, \dots$  из регулярности функции  $f$  следует, что функция  $f(\zeta)(\zeta - a)^{-m-1}$  будет также регулярной в круге  $B_R(a)$ , и по теореме Коши интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю, т.е. по формуле (5)  $c_m = 0$  при  $\forall m = -1, -2, \dots$ . При  $m \in \mathbb{N}$  для коэффициентов  $c_m$  формулы (4) в § 11 и (10) в § 9 совпадают. ■

**Теорема 2 (о единственности разложения в ряд Лорана).** Представление функции  $f$ , регулярной в кольце  $K_{\rho,R}(a) = \{z \mid \rho < |z - a| < R\}$ , в виде сходящегося ряда Лорана с центром в точке  $a$  единственно.

**Доказательство.** Пусть регулярная функция  $f$  представлена в кольце  $K_{\rho,R}(a)$  в виде некоторого ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z - a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - a)^n, \quad \forall z \in K_{\rho,R}(a). \quad (15)$$

Выберем произвольное число  $r \in (\rho, R)$  и окружность  $\gamma_r \triangleq \{z \mid |z - a| = r\}$ , которая ориентирована положительно. Как

показано в примере 1 § 6, справедлива формула

$$I_k \triangleq \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-a)^{k+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & k = 0, \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (16)$$

Как было отмечено в начале параграфа, ряд (15) сходится локально равномерно на  $K_{\rho,R}(a)$ , т.е. в частности на окружности  $\gamma_r$  он сходится равномерно. Зафиксируем любое число  $k \in \mathbb{Z}$ . Умножив ряд (15) на ограниченную по модулю на окружности  $\gamma_r$  функцию  $\frac{1}{2\pi i(z-a)^{k+1}}$ , получаем равномерно сходящийся на окружности  $\gamma_r$  ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} b_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}}. \quad (17)$$

Следовательно, по теореме 2 из § 6 его можно почленно интегрировать по окружности  $\gamma_r$ , и, учитывая формулу (5), получаем

$$c_k \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \stackrel{(17)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} b_n \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-a)^{k-n+1}} \stackrel{(16)}{=} b_k,$$

т.е. ряд (15) совпадает с рядом Лорана (1), (5). ■

Из следствия 1 и теоремы 2 получаем

**Следствие 2.** *Представление регулярной функции  $f: V_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$  в виде сходящегося степенного ряда по степеням  $(z-a)$  единственно. Оно совпадает с рядом Тейлора этой функции с центром в точке  $a$ .*

**Пример 1.** Разложить функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

в ряд Лорана с центром в точке  $a = 2$  в кольце  $K_{1,2}(2) = \{z \mid 1 < |z-2| < 2\}$ .

**Решение.** Очевидно, что функция  $f$  регулярна в заданном кольце, т.е. требуемое разложение в ряд Лорана по теореме 1 существует. Формула (5) не совсем удобна для вычис-

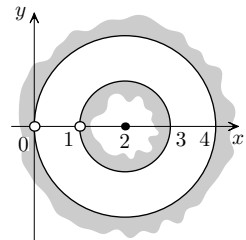


Рис. 24

ления коэффициентов ряда Лорана. Поэтому поступим иначе. Представим функцию  $f$  в виде элементарных дробей

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}. \quad (18)$$

Преобразуем второе слагаемое в (18) к виду

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{(z-2)+2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-2}{2}\right)}.$$

Так как в заданном кольце выполнено неравенство  $\left|\frac{z-2}{2}\right| < 1$ , то, сделав замену  $\zeta = -\frac{z-2}{2}$  и воспользовавшись примером 1 из § 9, получаем ряд

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-2}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n (-1)^n, \quad (19)$$

сходящийся в круге  $|z-2| < 2$ . Аналогично преобразуем первое слагаемое в (18) и при  $|z-2| > 1$  получим сходящийся ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{(z-2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z-2}\right)} = \\ &= \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z-2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}. \end{aligned} \quad (20)$$

В итоге из рядов (19) и (20) получаем представление функции  $f$  в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1}(z-2)^n, \quad \forall z \in K_{1,2}(2)$$

который в силу теоремы 2 (единственности ряда Лорана) является искомым рядом Лорана данной функции  $f$  в кольце  $K_{1,2}(2)$ .

**Следствие 3 (неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана).** Пусть функция  $f$  регулярна в кольце  $K_{\rho,R}(a) = \{z \mid \rho < |z-a| < R\}$  и на каждой окружности  $\gamma_r = \{z \mid |z-a| = r\}$ , где  $r \in (\rho, R)$ , справедлива оценка  $|f(z)| \leq A_r$

$\forall z \in \gamma_r$ . Тогда для коэффициентов (5) ряда Лорана (1) справедлива оценка

$$|c_n| \leq \frac{A_r}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

Доказательство. Из формулы (5) сразу следует

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{A_r}{2\pi r^{n+1}} \int_{\gamma_r} |d\zeta| = \frac{A_r}{r^n},$$

что и требовалось доказать. ■

## § 12. Изолированные особые точки

**Определение 1.** Пусть функция  $f$  не регулярна в точке  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ , но регулярна в некоторой проколотой окрестности этой точки  $a$  (т. е. на множестве  $\mathring{B}_\rho(a)$ ,  $\rho > 0$ ). Тогда точку  $a$  называют *изолированной особой точкой (однозначного характера) функции  $f$* .

В определении 1 точка  $a$  может быть как конечной точкой (тогда  $\mathring{B}_\rho(a) = \{z \mid 0 < |z - a| < \rho\}$ ), так и бесконечной (тогда  $\mathring{B}_\rho(\infty) = \{z \mid |z| > \rho\}$ ).

В зависимости от поведения функции  $f$  около особой точки будем различать три типа особых точек.

**Определение 2.** Изолированная особая точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  функции  $f : \mathring{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  называется

- 1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ ;
- 2) *полюсом*, если существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ;
- 3) *существенно особой точкой*, если не существует конечного или бесконечного предела  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ .

В случае, когда особая точка  $a$  конечна, регулярную в кольце  $\mathring{B}_\rho(a)$  функцию  $f$  по теореме 1 § 11 можно представить в виде суммы сходящегося ряда Лорана с центром в точке  $a$ , т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a). \quad (1)$$

Тогда будем различать две части этого ряда Лорана

$$I_{\text{пр}} \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n,$$

которые называют соответственно *правильной и главной частями ряда Лорана (1)* с центром в особой точке  $a$ .

В случае, когда особая точка  $a = \infty$ , функцию  $f$  можно представить в виде суммы сходящегося в кольце  $\mathring{B}_\rho(\infty)$  ряда Лорана (с центром в точке  $\infty$ )

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathring{B}_\rho(\infty), \quad (2)$$

и теперь будем различать части ряда (2)

$$I_{\text{пр}} \triangleq \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}} \triangleq \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

которые называются соответственно *правильной* и *главной частями ряда Лорана* (2) с центром в  $\infty$ .

**Теорема 1.** Пусть точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  есть изолированная особая точка функции  $f$ . Пусть функция  $f$  представлена своим рядом Лорана с центром в точке  $a$ .

- 1) Для того, чтобы точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана отсутствовала (т. е.  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ ).
- 2) Чтобы точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана  $I_{\text{гл}}(z)$  содержала конечное число ненулевых слагаемых.
- 3) Чтобы точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана  $I_{\text{гл}}(z)$  содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.

**Доказательство.**

I. Пусть точка  $a \in \mathbb{C}$ , т. е. конечна.

1) *Необходимость.* Пусть  $a$  — устранимая особая точка функции  $f$ , т. е. существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Тогда функция  $f$  ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , т. е. существуют числа  $\rho_1 \in (0, \rho)$  и  $A > 0$  такие, что  $|f(z)| < A$  при  $\forall z \in \mathring{B}_{\rho_1}(a)$ .

Воспользуемся неравенством Коши для коэффициентов ряда Лорана функции  $f$  (см. следствие 3 § 11)

$$|c_n| \leq \frac{A}{r^n}, \quad \forall r \in (0, \rho_1).$$

Для каждого целого  $n < 0$  следует, что  $|c_n| \leq A \cdot r^{|n|} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , т. е.  $c_n = 0$  для всех  $n < 0$ , т. е.  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ .

2) *Достаточность.* Пусть  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ , т. е.  $c_n = 0 \quad \forall n < 0$ . Тогда  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \triangleq S(z)$ ,  $\forall z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a)$ .

Так как по первой теореме Вейерштрасса (теорема 3 §9) сумма сходящегося степенного ряда  $S(z)$  есть регулярная функция на круге  $B_\rho(a)$ , причем  $f(z) = S(z)$  при  $z \neq a$ , то существует предел

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} S(z) = S(a) = c_0.$$

1) *Необходимость.* Пусть точка  $a$  — полюс функции  $f$ , т. е. существует предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . В силу этого можно выбрать  $\delta > 0$  такое, что при всех  $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$  справедливо неравенство  $|f(z)| > 1$ . Определим функцию  $g(z) \triangleq \frac{1}{f(z)}$  при  $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$ .

Очевидно, что функция  $g$  регулярна в проколотой окрестности  $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$ , причем  $g(z) \neq 0$  и  $|g(z)| < 1$  при всех  $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$ . Так как точка  $a$  есть полюс функции  $f$ , то существует предел  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$ , т. е. получаем, что точка  $a$  есть устранимая особая точка функции  $g$ . Следовательно, доопределяя  $g(a) = 0$ , получаем в силу пункта 1), что функция  $g$  представима в виде сходящегося степенного ряда

$$g(z) = b_m(z-a)^m + b_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad \forall z \in B_\delta(a). \quad (3)$$

Так как функция  $g(z) \not\equiv 0$ , в равенстве (3) существует наименьший номер  $m \geq 1$ , при котором  $b_m \neq 0$ . Таким образом, функцию  $g$  можем представить в виде  $g(z) = (z-a)^m h(z)$ , где  $h(z) \triangleq b_m + b_{m+1}(z-a) + \dots$ , причем функция  $h$  как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге  $B_\delta(a)$  и  $h(a) \neq 0$ . Поэтому  $h(z) \neq 0$  при всех  $z$  из некоторой окрестности  $B_{\rho_1}(a)$ , где  $0 < \rho_1 \leq \delta$ . Следовательно, функция  $p(z) \triangleq \frac{1}{h(z)}$  тоже регулярна в  $B_{\rho_1}(a)$ , и по теореме 2 из §9 она также представима в



виде суммы сходящегося степенного ряда, т. е.

$$p(z) = d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots, \quad z \in B_{\rho_1}(a),$$

причем здесь  $d_0 = \frac{1}{b_m} \neq 0$ . В итоге получаем в  $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{p(z)}{(z - a)^m} = \quad (4)$$

$$= \frac{d_0}{(z - a)^m} + \frac{d_1}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{(z - a)} + d_m + d_{m+1}(z - a) + \dots \quad (5)$$

Таким образом, последняя часть в равенстве (4)- (5) есть ряд Лорана функции  $f$  с центром в точке  $a$ , причем его главная часть  $I_{\text{гл}}(z)$ , очевидно, содержит конечное число ненулевых слагаемых.

2) *Достаточность.* Пусть справедливо представление функции  $f$  в проколотой окрестности  $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$  в виде суммы сходящегося ряда Лорана (4)- (5), причем  $d_0 \neq 0$ . Тогда, вынося за скобки общий множитель  $\frac{1}{(z - a)^m}$ , получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^m} (d_0 + d_1(z - a) + \dots) \triangleq \frac{p(z)}{(z - a)^m}. \quad (6)$$

В формуле (6) функция  $p$  как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге  $B_{\rho_1}(a)$  и  $\lim_{z \rightarrow a} p(z) = p(a) = d_0 \neq 0$ . С другой стороны  $\frac{1}{(z - a)^m} \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow a$ . Отсюда получаем, что  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ .

3) *Эквивалентность* последних условий покажем методом исключения. Предел может существовать в  $\overline{\mathbb{C}}$  или не существовать. У главной части  $I_{\text{гл}}(z)$  ряда может быть конечное число ненулевых слагаемых или бесконечное. Эквивалентность существования предела в  $\overline{\mathbb{C}}$  и конечности числа ненулевых слагаемых в  $I_{\text{гл}}(z)$  уже доказаны в пп. 1) и 2). Следовательно, отсутствие предела функции  $f$  эквивалентно бесконечному числу ненулевых слагаемых в  $I_{\text{гл}}(z)$ .

II. Пусть функция  $f$  имеет особую точку  $a = \infty$ . Заменой аргумента  $\zeta = \frac{1}{z}$  приходим к функции  $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , у которой особой точкой является точка  $\zeta = 0$ , причем существование

предела функции  $\tilde{f}(\zeta)$  в точке  $\zeta = 0$  эквивалентно существованию предела функции  $f(z)$  в  $\infty$ , т. е. тип особой точки  $a = \infty$  функции  $f(z)$  и тип особой точки  $\zeta = 0$  у функции  $\tilde{f}(\zeta)$  одинаков. В свою очередь, главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  с центром в точке  $\infty$  при замене аргумента переходит в главную часть ряда Лорана функции  $\tilde{f}(\zeta)$  с центром в точке  $\zeta = 0$ . Так как необходимое соответствие в конечной точке  $\zeta = 0$  уже установлено в пункте I, то это влечет требуемое соответствие при  $a = \infty$ . ■

**Следствие 1.** Точка  $a \in \mathbb{C}$  является полюсом функции  $f$  тогда и только тогда, когда существуют окрестность  $\mathring{B}_\rho(a)$ , натуральное число  $m \geq 1$  и регулярная в круге  $B_\rho(a)$  функция  $p$  такие, что  $p(a) \neq 0$  и справедливо равенство

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-a)^m}, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a). \quad (7)$$

В свою очередь, точка  $a = \infty$  является полюсом функции  $f$  тогда и только тогда, когда существуют окрестность  $\mathring{B}_\rho(\infty)$ , число  $m \geq 1$ , регулярная в  $\mathring{B}_\rho(\infty)$  функция  $h$ , у которой существует конечный предел  $h(\infty) \neq 0$ , такие, что справедливо равенство

$$f(z) = z^m h(z), \quad z \in \mathring{B}_\rho(\infty). \quad (8)$$

Доказательство очевидно следует из формул (4) и (6) доказательства теоремы 1. ■

**Определение 3.** Пусть  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  — полюс функции  $f$ . Тогда число  $m$  в формулах (7) или (8) соответственно называется *порядком полюса  $a$  функции  $f$* .

**Определение 4.** Пусть  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\rho > 0$ ,  $m \geq 1$ , пусть функция  $g : B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна и

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(m-1)}(a) = 0, \quad g^{(m)}(a) \neq 0.$$

Тогда говорят, что функция  $g$  имеет в точке  $a$  *нуль  $m$ -го порядка (или  $m$ -й кратности)*. Если же  $g(a) \neq 0$ , то говорят, что точка  $a$  не является нулем функции  $g$  (или для следствия 2: функция  $g$  имеет в точке  $a$  нуль нулевого порядка).

**Следствие 2.** Пусть функции  $g, h : B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярны, причем функция  $h$  имеет в точке  $a$  нуль  $k$ -го порядка ( $k \geq 0$ ), а функция  $g$  имеет в точке  $a$  нуль  $m$ -го порядка ( $m \geq 1$ ). Тогда, если  $m > k$ , то функция  $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$  имеет в точке  $a$  полюс  $(m - k)$ -го порядка, а если  $m \leq k$ , то функция  $f$  имеет в точке  $a$  устранимую особую точку.

**Доказательство.** В силу определения 4 имеем для функций  $h$  и  $g$  представление

$$h(z) = (z - a)^k h_1(z), \quad g(z) = (z - a)^m g_1(z),$$

где функции  $h_1, g_1 : B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярны и  $h_1(a) \neq 0, g_1(a) \neq 0$ . Определим функцию  $p(z) \triangleq \frac{h_1(z)}{g_1(z)}$ . Эта функция регулярна в некоторой окрестности точки  $a$  и  $p(a) \neq 0$ . В итоге для функции  $f$  получаем формулу (7) и из следствия 1 следует утверждение следствия 2. ■

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$  при  $z \neq 0$ . Точка  $z = 0$  есть устранимая особая точка функции  $f$ , так как справедливо представление функции  $f$  в виде ряда с центром в точке 0:

$$f(z) = \frac{(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots) - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots, \quad (9)$$

при всех  $0 < |z| < +\infty$ .

Точка  $z = \infty$  — существенно особая точка функции  $f$ , так как ряд (9) в свою очередь является рядом Лорана функции  $f$  с центром в  $\infty$ , и его главная часть содержит бесконечное число ненулевых слагаемых.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$  при  $|z| > 0$ . Для нее справедливо разложение в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \dots, \quad \forall z \neq 0,$$

т.е. 0 — полюс первого порядка, а  $\infty$  — существенно особая точка функции  $f$ .

**Пример 3.** Рассмотрим функцию  $f(z) = e^{1/z}$  при  $|z| > 0$ . Очевидно, справедливо разложение в ряд Лорана

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots, \quad |z| > 0,$$

откуда из теоремы 1 следует, что точка 0 есть существенно особая точка, а точка  $\infty$  — устранимая особая точка функции  $f$ . То, что точка 0 является существенно особой точкой, можно было доказать иначе, по определению 2, показав наличие различных пределов функции  $f$  в нуле справа и слева по действительной оси.

**Пример 4.** Пусть для регулярной функции  $f : \mathring{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  установлена оценка

$$|f(z)| \leq \frac{A}{\sqrt{|z|}}, \quad \text{где } A = \text{const} > 0, \quad z \in \mathring{B}_1(0). \quad (10)$$

Какую особенность имеет функция  $f$  в точке 0?

**Решение.** *Первый способ решения.* При  $|z| \leq 1$  получаем, что  $\sqrt{|z|} \leq 1$  и  $|z| \leq \sqrt{|z|}$ , поэтому

$$|zf(z)| \leq \sqrt{|z|} \cdot |f(z)| \leq A, \quad z \in \mathring{B}_1(0),$$

т. е. у функции  $zf(z)$  точка  $z = 0$  есть устранимая особая точка. Поэтому в проколотой окрестности нуля  $\mathring{B}_1(0)$  справедливо ее представление в виде ряда

$$zf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{откуда} \quad f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} z^n.$$

В случае, когда  $c_0 = 0$ , точка  $z = 0$  является устранимой особой точкой функции  $f$ .

Допустим, что  $c_0 \neq 0$ . Тогда получаем выражение  $f(z) = \frac{h(z)}{z}$ , где функция  $h$  регулярна и  $h(0) \neq 0$ . Поэтому найдутся числа  $\alpha > 0$  и  $\beta \leq 1$  такие, что  $|h(z)| \geq \alpha$  при  $z \in B_\beta(0)$ . Отсюда  $|f(z)| \geq \frac{\alpha}{|z|}$  при  $0 < |z| < \beta$ . В силу условия (10) получаем, что  $\frac{\alpha}{|z|} \leq \frac{A}{\sqrt{|z|}}$  при всех  $z : 0 < |z| < \beta$ , т. е.  $\sqrt{|z|} \geq \frac{\alpha}{A} > 0$  при всех  $z : 0 < |z| < \beta$ , что неверно. В итоге установлено, что функция  $f$  имеет в точке 0 устранимую особую точку.

*Второй способ решения.* Условия задачи (10) можно переписать в виде

$$A_r \triangleq \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{A}{r^{1/2}}, \quad \forall r \in (0,1). \quad (11)$$

Рассмотрим ряд Лорана функции  $f$  с центром в точке 0. По неравенству Коши для коэффициентов этого ряда и из неравенства (11) получаем оценку

$$|c_n| \leq \frac{A_r}{r^n} \leq \frac{A}{r^{n+1/2}}.$$

Отсюда для каждого целого  $n < 0$  получаем, что  $|c_n| \leq A \cdot r^{|n|-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , т.е.  $c_n = 0$  для всех  $n < 0$ , т.е.  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ . В итоге мы еще раз показали, что функция  $f$  имеет в точке 0 устранимую особую точку.

**Пример 5.** Для какой регулярной функции  $f : \overset{\circ}{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  можно указать функцию  $g : \overset{\circ}{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) \not\equiv 0$ , такую, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} (f(z)g(z)) = 0? \quad (12)$$

При этом рассмотреть две возможности:

- а) функция  $g$  регулярна в круге  $B_1(0)$ ;
- б) функция  $g$  регулярна в проколотой окрестности  $\overset{\circ}{B}_1(0)$ .

**Решение.** Отбросим тривиальный случай, когда  $f \equiv 0$ . Для случаев а) и б) приведем различные решения.

Случай а). Имеем три возможности для особой точки  $z = 0$  функции  $f$ .

1) Функция  $f$  имеет в точке 0 устранимую особую точку. Тогда очевидно, что функция вида  $g(z) = z$  удовлетворяет условию (12) задачи, т.е. ответ положительный.

2) Функция  $f$  имеет в точке 0 полюс  $m$ -го порядка. Тогда в силу следствия 1 справедливо представление функции  $f$  в виде  $f(z) = \frac{p(z)}{z^m}$ , где функция  $p$  регулярна в круге  $B_1(0)$  и  $p(0) \neq 0$ . Возьмем функцию вида  $g(z) = z^{m+1}$  и получим, что  $f(z)g(z) = zp(z)$ , т.е. для нее выполнено условие (12) и ответ положительный.

3) Допустим, что функция  $f$  имеет в точке 0 существенно особую точку. Тогда для всякой регулярной в круге  $B_1(0)$  функции  $g$  возможны два случая:

3.1)  $g(0) \neq 0$ . Тогда, так как функция  $f$  не имеет предела в нуле, то и функция  $fg$ , очевидно, не имеет предела в нуле, что противоречит условию (12).

3.2)  $g(0) = 0$ . Тогда имеет представление  $g(z) = z^k h(z)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , а функция  $h$  регулярна в круге  $B_1(0)$  и  $h(0) \neq 0$ . Но тогда функция  $p(z) \triangleq z^k f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{n+k}$  также в главной части ряда Лорана имеет бесконечное число слагаемых, т.е. точка  $z = 0$  тоже является существенно особой точкой функции  $p$ . Следовательно, как и в случае 3.1), функция  $ph$  не имеет предела в 0, причем  $ph = fg$ , т.е. не выполнено условие (12).

Таким образом, в случае а) мы получили ответ, что условие (12) выполняется не для всякой функции  $f$ , а лишь для функции, у которой точка 0 является устранимой особой точкой или полюсом.

Случай б). По условию функция  $fg$  регулярна в окрестности  $\overset{\circ}{B}_1(0)$ , причем согласно (12) точка нуль для нее является устранимой особой точкой, более того, нулем функции  $fg$ . Поэтому существует число  $k \geq 1$  (порядок нуля) и регулярная функция  $h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $h(0) \neq 0$ , для которых справедливо равенство

$$f(z)g(z) = z^k h(z), \quad \forall z \in \overset{\circ}{B}_1(0). \quad (13)$$

Из того, что  $h(0) \neq 0$ , следует, что существует число  $r > 0$  такое, что  $h(z) \neq 0, \forall z \in B_r(0)$ . Отсюда из выражения (13) получаем необходимое условие разрешимости задачи б):

$$\exists r \in (0,1) \quad \text{такое, что} \quad f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overset{\circ}{B}_r(0). \quad (14)$$

В случае, когда точка 0 является устранимой особой точкой функции  $f$ , условие (14), очевидно, выполнено. (Если бы существовала последовательность  $\{z_n\} \rightarrow 0$ , для которой  $f(z_n) = 0$ ,

то по теореме единственности получили бы, что  $f \equiv 0$ ). В этом случае достаточно выбрать  $g(z) = z$ .

В случае, когда точка 0 является полюсом  $m$ -го порядка функции  $f$ , условие (14) выполнено в силу следствия 1, и достаточно выбрать  $g(z) = z^{m+1}$ .

В случае, когда точка 0 является существенно особой точкой функции  $f$ , условие (14) может как выполняться, так и нарушаться. Покажем это.

Например, для функции  $f_1(z) = e^{1/z}$  условие (14) выполнено. В качестве функции  $g$  можно взять  $g(z) = ze^{-1/z}$ .

Для функции  $f_2(z) = \sin \frac{1}{z}$  условие (14) не выполнено (так как  $f_2(z_n) = 0$  при всех  $z_n = \frac{1}{\pi n}$ ), т. е. для такой функции не существует регулярной в  $B_1(0)$  функции  $g$ , для которой выполнено условие (12).

*Замечание 1.* Заметим, что кроме функций с изолированными особыми точками существуют регулярные функции с неизолрованными особыми точками. Так, например, функция  $\frac{1}{\cos(\pi/z)-1}$  имеет полюсы в точках  $z_n = \frac{1}{(2n)}$ ,  $n = \pm 1 \pm 2, \dots$ . Следовательно, точка  $z = 0$  является для нее неизолрованной особой точкой, а именно, это предельная точка последовательности полюсов  $\{z_n\}$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Пусть точка  $a$  есть полюс функции  $f$ . Какую особенность в точке  $a$  имеют функции  $f^2(z)$  и  $e^{f(z)}$ ?

**У п р а ж н е н и е 2.** Пусть точка  $a$  является полюсом функции  $f$  и существенно особой точкой функции  $g$ . Какую особенность в точке  $a$  имеет функция  $fg$ ?

**У п р а ж н е н и е 3.** Пусть точка  $a$  есть существенно особой точкой функции  $f$ . Что можно сказать о поведении функции  $\frac{1}{f(z)}$  в окрестности точки  $a$ ?

### § 13. Теория вычетов

**Определение 1.** Пусть  $a \in \mathbb{C}$  — изолированная особая точка регулярной функции  $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\rho > 0$ . Пусть  $\gamma_r \triangleq \{z \mid |z - a| = r\}$  — положительно ориентированная окружность, причем  $0 < r < \rho$ . Тогда *вычетом функции  $f$  в точке  $a$*  называется число

$$\operatorname{res}_a f \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) dz. \quad (1)$$

Отметим, что в формуле (1) интеграл не зависит от величины  $r \in (0, \rho)$ .

Для получения более удобных выражений вычисления вычета функции, представим функцию  $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  ее рядом Лорана с центром в точке  $a$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n. \quad (2)$$

Тогда по формуле (5) § 11 для коэффициентов  $c_n$  получаем, что интеграл (1) равен коэффициенту  $c_{-1}$ , т. е.

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}. \quad (3)$$

Приведем некоторые правила вычисления вычетов.

**Лемма 1.** Пусть  $a$  — полюс функции  $f$  порядка  $m$ . Тогда для любого  $m_0 \geq m$  справедлива формула

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(m_0 - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} [(z - a)^{m_0} f(z)]. \quad (4)$$

**Доказательство.** Представим функцию  $f$  в виде ряда Лорана (2) с центром в полюсе  $a$  порядка  $m$ . Так как число  $m_0 \geq m$ , то в ряде (2) коэффициенты  $c_n = 0$  при всех  $n < -m_0$ . Итак,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m_0}}{(z - a)^{m_0}} + \frac{c_{-m_0+1}}{(z - a)^{m_0-1}} + \\ &+ \dots + \frac{c_{-1}}{(z - a)} + c_0 + c_1(z - a) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Умножая ряд (5) на  $(z - a)^{m_0}$ , получаем

$$(z - a)^{m_0} f(z) = c_{-m_0} + c_{-m_0+1}(z - a) + \dots +$$



$$+c_{-1}(z-a)^{m_0-1} + \dots, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a). \quad (6)$$

Так как полученный в правой части равенства (6) степенной ряд сходится в  $B_\rho(a)$ , то по теореме Абеля (теорема 1 §9) он сходится абсолютно и локально равномерно в области  $B_\rho(a)$ . Поэтому и по теореме Вейерштрасса (теорема 3 §9) его можно почленно дифференцировать  $(m_0 - 1)$  раз, после чего получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} [(z-a)^{m_0} f(z)] = \\ & = (m_0 - 1)!c_{-1} + m_0!c_0(z-a) + \dots, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a). \end{aligned} \quad (7)$$

Левая часть равенства (7), очевидно, имеет предел при  $z \rightarrow a$ . Поэтому, переходя к пределу, в силу формулы (3) получаем формулу (4). ■

**Лемма 2.** Пусть функция  $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  представима в виде

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a),$$

где функции  $P$  и  $Q$  регулярны в круге  $B_\rho(a)$ , причем

$$P(a) \neq 0, \quad Q(a) = 0, \quad Q'(a) \neq 0. \quad (8)$$

Тогда справедлива формула

$$\operatorname{res}_a f = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad (9)$$

**Доказательство.** В самом деле, в силу условия (8) точка  $a$  — полюс 1-го порядка функции  $f$  и по формуле (4) (при  $m_0 = 1$ ) получаем

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \left[ \frac{P(z)(z-a)}{Q(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad \blacksquare$$

**Определение 2.** Пусть функция  $f : \overset{\circ}{B}_{R_0}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна (число  $R_0 \geq 0$ ). Тогда *вычетом функции  $f$  в бесконечности* называется число

$$\operatorname{res}_\infty f \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^{-1}} f(z) dz, \quad (10)$$

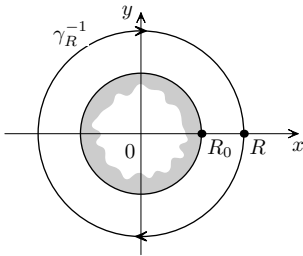


Рис. 25

где число  $R > R_0$ , а окружность  $\gamma_R^{-1} = \{z \mid |z| = R\}$  ориентирована движением по ходу часовой стрелки рис. 25 (т. е. отрицательно). Аналогично случаю конечной точки оценим  $\operatorname{res}_\infty f$  через ряд Лорана для функции  $f$  в окрестности  $\mathring{B}_{R_0}(\infty)$ , учитывая, что его коэффициенты имеют вид

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

где окружность  $\gamma_R$  при  $R > R_0$  ориентирована движением против хода часовой стрелки. Сравнивая выражения (11) и (10), убеждаемся в справедливости формулы

$$\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}, \quad (12)$$

где  $c_{-1}$  — коэффициент разложения функции  $f$  в ряд Лорана с центром в бесконечности. Здесь появился знак минус за счет различной ориентации окружности  $\gamma_R$  в формулах (11) и (10).

**Лемма 3.** Пусть  $\infty$  — устранимая особая точка функции  $f$ . Тогда  $\operatorname{res}_\infty f$  можно вычислить по формуле

$$\operatorname{res}_\infty f = \lim_{z \rightarrow \infty} [z(f(\infty) - f(z))]. \quad (13)$$

**Доказательство.** Из условия леммы следует, что ряд Лорана в некоторой окрестности  $\mathring{B}_{R_0}(\infty)$  имеет вид

$$f(z) = f(\infty) + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots,$$

т. е.

$$z(f(\infty) - f(z)) = -c_{-1} - \frac{c_{-2}}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

что в пределе при  $z \rightarrow \infty$  дает формулу (13). ■

**Теорема 1 (Коши о вычетах).** Пусть задана область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma$  (см. определения 1, 2 из § 7), пусть  $\overline{G} \triangleq G \cup \Gamma$ . Пусть

функция  $f$  определена и регулярна на  $G$  всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек  $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$  (при этом имеется в виду, что все  $a_k$  различны и если  $\infty \in G$ , то  $\infty = a_n$ ) и пусть к тому же функция  $f$  определена и непрерывна на  $\overline{G} \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n a_k \right)$ . Тогда справедлива формула

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f. \quad (14)$$

**Доказательство.** 1. Пусть область  $G$  ограничена. Так как число особых точек  $a_1, \dots, a_n \in G$  конечно, то существует число  $r > 0$  такое, что  $\overline{B_r(a_k)} \subset G \forall k \in \overline{1, n}$ , причем эти круги попарно не пересекаются. Определим множество  $\tilde{G} \triangleq \overline{G} \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n \overline{B_r(a_k)} \right)$ .

Множество  $\tilde{G}$  тоже является областью с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \left( \bigcup_{k=1}^n \gamma_k^{-1} \right)$ , где  $\gamma_k$  суть окружности  $\{z \mid |z - a_k| = r\}$ , ориентированные движением против хода часовой стрелки, а  $\gamma_k^{-1}$  — они же, но ориентированные по ходу часовой стрелки. По условиям теоремы функция  $f$  регулярна на  $\tilde{G}$  и непрерывна на ее замыкании  $\overline{\tilde{G}} \triangleq \tilde{G} \cup \tilde{\Gamma}$  (см. рис. 26). Тогда из теоремы 3 § 7 и свойств интегралов получаем

$$0 = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz \stackrel{(1)}{=} \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{res}_{a_k} f,$$

откуда и следует формула (14).

2. Пусть  $\infty \in G$ . Тогда особые точки  $a_1, \dots, a_{n-1} \in G$  — конечны, а  $a_n = \infty$ . Так как по определению 1 § 7 граница  $\Gamma$  состоит из ограниченных гладких компонент, то существует число

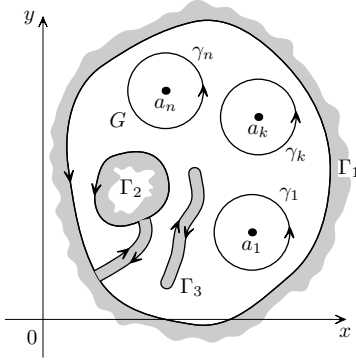


Рис. 26

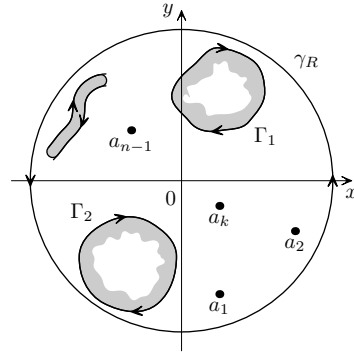


Рис. 27

$R > 0$  такое, что для каждого  $z \in \Gamma \cup \left( \bigcup_{k=1}^{n-1} a_k \right)$  справедливо неравенство  $|z| < R$ .

Определим  $\tilde{G} = G \cap B_R(0)$ . Тогда  $\tilde{G}$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \gamma_R$ , где  $\gamma_R = \{z \mid |z| = R\}$  — окружность, ориентированная движением против хода часовой стрелки (см. рис. 27). Для регулярной в  $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$  функции  $f$  по определению 2 справедлива формула

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz. \quad (15)$$

Так как область  $\tilde{G}$  ограничена, то, опираясь на результат пункта 1), получаем

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}_{a_k} f. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \stackrel{(15)}{=} \int_{\Gamma} f(z) dz - 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f,$$

откуда и из (16) следует (14). ■

**Следствие 1.** Пусть функция  $f$  регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изоли-

рованных особых точек  $a_1, \dots, a_n \in \overline{\mathbb{C}}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f = 0. \quad (17)$$

**Доказательство.** Так как  $\infty$ , очевидно, является особой точкой данной функции  $f$ , то без ограничения общности полагаем, что  $a_n = \infty$ . Рассмотрим  $R > 0$  такое, что все  $a_k \in B_R(0) \forall k \in \overline{1, n-1}$ . Как обычно, обозначим через  $\gamma_R \triangleq \{z \mid |z| = R\}$  окружность, ориентированную движением против хода часовой стрелки. Тогда по теореме 1 для области  $B_R(0)$  получаем

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}_{a_k} f. \quad (18)$$

С другой стороны, по определению 2,

$$-\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f,$$

что вместе с (18) дает равенство (17). ■

Применим теорию вычетов для вычисления различных интегралов.

**Пример 1.** Вычислим интеграл  $J = \int_{\gamma} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)}$ . Здесь контур интегрирования  $\gamma$  есть окружность  $\gamma = \{z \mid |z| = 3\}$ , а функция  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ . Особыми точками этой функции  $f$  внутри контура  $\gamma$  являются точки 1 и 2, это полюсы 1-го порядка. Применяя теорему 1 и формулу (9), получаем

$$J = 2\pi i \left( \operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_2 f \right) = 2\pi i \left( \left. \frac{z}{z-2} \right|_{z=1} + \left. \frac{z}{z-1} \right|_{z=2} \right) = 2\pi i.$$

**Пример 2.** Вычислим интеграл  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ .

Чтобы применить теорему о вычетах выбираем произвольное число  $R > 1$ , для которого определим ориентированный движением против хода часовой стрелки контур  $\gamma_R \triangleq [-R, R] \cup C_R$ , где  $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  (см. рис. 28). Опреде-

лим функцию  $f(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4}$  и вначале вычислим интеграл  $J_R \stackrel{\Delta}{=} \int_{\gamma_R} f(z) dz$ .

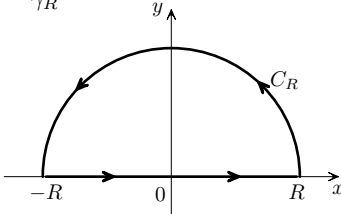


Рис. 28

Функция  $f$  имеет полюсы 1-го порядка (нули знаменателя) в точках  $z_k = e^{i(\pi/4 + \pi k/2)}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , причем только точки  $z_0$  и  $z_1$  лежат внутри контура  $\gamma_R$ .

По теореме 1 о вычетах и формуле (9) получаем

$$\begin{aligned} J_R &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z_0} f + \operatorname{res}_{z_1} f \right) = 2\pi i \left[ \frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{4}}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1 + e^{2i\frac{3\pi}{4}}}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} \right] = \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{1}{-2i} \cdot \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} \right] = \\ &= \pi \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$J_R = \int_{-R}^{+R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz \stackrel{\Delta}{=} I_R^1 + I_R^2.$$

Очевидно, что интеграл  $I_R^1 \rightarrow J$  при  $R \rightarrow +\infty$ . Позже (см. лемму 4) мы докажем, что интеграл  $I_R^2 \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow +\infty$ , откуда в итоге получим, что  $J = \pi\sqrt{2}$ .

Обобщая пример 2, изучим правила вычисления интегралов различных типов с помощью теории вычетов.

### I. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n,m}(x) dx. \quad (19)$$

Здесь  $F_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  — рациональная функция, где

$$\begin{cases} P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \\ Q_m(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0, \end{cases} \quad (20)$$

причем полагаем, что  $Q_m(x) \neq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}^1$ .

Из математического анализа известно, что интеграл  $J$  (19) сходится при условии  $m > n + 1$ . С помощью теории вычетов независимо и очень просто покажем, что это условие достаточно для сходимости интеграла (19).

Пусть  $\{z_k^+\}_{k=1}^l$  — совокупность всех различных нулей многочлена  $Q_m(z)$ , лежащих в верхней полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$ . Как и в примере 2, для всякого числа  $R > R_0 \triangleq \max\{|z_k^+| \mid k \in \overline{1, l}\}$  определим контур  $\gamma_R \triangleq [-R, R] \cup C_R$ , ориентированный движением против хода часовой стрелки, где  $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$  — полуокружность (см. рис. 28). Определим интеграл

$$J_R \triangleq \int_{\gamma_R} F_{n,m}(z) dz.$$

По теореме 1 о вычетах, при каждом  $R > R_0$  получаем

$$J_R = 2\pi i \left( \sum_{k=1}^l \text{res}_{z_k^+} F_{n,m} \right),$$

т. е.  $J_R = \text{Const}$  не зависит от  $R > R_0$ . С другой стороны, имеет место представление интеграла  $J_R$  в виде суммы  $J_R = J_R^1 + J_R^2$ , где

$$J_R^1 \triangleq \int_{-R}^{+R} F_{n,m}(x) dx, \quad J_R^2 \triangleq \int_{C_R} F_{n,m}(z) dz. \quad (21)$$

Если показать, что при условии  $m > n + 1$  существует  $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R^2 = 0$ , то получим, что существует  $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R^1 = J$  и справедлива формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{n,m}(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^l \text{res}_{z_k^+} F_{n,m}. \quad (22)$$

Докажем необходимое утверждение, опираясь на лемму.

**Лемма 4.** Пусть  $\Phi(z)$  — непрерывная функция на замкнутом множестве  $\{z \mid \text{Im } z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ . Пусть  $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$ ,  $R > R_0$ , — полуокружность в верхней

полуплоскости. Обозначим

$$\varepsilon(R) \triangleq \max\{|\Phi(z)| \mid z \in C_R\} \quad \text{при } R > R_0.$$

Если

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon(R)R = 0,$$

то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \Phi(z) dz = 0.$$

Доказательство. Из условий леммы получаем оценки

$$\left| \int_{C_R} \Phi(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |\Phi(z)| |dz| \leq \varepsilon(R) \int_{C_R} |dz| = \varepsilon(R) \pi R \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Применим лемму 4 для случая рациональной функции  $\Phi(z) \triangleq \frac{\Delta}{\Delta} F_{n,m}(z)$  (т.е. к правому интегралу в (21)).

При достаточно больших  $|z| > R_0$  получаем

$$|\Phi(z)| = \frac{|z^n|(1 + o_1(1))}{|z^m|(1 + o_2(1))} = |z|^{n-m}(1 + o_3(1)),$$

т.е. справедлива оценка  $|\Phi(z)| \leq 2|z|^{n-m}$ , т.е.  $\varepsilon(R)R \leq 2R^{n-m+1} \rightarrow 0$  при  $n - m + 1 < 0$ , откуда следует, что выполнены условия леммы 4, по которой получаем равенство  $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R^2 = 0$ .

Таким образом, сходимость интеграла (19) при  $m > n + 1$  и формула (22) обоснованы полностью.

## II. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi. \quad (23)$$

Здесь  $F(x,y) \triangleq \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ ; где  $P, Q$  — многочлены переменных  $x$  и  $y$ .

Сделаем замену  $z = z(\varphi) = e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Тогда  $\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ;  $\sin \varphi = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ ,  $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ ,



т. е.

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{2\pi} F \left( \frac{z(\varphi)}{2} + \frac{1}{2z(\varphi)}, \frac{z(\varphi)}{2i} - \frac{1}{2iz(\varphi)} \right) \cdot \frac{z'(\varphi)}{iz(\varphi)} d\varphi = \\
 &= \int_{|z|=1} F \left( \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} F_1(z) dz.
 \end{aligned}$$

В итоге интеграл (23) свелся к интегралу по кругу  $|z| = 1$  от рациональной функции  $F_1(z)$ , который может быть вычислен с помощью теоремы 1 о вычетах.

### III. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx. \quad (24)$$

Здесь  $F_{n,m}(x) \triangleq \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  — рациональная функция (20),  $\alpha$  — действительное число,  $\alpha > 0$  и  $Q_m(x) \neq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}^1$  (т. е. интеграл (24) есть преобразование Фурье рациональной функции  $F$ ). С помощью теории вычетов покажем, что интеграл (24) сходится при условии, что  $m - n > 0$ , и вычислим этот интеграл.

Пусть через  $\{z_k^+\}_{k=1}^l$  обозначены все различные нули многочлена  $Q_m(z)$  (знаменателя функции  $F_{n,m}(z)$ ), лежащие в верхней полуплоскости. Рассмотрим, как и в пункте I, при любом  $R > R_0 \triangleq \max\{|z_k^+| \mid k \in \overline{1, l}\}$  положительно ориентированный контур  $\gamma_R \triangleq [-R, R] \cup C_R$ , где  $C_R$  — полуокружность радиуса  $R$  в верхней полуплоскости (см. рис. 28). По теореме о вычетах получаем

$$J_R \triangleq \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} F_{n,m}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{res}_{z_k^+} (e^{i\alpha z} F_{n,m}(z)), \quad (25)$$

т. е. интеграл  $J_R$  не зависит от  $R > R_0$ . С другой стороны, справедливо представление этого интеграла (25) в виде суммы

двух интегралов

$$J_R = \int_{-R}^{+R} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx + \int_{C_R} e^{i\alpha z} F_{n,m}(z) dz. \quad (26)$$

Первое слагаемое справа в (26) будет иметь предел и сходиться к искомому значению  $J$  интеграла (24) при  $R \rightarrow +\infty$ , если второе слагаемое в (26) имеет предел при  $R \rightarrow +\infty$ , равный нулю. Чтобы показать последнее, докажем лемму.

**Лемма 5 (Жордан).** Пусть  $\Phi(z)$  — непрерывная функция на замкнутом множестве  $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ . Пусть число  $\alpha > 0$  и  $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ,  $R > R_0$ , — семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим

$$\varepsilon(R) \triangleq \max\{|\Phi(z)| \mid z \in C_R\} \quad \text{при} \quad R > R_0.$$

Если  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon(R) = 0$ , то  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} \Phi(z) dz = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $z \in C_R$ , тогда  $z = Re^{i\varphi} = R \cos \varphi + iR \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Поэтому при  $z \in C_R$

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(x+iy)}| = e^{-\alpha y} = e^{-\alpha R \sin \varphi}.$$

Воспользовавшись известным неравенством

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (27)$$

получаем оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} \Phi(z) dz \right| &\leq \int_{C_R} |\Phi(z)| e^{-\alpha R \sin \varphi} |dz| \leq \\ &\leq \varepsilon(R) R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi = 2\varepsilon(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq 2\varepsilon(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R 2\varphi/\pi} d\varphi \leq \frac{\pi}{\alpha} \varepsilon(R), \end{aligned}$$

т. е. справедливо утверждение леммы. ■

Возвращаясь к формуле (26), покажем с помощью леммы Жордана, что при условии  $m > n$  второй интеграл в (26) стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . При достаточно больших  $R > R_0$  в силу условия  $m - n \geq 1$  получаем  $\varepsilon(R) \leq \frac{2}{R^{m-n}} \leq \frac{2}{R} \rightarrow 0$ . Отсюда по лемме 5 из (25) и (26) получаем равенство  $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R = J$  и формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^l \operatorname{res}_{z_k^+} (e^{i\alpha z} F_{n,m}(z)). \quad (28)$$

**Пример 3.** Вычислим интеграл Лапласа вида

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Здесь  $F(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ; ее особые точки  $z_{1,2} = \pm i$ , т. е. в верхней полуплоскости лежит лишь точка  $z_1^+ = i$  — полюс 1-го порядка. При  $\alpha > 0$  по формуле (28) получаем

$$J(\alpha) = 2\pi i \operatorname{res}_i \left( \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} \right) = 2\pi i \left( \frac{e^{i\alpha z}}{2z} \Big|_{z=i} \right) = \pi e^{-\alpha}.$$

При  $\alpha < 0$  делаем в интеграле замену  $x = -t$ :

$$J(\alpha) = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{-i\alpha t}}{1+t^2} (-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|\alpha|t}}{1+t^2} dt = \pi e^{-|\alpha|}.$$

В итоге,  $J(\alpha) = \pi e^{-|\alpha|}$ .

С другой стороны, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx,$$

причем последний интеграл от нечетной функции, очевидно, равен нулю, то получаем еще одну формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\alpha|}.$$

**Следствие 2.** Интегралы вида

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x \cdot F_{n,m}(x) dx \quad \text{и} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x \cdot F_{n,m}(x) dx, \quad (29)$$

где  $F_{n,m}(x)$  — рациональная функция, сводятся к интегралу вида (24), т. е.

$$J_1 = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx, \quad J_2 = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx.$$

### § 14. Приращение аргумента $z$ вдоль контура

Пусть  $z = x + iy \neq 0$ . Напомним, что  $\varphi \in \text{Arg } z$ , если выполнены равенства

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}, \quad (1)$$

где  $\text{Arg } z = \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  — многозначная функция аргумента  $z$ , определенная на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Нас будет интересовать вопрос выделения непрерывных ветвей многозначной функции  $\text{Arg } z$ .

**Теорема 1.** Пусть  $z : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывно дифференцируемая функция (т. е. класса  $C^1[0,1]$ ), причем  $z(t) \triangleq x(t) + iy(t) \neq 0 \forall t \in [0,1]$ . Пусть задано значение  $\varphi_0 \in \text{Arg } z(0)$ . Тогда существует действительная функция  $\varphi(\cdot) \in C^1[0,1]$ , удовлетворяющая включению  $\varphi(t) \in \text{Arg } z(t), t \in [0,1]$ , т. е. уравнениям

$$\cos \varphi(t) = \frac{x(t)}{|z(t)|}, \quad \sin \varphi(t) = \frac{y(t)}{|z(t)|}, \quad t \in [0,1], \quad (2)$$

и условию  $\varphi(0) = \varphi_0$ . Более того, эта функция единственна и задается явной формулой

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} d\tau. \quad (3)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\varphi(\cdot)$  из (3) и вычислим ее производную

$$\varphi'(t) = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Определим функции  $u(t) \triangleq \cos \varphi(t)$ ,  $v(t) \triangleq \sin \varphi(t)$ . Тогда, вычисляя их производные, получаем

$$\begin{cases} u' = -\sin \varphi(t) \cdot \varphi'(t) = -v\varphi', \\ v' = \cos \varphi(t) \cdot \varphi'(t) = u\varphi'. \end{cases} \quad (5)$$

Определим функции  $\tilde{u}(t) \triangleq \frac{x(t)}{|z(t)|}$  и  $\tilde{v}(t) \triangleq \frac{y(t)}{|z(t)|}$ . Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{u}' &= \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|z|} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x'}{|z|} - \frac{x(xx' + yy')}{|z|^3} = \\ &= \frac{x'y^2 - xyy'}{|z|^3} = -\frac{y}{|z|} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = -\tilde{v} \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2},\end{aligned}\quad (6)$$

$$\tilde{v}' = \frac{d}{dt} \left( \frac{y}{|z|} \right) = \dots = \frac{x}{|z|} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = \tilde{u} \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}.\quad (7)$$

В силу равенства (4) видим, что функции  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  удовлетворяют той же системе линейных дифференциальных уравнений (5), что и функции  $(u, v)$ , причем при  $t = 0$  имеем равенства  $u(0) = \tilde{u}(0)$ ,  $v(0) = \tilde{v}(0)$ . По теореме единственности решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений (5) получаем  $u(t) \equiv \tilde{u}(t)$ ,  $v(t) \equiv \tilde{v}(t)$  при  $t \in [0, 1]$ , т. е. справедливы равенства (2), и функция  $\varphi(t)$  из (3) есть искомая.

Допустим, что существует другая непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi_1(t)$ , удовлетворяющая равенствам (2) и условию  $\varphi_1(0) = \varphi_0$ . Тогда, дифференцируя равенства (2), получаем, в силу (5) и (6), (7), что  $\varphi_1'(\tau) = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}$ , откуда, интегрируя эту производную по отрезку  $[0, t]$  (при каждом  $t \in [0, 1]$ ), получаем в силу формулы (3), что  $\varphi_1 \equiv \varphi$ . ■

*Замечание 1.* Формулу (3) можно переписать в более компактном виде

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \operatorname{Im} \int_0^t \frac{z'(\tau)}{z(\tau)} d\tau.\quad (8)$$

В самом деле, преобразовав подынтегральную в (8) функцию

$$\frac{z'}{z} = \frac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x'x + y'y}{x^2 + y^2} + i \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2},$$

получаем из формулы (3) формулу (8).

Итак, при выполнении условий теоремы 1 существует непрерывно дифференцируемая ветвь  $\varphi(t)$  многозначной функции  $\operatorname{Arg} z(t)$  вида (3).

**Определение 1.** Приращением аргумента функции  $z(\cdot) \in C^1[0,1]$  на отрезке  $[0,1]$  назовем число

$$\begin{aligned} \Delta_{[0,1]} \arg z(t) &\triangleq \varphi(1) - \varphi(0) = \\ &= \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z'(t)}{z(t)} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

**Теорема 2 (логарифмическое свойство).** Пусть функция  $z : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  имеет вид  $z(t) \triangleq z_1(t)z_2(t)$ , где функции  $z_1(\cdot), z_2(\cdot) \in C^1[0,1]$ , причем  $z_1(t) \neq 0, z_2(t) \neq 0 \forall t \in [0,1]$ . Тогда справедливо равенство

$$\Delta_{[0,1]} \arg z(t) = \Delta_{[0,1]} \arg z_1(t) + \Delta_{[0,1]} \arg z_2(t). \quad (10)$$

**Доказательство.** Из определения 1 (формулы (9)) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{[0,1]} \arg z(t) &= \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{(z_1(\tau)z_2(\tau))'}{z_1(\tau) \cdot z_2(\tau)} d\tau = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z_1'z_2 + z_2'z_1}{z_1z_2} d\tau = \\ &= \operatorname{Im} \int_0^1 \left( \frac{z_1'}{z_1} + \frac{z_2'}{z_2} \right) d\tau = \Delta_{[0,1]} \arg z_1(t) + \Delta_{[0,1]} \arg z_2(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Определение 2.** Приращением аргумента  $z$  вдоль контура  $\gamma$ , заданного параметрически с помощью функции  $z(t), t \in [0,1]$ , назовем

$$\Delta_\gamma \arg z \triangleq \Delta_{[0,1]} \arg z(t). \quad (11)$$

**Замечание 2.** В определении 2 приращение аргумента  $z$  вдоль гладкого контура  $\gamma$  не зависит от выбора параметризации  $z(t)$ , с помощью которой задан этот контур  $\gamma$ , т. е. справедлива формула

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{dz}{z}. \quad (12)$$

Это следует из формул (9) и (11), а также из свойства независимости криволинейного интеграла от выбора параметризации гладкого контура (см. свойство 5° § 6).

*Замечание 3.* Легко установить геометрический смысл приращения аргумента  $z$  вдоль гладкого контура  $\gamma$ . Это приращение является углом поворота радиус-вектора  $0z$  при непрерывном пробегании конца вектора  $z$  вдоль кривой  $\gamma$  от начальной ее точки  $z(0)$  до конечной ее точки  $z(1)$ .

**Определение 3.** Пусть в области  $G$  задано семейство контуров  $\{\gamma_\alpha\} \subset G$ ,  $\alpha \in [a, b]$ , представленное функцией  $z(t, \alpha)$ ,  $t \in [0, 1]$ , у которой существует производная  $z'_t(t, \alpha)$ , причем функции  $z(t, \alpha)$ ,  $z'_t(t, \alpha)$  непрерывны по совокупности аргументов на  $[0, 1] \times [a, b]$ . Тогда говорят, что семейство  $\{\gamma_\alpha\}$  задает *непрерывную деформацию гладкого контура  $\gamma_a$  в гладкий контур  $\gamma_b$*  в области  $G$ .

*Замечание 4.* В частном случае, когда  $z(0, \alpha) \equiv z_0$ ,  $z(1, \alpha) = z_1$  (т. е. семейство  $\gamma_\alpha$  имеет неподвижные начальную и конечную точки), то получаем непрерывную деформацию контура  $\gamma_a$  в контур  $\gamma_b$  с неподвижными началом и концом (см. рис. 29). В этом случае также говорят, что кривые  $\gamma_a$  и  $\gamma_b$  *гомотопны* в области  $G$ .

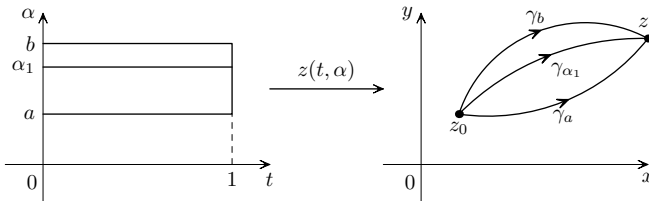


Рис. 29

**Теорема 3 (устойчивость при непрерывной деформации).** Пусть семейство контуров  $\{\gamma_\alpha\}$  задает непрерывную деформацию гладкого контура  $\gamma_a$  в гладкий контур  $\gamma_b$  в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (в силу определения 3). При этом  $z(t, \alpha) \neq 0$  при всех  $(t, \alpha) \in [0, 1] \times [a, b]$ . Пусть существует число  $A \in \mathbb{C}$ ,  $A \neq 0$ , такое, что справедливо равенство  $z(1, \alpha) = Az(0, \alpha) \forall \alpha \in [a, b]$ . Определим функцию  $I(\alpha) \triangleq \Delta_{\gamma_\alpha} \arg z$  от параметра  $\alpha \in [a, b]$  (т. е.  $I(\alpha) = \Delta_{[0, 1]} \arg z(t, \alpha)$ ). Тогда  $I(\alpha) = \text{const}$ , откуда, в частности, следует равенство  $\Delta_{\gamma_a} \arg z = \Delta_{\gamma_b} \arg z$ .



**Доказательство.** При каждом значении  $\alpha \in [a, b]$  обозначим через  $\varphi(t, \alpha)$  непрерывную по  $t$  ветвь многозначной функции  $t \rightarrow \text{Arg } z(t, \alpha)$ , полученную в теореме 1 (см. формулу (3)). Так как

$$\varphi(1, \alpha) \in \text{Arg } z(1, \alpha), \quad \varphi(0, \alpha) \in \text{Arg } z(0, \alpha),$$

то

$$\varphi(1, \alpha) - \varphi(0, \alpha) \in \text{Arg } \frac{z(1, \alpha)}{z(0, \alpha)},$$

и так как по условию  $\frac{z(1, \alpha)}{z(0, \alpha)} \equiv A$ , т. е. не зависит от  $\alpha$ , то

$$\forall \psi_0 \in \text{Arg } A \quad \exists n(\alpha) \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi(1, \alpha) - \varphi(0, \alpha) = \psi_0 + 2\pi n(\alpha), \quad \forall \alpha \in [a, b]. \quad (13)$$

По определению 1 из равенства (13) получаем

$$I(\alpha) \stackrel{\Delta}{=} \Delta_{[0,1]} \arg z(t, \alpha) = \varphi(1, \alpha) - \varphi(0, \alpha) = \psi_0 + 2\pi n(\alpha), \quad (14)$$

т. е.  $I(\alpha)$  есть ступенчатая функция.

В свою очередь, из формулы (9) получаем равенство

$$I(\alpha) = \text{Im} \int_0^1 \frac{z'_t(t, \alpha)}{z(t, \alpha)} dt.$$

В этом равенстве подынтегральная функция в стоящем справа интеграле непрерывна по  $(t, \alpha)$  на  $[0, 1] \times [a, b]$ , откуда следует, что интеграл непрерывно зависит от параметра  $\alpha$ . В итоге непрерывная ступенчатая функция (14) может быть только константой. ■

**Следствие 1.** В силу теоремы 3 можно определить понятия  $\Delta_{[0,1]} \arg z(t)$  (и  $\Delta_\gamma \arg z$ ) не только для гладких, но и для непрерывных функций  $z(t)$  (и контуров  $\gamma$ ).

Покажем это. Пусть задана непрерывная функция  $z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  (т. е.  $z(\cdot) \in C[0, 1]$ ) и пусть  $z(t) \neq 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ . Определим число  $r \stackrel{\Delta}{=} \min\{|z(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ . Очевидно, что  $r > 0$ . Выберем положительное число  $\varepsilon \leq r/2$ . Обозначим через  $z_\varepsilon(\cdot)$  произвольную функцию класса  $C^1[0, 1]$ , приближающую данную функцию  $z(\cdot)$  с точностью до  $\varepsilon$ , т. е.  $|z(t) - z_\varepsilon(t)| < \varepsilon \forall t \in [0, 1]$ , причем  $z_\varepsilon(0) = z(0)$ ,  $z_\varepsilon(1) = z(1)$ . Такую функцию

$z_\varepsilon(\cdot)$  будем называть *гладкой  $\varepsilon$ -аппроксимацией функции  $z(\cdot)$* . Легко показать, что гладкая  $\varepsilon$ -аппроксимация  $z_\varepsilon(\cdot)$  функции  $z(\cdot)$  существует. Так, например, по теореме Вейерштрасса для заданной функции  $z(\cdot)$  существует многочлен  $P_n(\cdot)$  такой, что  $|z(t) - P_n(t)| < \varepsilon/2, \forall t \in [0,1]$ . Тогда функция

$$z_\varepsilon(t) \triangleq P_n(t) + (z(1) - P_n(1))t + (z(0) - P_n(0))(1 - t)$$

будет искомой функцией. В самом деле, она гладкая,  $z_\varepsilon(0) = z(0), z_\varepsilon(1) = z(1)$ , и

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(t) - z(t)| &\leq |z(t) - P_n(t)| + |z(1) - P_n(1)|t + \\ &\quad + |z(0) - P_n(0)|(1 - t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}t + \frac{\varepsilon}{2}(1 - t) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим, что  $z_\varepsilon(t) \neq 0$  при всех  $t \in [0,1]$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(t)| &= |(z_\varepsilon(t) - z(t)) + z(t)| \geq \\ &\geq |z(t)| - |z_\varepsilon(t) - z(t)| > r - \varepsilon \geq \frac{1}{2}r > 0. \end{aligned}$$

**Определение 4.** Приращением аргумента непрерывной функции  $z(\cdot) \in C[0,1], z(t) \neq 0, \forall t \in [0,1]$ , на отрезке  $[0,1]$  назовем

$$\Delta_{[0,1]} \arg z(t) \triangleq \Delta_{[0,1]} \arg z_\varepsilon(t), \quad (15)$$

где  $z_\varepsilon(\cdot) \in C^1[0,1]$  — любая гладкая  $\varepsilon$ -аппроксимация функции  $z(\cdot)$  при достаточно малом значении  $\varepsilon > 0$ .

*Замечание 5.* Выражение (15) не зависит от выбора гладкой  $\varepsilon$ -аппроксимации  $z_\varepsilon(\cdot)$  для непрерывной функции  $z(\cdot)$ , т. е. определение 4 корректно.

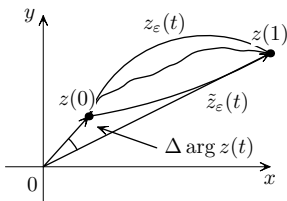


Рис. 30

В самом деле пусть  $\tilde{z}_\varepsilon(\cdot)$  — другая гладкая  $\varepsilon$ -аппроксимация функции  $z(\cdot)$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  (см. рис. 30).

Определим функцию

$$\begin{aligned} z(t, \alpha) &\triangleq \alpha \tilde{z}_\varepsilon(t) + (1 - \alpha)z_\varepsilon(t), \\ \forall \alpha &\in [0,1], \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Очевидно, что эта функция задает непрерывную деформацию  $z_\varepsilon(\cdot)$  в  $\tilde{z}_\varepsilon(\cdot)$ . При этом

$$|z(t, \alpha) - z(t)| \leq \alpha |\tilde{z}_\varepsilon(t) - z(t)| + (1 - \alpha) |z_\varepsilon(t) - z(t)| < \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon < r \leq |z(t)|, \quad \forall t \in [0, 1],$$

поэтому

$$|z(t, \alpha)| \geq |z(t)| - |z(t, \alpha) - z(t)| > r - \varepsilon > 0,$$

т. е.  $z(t, \alpha) \neq 0 \forall (t, \alpha)$ . В итоге показали, что функция  $z(t, \alpha)$  удовлетворяет условиям теоремы 3, из которой получаем требуемое равенство  $\Delta_{[0,1]} \arg \tilde{z}_\varepsilon(t) = \Delta_{[0,1]} \arg z_\varepsilon(t)$ . ■

Приведем еще одно очевидное следствие определений 1 и 4.

**Следствие 2.** Для всякого замкнутого непрерывного контура  $\overset{\circ}{\gamma} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  существует число  $n_\gamma \in \mathbb{Z}$  такое, что

$$\Delta_\gamma \arg z = 2\pi n_\gamma. \quad (16)$$

## § 15. Регулярные ветви многозначных функций корня и логарифма $\text{Ln } z$

Напомним, что на множестве  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  в § 5 были определены многозначные функции вида

$$\{\sqrt[n]{z}\} \triangleq \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \text{Arg } z}, \quad (1)$$

$$\text{Ln } z \triangleq \ln |z| + i \text{Arg } z, \quad (2)$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\text{Arg } z \triangleq \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  — множество всех аргументов числа  $z \neq 0$ .

В § 5 по теореме 2 об обратной функции было показано, что эти многозначные функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  в области  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  имеют регулярные ветви, которые были названы *главными регулярными ветвями*. Эти ветви имели вид

$$g_0(z) \triangleq \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \arg_{\text{гл}} z}, \quad (3)$$

$$h_0(z) \triangleq \ln |z| + i \arg_{\text{гл}} z, \quad (4)$$

где  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$ .

Обобщим рассуждения из § 5.

**1. Простейший случай.** Зафиксируем числа  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , и  $\psi_0 \in [-\pi, \pi)$ . Рассмотрим угловую область вида  $G_1 \triangleq \{z \neq 0 \mid \arg z \in (\frac{\psi_0}{n}, \frac{\psi_0 + 2\pi}{n})\}$ .

Функция  $w = z^n$  однолистка на области  $G_1$  и отображает эту область на область  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$ , где  $\lambda_{\psi_0} \triangleq \{z \mid \arg z = \psi_0\} \cup \{0\}$  — луч, выходящий из точки 0, состоящий из точек с аргументом  $\psi_0$ . Следовательно, обратная к степенной функции функция существует и имеет вид

$$g_*(z) \triangleq \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \arg_* z}, \quad (5)$$

где  $\arg_* z \in (\psi_0, \psi_0 + 2\pi)$ . По теореме об обратной функции (точнее, по следствию 1 § 5) функция  $g_*$ , определенная по формуле (5), будет регулярной функцией, т. е. регулярной ветвью многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ , определенной на области  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$  со значениями в области  $G_1$ .

Аналогично, пусть функция  $e^z$ , задана на области  $G_2 \triangleq \{z \mid \operatorname{Im} z \in (\psi_0, \psi_0 + 2\pi)\}$ . Тогда она однолистка на ней и принимает значения в области  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$ . Соответствующая обратная функция имеет вид

$$h_*(z) \triangleq \ln |z| + i \arg_* z, \quad (6)$$

где  $\arg_* z \in (\psi_0, \psi_0 + 2\pi)$ . По теореме об обратной функции функция  $h_*$ , определенная по формуле (6), будет регулярной функцией, т. е. регулярной ветвью многозначной функции  $\operatorname{Ln} z$ , определенной на области  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$  со значениями в области  $G_2$ .

**Лемма 1.** *Зафиксируем число  $\psi_0 \in [-\pi, \pi)$  и область  $G \subset \mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$ . Все непрерывные ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$ , существующие на области  $G$ , являются регулярными ветвями и имеют соответственно вид:*

$$g_k(z) = g_*(z) e^{\frac{2\pi ki}{n}}, \quad k \in \overline{0, n-1}, \quad (7)$$

$$h_k(z) = h_*(z) + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

где функции  $g_*$  и  $h_*$  определены в (5), (6).

**Доказательство.** Очевидно, что функции  $g_k$  и  $h_k$  являются ветвями многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$  соответственно, при этом они регулярны на области  $G$ , так как функции  $g_*$  и  $h_*$  регулярны. Допустим, что  $g$  — некоторая непрерывная ветвь многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ , определенная на области  $G$ . Тогда по определению корня справедливы тождества  $g^n(z) \equiv z$  и  $g_*^n(z) \equiv z$ . Поэтому  $\left(\frac{g(z)}{g_*(z)}\right)^n \equiv 1$ , откуда  $\frac{g(z)}{g_*(z)} \in \{\sqrt[n]{1}\}$ , т. е. существует  $k(z) \in \overline{0, n-1}$  такое, что

$$\frac{g(z)}{g_*(z)} = e^{i\frac{2\pi}{n}k(z)}, \quad z \in G. \quad (9)$$

В равенстве (9) слева стоит непрерывная функция, а справа — функция, принимающая дискретные значения, что возможно лишь при условии, что эта функция постоянна. Это значит, что существует число  $k_0 \in \overline{0, n-1}$  такое, что  $g(z) = g_{k_0}(z)$ , т. е. формула (7) описывает все непрерывные (и регулярные) ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ .

Аналогично, пусть задана некоторая непрерывная ветвь  $h$  многозначной функции  $\text{Ln } z$  на области  $G$ . Тогда по определению обратной функции получаем равенства  $e^{h(z)} \equiv z$ ,  $e^{h_*(z)} \equiv z$ ,  $\forall z \in G$ , т. е.  $e^{h(z)-h_*(z)} \equiv 1$ , откуда существует  $k(z) \in \mathbb{Z}$  такое, что

$$h(z) - h_*(z) = 2\pi k(z)i. \quad (10)$$

Слева в равенстве (10) — непрерывная функция, справа — функция с дискретными значениями, следовательно,  $k(z) = k_0 = \text{const}$ , т. е. формула (8) описывает все непрерывные (и регулярные) ветви многозначной функции  $\text{Ln } z$ . ■

**Лемма 2.** У многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  не существует непрерывных ветвей, определенных в кольце  $K_{r,R}(0) \triangleq \{z \mid r < |z| < R\}$ , где  $0 \leq r < R \leq +\infty$ .

Доказательство от противного. Допустим, что в кольце  $K_{r,R}(0)$  существует некоторая непрерывная ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ . Тогда эта функция  $g$  непрерывна на области  $K_{r,R}(0) \setminus (-\infty, 0]$ . По лемме 1 (при  $\psi_0 = -\pi$ ) существует номер  $k_0 \in \mathbb{Z}$  такой, что

$$g(z) = g_0(z)e^{\frac{2\pi k_0 i}{n}}, \quad \forall z \in K_{r,R}(0) \setminus (-\infty, 0], \quad (11)$$

где  $g_0$  — главная регулярная ветвь (3). Пусть  $x \in (-R, -r)$ . Тогда из равенства (11) получаем в пределе

$$g(x + i0) = \sqrt[n]{|x|}e^{\frac{i\pi + 2\pi k_0 i}{n}}, \quad g(x - i0) = \sqrt[n]{|x|}e^{\frac{-i\pi + 2\pi k_0 i}{n}},$$

т. е.  $g(x + i0) \neq g(x - i0)$ , что противоречит тому, что функция  $g$  непрерывна в точке  $x \in K_{r,R}(0)$ .

Аналогично доказывается утверждение для  $\text{Ln } z$ . ■

**Следствие 1.** Не существует непрерывных ветвей многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$ , определенных в произвольной области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , содержащей проколотую окрестность точки 0 или содержащей проколотую окрестность бесконечности.

*Замечание 1.* Особая роль точек 0 и  $\infty$  для функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  будет изучена в § 22–23.

**2. Общий случай.** Пусть выбрана односвязная область  $G$  в  $\mathbb{C}$ , причем  $0 \notin G$ . Кроме областей вида  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$  примером такой области может быть область в  $\mathbb{C}$ , граница которой является разрезом по некоторому кусочно-гладкому контуру, идущему из точки  $0$  в  $\infty$  (см. рис. 31).

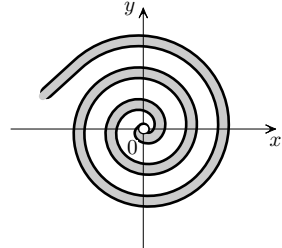


Рис. 31

Покажем, что в такой области  $G$  существуют регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$ . Опишем их вид.

**Лемма 3.** В односвязной области  $G \subset \mathbb{C}$  такой, что  $0 \notin G$ , существуют непрерывные ветви многозначной функции  $\text{Arg } z$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные точку  $z_0 \in G$  и ее аргумент  $\psi_0 \in \text{Arg } z_0$ . Из точки  $z_0$  (как начальной) в произвольную (конечную) точку  $z \in G$  проведем некоторый гладкий контур  $\gamma_{z_0 z} \subset G$ .

Определим

$$\varphi_{\gamma_{z_0 z}} \triangleq \psi_0 + \Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z, \quad (12)$$

где

$$\Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z \triangleq \text{Im} \int_{\gamma_{z_0 z}} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (13)$$

Очевидно, что справедливо включение  $\varphi_{\gamma_{z_0 z}} \in \text{Arg } z$ .

В односвязной области  $G$ , удовлетворяющей условию  $0 \notin G$ , функция  $\frac{1}{z}$  регулярна, и по интегральной теореме Коши для любого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$  справедливо равенство  $\int_{\overset{\circ}{\gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$ . В силу равенства (13) это значит,

что  $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg z = 0$  для любого замкнутого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$ , т. е. выражение (12) не зависит от выбора контура  $\gamma_{z_0 z}$ , а определяется лишь выбором конечной точки  $z$ , т. е. мы получим функцию от  $z$  вида

$$\varphi_0(z) \triangleq \psi_0 + \Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z, \quad (14)$$

где

$$\Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z = \text{Im} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (15)$$

В силу теоремы 2 § 10 функция  $g(z) \triangleq \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}$  является регулярной первообразной функции  $\frac{1}{z}$  в области  $G$ , поэтому  $\varphi_0(z)$  является гармонической функцией от  $(x, y)$ . Таким образом показали, что функция  $\varphi_0(z)$  есть непрерывная ветвь  $\text{Arg } z$  в области  $G$ . ■

Определим функции

$$\tilde{g}_0(z) \triangleq \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n}\varphi_0(z)}, \quad z \in G, \quad (16)$$

$$\tilde{h}_0(z) \triangleq \ln |z| + i\varphi_0(z), \quad z \in G, \quad (17)$$

где функция  $\varphi_0$  взята из формул (14), (15).

Очевидно, что это ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  соответственно, причем в силу леммы 3 эти ветви непрерывны в области  $G$ .

**Теорема 1.** В односвязной области  $G$  такой, что  $0 \notin G$ , существуют непрерывные ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$ , при этом все они являются регулярными функциями вида

$$g_k(z) = \tilde{g}_0(z) e^{\frac{2\pi ki}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (18)$$

$$h_k(z) = \tilde{h}_0(z) + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (19)$$

где функции  $\tilde{g}_0$  и  $\tilde{h}_0$  взяты из выражений (16), (17).

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что непрерывные функции  $\tilde{g}_0$  и  $\tilde{h}_0$  являются регулярными в данной области  $G$ .

Зафиксируем произвольную точку  $z_1 \in G$ , и пусть  $r > 0$  такое, что  $B_r(z_1) \subset G$ . Так как  $0 \notin B_r(z_1)$ , то существует луч  $\lambda_{\psi_0}$ , не пересекающий круг  $B_r(z_1)$ . Итак, в силу включения  $B_r(z_1) \subset (\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}) \cap G$ , выполнены условия пункта 1 *Простейший случай* и по лемме 1, в которой описаны все непрерывные ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  в круге  $B_r(z_1) \subset (\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0})$ , существуют номера  $k_*$ ,  $k_{**} \in \mathbb{Z}$  такие, что

$$\tilde{g}_0(z) = g_*(z) e^{\frac{2\pi k_* i}{n}}, \quad \forall z \in B_r(z_1),$$

и

$$\tilde{h}_0(z) = h_*(z) + 2\pi k_{**} i, \quad \forall z \in B_r(z_1),$$



т. е. функции  $\tilde{g}_0, \tilde{h}_0$  регулярны в данной окрестности точки  $z_1$ . Так как точка  $z_1$  была выбрана произвольной из области  $G$ , то функции  $\tilde{g}_0$  и  $\tilde{h}_0$  регулярны в области  $G$ .

Далее, повторяя рассуждения доказательства леммы 1, легко показать, что все непрерывные ветви указанных функций являются регулярными функциями и имеют вид (18), (19). ■

Приведем еще одну формулу представления регулярных ветвей многозначной функции  $\text{Ln } z$ .

**Следствие 2.** *Всякая регулярная ветвь  $h_k$  (см. (19)) многозначной функции  $\text{Ln } z$  в односвязной области  $G$  такой, что  $0 \notin G$ , удовлетворяет равенству (формуле Ньютона–Лейбница):*

$$h_k(z) = h_k(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in G, \quad (20)$$

где интеграл берется по любому контуру, лежащему в области  $G$ , с началом в произвольной фиксированной точке  $z_0 \in G$  и концом в точке  $z \in G$ .

**Доказательство.** Отметим, что справедливо равенство

$$\text{Re} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln |z| - \ln |z_0|. \quad (21)$$

В самом деле,

$$\text{Re} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^t \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} d\tau = \int_0^t \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln |z(t)| - \ln |z(0)|,$$

что и доказывает равенство (21). Отсюда и из формул (14), (15), (17) и (19) получаем

$$\begin{aligned} h_k(z) &= \ln |z| + i(\psi_0 + \Delta_\gamma \arg z + 2\pi k) = \\ &= \ln |z| - \ln |z_0| + (\ln |z_0| + i(\psi_0 + 2\pi k)) + i\Delta_\gamma \arg z = \\ &= \text{Re} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} + h_k(z_0) + i \text{Im} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = h_k(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Упражнение 1.** Получите формулу (20) как следствие теоремы 2 о первообразной из § 10.

## § 16. Регулярные ветви многозначных функций $\text{Ln } f(z)$ и корня

В данном параграфе будем рассматривать функции  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющие следующему предположению.

**Предположение 1.** Функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G \subset \mathbb{C}$ , причем

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in G. \quad (1)$$

В этом случае определим в области  $G$  две многозначные функции:

$$\text{Ln } f(z) \triangleq \ln |f(z)| + i \text{Arg } f(z), \quad (2)$$

$$\{ \sqrt[n]{f(z)} \} \triangleq \sqrt[n]{|f(z)|} e^{\frac{i}{n} \text{Arg } f(z)}, \quad (3)$$

где  $\text{Arg } f(z) \triangleq \{ \arg f(z) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .

Исследуем при каких условиях, кроме предположения 1, у многозначных функций (2) и (3) существуют в области  $G$  регулярные ветви, а также какой вид эти регулярные ветви имеют.

**Определение 1.** Пусть для простого непрерывного контура  $\gamma$ , принадлежащего области  $G$ , задана параметризация вида  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $z(\cdot) \in C[0, 1]$ . Обозначим через  $\Gamma$  образ контура  $\gamma$  при отображении регулярной функцией  $f$ , т. е.  $\Gamma \triangleq f(\gamma)$ . Очевидно, что контур  $\Gamma$  может быть задан параметризацией вида  $w = w(t) \triangleq f(z(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ . В силу (1)  $0 \notin \Gamma$ . Приращением аргумента функции  $f$  вдоль контура  $\gamma$  назовем действительное число

$$\Delta_\gamma \arg f(z) \triangleq \Delta_\Gamma \arg w = \Delta_{[0,1]} \arg w(t). \quad (4)$$

Из этого определения, из определения 1 § 14 и теорем 1–2 § 14, очевидно, следует

**Лемма 1.** Пусть функции  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  в области  $G$  удовлетворяют предположению 1, и пусть выбран простой непрерывный контур  $\gamma \subset G$ . Тогда

1) справедливо равенство

$$\Delta_\gamma \arg (f_1(z)f_2(z)) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z); \quad (5)$$

2) если простой непрерывный контур  $\gamma$  разбит некоторой точкой  $A$  на два контура  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , т. е.  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , (см. рис. 32), то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_{\gamma_1} \arg f(z) + \Delta_{\gamma_2} \arg f(z). \quad (6)$$

В частности, если  $\gamma$  — кусочно-гладкий контур, где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — две его гладкие компоненты, то справедливо равенство (6);

3) для любого кусочно-гладкого контура  $\gamma$  справедлива формула

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \text{Im} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \text{Im} \int_\gamma \frac{f'(z) dz}{f(z)}. \quad (7)$$

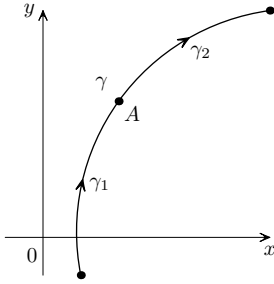


Рис. 32

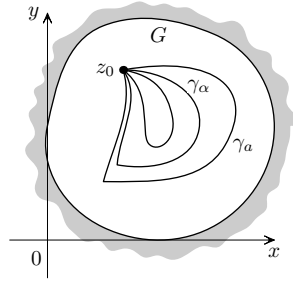


Рис. 33

**Лемма 2.** Пусть функция  $f$  удовлетворяет в области  $G$  предположению 1. Если область  $G$  односвязна, то для любого простого замкнутого непрерывного контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$  справедливо равенство

$$\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = 0. \quad (8)$$

**Доказательство.** В силу определения 4 § 14 лемму достаточно доказать для случая, когда контур  $\overset{\circ}{\gamma}$  является гладким. Тогда из односвязности области  $G$  следует, что для любой точки  $z_0 \in \overset{\circ}{\gamma}$  существует функция  $z(t, \alpha) \subset G$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in [a, b]$ , осуществляющая непрерывную деформацию контура  $\overset{\circ}{\gamma}$  (задаваемого функцией  $t \rightarrow z(t, a)$ ) в точку  $z_0 \equiv z(t, b)$  (см. рис. 33). В свою очередь, функция  $f(z(t, \alpha))$  задает непрерывную деформацию контура  $\overset{\circ}{\Gamma} = f(\overset{\circ}{\gamma})$  в точку  $w_0 = f(z_0)$ .

При этом в силу предположения 1  $f(z(t, \alpha)) \neq 0 \forall t, \alpha$ . Следовательно, по теореме 3 § 14 получаем

$$I(\alpha) \triangleq \Delta_{[0,1]} \arg f(z(t, \alpha)) = \text{const},$$

т. е.  $\Delta_{\gamma} \arg f(z) = \Delta_{[0,1]} \arg f(z(t, a)) = \Delta_{[0,1]} \arg f(z_0) = 0$ . ■

**Лемма 3.** Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 1. Если в области  $G$  существуют регулярные ветви  $g_0$  или  $h_0$  многозначных функций  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  или  $\text{Ln } f(z)$  соответственно, то все непрерывные ветви этих многозначных функций в области  $G$  могут быть представлены в виде

$$g_k(z) = g_0(z) e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k \in \overline{0, n-1}, \quad (9)$$

$$h_k(z) = h_0(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

при этом они описывают все регулярные ветви в области  $G$  многозначных функций  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  и  $\text{Ln } f(z)$  соответственно.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 § 15. ■

**Лемма 4.** Пусть функция  $f$  в односвязной области  $G$  удовлетворяет предположению 1 и такова, что для любого простого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$  справедливо равенство (8). Тогда в области  $G$  существуют непрерывные ветви многозначной функции  $\text{Arg } f(z)$ , причем все они представимы в виде

$$\begin{cases} \varphi_k(z) = \varphi_0(z) + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_0(z) = \psi_0 + \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z) \end{cases} \quad (11)$$

при произвольном выборе начальной точки  $a \in G$  и угла  $\psi_0 \in \text{Arg } f(a)$ , причем  $\gamma_{az} \subset G$  есть произвольный кусочно-гладкий контур с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ .

Доказательство. В силу выполнения равенства (8), легко показать, что значение  $\varphi_0(z)$  из формулы (11) не зависит от выбора контура  $\gamma_{az}$ , т. е. является функцией точки  $z$ . Также легко показать, что из определения 1 следует, что приведенные в (11) функции  $\varphi_k$  удовлетворяют включению  $\varphi_k(z) \in \text{Arg } f(z) \forall z \in G, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Пусть  $\overset{\circ}{\gamma}$  — замкнутый кусочно-гладкий контур

в  $G$ . В силу формулы (21) из § 15 для замкнутого контура  $\Gamma = f(\overset{\circ}{\gamma})$  справедливо равенство  $\text{Re} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = 0$ . Отсюда и в силу формулы (7) из леммы 1 равенство (8) эквивалентно равенству

$$\int_{\overset{\circ}{\gamma}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = i\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = 0, \quad \forall \overset{\circ}{\gamma} \subset G.$$

Следовательно, по теореме о первообразной (теорема 2 § 10) можно утверждать, что функция  $\Phi(z) \triangleq \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$  является регулярной функцией в области  $G$ . Так как к тому же справедливо равенство  $\varphi_0(z) = \psi_0 + \text{Im } \Phi(z)$ , то функция  $\varphi_0$  непрерывна на области  $G$ .

Покажем, что формула (11) описывает все непрерывные ветви  $\text{Arg } f(z)$  в области  $G$ . Пусть задана некоторая непрерывная ветвь  $\tilde{\varphi}(z)$  многозначной функции  $\text{Arg } f(z)$  в области  $G$ . Тогда по определению  $\text{Arg } f(z)$  для любого  $z \in G$  найдется номер  $k(z) \in \mathbb{Z}$  такой, что

$$\tilde{\varphi}(z) - \varphi_0(z) = 2\pi k(z). \quad (12)$$

Слева в равенстве (12) стоит непрерывная функция, справа — функция с дискретными значениями. Это возможно лишь, если  $k(z) = k_0 = \text{const}$ , что и доказывает формулу (11). ■

**Лемма 5.** Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 1. Если в области  $G$  существует регулярная ветвь  $h$  многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$ , то для любых  $a, b \in G$  справедлива формула

$$h(b) = h(a) + \ln \left| \frac{f(b)}{f(a)} \right| + i\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z), \quad (13)$$

где  $\gamma_{ab}$  — произвольный кусочно-гладкий контур в  $G$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ .

**Доказательство.** Для заданной в условии леммы регулярной ветви  $h$  многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$  в силу определения справедливо выражение

$$h(z) = \ln |f(z)| + i \text{Im } h(z), \quad (14)$$

т. е.  $\operatorname{Im} h(z)$  есть непрерывная ветвь многозначной функции  $\operatorname{Arg} f(z)$  (см. формулу (2)), точнее,  $\operatorname{Im} h(z)$  является гармонической функцией действительных переменных  $x$  и  $y$ .

Допустим, что заданный контур  $\gamma_{ab}$  гладкий и  $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  — его гладкая параметризация. Тогда  $\operatorname{Im} h(z(t))$  есть гладкая ветвь многозначной функции  $\operatorname{Arg} f(z(t))$ . По теореме 1 § 14 и по определению 1 § 14 получаем

$$\Delta_{[0,1]} \arg f(z(t)) = \operatorname{Im} h(b) - \operatorname{Im} h(a).$$

В случае, когда контур  $\gamma_{ab}$  является кусочно-гладким, это равенство также справедливо (следует еще воспользоваться леммой 1). Отсюда по определению 1 получаем

$$\operatorname{Im} h(b) - \operatorname{Im} h(a) = \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z). \quad (15)$$

Из равенств (14) и (15) следует

$$h(b) - h(a) = \ln |f(b)| - \ln |f(a)| + i \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z). \quad \blacksquare$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 1. Чтобы в области  $G$  существовали регулярные ветви многозначной функции  $\operatorname{Ln} f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого простого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$  выполнялось равенство (8).

*Доказательство. Необходимость.* Берем контур  $\overset{\circ}{\gamma}$  с началом и концом в одной точке  $a = b$ . По лемме 5 из формулы (13) получаем равенство (8).

*Достаточность.* Зафиксируем произвольные точку  $a \in G$  и значение  $h(a) \in \operatorname{Ln} f(a)$ . Определим для произвольной точки  $z \in G$  и для произвольного кусочно-гладкого контура  $\gamma_{az}$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$  выражение

$$h(z) = h(a) + \ln \left| \frac{f(z)}{f(a)} \right| + i \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z). \quad (16)$$

Легко показать, что в силу равенства (8) значение  $h(z)$  не зависит от выбора контура  $\gamma_{az} \subset G$ , а определяется лишь выбором конечной точки  $z$ , т. е.  $h$  является функцией. Кроме того, очевидно, что  $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z) \forall z \in G$ .

Так как  $h(a) = \ln |f(a)| + i\psi_0$ , где  $\psi_0$  есть некоторое значение  $\text{Arg } f(a)$ , то из (16) получаем, что

$$h(z) = \ln |f(z)| + i(\psi_0 + \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z)), \quad (17)$$

т. е. в силу леммы 4 функция  $h$  есть непрерывная ветвь многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$  в области  $G$ . Докажем ее регулярность в области  $G$ . Достаточно доказать, что в произвольной точке  $z_1 \in G$  функция  $h$  является регулярной.

Обозначим  $w_1 \triangleq f(z_1)$ . По предположению 1  $w_1 \neq 0$ , т. е. существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $0 \notin B_\varepsilon(w_1)$ . В силу непрерывности функции  $f$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что образ круга  $B_\delta(z_1) \subset G$  содержится в круге  $B_\varepsilon(w_1)$ , т. е.  $f(B_\delta(z_1)) \subset B_\varepsilon(w_1)$ . Как показано в § 15, у многозначной функции  $\text{Ln } w$  в односвязной области  $B_\varepsilon(w_1)$ , не содержащей нуль, существует регулярная ветвь  $\tilde{h}(w)$ , удовлетворяющая условию  $\tilde{h}(w_1) = h(z_1)$ . Тогда суперпозиция регулярных функций вида  $\tilde{h}(f(z))$  есть регулярная ветвь функции  $\text{Ln } f(z)$  в круге  $B_\delta(z_1)$ , причем  $\tilde{h}(f(z_1)) = h(z_1)$ . В силу леммы 3 об общем виде непрерывных ветвей многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$  в области  $B_\delta(z_1)$  и в силу совпадения значений этих непрерывных ветвей в точке  $z_1$  получаем, что  $h(z) \equiv \tilde{h}(f(z))$  при  $z \in B_\delta(z_1)$ , т. е. функция  $h$  регулярна в круге  $B_\delta(z_1)$ . ■

**Лемма 6.** Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 1. Если в области  $G$  существует регулярная ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ , то для любых  $a, b \in G$  справедлива формула

$$g(b) = g(a) \sqrt[n]{\left| \frac{f(b)}{f(a)} \right|} e^{\frac{i}{n} \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)}, \quad (18)$$

где  $\gamma_{ab}$  — произвольный кусочно-гладкий контур в  $G$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ .

**Доказательство.**

1) Допустим, что область  $G$  односвязна. Тогда по лемме 2 выполнено условие (8). Пусть выбраны точка  $a \in G$  и угол  $\psi_0 \in \text{Arg } f(a)$ . По теореме 1 существует регулярная в области  $G$

ветвь  $h$  многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$  такая, что  $\text{Im } h(a) = \psi_0$ . Определим функцию  $g_0(z) \triangleq e^{\frac{1}{n}h(z)}$ . Очевидно, что она регулярна в  $G$ . В силу (2) и (17) функция  $g_0$  принимает вид

$$g_0(z) = \sqrt[n]{|f(z)|} e^{\frac{i}{n}(\psi_0 + \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z))}, \quad g_0(a) = \sqrt[n]{|f(a)|} e^{\frac{i}{n}\psi_0}.$$

Следовательно, функция  $g_0$  есть некоторая регулярная ветвь многозначной функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  в области  $G$ . Для заданной в условии леммы 6 функции  $g$  в силу леммы 2 существует  $k_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $n-1$  такое, что

$$g(z) = g_0(z) e^{\frac{2\pi k_0 i}{n}}, \quad z \in G,$$

т. е.

$$g(z) = \sqrt[n]{|f(z)|} e^{\frac{i}{n}(\psi_0 + 2\pi k_0 + \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z))},$$

откуда и следует формула (18).

2) Пусть область  $G$  неодносвязна. Пусть  $a, b$  и контур  $\gamma_{ab} \subset G$  заданы по условию. Разобьем данный контур  $\gamma_{ab}$  точками  $z_0 = a, z_1, \dots, z_k = b$  на малые сегменты  $\gamma_{z_l z_{l+1}}$  такие, что каждый из них лежит в некоторой односвязной подобласти в области  $G$ , где в силу доказанного в пункте 1) справедлива формула

$$\frac{g(z_{l+1})}{g(z_l)} = \sqrt[n]{\left| \frac{f(z_{l+1})}{f(z_l)} \right|} e^{\frac{i}{n} \Delta_{\gamma_{z_l z_{l+1}}} \arg f(z)}. \quad (19)$$

Перемножая равенства (19) при всех  $l$  от 0 до  $k-1$ , получаем

$$\frac{g(b)}{g(z_{k-1})} \cdot \frac{g(z_{k-1})}{g(z_{k-2})} \cdot \dots \cdot \frac{g(z_1)}{g(a)} = \sqrt[n]{\left| \frac{f(b)}{f(a)} \right|} e^{\frac{i}{n} \sum_{l=0}^{k-1} \Delta_{\gamma_{z_l z_{l+1}}} \arg f(z)},$$

откуда в силу леммы 1 следует равенство (18). ■

**Теорема 2.** Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 1. Чтобы в области  $G$  существовали регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$  нашлось целое число  $k_{\overset{\circ}{\gamma}}$  такое, что

$$\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = (2\pi n) k_{\overset{\circ}{\gamma}}. \quad (20)$$



*Доказательство.* Необходимость условия (20) следует из леммы 6, так как при  $a = b$  и при  $\gamma_{ab} = \overset{\circ}{\gamma}$  в силу (18) имеем  $e^{\frac{i}{n}\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z)} = 1$ , что влечет равенство (20).

*Достаточность.* Зафиксируем точку  $a \in G$  и значение  $g(a) \in \{\sqrt[n]{f(a)}\}$ . Определим для произвольной точки  $z \in G$  и для произвольного кусочно-гладкого контура  $\gamma_{az} \subset G$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ ) выражение

$$g(z) = g(a) \cdot \sqrt[n]{\left| \frac{f(z)}{f(a)} \right|} e^{\frac{i}{n}\Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z)}, \quad (21)$$

которое в силу равенства (20) не зависит от выбора контура  $\gamma_{az} \subset G$ , т. е. является функцией от  $z$  в области  $G$ . Очевидно также, что справедливо включение

$$g(z) \in \{\sqrt[n]{f(z)}\}, \quad \forall z \in G.$$

Покажем, что функция  $g$ , определенная в (21), регулярна в  $G$ . Зафиксируем произвольную точку  $z_1 \in G$ , и пусть число  $r > 0$  таково, что  $B_r(z_1) \subset G$ . Тогда из формулы (21) следует выражение

$$g(z) = g(z_1) \cdot \sqrt[n]{\left| \frac{f(z)}{f(z_1)} \right|} e^{\frac{i}{n}\Delta_{\gamma_{z_1 z}} \arg f(z)}, \quad \forall z \in B_r(z_1). \quad (22)$$

Формулу (22) можно переписать в виде  $g(z) = e^{\frac{1}{n}h(z)}$ , где функция  $h$  соответственно вычисляется по формуле

$$h(z) = \ln |f(z)| + i(\psi_1 + \Delta_{\gamma_{z_1 z}} \arg f(z)), \quad \forall z \in B_r(z_1), \quad (23)$$

причем здесь  $\psi_1 \in \text{Arg } f(z_1)$ , соответствующее значению  $g(z_1) = \sqrt[n]{|f(z_1)|} e^{\frac{i}{n}\psi_1}$ .

Так как для любого замкнутого контура  $\overset{\circ}{\gamma} \subset B_r(z_1)$  в силу леммы 2 справедливо равенство (8), то по теореме 1 в области  $B_r(z_1)$  функция  $h$  из (23) является регулярной ветвью многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$ , и поэтому функция  $g$  как суперпозиция двух регулярных есть регулярная ветвь функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  в круге  $B_r(z_1)$ . В силу произвольности точки  $z_1$  отсюда следует утверждение теоремы. ■

**Следствие 1.** Пусть в области  $G$  для функции  $f$ , удовлетворяющей предположению 1, существуют регулярные ветви  $h$  или  $g$  многозначных функций  $\operatorname{Ln} f(z)$  или  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  соответственно. Тогда производные этих ветвей вычисляются по формулам

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad g'(z) = \frac{f'(z)}{n(g(z))^{n-1}}. \quad (24)$$

**Доказательство.** В самом деле, данные функции регулярны и удовлетворяют тождествам

$$e^{h(z)} \equiv f(z), \quad g^n(z) \equiv f(z).$$

Дифференцируя эти тождества, получаем формулы (24). ■

*Замечание 1.* Из лемм 5 и 6 следует, что каждая регулярная ветвь многозначных функций  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  и  $\operatorname{Ln} f(z)$  в заданной области  $G$  однозначно определяется заданием своего значения в одной произвольной точке  $a \in G$ .

### § 17. Примеры нахождения регулярных ветвей

В этом параграфе проиллюстрируем результаты предыдущего параграфа на примерах.

**Пример 1.** Исследовать существование регулярных ветвей многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$  в области  $G \triangleq \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ . Для регулярной ветви  $g$  этой функции такой, что  $g_1(2) = \sqrt[4]{24i}$ , вычислить значения  $g_1(i)$  и  $g'_1(i)$ .

**Решение.** Проверим выполнение условий теоремы 2 из § 16 о существовании регулярных ветвей данной многозначной функции в заданной области  $G$ .

Функция  $f(z) \triangleq z^3(z+1)$  регулярна и  $f(z) \neq 0$  в области  $G$ . Пусть  $\overset{\circ}{\gamma}$  — замкнутый кусочно-гладкий контур, лежащий в области  $G$ , заданный с помощью кусочно-гладкой параметризации  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $z(0) = z(1) = z_0 \in G$ . Так как  $z(t) \in G$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , то  $z(t) \neq \alpha$  для каждого  $\alpha \in [-1, 0]$ .

Определим функцию  $z(t, \alpha) \triangleq z(t) - \alpha$ , где  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in [-1, 0]$ . Это непрерывная деформация (см. определение 3 § 14) в области  $G$ , причем  $z(t, \alpha) \neq 0 \forall t, \alpha$  и  $\frac{z(1, \alpha)}{z(0, \alpha)} = \frac{z_0 - \alpha}{z_0 - \alpha} \equiv 1$  при всех  $\alpha \in [-1, 0]$ . По свойству устойчивости к деформации (теорема 3 § 14) получаем, что

$$I(\alpha) \equiv \Delta_{[0,1]} \arg z(t, \alpha) = \text{const} \quad \forall \alpha \in [-1, 0].$$

Таким образом,  $I(0) = I(-1)$ , т. е.

$$\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg z = \Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg(z+1). \quad (1)$$

Отсюда и по логарифмическому свойству (теорема 2 § 14) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg z^3(z+1) &= 3\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg z + \Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg(z+1) \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} 4\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg z = 4(2\pi k_{\overset{\circ}{\gamma}}) = (2\pi \cdot 4)k_{\overset{\circ}{\gamma}}, \end{aligned}$$

т. е. выполнены все условия теоремы 2 § 16, откуда следует, что в области  $G$  существуют регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$ .

По формуле (21) § 16 регулярная ветвь  $g$  имеет вид

$$g_1(z) = (24)^{1/4} \cdot i \cdot \sqrt[4]{\left| \frac{z^3(z+1)}{24} \right|} e^{i(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z+1))}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — контур с началом в точке  $a = 2$  и концом в точке  $z$ .

Таким образом, для вычисления значения  $g_1(i)$  возьмем отрезок  $\gamma = [2, i]$  и вычислим вдоль него приращения аргументов  $z$  и  $z + 1$ . Так как приращение аргумента  $z$  вдоль кривой  $\gamma$  есть угол поворота радиус-вектора  $\overrightarrow{0z}$  при непрерывном движении  $z$  по кривой  $\gamma$  от начальной точки к конечной, то (см. рис. 34) получаем, что  $\Delta_\gamma \arg z = \frac{\pi}{2}$ . В свою очередь, приращение аргумента  $z + 1$  вдоль кривой  $\gamma$  есть угол поворота радиус-вектора  $\overrightarrow{(-1)z}$  при непрерывном движении  $z$  по кривой  $\gamma$  от начальной точки к конечной, то (см. рис. 34) получаем, что  $\Delta_\gamma \arg(z + 1) = \frac{\pi}{4}$ . В итоге, в силу (2) получаем  $g_1(i) = 2^{\frac{1}{8}} \cdot e^{\frac{15}{16}\pi i}$ .

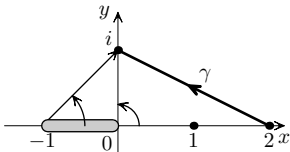


Рис. 34

Так как из формулы (24) § 16 следует, что  $g_1'(z) = \frac{4z^3 + 3z^2}{4(g_1(z))^3}$ , то

$$g_1'(i) = \frac{-3 - 4i}{4} \cdot 2^{-\frac{3}{8}} \cdot e^{-\frac{13}{16}\pi i}.$$

**Пример 2.** Исследовать существование регулярных ветвей у многозначной функции  $\text{Ln} \frac{z}{z+1}$  в области  $G \triangleq \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [0, +\infty))$ . Описать значения регулярной ветви  $h$  этой функции с начальным условием  $h(-\frac{1}{2}) = i\pi$ . Вычислить  $h(i)$ ,  $h'(i)$ .

**Решение.** Здесь функция  $f(z) \triangleq \frac{z}{z+1}$  регулярна и  $f(z) \neq 0$  в области  $G$ . Так как данная область  $G$  является односвязной, то по лемме 2 § 16 справедливо равенство (8) § 16. Следовательно, выполнены условия теоремы 1 § 16 о существовании регулярных ветвей данной многозначной функции. Более того, регулярная ветвь, удовлетворяющая заданным усло-

виям, имеет вид (см. формулу (13) в § 16)

$$h(z) = i\pi + \ln \frac{\left| \frac{z}{z+1} \right|}{\left| \frac{-1/2}{1-1/2} \right|} + i(\Delta_\gamma \arg z - \Delta_\gamma \arg(z+1)), \quad (3)$$

где  $\gamma$  — кусочно-гладкий контур в области  $G$  с началом в точке  $a = -1/2$  и концом в точке  $z$ . В частности, вычисляя соответствующие приращение аргумента  $z$  и приращение аргумента  $z+1$ , получаем из формулы (3)

$$h(i) = i\pi + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

Используя формулу (24) § 16 о дифференцировании регулярных ветвей логарифма, получаем

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z(z+1)}, \quad \text{т. е.} \quad h'(i) = -\frac{1+i}{2}.$$

**Пример 3.** Пусть задана регулярная ветвь  $h$  многозначной функции  $\text{Ln}(1-z^2)$  в комплексной плоскости с разрезом по лучу действительной оси  $(-\infty, 1]$  такая, что  $\text{Im } h\left(\frac{i}{5}\right) = 0$ . Разложить функцию  $h$  в ряд Тейлора с центром в точке  $a = -i$ . Найти радиус сходимости полученного степенного ряда. Вычислить сумму ряда и его производную в точке  $z = \frac{i}{5}$ .

**Решение.** Так как заданная область  $G \triangleq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$  односвязна, а функция  $f(z) \triangleq 1-z^2$  регулярна и  $f(z) \neq 0$  в этой области, то в силу леммы 2 § 16 и теоремы 1 § 16 регулярные ветви функции  $\text{Ln}(1-z^2)$  существуют в данной области  $G$ . Так как  $h\left(\frac{i}{5}\right) = \ln \left| 1 - \left(\frac{i}{5}\right)^2 \right| + i \text{Im } h\left(\frac{i}{5}\right)$ , то  $h\left(\frac{i}{5}\right) = \ln \frac{26}{25}$ . По формуле (13) § 16 вычислим значение  $h(-i)$ :

$$\begin{aligned} h(-i) &= \ln \frac{26}{25} + \ln \left| \frac{1-i^2}{26/25} \right| + i(\Delta_\gamma \arg(z-1) + \\ &\quad + \Delta_\gamma \arg(z+1) + \Delta_\gamma \arg(-1)) = \\ &= \ln 2 + i \left( -\left( 2\pi - \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{5} \right) + \left( -\arctg \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \ln 2 - 2\pi i. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma$  есть кусочно-гладкий контур с началом в точке  $\frac{i}{5}$  и концом в точке  $-i$ .

Для разложения функции  $h$  в ряд Тейлора с центром в точке  $-i$  сделаем замену переменного. Пусть  $\zeta = z+i$ . Тогда  $h(z) = h(\zeta - i) = \tilde{h}(\zeta)$ , причем  $\tilde{h}(0) = h(-i) = \ln 2 - 2\pi i$ . По определению ветви логарифма получаем

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta) \in \text{Ln} (1 - (\zeta - i)^2) &= \text{Ln} \left( 2 \left( 1 - \frac{\zeta}{1+i} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{i-1} \right) \right) = \\ &= \text{Ln} 2 + \text{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{1+i} \right) + \text{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{i-1} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Как показано нами ранее (см. пример 4 § 9), многозначная функция  $\text{Ln}(1+z)$  в круге  $B_1(0)$  имеет регулярные ветви, для которых были выписаны ряды Тейлора. Поэтому в круге  $|\zeta| < \sqrt{2}$  многозначные функции  $\text{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{1+i} \right)$  и  $\text{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{i-1} \right)$  также имеют регулярные ветви. В частности, возьмем их регулярные ветви  $h_+(\zeta)$  и  $h_-(\zeta)$ , соответственно, такие, чтобы  $h_+(0) = h_-(0) = 0$ . Тогда по формуле (15) § 9 их ряды Тейлора в круге  $|\zeta| < \sqrt{2}$  имеют вид

$$h_+(\zeta) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta^k}{k(1+i)^k}, \quad h_-(\zeta) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta^k}{k(i-1)^k}, \quad (6)$$

причем радиус сходимости этих рядов равен  $R = \sqrt{2}$ . Из включения (5) в силу (6) получаем включение  $\tilde{h}(\zeta) - h_+(\zeta) - h_-(\zeta) \in \text{Ln} 2$ , т. е.

$$\tilde{h}(\zeta) - h_+(\zeta) - h_-(\zeta) = \ln 2 + 2\pi k(\zeta)i. \quad (7)$$

Так как слева в равенстве (7) стоит непрерывная функция, а справа — ступенчатая, то заключаем, что  $k(\zeta) = \text{const}$ . Положив  $\zeta = 0$ , получаем в силу (4), что  $k(\zeta) \equiv -1$ .

Объединяя выражения (6) и (7), получаем представление функции  $h$  в виде степенного ряда

$$h(z) = \ln 2 - 2\pi i - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{(1+i)^k} + \frac{1}{(i-1)^k} \right) (z+i)^k. \quad (8)$$

Уточним, при каких  $z$  справедливо равенство (8). Приведенный в формуле (8) степенной ряд, очевидно, является регулярной ветвью функции  $\text{Ln}(1 - z^2)$  в круге сходимости ряда  $|z + i| < \sqrt{2}$ . Обозначим сумму этого ряда через  $S(z)$  при  $z \in B_{\sqrt{2}}(-i)$ . Заданная на  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1)$  функция  $h$  на разрезе  $(-1, 1)$  имеет разрыв. В самом деле, при  $x \in (-1, 1)$  для любого контура  $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus G$ , с началом на нижнем краю разреза в точке  $x - i0$  и концом на верхнем краю разреза в точке  $x + i0$  и совершающего обход точки  $z = 1$  справа, по формуле (13) § 16 получаем

$$h(x + i0) = h(x - i0) + i(\Delta_\gamma \arg(z - 1) + \Delta_\gamma \arg(z + 1)) = \\ = h(x - i0) + i(2\pi + 0).$$

При  $x < -1$  аналогично доказывается, что  $h(x + i0) = h(x - i0) + 4\pi i$ . Следовательно, равенство (8) имеет место лишь на множестве  $\{z \mid |z + i| < \sqrt{2}, \text{Im } z < 0\}$ . В свою очередь на множестве  $\{z \mid |z + i| < \sqrt{2}, \text{Im } z > 0\}$  за счет скачка значений функции  $h(z)$  при пересечении границы области  $G$  получаем равенство  $h(z) = S(z) + 2\pi i$ . В частности,  $S\left(\frac{i}{5}\right) = h\left(\frac{i}{5}\right) - 2\pi i = \ln \frac{26}{25} - 2\pi i$ .

Так как функция  $S(z)$  является регулярной ветвью многозначной функции  $\text{Ln}(1 - z^2)$  в круге  $B_{\sqrt{2}}(-i)$ , то по формуле (24) из § 16 для регулярной ветви логарифма получаем

$$S'(z) = \frac{-2z}{1 - z^2}, \quad \text{т. е.} \quad S'\left(\frac{i}{5}\right) = -\frac{5i}{13}. \quad \blacksquare$$

Распространим формулу степени, известную для действительных чисел, на комплексные числа, используя многозначную функцию  $\text{Ln } z$ .

**Определение 1.** Пусть  $a, b \in \mathbb{C}$ , причем  $a \neq 0$ . Тогда определим множество комплексных чисел  $\{a^b\}$  по формуле

$$\{a^b\} = e^{b \text{Ln } a}. \quad (9)$$

**У п р а ж н е н и е 1.** Покажите, что в случаях, когда  $b = n$  и когда  $b = \frac{1}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , множества  $\{a^b\}$  в (9) совпадают с определенными ранее в § 1 степенью  $a^n$  и корнем  $\{\sqrt[n]{a}\}$ , причем множество  $\{a^n\}$  состоит из одной точки.

**Пример 4.** Зафиксируем число  $b \in \mathbb{C}$ ,  $b \notin \mathbb{N}$ . Исследуем существование регулярных ветвей многозначной функции  $\{(1+z)^b\}$  в круге  $B_1(0)$ .

**Решение.** В силу определения 1 у многозначной функции  $\{(1+z)^b\}$  существуют регулярные ветви, так как, очевидно, существуют регулярные ветви у функции  $\text{Ln}(1+z)$  в круге  $B_1(0)$ , которые будем обозначать  $h_k(z)$ , где  $h_k(0) = 2\pi ki$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тогда соответствующие регулярные ветви многозначной функции  $\{(1+z)^b\}$  принимают вид

$$w_k(z) = e^{bh_k(z)}, \quad w_k(0) = e^{2\pi kbi}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Вычислим коэффициенты ряда Тейлора функции  $w_k(z)$  в круге  $B_1(0)$ . По правилу дифференцирования сложной функции (теорема 1 §5) получаем

$$\begin{aligned} w'_k(z) &= w_k(z) \cdot \frac{b}{1+z}, \quad \text{т. е.} \quad w'_k(0) = b \cdot w_k(0), \\ w''_k(z) &= w_k(z) \cdot \frac{b(b-1)}{(1+z)^2}, \quad \text{т. е.} \quad w''_k(0) = b(b-1) \cdot w_k(0), \\ w_k^{(n)}(z) &= w_k(z) \cdot \frac{b(b-1)\dots(b-n+1)}{(1+z)^n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из соотношений (11) и из формулы для коэффициентов ряда Тейлора с центром в точке нуль получаем

$$w_k(z) = w_k(0) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} C_b^n z^n, \quad (12)$$

где  $C_b^n \triangleq \frac{b(b-1)\dots(b-n+1)}{n!}$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Исследуйте, существуют ли у многозначной функции  $\{(1+z)^b\}$  в круге  $B_1(0)$  другие регулярные ветви, кроме ветвей вида (10).

**Пример 5.** Разложить в ряд Тейлора по степеням  $z$  регулярную ветвь  $g(z)$  многозначной функции  $\{\sqrt[3]{1-z^2}\}$  в области  $B_1(0)$  с начальным значением  $g(0) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ .

По формуле (12) сразу получаем ответ (при  $b = \frac{1}{3}$ ):

$$g(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^n (-1)^n z^{2n}, \quad z \in B_1(0).$$



**Пример 6.** Установить существование регулярных ветвей многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$  в области  $\overset{\circ}{B}_1(\infty)$ , разложить эти ветви в ряд Лорана по степеням  $z$ .

**Решение.** Так как множество  $\overset{\circ}{B}_1(\infty) \subset \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ , то, как показано в примере 1, регулярные ветви функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$  в области  $G_1 = \overset{\circ}{B}_1(\infty)$  существуют, при этом они определяются своим значением в одной произвольно выбранной точке  $z_0 \in G_1$ .

Пусть  $z_0 = 2$ , тогда любая регулярная ветвь  $g_k(z)$  определяется из значения  $g_k(2) = \sqrt[4]{24}e^{\frac{2\pi ki}{4}}$ , т. е.  $g_k(z) = e^{\frac{\pi ki}{2}} \cdot g_0(z)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Для всякого действительного числа  $x > 2$  получаем в силу (18) § 16 формулу

$$g_0(x) = \sqrt[4]{x^3(x+1)} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z+1))}.$$

В этой формуле контур  $\gamma$  есть отрезок  $[2, x]$ , поэтому  $\Delta_\gamma \arg z = 0$ ,  $\Delta_\gamma \arg(z+1) = 0$ , откуда  $g_0(x) = \sqrt[4]{x^3(x+1)}$ , т. е. значения функции при действительных  $x > 2$  совпадает с арифметическим значением корня. Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора функции действительного переменного, получим при  $x > 2$ :

$$g_0(x) = x \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} = x \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{1}{x^n}. \quad (13)$$

Так как регулярные в области  $\overset{\circ}{B}_1(\infty)$  функция  $g_0(z)$  и сумма ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{1}{z^{n-1}}$  равны на действительной полуоси  $x > 2$ , то по теореме единственности регулярной функции (см. теорему 1 § 10) указанные функции равны в  $\overset{\circ}{B}_1(\infty)$ . В итоге получаем равенство

$$g_k(z) = e^{\frac{\pi ki}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{1}{z^{n-1}}, \quad |z| > 1, \quad (14)$$

которое в силу теоремы 2 § 11 о единственности разложения в ряд Лорана является представлением регулярной ветви  $g_k$  искомым рядом Лорана в окрестности бесконечности.

## § 18. Примеры вычисления интегралов от регулярных ветвей многозначных функций

При вычислении с помощью теории вычетов интегралов от действительных функций, являющихся ветвями многозначных функций (таких как корень или логарифм), основной проблемой является построение областей в комплексной плоскости, в которых существуют регулярные ветви этих многозначных функций, и контуров интегрирования, при использовании которых можно получить решение исходной задачи.

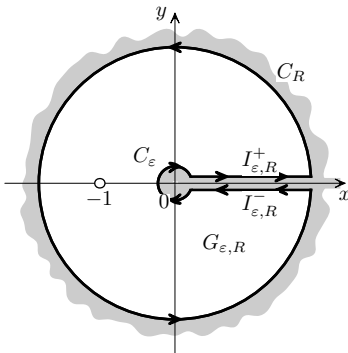


Рис. 35

Определим области  $G \triangleq \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  и  $G_{\varepsilon, R} \triangleq \{z \in G \mid \varepsilon < |z| < R\}$ , где  $0 < \varepsilon < 1 < R$ . В области  $G$  у многозначной функции  $\text{Ln } z$  существует регулярная ветвь вида  $h(z) = \ln |z| + i \arg z$ , а у функции  $\{\sqrt[3]{z}\}$  существует регулярная ветвь вида  $g(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{\frac{i}{3} \arg z}$ , где в обоих случаях  $\arg z \in (0, 2\pi)$ . Определим функцию

$$f(z) \triangleq \frac{h(z)}{(1+z)^2 g(z)},$$

и рассмотрим ее в односвязной области  $G_{\varepsilon, R}$  (см. рис. 35). Очевидно, что эта функция  $f$  регулярна в области  $G_{\varepsilon, R} \setminus \{-1\}$  и непрерывно продолжима вплоть до границы  $\gamma_{\varepsilon, R}$  области  $G_{\varepsilon, R}$ . При этом предельное значение функции  $f$  на верхнем берегу  $I_{\varepsilon, R}^+$  разреза по отрезку  $[\varepsilon, R]$  равно

$$f(x + i0) = \frac{\ln x}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}}, \quad x \in I_{\varepsilon, R}^+. \quad (1)$$

**Пример 1.** Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}}.$$

**Решение.** Для вычисления этого интеграла с помощью вычетов в комплексной области мы вынуждены рассматривать многозначные функции  $\text{Ln } z$  и  $\{\sqrt[3]{z}\}$ .

Предельное значение функции  $f$  на нижнем берегу  $I_{\varepsilon, R}^-$  разреза равно

$$f(x - i0) = \frac{\ln x + 2\pi i}{(1+x)^2 \sqrt[3]{xe^{\frac{2\pi i}{3}}}}, \quad x \in I_{\varepsilon, R}^-. \quad (2)$$

Точка  $z = -1$  является полюсом 2-го порядка функции  $f$ . По теореме о вычетах и по формуле (4) из § 13 получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{res}_{-1} f = 2\pi i \frac{d}{dz} \left[ \frac{h(z)}{g(z)} \right]_{z=-1} = \\ &= 2\pi i \frac{g(z)h'(z) - h(z)g'(z)}{g^2(z)} \Big|_{z=-1} = 2\pi i \frac{\frac{1}{z}g(z) - \frac{1}{3}\frac{g(z)}{z}h(z)}{g^2(z)} \Big|_{z=-1} = \\ &= \left( -1 + \frac{i\pi}{3} \right) \cdot 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{3}}. \quad (3) \end{aligned}$$

С другой стороны, разбивая контур  $\gamma_{\varepsilon, R}$  на гладкие компоненты, т. е.  $\gamma_{\varepsilon, R} = I_{\varepsilon, R}^+ \cup I_{\varepsilon, R}^- \cup C_{\varepsilon} \cup C_R$ , где  $C_{\varepsilon}$  и  $C_R$  — окружности с центром в нуле радиусов  $\varepsilon$  и  $R$  соответственно, имеем

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = \left( \int_{I_{\varepsilon, R}^+} + \int_{I_{\varepsilon, R}^-} + \int_{C_{\varepsilon}} + \int_{C_R} \right) f(z) dz.$$

В итоге в силу равенств (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz &= \\ &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}} + \int_R^{\varepsilon} \frac{\ln x + 2\pi i}{(1+x)^2 \sqrt[3]{xe^{\frac{2\pi i}{3}}}} dx + \int_{C_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \\ &= \left( 1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}} - 2\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}} \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}} + \\ &\quad + \int_{C_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz. \quad (4) \end{aligned}$$

Покажем, что интеграл  $\int_{C_\varepsilon} f(z) dz \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и интеграл  $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow +\infty$ . Для этого получим оценки

$$\left| \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|\ln \varepsilon| + 2\pi}{(1-\varepsilon)^2 \varepsilon^{1/3}} \varepsilon d\varphi \leq \frac{(|\ln \varepsilon| + 2\pi) 2\pi \varepsilon}{(1-\varepsilon)^2 \varepsilon^{1/3}} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|\ln R| + 2\pi}{(R-1)^2 R^{1/3}} R d\varphi \sim 2\pi \frac{|\ln R|}{R^{4/3}} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Итак, в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow +\infty$  из формул (3)–(6) получаем равенство

$$\left(-1 + \frac{i\pi}{3}\right) 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) J - 2\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}} \tilde{J},$$

где  $\tilde{J} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}}$ , т. е.

$$\left(-1 + \frac{i\pi}{3}\right) \pi = \sin \frac{\pi}{3} \cdot J - \pi \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) \tilde{J}. \quad (7)$$

Приравняв в равенстве (7) действительные и мнимые части, получаем два уравнения

$$-\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} J - \frac{\pi}{2} \tilde{J}, \quad \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \tilde{J} = \frac{\pi^2}{3},$$

откуда

$$\tilde{J} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad J = \left(\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} - \pi\right) \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл вида

$$J = \int_0^2 \frac{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}{(1+x)^2} dx$$

Р е ш е н и е. Чтобы вычислить этот интеграл с помощью теории вычетов, необходимо продолжить подинтегральную функцию в комплексную плоскость. Однако при этом корень становится многозначной функцией  $\{\sqrt[4]{z^3(2-z)}\}$ . Поэтому необходимо, чтобы у этой многозначной функции существовали регулярные ветви. Последняя проблема разрешима, так как эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области  $G = \mathbb{C} \setminus [0,2]$ , выполнены все условия теоремы 2 § 16. (Проверьте самостоятельно аналогично примеру 1 из §17.)

Выберем теперь такую регулярную ветвь этого корня, которая в пределе на верхнем берегу  $I^+$  разреза по отрезку  $[0,2]$  принимает значения арифметического корня  $\sqrt[4]{x^3(2-x)} \geq 0$ ,  $x \in [0,2]$ . Для этого выбираем регулярную в области  $\mathbb{C} \setminus [0,2]$  ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(2-z)}\}$  такую, что ее предел в точке  $z = 1$  из верхней полуплоскости равен

$$g(1 + i0) = 1. \quad (8)$$

Тогда очевидно, что предельное значение ветви в любой точке  $x \in (0,2)$  из верхней полуплоскости ( т.е. на берегу  $I^+$  разреза) равно  $g(x + i0) = \sqrt[4]{x^3(2-x)} > 0$ . Предельное значение функции  $g$  в точках  $x \in (0,2)$  из нижней полуплоскости, т.е. на берегу  $I^-$  разреза по отрезку  $[0,2]$ , принимает по формуле (18) § 16 значение

$$\begin{aligned} g(x - i0) &= \sqrt[4]{|x^3(2-x)|} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(2-z))} = \\ &= g(x + i0) e^{\frac{i}{4}(3 \cdot 2\pi + 0)} = g(x + i0) e^{\frac{3}{2}\pi i}. \end{aligned} \quad (9)$$

В формуле (9) контур  $\gamma$  начинается в точке  $1 + i0$  на верхнем берегу разреза и оканчивается в точке  $x - i0$  на нижнем берегу разреза.

Пусть  $\varepsilon \in (0,1)$ . Рассмотрим в области  $G$  контур  $\gamma_\varepsilon$ , имеющий вид *гантели* (см. рис. 36), т.е. составленный из окружностей  $C_{0\varepsilon}$  и  $C_{2\varepsilon}$  радиуса  $\varepsilon$  и центрами в точках 0 и 2 соответственно, а также двух берегов  $I_\varepsilon^+$  и  $I_\varepsilon^-$  разреза по отрезку  $[\varepsilon, 2 - \varepsilon]$ .

Ориентируем полученный контур  $\gamma_\varepsilon$  положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости

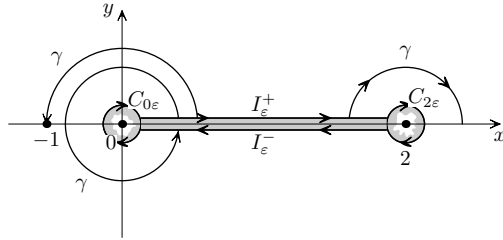


Рис. 36

(см. рис. 36). Пусть  $f(z) \triangleq \frac{g(z)}{(1+z)^2}$ . Так как функцию  $f$  можно непрерывно продолжить на контур  $\gamma_\epsilon$ , то рассмотрим интеграл

$$J_\epsilon \triangleq \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz.$$

По теореме о вычетах, с одной стороны, и из формы контура  $\gamma_\epsilon$  с другой, получаем равенства

$$J_\epsilon = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{-1} f + \operatorname{res}_\infty f \right) = \left( \int_{I_\epsilon^+} + \int_{I_\epsilon^-} + \int_{C_{0\epsilon}} + \int_{C_{2\epsilon}} \right) f(z) dz. \quad (10)$$

Так как точка  $z = -1$  есть полюс 2-го порядка функции  $f$  то, воспользовавшись соответствующей формулой (4) § 13 и формулой (24) § 16, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-1} f &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} [(z+1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{dg(z)}{dz} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{(z^3(2-z))'}{4g^3(z)} \right] = \frac{5}{2g^3(-1)}. \end{aligned}$$

Вычислим значение  $g(-1)$ . Взяв контур  $\gamma$  с началом в точке  $1+i0$ , лежащей на верхнем крае  $I_\epsilon^+$ , и концом в точке  $-1$ , по формуле (18) § 16 получаем

$$g(-1) = \sqrt[4]{3} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(2-z))} = \sqrt[4]{3} e^{\frac{i}{4}(\pi \cdot 3 + 0)}.$$

В итоге

$$\operatorname{res}_{-1} f = \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Для вычисления  $\operatorname{res}_\infty f$  выпишем ряд Лорана по степеням  $z$  функции  $f$  в окрестности  $\infty$ . Пусть  $z = x -$  произвольное дей-

ствительное число такое, что  $x > 2$ . Тогда по той же формуле (18) § 16 получаем (здесь контур  $\gamma$  с началом в точке  $1 + i0$  на  $I_\varepsilon^+$  и концом в точке  $x > 2$ )

$$g(x) = \sqrt[4]{x^3(x-2)} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z-2))} = \\ = x \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x}} e^{\frac{i}{4}(0-\pi)} = e^{-\frac{\pi i}{4}} x \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \left(-\frac{2}{x}\right)^n.$$

Аналогично тому, как это доказано в примере 5 § 17, отсюда и из теоремы единственности § 10 следует равенство

$$g(z) = e^{-\frac{\pi i}{4}} z \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{(-2)^n}{z^n}, \quad |z| > 2. \quad (11)$$

Для удобства вычислений в силу формулы (11) преобразуем функцию  $f$  к виду

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2} h(z), \quad \text{где } h(z) = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{(-2)^n}{z^n}. \quad (12)$$

Так как по формуле (12) из § 17 справедливо следующее разложение в сходящийся при  $|z| > 1$  ряд:

$$\frac{z}{(1+z)^2} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \dots\right), \quad (13)$$

то, перемножая ряды (12) и (13), получаем, что

$$\operatorname{res}_\infty f = -h(\infty) = -e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Оценим интегралы по окружностям  $C_{0\varepsilon} = \{z \mid |z| = \varepsilon\}$  и  $C_{2\varepsilon} = \{z \mid |z-2| = \varepsilon\}$ :

$$\left| \int_{C_{0\varepsilon}} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[4]{|\varepsilon^3(2+\varepsilon)|}}{(1-\varepsilon)^2} \varepsilon d\varphi \leq A \cdot \varepsilon^{7/4} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\left| \int_{C_{2\varepsilon}} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[4]{(2+\varepsilon)^3 \varepsilon}}{(3-\varepsilon)^2} \varepsilon d\varphi \leq B \cdot \varepsilon^{5/4} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу формул (8) и (9) получаем выражения

$$\int_{I_\varepsilon^+} f dz = \int_\varepsilon^{2-\varepsilon} \frac{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}{(1+x)^2} dx,$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f dz = \int_{2-\varepsilon}^\varepsilon \frac{g(x-i0)}{(1+x)^2} dx = -\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} \frac{g(x+i0)e^{\frac{3}{2}\pi i}}{(1+x)^2} dx = -e^{\frac{3}{2}\pi i} \int_{I_\varepsilon^+} f dz.$$

Переходя в формуле (10) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем равенство

$$2\pi i \left( \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} - 1 \right) e^{-\frac{\pi}{4}i} = J \left( 1 - e^{\frac{3}{2}\pi i} \right),$$

т. е.

$$\pi \left( \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2i} J, \quad J = \sqrt{2}\pi \left( \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} - 1 \right).$$

*Замечание 1.* Здесь был приведен общий метод вычисления интегралов типа  $\beta$ -функции. Решение же конкретного примера 2 можно было упростить. Так как подинтегральная функция  $f$  непрерывно продолжаема на границу области  $G = \mathbb{C} \setminus [0,2]$  (с различными значениями на верхнем и нижнем берегах разреза  $(0,2)$ ), включая концевые точки 0 и 2, то вместо интеграла по "гантели"  $\gamma_\varepsilon$  можно было по теории вычетов вычислять интеграл по двум берегам  $I^+$  и  $I^-$  разреза по всему отрезку  $[0,2]$ .

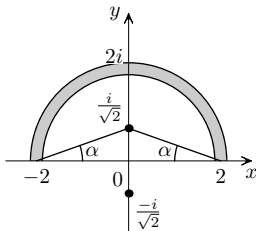


Рис. 37

Если бы функция корня (8) стояла в знаменателе подинтегральной функции  $f$ , то без «гантели»  $\gamma_\varepsilon$  не обойтись.

**Пример 3.** Пусть регулярная ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt{z^2 - 4}\}$  определена в области  $G$ , представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности  $|z| = 2$ ,  $\text{Im } z \geq 0$  (см. рис. 37), причем главная часть ряда Лорана функции  $g$  в окрестности  $z = \infty$  равна  $z$ . Вычислить интеграл



$$J = \int_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

**Решение.** Аналогично предыдущим примерам прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции  $\{\sqrt{z^2 - 4}\}$ . (Докажите это самостоятельно.)

Для вычисления интеграла  $J$  по теории вычетов надо найти особые точки подинтегральной функции, т. е. точки, в которых справедливо равенство  $g(z) = 3z$ . Чтобы их найти, заметим, что из этого равенства следует  $g^2(z) = (3z)^2$ . Так как по определению корня  $g^2(z) = z^2 - 4$ , то получаем равенство  $z^2 - 4 = 9z^2$ , т. е.  $z_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$  — точки, в которых возможно равенство  $g(z) = 3z$ .

Вычислим значения  $g\left(\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ . Для этого удобно вначале вычислить значение функции  $g$  в конечной точке, например, в точке  $z = 0$ . Допустим, что мы знаем значение  $g(0)$ . Тогда для любого действительного числа  $x > 2$  вычислим значение  $g(x)$  по формуле (18) § 16 (взяв контур  $\gamma$ , идущий из точки  $z = 0$  в точку  $x$ ):

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) \sqrt{\left| \frac{x^2 - 4}{4} \right|} e^{\frac{i}{2}(\Delta_\gamma \arg(z-2) + \Delta_\gamma \arg(z+2))} = \\ &= g(0) \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} e^{\frac{i}{2}(\pi+0)} = \frac{i}{2} g(0) \cdot x \left( 1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение получено с помощью ряда Тейлора для функции действительного переменного. По теореме о единственности регулярной функции (теорема 1 § 10) отсюда следует, что

$$g(z) = \frac{i}{2} g(0) \left( z - \frac{2}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad |z| > 2.$$

Так как по условию задачи главная часть ряда Лорана функции  $g$  в  $\infty$  равна  $z$ , отсюда получаем, что  $g(0) = -2i$ . Теперь по

формуле (18) § 16 легко вычислить значения  $g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$  и  $g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ :

$$g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -2i\sqrt{\left|\frac{-0,5-4}{4}\right|} e^{\frac{i}{2}(-\operatorname{arccctg} 2\sqrt{2} + \operatorname{arccctg} 2\sqrt{2})} = -\frac{3i}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично  $g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3i}{\sqrt{2}}$ . Отсюда знаменатель  $(g(z) - 3z)$  обращается в нуль только в точке  $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ . Так как  $g'(z) = \frac{z}{g(z)}$ , то  $g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \neq 3$ . Таким образом, точка  $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$  есть полюс 1-го порядка подинтегральной функции  $f(z) = \frac{1}{g(z)-3z}$ . В итоге вычисляем интеграл по теореме о вычетах

$$J = 2\pi i \operatorname{res}_{-\frac{i}{\sqrt{2}}} f = 2\pi i \frac{1}{g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) - 3} = -\frac{3\pi i}{4}.$$

## § 19. Целые и мероморфные функции

**Определение 1.** Функция  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , регулярная во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , называется *целой*.

По теореме 2 § 9 целая функция  $f$  представима в виде сходящегося во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| < +\infty, \quad (1)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta. \quad (2)$$

Очевидно, что ряд (1) одновременно является рядом Лорана функции  $f$  с центром в точке  $\infty$ .

**Теорема 1.** Пусть для целой функции  $f$  существуют числа  $A > 0$ ,  $R_1 > 0$  и целое  $m \geq 0$ , при которых справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq A|z|^m, \quad \forall z : |z| > R_1. \quad (3)$$

Тогда функция  $f$  является многочленом степени не выше, чем  $m$ .

**Доказательство.** По формуле (2) для коэффициентов  $c_n$  при  $r > R_1$  получаем оценку

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{Ar^m}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = Ar^{m-n}. \quad (4)$$

Так как неравенство (4) справедливо для любых  $r > R_1$ , то при  $n > m$  из оценки (4) следует, что  $|c_n|$  меньше сколь угодно малого числа  $Ar^{m-n}$  (при  $r \rightarrow \infty$ ), т. е.  $c_n = 0$  при  $n > m$ . Следовательно, из ряда (1) получаем, что функция  $f$  есть многочлен степени не выше, чем  $m$ . ■

**Следствие 1 (теорема Лиувилля).** Если целая функция  $f$  ограничена в некоторой окрестности бесконечности, то она постоянна.

С помощью теоремы Лиувилля докажем *основную теорему алгебры*.

**Теорема 2.** *Всякий многочлен*

$$P_n(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n,$$

где  $c_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ , имеет по крайней мере один нуль в плоскости  $\mathbb{C}$ .

**Доказательство.** Допустим противное, пусть многочлен  $P_n$  не равняется нулю ни при каком  $z \in \mathbb{C}$ . Тогда определим функцию  $g(z) \triangleq \frac{1}{P_n(z)}$ , которая в силу допущения будет целой. При  $z \rightarrow \infty$  имеем  $P_n(z) \rightarrow \infty$ , т. е.  $g(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Следовательно, функция  $g$  ограничена в некоторой окрестности  $\overset{\circ}{B}_{R_1}(\infty)$ . Тогда по теореме Лиувилля функция  $g(z) \equiv \text{const}$ , что противоречит определению функции  $g$ . ■

Анализируя поведение произвольной целой функции  $f$  на бесконечности, получаем три возможности:

- 1)  $\infty$  — устранимая особая точка, т. е. функция  $f$  ограничена в некоторой окрестности  $\overset{\circ}{B}_{R_1}(\infty)$ , откуда по теореме Лиувилля следует, что  $f(z) \equiv \text{const}$ ;
- 2)  $\infty$  — полюс, т. е. существует  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ . Это значит, что главная часть разложения функции  $f$  в ряд Лорана по степеням  $z$  в окрестности  $\infty$ , который совпадает с рядом (1), содержит конечное число слагаемых, т. е. функция  $f$  есть многочлен;
- 3)  $\infty$  — существенно особая точка.

**Определение 2.** Целая функция, у которой бесконечность является существенно особой точкой, называется *целой трансцендентной функцией*.

Примерами целых трансцендентных функций являются функции  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\text{sh } z$ ,  $\text{ch } z$ .

**Теорема 3 (Сохоцкий).** Пусть задана произвольная целая трансцендентная функция  $f$ . Тогда для любого  $A \in \overline{\mathbb{C}}$  найдется последовательность  $\{z_n\}$ , стремящаяся к бесконечности, и такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $A = \infty$ . Так как для любого  $n \in \mathbb{N}$  на множестве  $|z| > n$  функция  $f$  не ограничена (в противном случае  $\infty$  была

бы устранимой особой точкой функции  $f$ , т. е. функция  $f$  не была бы трансцендентной), то существует точка  $z_n, |z_n| > n$ , такая, что  $|f(z_n)| > n$ . В итоге получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$ , что и требовалось доказать.

2. Пусть  $A \neq \infty$ . Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют числа  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\delta_0 > 0$  такие, что для всех  $z, |z| > \delta_0$  справедливо неравенство  $|f(z) - A| > \varepsilon_0$ .

Рассмотрим функцию  $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ . Она в силу допущения регулярна в области  $\overset{\circ}{B}_{\delta_0}(\infty)$ , причем в этой области справедлива оценка  $|g(z)| < 1/\varepsilon_0$ . То есть  $\infty$  есть устранимая особая точка функции  $g$ , поэтому существует предел  $B = \lim_{z \rightarrow \infty} g(z)$ , где  $B \in \mathbb{C}$ . Так как  $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$ , то функция  $f$  тоже при  $z \rightarrow \infty$  имеет конечный предел, если  $B \neq 0$ , или бесконечный предел, если  $B = 0$ . Это противоречит условию теоремы, по которому  $\infty$  есть существенно особая точка функции  $f$ . Следовательно, наше допущение оказывается неверным, и теорема доказана. ■

**У п р а ж н е н и е 1.** Пусть для целой функции  $f$  существуют числа  $A > 0$ ,  $R_1 > 0$  и целое  $m \geq 0$ , при которых справедливо неравенство

$$|f(z)| \geq A|z|^m, \quad \forall z : |z| > R_1.$$

Докажите, что тогда  $f$  является многочленом. (Сравните с теоремой 1.)

*Замечание 1.* Так как при доказательстве теоремы Сохоцкого используется лишь то, что бесконечность есть существенно особая точка функции  $f$ , то аналогично можно доказать следующую более общую теорему.

**Теорема 4 (Сохоцкий).** Пусть функция  $f : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна, а точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  — существенно особая точка функции  $f$ . Тогда для любого числа  $A \in \overline{\mathbb{C}}$  найдется последовательность  $\{z_n\}$ , сходящаяся к точке  $a$ , и такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

Более сильный результат, характеризующий поведение целой трансцендентной функции, описан в следующей теореме, которую приводим без доказательства.

**Теорема 5 (Пикар).** Пусть задана целая трансцендентная функция  $f$ . Тогда в каждой окрестности бесконечности функция  $f$  принимает, и притом бесконечное число раз, любое значение из  $\mathbb{C}$ , кроме, быть может, одного.

Иначе говоря, теорема Пикара утверждает, что если  $f$  — целая трансцендентная функция, то для всякого  $A \in \mathbb{C}$ , за исключением, быть может, одного, уравнение  $f(z) = A$  имеет бесконечное число решений  $\{z_n\}$ . При этом в следствие теоремы единственности  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

Рассмотрим, например, функцию  $w = e^z$ . Для любого  $A \neq 0$  уравнение  $e^z = A$  имеет решения  $z_n = \ln |A| + i(\arg_{\text{гл}} A + 2\pi n)$ , где  $\arg_{\text{гл}} A \in (-\pi, \pi]$ ,  $n$  — любое целое число. Здесь число  $A = 0$  является как раз тем исключительным по теореме Пикара значением.

**Определение 3.** Функция  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *мероморфной*, если для каждого  $R > 0$  она регулярна в круге  $B_R(0)$ , за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

Приведем примеры мероморфных функций.

- 1) Рациональные функции вида  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ , где  $P_n(z)$  и  $Q_m(z)$  — многочлены степени  $n$  и  $m$  соответственно. Эта функция имеет конечное число полюсов в  $\mathbb{C}$ .
- 2) Функция  $\text{ctg } z = \frac{\cos z}{\sin z}$  имеет счетное число полюсов 1-го порядка в точках  $z_k = \pi k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Функция  $\frac{z}{e^z - 1}$  имеет полюсы 1-го порядка в точках  $z_k = 2\pi k i$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ .

Пусть задана мероморфная функция  $f$  и пусть  $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$  — все ее полюсы. Для каждого полюса  $z_k \in \mathbb{C}$  порядка  $m_k$  найдется проколотая окрестность  $\overset{\circ}{B}_{\delta_k}(z_k)$ , в которой функция  $f$  представима в виде сходящегося ряда Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-m_k}^k}{(z - z_k)^{m_k}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{z - z_k} + c_0^k + c_1^k(z - z_k) + \dots \quad (5)$$

Обозначим главную часть этого ряда Лорана с центром в точке  $z_k$  через  $q_k(z)$ , т. е.

$$q_k(z) \triangleq \frac{c_{-m_k}^k}{(z - z_k)^{m_k}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{z - z_k}. \quad (6)$$

**Теорема 6.** *Если мероморфная функция  $f$  имеет в бесконечности устранимую особую точку или полюс, то она является рациональной функцией.*

**Доказательство.** Число всех полюсов такой функции  $f$  конечно, так как иначе, в силу компактности расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  будет существовать предельная точка полюсов, которая в силу определения мероморфной функции не может быть конечной точкой и не может быть бесконечностью (это противоречит условию теоремы). Обозначим через  $\{z_k\}_{k=1}^l$  все конечные полюсы функции  $f$ , через  $q_k$  — главную часть (6) каждого ряда Лорана функции  $f$  с центром в точке  $z_k$ . Обозначим также

$$q_0(z) \triangleq c_1 z + \dots + c_n z^n$$

главную часть ряда Лорана функции  $f$  с центром в бесконечности. Определим функцию

$$r(z) \triangleq f(z) - \sum_{k=0}^l q_k(z).$$

Эта функция в силу своего определения в каждой точке  $z_k$ , где  $k \in \overline{1, l}$ , а также в бесконечности имеет устранимые особенности. Поэтому, если доопределить ее в этих точках по непрерывности, и так как других особенностей у функции  $r$  нет, то получаем, что функция  $r$  является целой и ограниченной в некоторой окрестности бесконечности. По теореме Лиувилля это означает, что  $r(z) \equiv a_0$ . Таким образом, справедливо равенство

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=0}^l q_k(z), \quad (7)$$

т. е. функция  $f$  является рациональной. ■

*Замечание 2.* В теореме 6 также доказана формула (7), широко употребляемая в математическом анализе, о возможности представления рациональной функции  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$  в виде суммы элементарных дробей.

Покажем, как утверждение теоремы 6 можно развить на случай мероморфной функции со счетным числом полюсов.

**Определение 4.** Систему простых замкнутых кусочно-гладких положительно ориентированных контуров  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  назовем правильной, если выполнены три условия:

- 1) Для любого  $n$  область, ограниченная контуром  $\Gamma_n$  содержится внутри области, ограниченной контуром  $\Gamma_{n+1}$ , причем точка 0 содержится внутри контура  $\Gamma_1$ .
- 2) Обозначим  $d_n \triangleq \min\{|z| \mid z \in \Gamma_n\}$ . Требуется, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$ .
- 3) Обозначим  $l_n \triangleq$  длина контура  $\Gamma_n$ . Требуется, чтобы существовало число  $A > 0$  такое, что  $l_n \leq Ad_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Приведем простейшие примеры правильных систем контуров.

1. Окружности с центрами в точке 0 и радиусами  $R_n = n \in \mathbb{N}$ .
2. Квадраты с центрами в точке 0 и диагоналями длины  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 7 (Коши).** Пусть для заданной мероморфной функции  $f$  существует правильная система контуров  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  такая, что выполнены два дополнительных условия:

1. Обозначим  $\varepsilon_n \triangleq \max\{|f(z)| \mid z \in \Gamma_n\}$ . Требуется, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ .
2. Полюсы  $\{z_k\}$  функции  $f$  пронумерованы так, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  область, ограниченная контуром  $\Gamma_n$ , содержит ровно  $n$  первых по порядку полюсов функции  $f$ , причем на самом контуре  $\Gamma_n$  полюсов функции  $f$  нет.

Тогда функция  $f$  представима в виде суммы ряда элементарных дробей вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k(z), \quad (8)$$



где функции  $q_k$  определены в формуле (6). Более того, для любого  $R > 0$  в круге  $B_R(0)$ , из которого выброшены точки полюсов функции  $f$ , ряд (8) сходится равномерно.

**Доказательство.** Для всякого  $n \in \mathbb{N}$  определим функции

$$S_n(z) \triangleq \sum_{k=1}^n q_k(z), \quad (9)$$

$$r_n(z) \triangleq f(z) - S_n(z). \quad (10)$$

Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . Внутри контура  $\Gamma_n$  по условию теоремы содержится ровно  $n$  различных полюсов  $z_1, z_2, \dots, z_n$  функции  $f$ . В силу определений (9), (10) для функции  $r_n$  каждая точка  $z_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , является устранимой особой точкой, так как ее ряд Лорана в проколотой  $\delta_k$ -окрестности точки  $z_k$  есть разность между суммой ряда Лорана функции  $f$  в этой окрестности и  $S_n(z)$  — суммой главных частей рядов Лорана функции  $f$  с центрами в полюсах, в том числе и с центром в данной точке  $z_k$ . Доопределив функцию  $r_n$  в каждой точке  $z_k$  при  $k \in \overline{1, n}$  соответствующим значением предела, получаем, что функция  $r_n$  регулярна внутри  $\Gamma_n$  и непрерывна на замыкании области, ограниченной контуром  $\Gamma_n$ . По интегральной формуле Коши (теорема 1 § 8) в любой точке  $z$ , принадлежащей области, ограниченной контуром  $\Gamma_n$ , получаем

$$r_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{r_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (11)$$

Вычислим  $I_{1n}(z) \triangleq -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  с помощью вычетов (теорема 1 § 13). Здесь подинтегральная функция регулярна всюду, кроме полюсов в точках  $\zeta = z$ ,  $\zeta = z_1, \dots, \zeta = z_n$ . Вне контура  $\Gamma_n$  она регулярна, и поэтому

$$I_{1n}(z) = \operatorname{res}_{\infty} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Так как в силу равенств (6) и (9) получаем сумму

$$\frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \frac{c_{-l}^k}{(\zeta - z)(\zeta - z_k)^l},$$

в которой каждое слагаемое представимо в виде

$$\frac{c_{-l}^k}{(\zeta - z)(\zeta - z_k)^l} = c_{-l}^k \left( \frac{1}{\zeta^{l+1}} + o\left(\frac{1}{\zeta^{l+1}}\right) \right),$$

где  $l + 1 \geq 2$ , то по формуле вычетов (12) § 13 получаем

$$\operatorname{res}_{\infty} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} = 0, \text{ т. е. } I_{1n}(z) \equiv 0.$$

В итоге справедливо равенство

$$r_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

из которого получаем оценку

$$|r_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \leq \frac{l_n}{2\pi} \max \left\{ \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \mid \zeta \in \Gamma_n \right\}. \quad (12)$$

Зафиксируем произвольное число  $R > 0$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$  (по условию 2 определения 4), то найдется номер  $N_0$  такой, что для всех  $n \geq N_0$ ,  $d_n > 2R$ . В силу условия 3 определения 4 для всех  $z \in B_R(0)$  и всех  $n \geq N_0$  получаем оценку

$$|r_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon_n}{d_n - R} l_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R}{d_n}} \cdot \frac{l_n}{d_n} \leq \frac{\varepsilon_n}{\pi} A.$$

Отсюда и из равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  (условие 1 теоремы) следует, что последовательность функций  $r_n$  сходится равномерно на  $B_R(0)$  к нулю. Это значит, что последовательность функций  $S_n = f - r_n$  равномерно сходится к функции  $f$  в круге  $B_R(0)$  всюду, за исключением тех точек, где функция  $f$  не определена, т. е. за исключением точек ее полюсов. ■

**Следствие 2.** Пусть в теореме 7 выполнены все условия, за исключением условия 1, вместо которого выполнено условие:

1') существуют числа  $C > 0$  и  $m \in \mathbb{N}$  такие, что справедливо неравенство

$$\varepsilon_n \triangleq \max\{|f(z)| \mid z \in \Gamma_n\} \leq C \cdot (d_n)^m, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

где  $d_n$  — см. в определении 4. Тогда, если точка нуль не являлась полюсом функции  $f$ , то добавляя еще один достаточно малый круговой контур с центром в нуле, содержащийся внутри контура  $\Gamma_1$ , получаем, что для функции  $\frac{f(z)}{z^{m+1}}$  выполнены условия теоремы 7, по которой можно получить разложение ее в ряд элементарных дробей, откуда, в свою очередь, легко получается ряд элементарных дробей для функции  $f$ .

**Пример 1.** Разложить функцию  $w = \operatorname{ctg} z$  в ряд элементарных дробей.

**Решение.** Так как точки  $z_1 = 0, z_2 = \pi, z_3 = -\pi, z_4 = 2\pi \dots$ , — полюсы 1-го порядка, то строим правильную систему контуров  $\Gamma_n$  в виде квадратов (см. рис. 38).

Эта система квадратов правильная, так как  $d_n \geq (n-1)\frac{\pi}{2}, l_n = 4\pi n$ , т. е.  $l_n/d_n \leq 16$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Проверим условия теоремы 7.

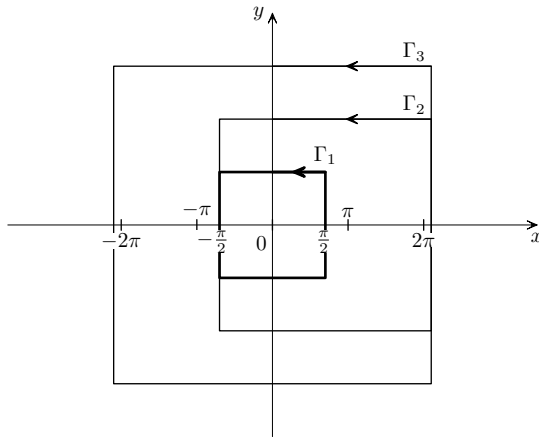


Рис. 38

1) Оценим  $\max\{|\operatorname{ctg} z| \mid z \in \Gamma_n\}$ .

На вертикальных сторонах квадрата  $\Gamma_n$ , имеющих вид:  $z = \frac{\pi}{2} + iy + \pi m$ , получаем

$$\frac{\left| \cos \left( \frac{\pi}{2} + iy + \pi m \right) \right|}{\left| \sin \left( \frac{\pi}{2} + iy + \pi m \right) \right|} = \frac{|\sin iy|}{|\cos iy|} = \left| \frac{e^{-y} - e^y}{e^{-y} + e^y} \right| \leq 1.$$

На горизонтальных сторонах квадрата  $\Gamma_n$ , имеющих вид:  $z = x + iy_n$ ,  $|y_n| = \frac{\pi}{2}m$ , получаем по формулам Эйлера

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|e^{ix-y_n} + e^{-ix+y_n}|}{|e^{ix-y_n} - e^{-ix+y_n}|} \leq \frac{|e^{ix-y_n}| + |e^{-ix+y_n}|}{||e^{ix-y_n}| - |e^{-ix+y_n}||} \leq \frac{e^{-y_n} + e^{y_n}}{|e^{-y_n} - e^{y_n}|} = \frac{1 + e^{-2|y_n|}}{1 - e^{-2|y_n|}} < 2.$$

В итоге, функция  $|\operatorname{ctg} z|$  ограничена на квадратах  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

2) Каждый квадрат  $\Gamma_n$  содержит внутри себя ровно  $n$  полюсов и на  $\Gamma_n$  нет полюсов.

Таким образом, функция  $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$  удовлетворяет всем условиям теоремы 7. Найдем главные части разложений в ряд Лорана функции  $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$  в ее в полюсах:

1. В полюсе  $z = 0$  получаем  $\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{\cos z}{z \sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \dots}{z^2 (1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)} = \frac{1}{z^2} + c_0 + \dots$ , т. е.  $q_0(z) = \frac{1}{z^2}$ .

2. Остальные полюсы  $z_k = \pi k$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , будут 1-го порядка, т. е.

$$q_k = \frac{\operatorname{res} f}{z - z_k}; \quad \operatorname{res} f = \frac{\cos z}{(\sin z)'} \Big|_{z=\pi k} = \frac{1}{\pi k}.$$

По теореме 7 получаем разложение в сумму ряда элементарных дробей

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{+\infty} \frac{1}{\pi k(z - \pi k)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{+\infty} \frac{(z - \pi k) + \pi k}{\pi k(z - \pi k)} = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{+\infty} \left( \frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z - \pi k} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{-\pi k} + \frac{1}{z + \pi k} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{z + \pi k} \right). \end{aligned}$$

## § 20. Аналитическое продолжение

Известны различные способы аналитического продолжения заданных функций. Простейший из них мы уже встречали при рассмотрении примеров по теореме единственности в § 10. Напомним его.

**Определение 1.** Пусть некоторая функция  $f$  задана на множестве  $E$ , а функция  $g$  регулярна в области  $G$ , содержащей множество  $E$ , причем

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in E. \quad (1)$$

Тогда функция  $g$  называется *аналитическим продолжением функции  $f$  с множества  $E$  на область  $G$* .

**Утверждение 1.** Если множество  $E$  содержит бесконечное число точек и имеет в области  $G$  по крайней мере одну предельную точку, то аналитическое продолжение функции  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  с множества  $E$  на область  $G$  единственно, т. е. если существует регулярная функция  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющая определению 1, то она единственна.

Данное утверждение, очевидно, следует из теоремы единственности регулярной функции (теорема 1 § 10).

Так, например, в § 10 мы рассмотрели аналитическое продолжение функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  с действительной оси на всю комплексную плоскость по формулам

$$e^z \triangleq e^x \cdot e^{iy}, \quad \sin z \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \triangleq \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Основные сложности аналитических продолжений связаны с рассмотрением многозначных функций, примерами которых являются  $\operatorname{Ln} z$  и  $\{\sqrt[n]{z}\}$ .

Приведем ряд определений.

**Определение 2.** Пусть выбраны точка  $a \in \mathbb{C}$  и круг  $B_r(a)$ ,  $r > 0$ , на котором задана регулярная функция  $f$ . Тогда пару  $(B_r(a), f)$  назовем *элементом*, а точку  $a$  назовем центром этого элемента.

**Определение 3.** Скажем, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента

$(B_r(a), f)$ , если  $B_r(a) \cap B_\rho(b) \neq \emptyset$  и  $f(z) = g(z), \forall z \in B_r(a) \cap B_\rho(b)$ .

Отметим, что при заданных элементе  $(B_r(a), f)$  и круге  $B_\rho(b)$  функция  $g$  на  $B_\rho(b)$ , если существует, то единственна (в силу теоремы единственности — теоремы 1 § 10).

**Определение 4.** Скажем, что два элемента  $(B_r(a), f)$  и  $(B_\rho(b), g)$  эквивалентны, если они имеют общий центр  $a = b$  и один из этих элементов является непосредственным аналитическим продолжением другого. То есть, если  $r < \rho$ , то  $f(z) = g(z)$  при всех  $z \in B_r(a)$ . Обозначаем  $(B_r(a), f) \sim (B_\rho(b), g)$

**Определение 5.** Скажем, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_r(a), f)$  через конечную цепочку кругов (также говорят: через конечную цепочку элементов), если существует конечный набор элементов  $(B_{r_1}(a_1), f_1), (B_{r_2}(a_2), f_2), \dots, (B_{r_n}(a_n), f_n)$  таких, что для каждого номера  $k \in \overline{2, n}$  элемент  $(B_{r_k}(a_k), f_k)$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_{r_{k-1}}(a_{k-1}), f_{k-1})$ , причем справедливы равенства

$$(B_{r_1}(a_1), f_1) = (B_r(a), f) \quad \text{и} \quad (B_{r_n}(a_n), f_n) = (B_\rho(b), g).$$

**Пример 1.** Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  сходится в круге  $B_1(0)$  и расходится при  $|z| \geq 1$ . При этом по теореме Вейерштрасса (см. § 9) сумма  $f_1$  данного ряда является регулярной в круге  $B_1(0)$  функцией, и, как показано в примере 1 § 9, она совпадает в этом круге  $B_1(0)$  с функцией  $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$ , которая определена и регулярна в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Таким образом, при любом  $a \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$  элемент  $(B_{|a-1|}(a), f_2)$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_1(0), f_1)$  (так как не пусто множество  $B_1(0) \cap B_{|a-1|}(a)$ , в котором эти функции совпадают). При любом действительном  $a > 1$  множество  $B_1(0) \cap B_{|a-1|}(a)$  пусто, но элемент  $(B_{|a-1|}(a), f_2)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_1(0), f_1)$  через цепочку кругов, так как, введя, например, еще один элемент  $(B_{|i-1|}(i), f_2)$ , мы убеждаемся, что

последний элемент является непосредственным аналитическим продолжением как элемента  $(B_1(0), f_1)$ , так и элемента  $(B_{|a-1|}(a), f_2)$ .

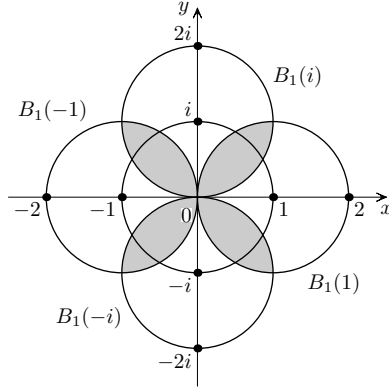


Рис. 39

**Пример 2.** Рассмотрим пять элементов, составленных из регулярных ветвей многозначной функции  $\{\sqrt{z}\}$ , вида  $(B_1(1), f_0)$ ,  $(B_1(i), f_{\pi/2})$ ,  $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$ ,  $(B_1(-1), f_\pi)$ ,  $(B_1(-1), f_{-\pi})$ , где  $f_s(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2} \arg_s z}$ , причем  $\arg_s z \in (s - \frac{\pi}{2}, s + \frac{\pi}{2})$ ,  $s = 0, \pm\pi/2, \pm\pi$ .

Легко убедиться, что в данных пяти элементах каждая функция  $f_s$  на соответствующем ей круге является регулярной ветвью многозначной функции  $\{\sqrt{z}\}$ , причем  $f_\pi(z) = -f_{-\pi}(z)$  при всех  $z \in B_1(-1)$ . В силу определения 3 элемент  $(B_1(i), f_{\pi/2})$  (также, как и элемент  $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$ ) является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_1(1), f_0)$ , так как на множестве  $B_1(1) \cap B_1(i)$  функции  $f_0$  и  $f_{\pi/2}$  равны (см. рис. 39).

Аналогично элемент  $(B_1(-1), f_\pi)$  есть непосредственное аналитическое продолжение элемента  $(B_1(i), f_{\pi/2})$ , а элемент

$(B_1(-1), f_{-\pi})$  есть непосредственное аналитическое продолжение элемента  $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$ . В итоге мы получили два различных элемента  $(B_1(-1), f_\pi)$  и  $(B_1(-1), f_{-\pi})$ , определенных в одном и том же круге, которые являются аналитиче-

скими продолжениями одного элемента  $(B_1(1), f_0)$ . Приведем еще один способ аналитического продолжения — продолжение вдоль контура.

**Определение 6.** Пусть  $(B_{r_1}(a), f)$  — начальный элемент, а  $\gamma_{ab}$  — кусочно-гладкий контур с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ , заданный через параметр его длины  $s$ , т. е.  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $z(0) = a$ ,  $z(l) = b$ . Скажем, что элемент  $(B_{r_2}(b), g)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_{r_1}(a), f)$  вдоль контура  $\gamma_{ab}$ , если существует число  $r > 0$ ,  $r \leq \min\{r_1, r_2\}$ , непрерывная функция  $\varphi : [0, l] \rightarrow \mathbb{C}$  и семейство элементов  $(B_r(z(s)), f_s)$ ,  $\forall s \in [0, l]$  такие, что

- а) для всякого  $s_0 \in [0, l]$  справедливо равенство  $f_{s_0}(z(s)) = \varphi(s)$  при всех  $s \in [0, l] \cap (s_0 - r, s_0 + r)$ .
- б)  $(B_r(z(0)), f_0) \sim (B_{r_1}(a), f)$  и  $(B_r(z(l)), f_l) \sim (B_{r_2}(b), g)$  — эквивалентность элементов.

Сформулированное в определении 6 условие по существу означает, что при выбранном значении  $s_0$  элемент  $(B_r(z(s)), f_s)$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_r(z(s_0)), f_{s_0})$  лишь для близких к  $s_0$  значений  $s$ , т. е. при  $|s - s_0| < r$ . Если же круг  $B_r(z(s_0))$  имеет непустое пересечение с кругом  $B_r(z(s_1))$  при далеком от  $s_0$  значении  $s_1$ , то может оказаться, что значения функций  $f_{s_0}$  и  $f_{s_1}$  различны в точках пересечения указанных выше кругов.

В разобранном нами ранее примере 2 начальный элемент  $(B_1(1), f_0)$ , очевидно, можно продолжить не только вдоль конечной цепочки кругов, но и вдоль контура — верхней полуокружности  $z = z_1(s) = e^{is}$ ,  $s \in [0, \pi]$ , с помощью семейства элементов  $(B_1(z_1(s)), f_s)$ , где для всех  $s \in [0, \pi]$  функция  $f_s$  определяется так же, как и в примере 2. В результате продолжения вдоль этого контура опять получаем конечный элемент  $(B_1(-1), f_\pi)$ . Если же начальный элемент  $(B_1(1), f_0)$  будем продолжать вдоль нижней полуокружности  $z = z_2(s) = e^{-is}$ ,  $s \in [0, \pi]$  с помощью семейства элементов  $(B_1(z_2(s)), f_{-s})$ , то получится конечный элемент  $(B_1(-1), f_{-\pi})$ . В этом случае, так же как и при продолжении вдоль трехзвенных цепочек кругов



в примере 2, конечные элементы  $(B_1(-1), f_\pi)$  и  $(B_1(-1), f_{-\pi})$  различны.

**Теорема 1.** *Понятия аналитических продолжений вдоль конечной цепочки кругов (по определению 5) и вдоль контура (по определению 6) эквивалентны. Т.е. для всякого аналитического продолжения вдоль конечной цепочки кругов найдется контур такой, что аналитическое продолжение вдоль этого контура приводит к тому же конечному элементу, что и при продолжении вдоль заданной конечной цепочки кругов. С другой стороны, для всякого аналитического продолжения вдоль контура найдется конечная цепочка кругов, такая, что аналитическое продолжение вдоль нее приводит к тому же элементу, что и при продолжении вдоль заданного контура.*

*Доказательство.*

1. Допустим, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_r(a), f)$  через некоторую конечную цепочку кругов. Пусть при этом получены элементы  $\{(B_{r_k}(a_k), f_k)\}$  (см. определение 5). Тогда в порядке возрастания номера  $k$  последовательно соединяем центры входящих в упорядоченную цепочку кругов отрезками и получаем ломаную  $\gamma_{ab}$ . При этом легко указать число  $r > 0$  такое, что всякий круг радиуса  $r$  с центром в произвольной точке, принадлежащей ломаной  $\gamma_{ab}$ , содержится по крайней мере в одном из кругов  $\{B_{r_k}(a_k)\}_{k=1}^n$ . Отсюда, в соответствии с определением 6, можно в каждой точке  $z(s)$  ломаной на круге  $B_r(z(s))$  задать элемент так, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  может быть получен в результате аналитического продолжения элемента  $(B_r(a), f)$  вдоль этой ломаной  $\gamma_{ab}$ .

2. Допустим, что элемент  $(B_{r_2}(b), g)$  получен из элемента  $(B_{r_1}(a), f)$  аналитическим продолжением вдоль кусочно - гладкого контура  $\gamma_{ab}$  (по определению 6).

Пусть контур  $\gamma_{ab}$  через параметр его длины  $s$  задается функцией  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $z(0) = a$ ,  $z(l) = b$ . По определению 6 существует бесконечное семейство элементов  $(B_r(z(s)), f_s)$ ,  $s \in [0, l]$ , с соответствующими свойствами. Вы-

берем в ней конечную цепочку элементов  $(B_r(z(s_k)), f_{s_k})_{k=1}^n$ , где  $n = \lfloor \frac{2l}{r} \rfloor + 1$ ,  $s_k = \frac{r}{2}k$  при  $k = 0, \dots, n-1$ , а  $s_n = l$ . Тогда для каждого номера  $k$  справедливо неравенство  $|z(s) - z(s_k)| \leq \frac{r}{2}$  при любом  $s \in (s_k, s_{k+1}]$ . Поэтому каждый элемент  $(B_r(z(s_{k+1})), f_{s_{k+1}})$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_r(z(s_k)), f_{s_k})$ , откуда в совокупности следует, что элемент  $(B_r(b), f_l)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_{r_0}(a), f_0)$  через конечную цепочку кругов  $\{B_r(z(s_k))\}_{k=1}^n$ . ■

**Определение 7.** *Полной аналитической функцией*, порожденной начальным элементом  $(B_r(a), f_0)$  называется совокупность  $\mathcal{F}$  всех элементов, получающихся аналитическим продолжением элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль всех таких контуров, начинающихся в точке  $a$ , вдоль которых аналитическое продолжение возможно.

**Определение 8.** *Аналитической функцией* (без слова: полная) называется любое связное подмножество элементов полной аналитической функции  $\mathcal{F}$ , т. е. такое подмножество, любые два элемента которого являются аналитическими продолжениями друг друга через некоторый контур или некоторую конечную цепочку элементов из этого же подмножества.

Очевидно, что каждая аналитическая функция  $\mathcal{F}$  не зависит от выбора начального элемента  $(B_r(a), f_0)$ . В качестве начального можно брать любой элемент из совокупности  $\mathcal{F}$ .

Множество  $G = \bigcup_{\alpha} B_{r_{\alpha}}(z_{\alpha})$ , являющееся объединением кругов всех элементов, принадлежащих аналитической функции  $\mathcal{F}$ , представляет собой область.

В самом деле, открытость множества  $G$  следует из того, что оно есть объединение открытых множеств, связность следует из определения 8, т. е. из того, что любые две точки из  $G$  можно соединить ломаной, лежащей в объединении кругов, в узлах которой находятся центры кругов элементов, входящих в цепочку, с помощью которой осуществляется аналитическое продолжение элементов с центрами в указанных точках друг

в друга. Поэтому будем говорить, что *аналитическая функция задана (определена) на области  $G$* .

В случае, когда область определения аналитической функции односвязна, имеет место следующее важное утверждение.

**Теорема 2 (о монодромии).** Пусть  $G$  – односвязная область и  $B_r(a) \subset G$ . Если элемент  $(B_r(a), f_0)$  аналитически продолжаем по любому контуру  $\gamma_{ab}$ , лежащему в односвязной области  $G$ , то результат его продолжения в произвольную точку  $b \in G$  не зависит от контура  $\gamma_{ab}$ , а однозначно определяется его концом  $b$ .

Часто это формулируют и так: аналитическая функция, определенная на односвязной области  $G$ , является однозначной регулярной функцией, определенной на  $G$ .

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются следующие определение и лемма.

**Определение 9.** Пусть кусочно-гладкие контуры  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  заданы соответственно через параметр длины  $s$  в виде  $z = z(s), s \in (0, l)$  и  $z = \tilde{z}(s), s \in (0, \tilde{l})$ . Расстоянием между кривыми  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  назовем величину

$$\text{dist}(\gamma, \tilde{\gamma}) = \max\{|z(s) - \tilde{z}(s)| \mid s \in [0, \min(l, \tilde{l})]\} + |l - \tilde{l}|. \quad (2)$$

**Лемма 1.** Пусть элемент  $(B_{r_0}(a), f_0)$  может быть аналитически продолжен вдоль кусочно-гладкого контура  $\gamma_{ab}$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ ). Тогда существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что элемент  $(B_{r_0}(a), f_0)$  может быть аналитически продолжен вдоль любого кусочно-гладкого контура  $\tilde{\gamma}_{ab}$  (имеющего те же начало и конец) такого, что  $\text{dist}(\gamma_{ab}, \tilde{\gamma}_{ab}) < \varepsilon$  (где  $\text{dist}$  см. в определении 9). При этом в конечной точке  $b$  будут получены эквивалентные между собой элементы.

**Доказательство.** Пусть функция  $z = z(s), s \in (0, l)$ , описывает контур  $\gamma_{ab}$  через параметр его длины, и  $z(0) = a, z(l) = b$ . Пусть число  $r > 0$ , непрерывная функция  $\varphi(s), s \in (0, l)$  и элементы  $(B_r(z(s)), f_s)$  выбраны в соответствии с определением 6 при аналитическом продолжении элемента  $(B_{r_0}(a), f_0)$  вдоль контура  $\gamma_{ab}$ .

Выберем число  $\varepsilon = \frac{r}{4}$  и рассмотрим произвольный контур  $\tilde{\gamma}_{ab}$ , задаваемый функцией  $z = \tilde{z}(s), s \in (0, \tilde{l})$ , где  $\tilde{z}(0) = a, \tilde{z}(\tilde{l}) = b$ , такой, что  $\text{dist}(\gamma_{ab}, \tilde{\gamma}_{ab}) < \varepsilon$ .

Для каждого числа  $s \in [0, \min(l, \tilde{l})]$  определим значение функции  $\tilde{\varphi}(s)$  и элемент  $(B_\varepsilon(\tilde{z}(s)), \tilde{f}_s)$  из выражений  $\tilde{\varphi}(s) = f_s(\tilde{z}(s))$  и  $f_s(z) = f_s(z)$  при всех  $z \in B_\varepsilon(\tilde{z}(s))$ , что возможно в силу очевидного включения  $B_\varepsilon(\tilde{z}(s)) \subset B_r(z(s))$ .

В случае, когда  $l \geq \tilde{l}$ , из равенства  $z(l) = \tilde{z}(\tilde{l}) = b$  следует включение  $B_\varepsilon(\tilde{z}(\tilde{l})) \subset B_r(z(\tilde{l})) \cap B_r(z(l))$ , откуда следует, что  $f_{\tilde{l}}(z) = f_l(z)$  при всех  $z \in B_\varepsilon(\tilde{z}(\tilde{l}))$ , т. е. конечные элементы эквивалентны.

В случае, когда  $l < \tilde{l}$ , для каждого числа  $s \in (l, \tilde{l}]$ , так как  $\tilde{l} - l < \varepsilon$ , то имеем  $\tilde{z}(s) \in B_\varepsilon(b)$ . Поэтому определим значение функции  $\tilde{\varphi}(s)$  и элемент  $(B_\varepsilon(\tilde{z}(s)), \tilde{f}_s)$  из выражений  $\tilde{\varphi}(s) = f_l(\tilde{z}(s))$  и  $f_s(z) = f_l(z)$  при всех  $z \in B_\varepsilon(\tilde{z}(s))$ , что возможно в силу включения  $B_\varepsilon(\tilde{z}(s)) \subset B_r(z(l))$ . В частности, отсюда следует, что и в этом случае (при  $l < \tilde{l}$ ) конечные элементы эквивалентны.

Покажем непрерывность функции  $\tilde{\varphi}(s)$  на отрезке  $[0, \tilde{l}]$ . Для каждого значения  $s_0 \in [0, \min(l, \tilde{l})]$  в силу выбора контура  $\tilde{\gamma}_{ab}$  справедливо включение  $\tilde{z}(s) \in B_r(z(s_0))$  при всех  $s \in [0, \max(l, \tilde{l})] \cap (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ , откуда следует, что  $\tilde{\varphi}(s) = f_{s_0}(\tilde{z}(s))$  при всех  $s \in [0, \max(l, \tilde{l})] \cap (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ , т. е. функция  $\tilde{\varphi}(s)$  непрерывна в точке  $s_0$ . Аналогично, в случае, когда  $l < \tilde{l}$ , из равенства  $\tilde{\varphi}(s) = f_l(\tilde{z}(s))$  при всех  $s \in (l - \varepsilon, \tilde{l}]$  следует непрерывность функции  $\tilde{\varphi}(s)$  на интервале  $(l - \varepsilon, \tilde{l}]$ . Таким образом, мы показали, что по определению 6 существует аналитическое продолжение элемента  $(B_{r_0}(a), f_0)$  вдоль контура  $\tilde{\gamma}_{ab}$ , причем в конечной точке получен элемент, эквивалентный конечному элементу, получаемому при аналитическом продолжении элемента  $(B_{r_0}(a), f_0)$  вдоль контура  $\gamma_{ab}$ . ■

Докажем теперь теорему 2.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть в односвязной области  $G$  даны два кусочно-гладких контура  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  с помощью уравнений  $z = z_0(t)$  и  $z = z_1(t)$ , где  $t \in [0, 1]$ , которые соединяют точки  $a$

и  $b$ , т. е.  $z_0(0) = z_1(0) = a$  и  $z_0(1) = z_1(1) = b$ . Без ограничения общности (так как в силу леммы 1 и теоремы Вейерштрасса можно сгладить кривые в конечном числе точек, в которых имеется излом) будем считать, что контуры  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  являются гладкими. В силу односвязности области  $G$  кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  являются гомотопными, т. е. существует функция  $z = z(t, \alpha) \subset G$  при  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  такая, что функции  $z(t, \alpha)$  и  $z'_t(t, \alpha)$  непрерывны на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ , а также справедливы равенства  $z(t, 0) = z_0(t)$  и  $z(t, 1) = z_1(t)$  при всех  $t \in [0, 1]$ , а  $z(0, \alpha) = a$  и  $z(1, \alpha) = b$  при всех  $\alpha \in [0, 1]$ .

Таким образом, при каждом фиксированном значении параметра  $\alpha \in [0, 1]$  функция  $z = z(t, \alpha)$ ,  $t \in [0, 1]$  описывает гладкую кривую  $\gamma_\alpha$ , которая принадлежит области  $G$  и соединяет точки  $a$  и  $b$ . В силу равномерной непрерывности функций  $z(t, \alpha)$  и  $z'_t(t, \alpha)$  на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  длина  $l(\alpha)$  контура  $\gamma_\alpha$  есть непрерывная функция параметра  $\alpha \in [0, 1]$ , и при достаточно близких значениях  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$  расстояние  $\text{dist}(\gamma_{\alpha_1}, \gamma_{\alpha_2})$  между кривыми мало.

По лемме 1 для любого значения параметра  $\alpha \in [0, 1]$  существует число  $\delta(\alpha) > 0$  такое, что при любом значении  $\tilde{\alpha}$ , взятом из интервала  $I_\alpha \triangleq [0, 1] \cap (\alpha - \delta(\alpha), \alpha + \delta(\alpha))$ , аналитическое продолжение элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль каждого контура  $\gamma_{\tilde{\alpha}}$  приводит к эквивалентным элементам в конечной точке  $b$ .

По лемме Гейне–Бореля можно выбрать конечное число интервалов  $I_{\alpha_j}$ , где  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ , покрывающих отрезок  $[0, 1]$  так, что эти интервалы удовлетворяют соотношениям:  $I_{\alpha_j} \cap I_{\alpha_{j+1}} \neq \emptyset, \forall j$ , и  $\bigcup_{j=0}^n I_{\alpha_j} = [0, 1]$ . Тогда аналитическое продолжение элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль каждого контура  $\gamma_\alpha$ , где  $\alpha \in I_{\alpha_0} \cup I_{\alpha_1}$  приводит к эквивалентным элементам в конечной точке  $b$ . Аналогично это верно при всех  $\alpha \in I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2}$  и так далее. В результате получаем, что аналитическое продолжение элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль каждого контура  $\gamma_\alpha$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ , приводит к эквивалентным элементам в точке  $b$ . ■

## § 21. Полные аналитические функции логарифма и корня и их римановы поверхности

**1. Полные аналитические функции.** Пусть точка  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Выберем в круге  $B_{|a|}(a)$  некоторые регулярные ветви  $h_a$  и  $g_a$  многозначных функций  $\text{Ln } z$  и  $\{\sqrt[n]{z}\}$  соответственно (которые, как показано в теореме 1 § 15, существуют в круге  $B_{|a|}(a)$ ). В этом случае будет говорить, что элементы  $(B_{|a|}(a), h_a)$  и  $(B_{|a|}(a), g_a)$  порождены многозначными функциями  $\text{Ln } z$  и  $\{\sqrt[n]{z}\}$  соответственно.

**Теорема 1.** Зафиксируем произвольные точки  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и начальный элемент  $(B_{|a|}(a), h_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\text{Ln } z$ . Тогда этот элемент может быть продолжен вдоль любого кусочно-гладкого контура  $\gamma_{ab}$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ ), не проходящего через нуль. Для полученного в результате такого продолжения элемента  $(B_{|b|}(b), h_b)$  справедливы формулы

$$h_b(b) = h_a(a) + \int_{\gamma_{ab}} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (1)$$

$$h_b(z) = h_b(b) + \int_b^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in B_{|b|}(b). \quad (2)$$

Для всякой точки  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и всякого элемента  $(B_{|c|}(c), h_c)$ , порожденного многозначной функцией  $\text{Ln } z$ , найдется такой контур  $\tilde{\gamma}_{ac}$ , не проходящий через нуль, что элемент  $(B_{|c|}(c), h_c)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_{|a|}(a), h_a)$  вдоль контура  $\tilde{\gamma}_{ac}$ .

**Доказательство.**

1. Обозначим через  $d \triangleq \text{dist}(\{0\}, \gamma_{ab})$  – расстояние от точки 0 до кривой  $\gamma_{ab}$ . Разобьем контур  $\gamma_{ab}$  точками  $z_0 = a, z_1, \dots, z_K = b$  на части  $\gamma_{z_{k-1}z_k}$  так, чтобы длина каждого из них удовлетворяла неравенству  $l(\gamma_{z_{k-1}z_k}) < d, \forall k \in \overline{1, K}$ . Пусть для некоторого  $k \in \overline{1, K}$  элемент  $(B_{|a|}(a), h_a)$  допускает продолжение вдоль контура  $\gamma_{az_{k-1}} \subset \gamma_{ab}$ , в результате чего получен элемент  $(B_{|z_{k-1}|}(z_{k-1}), h_{k-1})$ . Покажем, что элемент  $(B_{|z_{k-1}|}(z_{k-1}), h_{k-1})$  допускает аналитическое продолжение вдоль следующей части  $\gamma_{z_{k-1}z_k}$  контура  $\gamma_{ab}$ .

В самом деле, так как  $|z_{k-1} - z_k| < d \leq |z_{k-1}|$ , то  $z_k \in B_{|z_{k-1}|}(z_{k-1})$ . Определим в круге  $B_{|z_k|}(z_k)$  регулярную ветвь  $h_k$  функции  $\text{Ln } z$  по ее значению в центре круга, т.е. пусть  $h_k(z_k) = h_{k-1}(z_k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} h_k(z_k) - h_{k-1}(z_{k-1}) &= \ln |z_k| - \ln |z_{k-1}| + i\Delta_{\gamma_{z_{k-1}z_k}} \arg z = \\ &= \int_{\gamma_{z_{k-1}z_k}} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда следует, что  $h_k(z) = h_{k-1}(z)$  во всех точках  $z$  из непустого множества  $B_{|z_{k-1}|}(z_{k-1}) \cap B_{|z_k|}(z_k)$ . Это означает, что элемент  $(B_{|z_k|}(z_k), h_k)$  есть аналитическое продолжение элемента  $(B_{|z_{k-1}|}(z_{k-1}), h_{k-1})$  вдоль части контура  $\gamma_{z_{k-1}z_k}$ . В частности, мы показали, что при  $k = 1$  элемент  $(B_{|z_1|}(z_1), h_1)$  есть аналитическое продолжение элемента  $(B_{|a|}(a), h_a)$  вдоль контура  $\gamma_{az_1}$ .

В итоге получаем справедливость первого утверждения теоремы о продолжаемости элемента  $(B_{|a|}(a), h_a)$  вдоль контура  $\gamma_{ab}$ . При этом, складывая по всем  $k$  выражения (3), получаем формулу (1). Формула (2) была доказана в следствии 2 § 15.

2. Пусть заданы точка  $c \neq 0$  и произвольный элемент  $(B_{|c|}(c), h_c)$ , порожденный многозначной функцией  $\text{Ln } z$ . Выберем произвольный кусочно-гладкий контур  $\gamma_{ac}$  с концевыми точками  $a$  и  $c$ , причем такой, что  $0 \notin \gamma_{ac}$ . Тогда по доказанному в пункте 1 элемент  $(B_{|a|}(a), h_a)$  продолжаем вдоль контура  $\gamma_{ac}$ , в результате чего будет получен некоторый новый элемент  $(B_{|c|}(c), \tilde{h}_c)$ . Так как функции  $h_c$  и  $\tilde{h}_c$  являются регулярными ветвями многозначной функции  $\text{Ln } z$  в круге  $B_{|c|}(c)$ , то существует число  $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$  такое, что  $h_c(z) = \tilde{h}_c(z) + 2\pi\tilde{k}i, \forall z \in B_{|c|}(c)$ .

Если  $\tilde{k} = 0$ , то все доказано. Если  $\tilde{k} \neq 0$ , то к контуру  $\gamma_{ac}$  надо добавить контур  $\gamma_1 = \{z \mid |z| = |c|\}$ , по которому производится обход начала координат  $|\tilde{k}|$  раз, причем против хода часовой стрелки при  $\tilde{k} > 0$ , и по ходу часовой стрелки при

$\tilde{k} < 0$ . Тогда аналитическое продолжение элемента  $(B_{|c|}(c), \tilde{h}_c)$  вдоль  $\gamma_1$  приведет к элементу  $(B_{|c|}(c), h_c)$  по формуле (1). ■

Из доказанной теоремы мы получаем

**Следствие 1.** Полная аналитическая функция  $\text{Ln } z$  состоит из совокупности элементов вида

$$(B_{|a|}(a), h_a(z) + 2\pi ki), \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

где  $h_a$  — некоторая регулярная ветвь многозначной функции  $\text{Ln } z$  в круге  $B_{|a|}(a)$ .

Так как справедливо равенство множеств  $\{\sqrt[n]{z}\} = e^{\frac{1}{n} \text{Ln } z}$ , то возможность аналитического продолжения элементов, порожденных многозначной функцией  $\text{Ln } z$  в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , влечет возможность аналитического продолжения элементов, порожденных многозначной функцией  $\{\sqrt[n]{z}\}$ . Точнее, из теоремы 1 следует утверждение.

**Следствие 2.** Зафиксируем произвольные точки  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и произвольный элемент  $(B_{|a|}(a), g_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\{\sqrt[n]{z}\}$ . Этот элемент может быть продолжен вдоль любого кусочно-гладкого контура  $\gamma_{ab}$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ ), не проходящего через нуль. Для полученного в результате такого продолжения элемента  $(B_{|b|}(b), g_b)$  справедлива формула

$$g_b(b) = g_a(a) \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|} e^{\frac{i}{n} \Delta_{\gamma_{ab}} \arg z}. \quad (4)$$

Для всякой точки  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и всякого элемента  $(B_{|c|}(c), g_c)$ , порожденного многозначной функцией  $\{\sqrt[n]{z}\}$ , найдется такой контур  $\tilde{\gamma}_{ac}$ , не проходящий через нуль, что элемент  $(B_{|c|}(c), g_c)$  будет аналитическим продолжением элемента  $(B_{|a|}(a), g_a)$  вдоль контура  $\tilde{\gamma}_{ac}$ .

**Следствие 3.** Полная аналитическая функция  $\sqrt[n]{z}$  состоит из совокупности элементов вида  $(B_{|a|}(a), g_a(z) \cdot e^{\frac{i}{n} 2\pi k})$ , где  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ , а  $g_a$  — некоторая регулярная ветвь многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$  в круге  $B_{|a|}(a)$ .



*Замечание 1.* Мы рассмотрели пример многозначной функции  $\{z^{1/n}\}$ . С тем же успехом, в силу определения многозначной функции  $\{z^b\} = e^{b \operatorname{Ln} z}$ , где  $b \in \mathbb{C}$  — фиксировано, и  $z \neq 0$ , взяв для каждого  $a \neq 0$  элемент вида  $(B_{|a|}(a), h_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\operatorname{Ln} z$ , мы получим элемент  $(B_{|a|}(a), f_a)$ , где  $f_a(z) = e^{b h_a(z)}$ , порожденный многозначной функцией  $\{z^b\}$ . Аналогично следствию 2 получаем, что всякий элемент  $(B_{|a|}(a), f_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\{z^b\}$ , допускает аналитическое продолжение по любому контуру  $\gamma_{ac}$ , не проходящему через точку  $z = 0$ .

**2. Римановы поверхности.** Существует другой способ избавления от многозначности аналитических функций  $\operatorname{Ln} z$  и  $\sqrt[n]{z}$ , через понятия римановых поверхностей этих функций.

2 а). Риманова поверхность  $\operatorname{Ln} z$ . Рассмотрим плоскость  $\mathbb{C}$  с разрезом, точнее, область  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Как показано в § 15, функция  $\operatorname{Ln} z$  на этой области распадается на бесконечное число регулярных ветвей вида

$$\begin{aligned} h_k(z) &= h_0(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ h_0(z) &= \ln |z| + i \arg_{\text{гл}} z, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$ .

Воспользуемся этим для построения регулярной на специальном множестве функции, принимающей все значения аналитической функции  $\operatorname{Ln} z$  при  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Расширим область определения искомой функции до некоторого множества, которое и будет называться "римановой поверхностью" функции  $\operatorname{Ln} z$ . Для этого по определению будем различать точки  $z_k = r e^{i(\varphi + 2\pi k)}$  (где  $r > 0$ ,  $\varphi \in (-\pi, +\pi]$ ) при различных целых значениях  $k$ . А именно, с помощью введенной таким образом нумерации из множества  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  получим счетное семейство непересекающихся множеств вида

$$G_k \triangleq \{z \mid z = r e^{i\varphi}, r > 0, \varphi \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]\}, \quad (6)$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ . На каждом множестве  $G_k$  определим функцию

$$h_k(z) \triangleq \ln r + i\varphi, \quad \text{где } z = r e^{i\varphi} \in G_k, \quad (7)$$

Сравнивая выражения (5) и (7) убеждаемся, что при каждом  $k \in \mathbb{Z}$  функции (5) и (7) совпадают на множестве  $\overset{\circ}{G}_k \triangleq \triangleq G_k \setminus \{z \mid z = re^{i\pi(1+2k)}, r > 0\}$ , т. е. функция  $h_k$  регулярна на множестве  $\overset{\circ}{G}_k$ .

Определим множества

$$G_k^+ \triangleq G_k \cap \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}, \quad G_k^- \triangleq G_k \cap \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}. \quad (8)$$

При каждом  $z \in G_k \setminus \overset{\circ}{G}_k$  функция  $h_k$  терпит разрыв, а именно, справедливы выражения

$$h_k(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z}^{G_k^+} h_k(\zeta) \neq \lim_{\zeta \rightarrow z}^{G_k^-} h_k(\zeta), \quad (9)$$

$$h_k(z) = \lim_{\zeta \rightarrow ze^{2\pi i}}^{G_{k+1}^-} h_{k+1}(\zeta). \quad (10)$$

Из семейства непересекающихся множеств  $\{G_k\}$  образуем множество  $G = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} G_k$ , на котором определим функцию  $h$  по формуле

$$h(z) = h_k(z), \quad \text{если } z \in G_k.$$

На множестве  $G$  введем следующую систему окрестностей его точек. Если  $a \in \overset{\circ}{G}_k$ ,  $\operatorname{Re} a < 0$ , то окрестностью этой точки  $a$  назовем любой круг вида

$$B_\varepsilon(a), \quad \text{где } \varepsilon \in (0, |\operatorname{Im} a|). \quad (11)$$

Если  $a \in \overset{\circ}{G}_k$ ,  $\operatorname{Re} a \geq 0$ , то окрестностью этой точки  $a$  назовем любой круг вида

$$B_\varepsilon(a), \quad \text{где } \varepsilon \in (0, |a|). \quad (12)$$

Если же  $a \in G_k \setminus \overset{\circ}{G}_k$ , то, выбирая любое  $\varepsilon \in (0, |a|)$ , окрестность этой точки определим по формуле

$$\{z \in G_k^+ \mid |z - a| < \varepsilon\} \cup \{z \in G_{k+1}^- \mid |ae^{2\pi i} - z| < \varepsilon\}. \quad (13)$$

При таком задании системы окрестностей на множестве  $G$  получаем, что определенная выше функция  $h$  в силу выраже-

ний (9)– (13) является непрерывной функцией, а в силу теоремы 1 из §21 она будет также и регулярной на множестве  $G$ .

Множество  $G$  с указанной системой окрестностей называется *римановой поверхностью аналитической функции*  $\text{Ln } z$ .

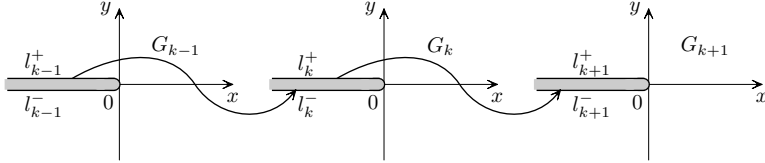


Рис. 40

Для наглядного представления римановой поверхности  $G$  в каждом множестве  $G_k$  введем разрез по линии разрыва функции  $h_k$  с соответствующими верхним берегом разреза  $l_k^+ = G_k \setminus \overset{\circ}{G}_k$  и нижним берегом разреза  $l_k^- = \{z \mid z = re^{i\varphi}, \varphi = \pi(-1 + 2k)\}$  (см. рис. 40).

Очевидно для любого  $k \in \mathbb{Z}$  справедливо равенство  $l_k^+ = l_{k+1}^-$ , которое вместе с заданием окрестностей вида (13) означает склейку верхнего берега разреза листа  $G_k$  с нижним берегом разреза листа  $G_{k+1}$  (см. рис. 41).

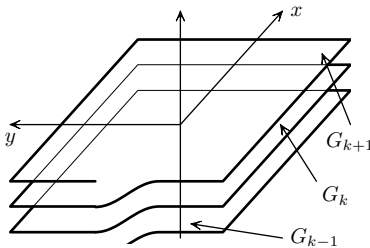


Рис. 41

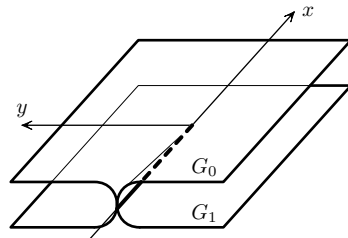


Рис. 42

2 б). Риманова поверхность корня.

На области  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  существуют две регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt{z}\}$  вида

$$g_k(z) = \sqrt{|z|} e^{\frac{i}{2}(\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k)}, \quad k \in \overline{0, 1}. \quad (14)$$

Для получения регулярной функции, принимающей все значения аналитической функции  $\sqrt{z}$ , расширим ее множество определения  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , а именно: рассмотрим два непересекающихся множества  $G_0$  и  $G_1$ , задаваемые формулами (6) (при  $k \in \overline{0,1}$ ). На каждом  $G_k$  определим функцию

$$g_k = \sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}}, \quad \text{где } z = re^{i\varphi} \in G_k, \quad k \in \overline{0,1}.$$

При каждом  $k \in \overline{0,1}$  функция  $g_k$  совпадает с функцией (14) на множестве  $\overset{\circ}{G}_k$ , т.е. там она является регулярной функцией. При этом в каждой точке  $z \in G_k \setminus \overset{\circ}{G}_k$  функция  $g_k$  терпит разрыв, а именно, справедливы выражения

$$g_k(z) = \lim_{\substack{G_k^+ \\ \zeta \rightarrow z}} g_k(\zeta) = - \lim_{\substack{G_k^- \\ \zeta \rightarrow z}} g_k(\zeta), \quad (15)$$

точнее, имеем:

$$g_1(z) = \lim_{\substack{G_0^+ \\ \zeta \rightarrow ze^{-2\pi i}}} g_0(\zeta), \quad z \in G_1 \setminus \overset{\circ}{G}_1, \quad (16)$$

$$g_0(z) = \lim_{\substack{G_1^- \\ \zeta \rightarrow ze^{2\pi i}}} g_1(\zeta), \quad z \in G_0 \setminus \overset{\circ}{G}_0. \quad (17)$$

Определим множество  $G = G_0 \cup G_1$  и, как в случае римановой поверхности логарифма, в соответствии с формулами (15)–(17) определяем систему окрестностей точек  $a$  из  $\overset{\circ}{G}_k$  по формулам (11) и (12) (где  $k \in \overline{0,1}$ ), для точек  $a$  из  $G_0 \setminus \overset{\circ}{G}_0$  по формулам (13) (при  $k = 0$ ), а для точек  $a \in G_1 \setminus \overset{\circ}{G}_1$  следующим образом:

$$\{z \in G_1^+ \mid |z - a| < \varepsilon\} \cup \{z \in G_0^- \mid |ae^{-2\pi i} - z| < \varepsilon\}. \quad (18)$$

На множестве  $G$  с определенной выше системой окрестностей зададим функцию

$$g(z) = g_k(z), \quad \text{если } z \in G_k, \quad k \in \overline{0,1}.$$

Эта функция принимает все значения аналитической функции  $\sqrt{z}$ . Мы специально так подобрали систему окрестностей на  $G$ , чтобы функция  $g$  была на множестве  $G$  непрерывной, а в силу следствий 2, 3 функция  $g$  будет регулярна на множестве  $G$ .

Определенное выше множество  $G$  называется *римановой поверхностью аналитической функции  $\sqrt{z}$* .

Приведенный выше выбор окрестностей во множестве  $G$  можно наглядно изобразить как специальную склейку двух листов  $\overset{\circ}{G}_0$  и  $\overset{\circ}{G}_1$  по берегам разреза, сделанного на интервале  $(-\infty, 0)$ . При этом верхний берег разреза  $l_1^+$  множества  $G_1$  нужно склеить с нижним берегом разреза  $l_0^-$  множества  $G_0$ , а верхний берег разреза  $l_0^+$  множества  $G_0$  нужно склеить с нижним берегом разреза  $l_1^-$  множества  $G_1$  (см. рис. 42).

## § 22. Особые точки аналитических функций

В § 12 мы рассмотрели изолированные особые точки регулярных функций, которые называют еще особыми точками однозначного характера. При разборе примеров полных аналитических функций  $\text{Ln } z$  и  $\sqrt[n]{z}$  в § 21 мы показали, что эти аналитические функции существуют в области  $0 < |z| < \infty$ , т. е. точки 0 и  $\infty$  тоже являются особыми, но уже нового типа. Обобщим классификацию особых точек для аналитических функций.

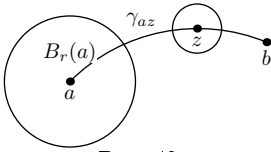


Рис. 43

**Определение 1.** Пусть аналитическая функция  $\mathcal{F}$  содержит элемент  $(B_r(a), f_a)$  с центром в точке  $a \in \mathbb{C}$ , и пусть существует кусочно-гладкий контур  $\gamma_{ab}$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b \in \mathbb{C}$  такой, что элемент  $(B_r(a), f_a)$  может быть продолжен вдоль любой части  $\gamma_{az}$  контура  $\gamma_{ab}$  при  $z \in \gamma_{ab} \setminus \{b\}$ , но не продолжаем вдоль всего контура  $\gamma_{ab}$  (т. е. не существует элемента  $(B_r(b), f_b)$  с центром в точке  $b$ , являющегося аналитическим продолжением элемента  $(B_r(a), f_a)$  вдоль контура  $\gamma_{ab}$ ). Тогда точка  $b$  называется *особой точкой аналитической функции*  $\mathcal{F}$  (см. рис. 43).

Пусть точка  $b = \infty$  такова, что при замене переменного  $z = \frac{1}{\zeta}$  в элементах данной аналитической функции  $\mathcal{F}(z)$  получаем аналитическую функцию  $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , у которой точка  $\zeta = 0$  оказалась особой точкой. Тогда точка  $b = \infty$  называется особой точкой аналитической функции  $\mathcal{F}(z)$ .

Иногда, когда это требует уточнения, "особой точкой" будем называть пару, состоящую из точки  $b$  и указанного в определении 1 контура  $\gamma_{ab}$ .

Отметим, что полюс и существенно особая точка регулярной функции удовлетворяют определению 1, а устранимая особая точка не удовлетворяет определению 1.

Особая точка аналитической функции, заданной в области, как правило, является граничной точкой области определения аналитической функции.

Поясним это на примере.

**Пример 1.** Пусть функция  $f_0(z) = \frac{1}{h(z)-i\pi}$  задана в круге  $B_1(1)$ , где функция  $h$  есть регулярная в круге  $B_1(1)$  ветвь многозначной функции  $\text{Ln } z$  такая, что  $h(1) = 0$ . Аналитически продолжая элемент  $(B_1(1), f_0)$  вдоль верхней полуокружности  $\gamma_1 = \{z \mid z = e^{is}, s \in [0, \pi]\}$ , получаем значение  $h(-1) = i\pi$ , т. е. в особой точке  $(-1, \gamma_1)$  аналитической функции  $\mathcal{F}$ , порожденной элементом  $(B_1(1), f_0)$ , будет полюс (см. рис. 44).

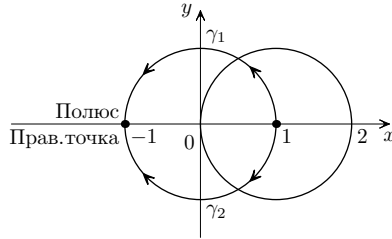


Рис. 44

Аналитически продолжая элемент  $(B_1(1), f_0)$  вдоль нижней полуокружности  $\gamma_2 = \{z \mid z = e^{-is}, s \in [0, \pi]\}$ , получаем элемент  $(B_1(-1), f_{-\pi})$  со значением  $f_{-\pi}(-1) = \frac{1}{-2i\pi}$ , т. е.  $(-1, \gamma_2)$  есть правильная точка, т. е. точка  $z = -1$  является особой и граничной точкой аналитической функции  $\mathcal{F}$  лишь на одном из листов ее римановой поверхности.

**Теорема 1 (Коши–Адамар).** Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad (1)$$

имеет ненулевой конечный радиус сходимости  $R$ . Тогда на границе его круга сходимости  $B_R(a)$  существует хотя бы одна особая точка его суммы.

**Доказательство.** От противного. Допустим, что на граничной окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta - a| = R\}$  нет особых точек суммы  $S(z)$  ряда (1). Тогда элемент  $(B_R(a), S)$  продолжаем по любому радиусу из центра  $a$  в концевую точку  $\zeta$ , лежащую на окружности  $\gamma_R$ .

При этом для каждой точки  $\zeta \in \gamma_R$  существуют число  $r_\zeta > 0$  и круг  $B_{r_\zeta}(\zeta)$ , в котором определена регулярная функция  $f_\zeta$  такая, что элемент  $(B_{r_\zeta}(\zeta), f_\zeta)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_R(a), S)$ .

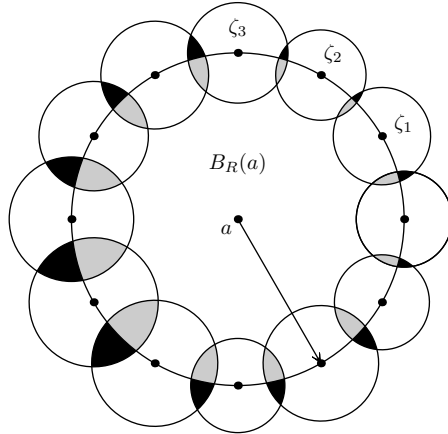


Рис. 45

По лемме Гейне–Бореля (см. [2]) из покрытия окружности  $\gamma_R$  открытыми множествами  $\{B_{r_\zeta}(\zeta)\}$ ,  $\zeta \in \gamma_R$ , можно выделить конечное подпокрытие, т. е. конечное множество кругов  $\{B_{r_k}(\zeta_k)\}$ ,  $k \in \overline{1, K}$ , все еще покрывающее окружность  $\gamma_R$  (т. е.  $\gamma_R \subset \bigcup_{k=1}^K B_{r_k}(\zeta_k)$ ).

Определим область  $G \triangleq B_R(a) \cup \left( \bigcup_{k=1}^K B_{r_k}(\zeta_k) \right)$  и для каждого  $k \in \overline{1, K}$  обозначим через  $(B_{r_k}(\zeta_k), f_k)$  элемент, полученный продолжением элемента  $(B_R(a), S)$  по радиусу  $[a, \zeta_k]$ . Определим аналитическую функцию

$$\mathcal{F} = \begin{cases} (B_R(a), S), \\ (B_{r_k}(\zeta_k), f_k), \quad \forall k \in \overline{1, K}. \end{cases}$$

Покажем, что аналитическая функция  $\mathcal{F}$  однозначна и регулярна в области  $G$ .



Допустим, что номера  $k$  и  $m$  таковы, что  $B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m) \neq \emptyset$ .

Тогда множество  $B_R(a) \cap B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m)$  не пусто (см. рис. 45) и по определению аналитического продолжения внутри круга  $B_R(a)$  получаем

$$f_k(z) = S(z) = f_m(z) \quad (2)$$

при всех  $z \in B_R(a) \cap B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m)$ .

В силу теоремы единственности регулярной функции (см. § 10) из равенства (2) получаем

$$f_k(z) = f_m(z) \quad \text{при всех } z \in B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m).$$

Таким образом, аналитическая функция  $\mathcal{F}$  однозначна и регулярна в области  $G$ .

Определим число

$$r \triangleq \inf\{|z - \zeta| \mid z \in B_R(a), \zeta \in \mathbb{C} \setminus G\}.$$

Очевидно, что число  $r > 0$ , и справедливо включение  $B_{R+r}(a) \subset G$ . Поэтому функция  $\mathcal{F}$  определена и регулярна в круге  $B_{R+r}(a)$ . По формуле Тейлора функция  $\mathcal{F}$  в круге  $B_{R+r}(a)$  представима в виде сходящегося степенного ряда

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k.$$

Так как  $\mathcal{F}(z) = S(z)$  при всех  $z \in B_R(a)$ , то справедливо равенство  $\frac{\mathcal{F}^{(k)}(a)}{k!} = c_k, \forall k \in \mathbb{N}$ , т.е. мы получили, что ряд (1) сходится в круге  $B_{R+r}(a)$ , что противоречит определению радиуса сходимости  $R$ . Таким образом, допущение об отсутствии на граничной окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta - a| = R\}$  особых точек суммы  $S(z)$  ряда (1) не верно. ■

**Следствие 1.** Радиус сходимости  $R$  степенного ряда (1) при условии, что  $0 < R < +\infty$ , равен расстоянию от точки  $a$  до ближайшей особой точки суммы  $S$  ряда (1).

**Пример 2.** Не вычисляя коэффициентов степенного ряда функции

$$\frac{1}{(z+3)(z^2+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

можно сразу сказать, что его радиус сходимости равен  $\sqrt{2}$ , так как ближайшими к точке  $z = 0$  особыми точками являются полюсы  $\pm\sqrt{2}i$ .

*Замечание 1.* Сходимость ряда (1) в точке границы его круга сходимости не связана с тем, является ли данная точка особой или нет. Поясним это на примерах.

**Пример 3.** Ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  сходится в круге  $B_1(0)$  к функции  $\frac{1}{1-z}$  и расходится в каждой точке окружности  $|z| = 1$ , а особой точкой суммы ряда является лишь одна точка  $z = 1$ .

**Пример 4.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1} \quad (3)$$

сходится в круге  $B_1(0)$  к функции  $S(z) = -z + (1+z)h_0(1+z)$ , где  $h_0(z) = \ln|z| + i \arg_{\text{гл}} z$ , и  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$  (см. пример 4 §9), при этом очевидно, что ряд (3) абсолютно сходится в любой точке окружности  $|z| = 1$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** По теореме 1 на окружности  $|z| = 1$ , являющейся границей его круга сходимости, ряд (3) должен иметь по крайней мере одну особую точку. В то же время этот ряд в каждой точке круга  $|z| = 1$  сходится. Нет ли здесь противоречия? Где особая точка?

Для ответа на последний вопрос определим новый тип особых точек аналитических функций.

**Определение 2.** Пусть задана точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ , и пусть аналитическая функция  $\mathcal{F}$  определена в ее проколотой окрестности  $\mathring{B}_R(a)$  и неоднозначна в этой окрестности. Тогда точка  $a$  называется *точкой ветвления аналитической функции  $\mathcal{F}$* .

Расшифруем определение 2.

Пусть точка  $a \in \mathbb{C}$ . Пусть задана функция  $f_0$ , регулярная в односвязной области  $B_R(a) \setminus [a, b)$ , т.е. в круге  $B_R(a)$  с разрезом по радиусу  $[a, b)$ . Выберем круг  $B_r(a_1)$ , содержащийся в области  $B_R(a) \setminus [a, b)$ . Пусть элемент

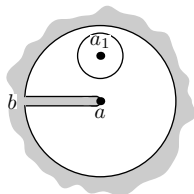


Рис. 46

$(B_r(a_1), f_0)$  продолжаем вдоль любого контура, лежащего в области  $\overset{\circ}{B}_R(a)$  и начинающегося из точки  $a_1$ . Если получаемая при этом продолжении аналитическая функция  $\mathcal{F}$  многозначна, то точка  $z = a$  является точкой ветвления аналитической функции  $\mathcal{F}$  (см. рис. 46).

**Пример 5.** Точки  $0, \infty$  являются точками ветвления аналитических функций  $\text{Ln } z$  и  $\sqrt[n]{z}$ . В самом деле, по формулам (1), (3) § 21 при  $\tilde{\gamma} = \{z \mid |z| = |a| > 0\}$  после одного обхода окружности против хода часовой стрелки получаем другие значения элементов

$$\tilde{h}_a(a) = h_a(a) + 2\pi i, \quad \tilde{g}_a(a) = g(a) \cdot e^{\frac{i}{n} 2\pi}. \quad (4)$$

**У п р а ж н е н и е 2.** Покажите, что точка ветвления аналитической функции является особой точкой этой аналитической функции в смысле определения 1.

**Определение 3.** Пусть  $a$  — точка ветвления аналитической функции  $\mathcal{F}$ . Пусть  $(B_r(a_1), f_0)$  — любой элемент с центром в точке  $a_1 \in \overset{\circ}{B}_R(a)$  функции  $\mathcal{F}$ . Если существует наименьшее число  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , такое, что в результате аналитического продолжения элемента  $(B_r(a_1), f_0)$  по окружности, лежащей в  $\overset{\circ}{B}_R(a)$ , с центром в точке  $a$  (или в точке  $0$ , если  $a = \infty$ ), причем с  $m$ -кратным ее обходом, получаем конечный элемент  $(B_r(a_1), f_1)$ , эквивалентный элементу  $(B_r(a_1), f_0)$ , то говорят, что точка  $a$  есть *точка ветвления алгебраического порядка  $m$* . В противном случае, если нет такого конечного  $m$ , то говорят, что точка  $a$  есть *точка ветвления логарифмического порядка*.

**Пример 6.** Продолжая разбор примера 5, из формул (4) получаем, что у функции  $\sqrt{z}$  точки  $0$  и  $\infty$  суть точки ветвления 2-го порядка, а у функции  $\text{Ln } z$  точки  $0$  и  $\infty$  суть точки ветвления логарифмического порядка.

**Пример 7.** Рассмотрим аналитическую в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  функцию  $\frac{1}{\sqrt[8]{z-1}}$ , которая имеет элемент  $(B_1(2), f_0)$ , где регулярная функция  $f_0$  определена по формуле

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt[8]{|z-1|}} e^{-\frac{i}{8}(\Delta_{\gamma z} \arg(z-1))}.$$

Продолжая элемент  $(B_1(2), f_0)$  по окружности  $|z - 1| = 1$ , получаем, что точки  $z = 1, \infty$  — точки ветвления 8-го порядка.

**Пример 8.** Рассмотрим аналитическую в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функцию  $\cos \sqrt{z}$ . Для этого возьмем элемент  $(B_1(1), g_0)$  аналитической функции  $\sqrt{z}$  такой, что  $g_0(1) = 1$ .

При однократном обходе точки 0 по замкнутому контуру значение функции  $g_0(z)$  меняется на значение  $-g_0(z)$ , а функция  $\cos g_0(z)$  в силу четности  $\cos z$  не меняется, т. е. аналитическая функция однозначна в  $\mathbb{C}$ , причем точка  $z = \infty$  — существенно особая точка, а точка  $z = 0$  — правильная точка (т. е. точка, где функция регулярна). Это же видно из разложения функции  $\cos \sqrt{z}$  в степенной ряд

$$\cos \sqrt{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \dots$$

**Пример 9.** Рассмотрим аналитическую в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функцию  $\sin \sqrt{z}$ . Любой ее элемент можно представить в круге  $B_{|a|}(a)$ ,  $a \neq 0$ , в виде регулярной функции

$$\sin \sqrt{z} = g_0(z) \left( 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots \right) = g_0(z) \cdot f(z),$$

где  $(B_{|a|}(a), g_0)$  — элемент аналитической функции  $\sqrt{z}$ , а  $f$  — регулярная в  $\mathbb{C}$  функция. Таким образом, аналитическая функция  $\sin \sqrt{z}$ , как и функция  $\sqrt{z}$ , имеет точки ветвления 2-го порядка в точках 0 и  $\infty$ .

**Пример 10.** Функция  $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ , доопределенная в точке  $z = 0$  по непрерывности, будет целой функцией (см. пример 9).

### § 23. Принцип аргумента. Теорема Руше

**Теорема 1.** Пусть задана односвязная область  $G$  и замкнутый простой кусочно-гладкий положительно ориентированный контур  $\overset{\circ}{\gamma}$  в области  $G$ . Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в  $G \setminus \left( \bigcup_{k=1}^s a_k \right)$ , где  $\{a_k\}_{k=1}^s$  — полюсы функции  $f$ , причем все  $\{a_k\}$  лежат внутри контура  $\overset{\circ}{\gamma}$ . Пусть  $f(z) \neq 0$  при всех  $z \in \overset{\circ}{\gamma}$ . Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\overset{\circ}{\gamma}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (1)$$

где  $N$  и  $P$  — число нулей и полюсов функции  $f$  внутри контура  $\overset{\circ}{\gamma}$  с учетом их порядков.

**Доказательство.** Так как  $f(z) \not\equiv 0$ , то по теореме единственности функция  $f$  внутри контура  $\overset{\circ}{\gamma}$  может иметь лишь конечное число нулей. Обозначим через  $b_1, b_2, \dots, b_n$  все нули функции  $f$  внутри контура  $\overset{\circ}{\gamma}$  (если они существуют).

Для всякого нуля  $b = b_k$  порядка  $m$  функции  $f$  в некоторой окрестности  $B_\delta(b)$  справедливо представление

$$f(z) = (z - b)^m g(z), \quad (2)$$

где функция  $g$  регулярна и  $g(z) \neq 0$  при всех  $z \in B_\delta(b)$ . Тогда в проколотой окрестности  $\overset{\circ}{B}_\delta(b)$  получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - b)^{m-1}g(z) + (z - b)^m g'(z)}{(z - b)^m g(z)} = \frac{m}{z - b} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (3)$$

Так как функция  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  регулярна в окрестности  $B_\delta(b)$ , то

$$\operatorname{res}_b \frac{f'}{f} = m, \quad (4)$$

т. е. вычет в каждой точке  $b$ , являющейся нулем функции  $f$ , равен порядку этого нуля.

Для всякого полюса  $a = a_k$  порядка  $l$  в силу следствия 1 § 12 в некоторой окрестности  $B_\varepsilon(a)$  имеем представление функции

$f$

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-a)^l}, \quad (5)$$

где функция  $p$  регулярна и  $p(z) \neq 0$  при всех  $z \in B_\varepsilon(a)$ . Тогда, проведя вычисления, в проколотой окрестности  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a)$  получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-l}{z-a} + \frac{p'(z)}{p(z)}. \quad (6)$$

Так как функция  $\frac{p'(z)}{p(z)}$  регулярна в окрестности  $B_\varepsilon(a)$ , то

$$\operatorname{res}_a \frac{f'}{f} = -l,$$

т. е. вычет в каждой точке  $a$ , являющейся полюсом функции  $f$ , равняется порядку этого полюса со знаком минус. По теореме о вычетах, суммируя вычеты по всем особым точкам интегрируемой в (1) функции, т. е. по всем нулям и полюсам функции  $f$ , получаем в итоге формулу (1). ■

Геометрический смысл теореме 1 придает следующее следствие.

**Следствие 1 (Принцип аргумента).** В условиях теоремы 1 справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = N - P, \quad (7)$$

где  $N$  и  $P$  — числа нулей и полюсов функции  $f$  с учетом их порядков, принадлежащих ограниченной области  $D$ , границей которой является контур  $\overset{\circ}{\gamma}$ .

**Доказательство.** В силу условий теоремы 1 кривая  $\Gamma_0 \triangleq \overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{\gamma})$  есть замкнутый кусочно-гладкий контур и  $0 \notin \Gamma_0$ . В силу определения 1 § 16 имеем

$$\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = \Delta_{[0,1]} \arg f(z(t)) = \Delta_{\Gamma_0} \arg w, \quad (8)$$

где  $z = z(t)$ ,  $t \in [0,1]$  — некоторая кусочно-гладкая параметризация контура  $\overset{\circ}{\gamma}$ , причем  $z(0) = z(1)$ .

Так как  $f(z(0)) = f(z(1))$ , то элементарной проверкой убеждаемся (см., например, формулу (21) § 15) в том, что

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma_0} \frac{dw}{w} = \ln |w| \Big|_{w=f(z(0))}^{f(z(1))} = 0.$$

Отсюда и по теореме 1 из § 14 получаем

$$\Delta_{\Gamma_0} \arg w = \frac{1}{i} \int_{\Gamma_0} \frac{dw}{w}. \quad (9)$$

В свою очередь, выражая контур  $\Gamma_0$  через параметризацию  $w = f(z(t))$ ,  $t \in [0,1]$ , получаем

$$\int_{\Gamma_0} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{f'(z(t))z'(t) dt}{f(z(t))} = \int_{\overset{\circ}{\gamma}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (10)$$

Таким образом, в силу выражений (8), (9), (10) получим

$$\int_{\overset{\circ}{\gamma}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z). \quad (11)$$

В итоге из теоремы 1 и равенства (11) получаем формулу (7). ■

**Теорема 2 (Руше).** Пусть заданы регулярные в односвязной области  $G$  функции  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  и замкнутый простой кусочно-гладкий контур  $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$ , такие, что справедливо неравенство

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in \overset{\circ}{\gamma}. \quad (12)$$

Тогда функция  $f$  и функция  $h \triangleq f + g$  имеют в области  $D$ , ограниченной контуром  $\overset{\circ}{\gamma}$ , одинаковое число нулей с учетом их порядков.

**Доказательство.** В силу условия (12) получаем, что  $f(z) \neq 0$  при всех  $z \in \overset{\circ}{\gamma}$ , и  $|h(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ , т.е.  $h(z) \neq 0$  при всех  $z \in \overset{\circ}{\gamma}$ .

Обозначим через  $N_f$  и  $N_h$  числа нулей функций  $f$  и  $h$  в области  $D$  с учетом их порядков. По теореме 1 в силу леммы 1

§ 16 получаем

$$\begin{aligned} N_h &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\dot{\gamma}} \arg h(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\dot{\gamma}} \arg \left[ f(z) \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\dot{\gamma}} \arg f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\dot{\gamma}} \arg \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим второе слагаемое в равенстве (13). Функция  $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$  определена на контуре  $\dot{\gamma}$ , и при движении по этому контуру ее значения описывают некоторую замкнутую кривую  $\tilde{\Gamma}$ . В силу неравенства (12) кривая  $\tilde{\Gamma}$  принадлежит области

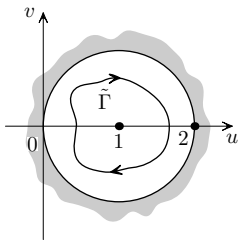


Рис. 47

$|w - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$ , т. е. кривая  $\tilde{\Gamma}$  принадлежит односвязной области  $|w - 1| < 1$ , не содержащей точки нуля (см. рис. 47). Поэтому, например, в силу леммы 2 § 16 (в которой нужно взять  $f(z) \equiv z$ ) справедливо равенство  $\Delta_{\tilde{\Gamma}} \arg w = 0$ . Так как  $\Delta_{\tilde{\Gamma}} \arg w = \Delta_{\dot{\gamma}} \arg \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)$ , то второе слагаемое

в (13) равно нулю, что и доказывает теорему. ■

**Теорема 3 (Гаусс).** *Всякий многочлен  $n$ -й степени*

$$P_n(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0 \quad (14)$$

*имеет в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  ровно  $n$  нулей с учетом их порядков.*

**Доказательство.** Определим две функции

$$f(z) \triangleq z^n, \quad g(z) \triangleq c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0.$$

Так как функция  $\frac{g(z)}{z^n} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , то существует число  $R_0 > 0$  такое, что для всякого  $R \geq R_0$  справедливо неравенство  $\left| \frac{g(z)}{z^n} \right| < 1$  при  $|z| = R$ . По теореме Руше число нулей функции  $P_n$  внутри окружности  $\dot{\gamma}_R = \{z \mid |z| = R\}$  равно числу нулей функции  $f(z) = z^n$  внутри  $\dot{\gamma}_R$  с учетом их порядков. Так как точка 0 есть нуль функции  $z^n$  порядка  $n$ , то многочлен  $P_n$  в любом круге  $B_R(0)$ ,  $R > R_0$ , имеет ровно  $n$  нулей с учетом их порядков, а в силу произвольности  $R > R_0$  многочлен  $P_n$  имеет ровно  $n$  нулей с учетом их порядков во всей плоскости  $\mathbb{C}$ . ■



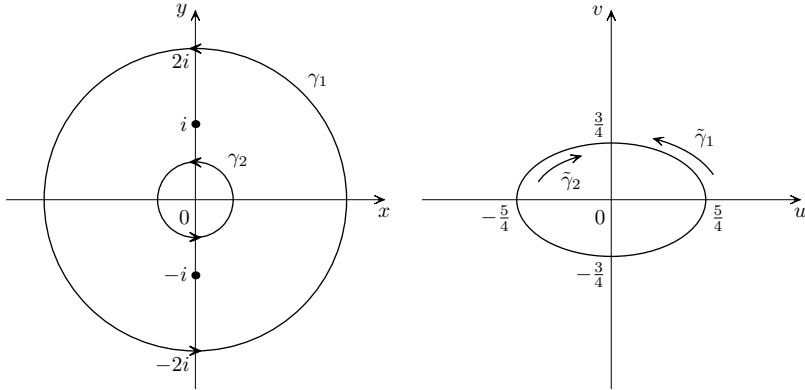


Рис. 48

**Пример 1.** Рассмотрим функцию Жуковского вида  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  и две окружности  $\gamma_1 = \{z \mid |z| = 2\}$  и  $\gamma_2 = \{z \mid |z| = \frac{1}{2}\}$ .

Функция Жуковского имеет нули первого порядка в точках  $i, -i$ , а точка  $z = 0$  является полюсом 1-го порядка. По принципу аргумента получаем

$$\Delta_{\gamma_1} \arg f(z) = 2\pi(N - P) = 2\pi(2 - 1) = 2\pi,$$

$$\Delta_{\gamma_2} \arg f(z) = 2\pi(N - P) = 2\pi(0 - 1) = -2\pi.$$

Геометрически это значит, что окружность радиуса  $R > 1$  функцией Жуковского отображается в кривую (эллипс) с сохранением ориентации, а окружность радиуса  $\frac{1}{R}$  отображается в тот же эллипс с противоположной ориентацией (см. рис. 48).

## § 24. Геометрические принципы

В данном параграфе приведем основные геометрические принципы регулярных функций.

**Лемма 1 (об открытости).** Пусть заданы точка  $z_0 \in \mathbb{C}$ , число  $R > 0$  и функция  $f : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ , которая регулярна. Пусть  $w_0 = f(z_0)$  и

$$f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0, \quad (1)$$

где  $n \geq 2$ . Тогда существуют круг  $B_r(z_0)$ , где  $0 < r \leq R$ , и круг  $B_\varepsilon(w_0)$  такие, что  $B_\varepsilon(w_0) \subset f(B_r(z_0))$  и для любой точки  $w_1 \in B_\varepsilon(w_0)$  у функции  $f$  найдется ровно  $n$  прообразов в круге  $B_r(z_0)$ . В этом случае говорят, что функция  $f$  является  $n$ -листной в круге  $B_r(z_0)$ .

**Доказательство.** Так как по условию леммы точка  $z_0$  является нулем функции  $f(z) - f(z_0)$  порядка  $n$ , то справедливо представление вида

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n h(z), \quad (2)$$

где функция  $h : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна и  $h(z_0) \neq 0$ .

Обозначим

$$w - w_0 = \zeta^n \quad (3)$$

и из выражения (2) получим

$$\zeta^n = (z - z_0)^n h(z), \quad (4)$$

откуда, решая это уравнение относительно  $\zeta$ , следует, что  $\zeta \in (z - z_0) \{ \sqrt[n]{h(z)} \}$ .

Существует окрестность  $B_{r_0}(z_0)$ ,  $r_0 \leq R$ , в которой  $h(z) \neq 0$  и по теореме 2 из § 16 у многозначной функции  $\{ \sqrt[n]{h(z)} \}$  существуют в ней регулярные ветви. Обозначим через  $g_0$  одну из таких регулярных ветвей функции  $\{ \sqrt[n]{h(z)} \}$ . Определим

$$\zeta(z) \triangleq (z - z_0) g_0(z), \quad z \in B_{r_0}(z_0). \quad (5)$$

Покажем, что функция  $\zeta$  из (5) удовлетворяет условиям теоремы 2 об обратной функции из § 5. В самом деле, она регулярна в некоторой окрестности точки  $z_0$  и  $\zeta'(z_0) \neq 0$ , так как

$$\zeta'(z)|_{z=z_0} = g_0(z_0) + (z - z_0)g_0'(z)|_{z=z_0} = g_0(z_0) \in \{ \sqrt[n]{h(z_0)} \}.$$

Следовательно, по теореме об обратной функции существуют круг  $B_r(z_0)$ , где  $r \leq r_0$ , и круг  $B_\delta(0)$ , такие, что для любой точки  $w_1 \in B_\delta(0)$  найдется ровно один прообраз функции  $\zeta$  в круге  $B_r(z_0)$ .

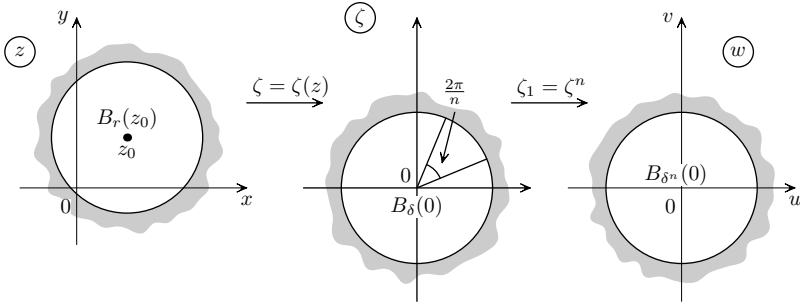


Рис. 49

Функция  $\zeta_1 = \zeta^n$  отображает проколотую окрестность  $\overset{\circ}{B}_\delta(0)$  на проколотую окрестность  $\overset{\circ}{B}_{\delta^n}(0)$   $n$ -листно, т. е. каждая точка из  $\overset{\circ}{B}_{\delta^n}(0)$  имеет при отображении функцией  $\zeta_1 = \zeta^n$  ровно  $n$  прообразов в круге  $B_\delta(0)$ , каждый сектор круга с углом  $\frac{2\pi}{n}$  отображается функцией  $\zeta^n$  однолистно в целый круг  $B_{\delta^n}(0)$  (см. рис. 49).

В итоге, вспоминая, что в силу (3) и (5) справедливо равенство

$$f(z) = w_0 + \zeta^n(z), \quad \text{где} \quad \zeta(z) = (z - z_0)g_0(z),$$

получаем, что у функции  $f$  для любого  $w_1 \in \overset{\circ}{B}_{\delta^n}(w_0)$  имеется ровно  $n$  прообразов в круге  $B_r(z_0)$ . ■

**Следствие 1.** Если функция  $f$  регулярна в окрестности точки  $z_0 \neq \infty$ , то условие  $f'(z_0) \neq 0$  является необходимым и достаточным для однолиственности отображения  $f$  в некоторой достаточно малой окрестности точки  $z_0$ , т. е. "однолиственности в малом".

Заметим, что условие  $f'(z_0) \neq 0$  не является достаточным для однолиственности в области, т. е. "однолиственности в боль-

шом". Например, функция  $w = e^z$  всюду удовлетворяет условию  $f'(z) \neq 0$ , но она не однолистка, например, в  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 1 (принцип сохранения области).** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G$  и  $f(z) \not\equiv \text{const}$ . Тогда при отображении  $f$  образом области  $G$  является область.

**Доказательство.** Пусть  $G^*$  — образ области  $G$  при отображении  $f$ , т. е.  $G^* = f(G)$ .

1) Рассмотрим любую точку  $w_0 \in G^*$ , тогда существует точка  $z_0 \in G$  такая, что  $w_0 = f(z_0)$ . Так как точка  $z_0$  является внутренней точкой области  $G$ , то функция  $f$  регулярна в некоторой окрестности точки  $z_0$ , причем так как  $f(z) \not\equiv \text{const}$ , то существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . По лемме 1 существует круг  $B_{\delta^n}(w_0)$ , входящий в  $G^*$ , т. е.  $w_0$  — внутренняя точка множества  $G^*$ , поэтому множество  $G^*$  открыто.

2) Докажем (линейную) связность множества  $G^*$ . Пусть точки  $w_0$  и  $w_1 \in G^*$ , тогда существуют точки  $z_0, z_1 \in G$  такие, что  $f(z_0) = w_0$  и  $f(z_1) = w_1$ . Так как множество  $G$  есть область, то существует кусочно-гладкая кривая  $\gamma \subset G$ , соединяющая точку  $z_0$  с точкой  $z_1$ . Тогда в силу определения  $f(\gamma) \subset G^*$ , т. е. кусочно-гладкая кривая  $f(\gamma)$  соединяет точки  $w_0$  и  $w_1$ . ■

**Теорема 2 (принцип максимума модуля).** Пусть функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в ограниченной области  $G$  и непрерывна в  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , где  $\Gamma$  — граница области  $G$ . Пусть  $f(z) \not\equiv \text{const}$ . Тогда супремум модуля этой функции

$$\sup\{|f(z)| \mid z \in \bar{G}\}$$

достигается строго на границе  $\Gamma$  области  $G$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку  $z_0 \in G$ . Для доказательства теоремы достаточно доказать, что существует точка  $z_1 \in G$  такая, что  $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ . По теореме 1 образом области  $G$  является область  $G^*$ , и поэтому точка  $w_0 = f(z_0)$  является внутренней точкой образа, т. е. существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что справедливо включение  $B_\varepsilon(w_0) \subset G^*$ .

Возьмем точку  $w_1 \in B_\varepsilon(w_0)$ , которая находится дальше от начала координат (см. рис. 50а), например,

$$w_1 = w_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2|w_0|} \right), \quad |w_1| > |w_0|.$$

Так как  $w_1 \in G^*$ , то существует точка  $z_1 \in G$  такая, что  $f(z_1) = w_1$ , т. е.  $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ .

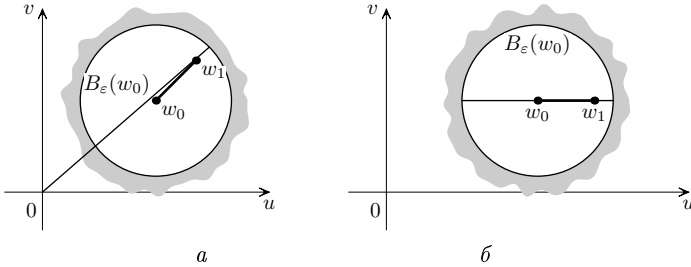


Рис. 50

Следовательно,

$$\sup\{|f(z)| \mid z \in \Gamma\} = \sup\{|f(z)| \mid z \in \bar{G}\}.$$

В свою очередь, функция  $|f(z)|$  непрерывна на ограниченном замкнутом множестве  $\bar{G}$ , и поэтому она достигает свою точную верхнюю грань в некоторой точке границы. ■

**Следствие 2.** Если функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в ограниченной области  $G$  и непрерывна в ее замыкании  $\bar{G}$ , причем  $f(z) \neq 0, \forall z \in \bar{G}$  и  $f(z) \not\equiv \text{const}$ , то  $\inf\{|f(z)| \mid z \in \bar{G}\}$  достигается строго на границе области  $G$ .

У п р а ж н е н и е 1. Докажите следствие 2.

Еще одним важным следствием принципа максимума модуля является

**Лемма 2 (Шварц).** Пусть функция  $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в круге  $B_1(0)$ , ограничена:  $|f(z)| \leq 1$  для всех  $z \in B_1(0)$  и  $f(0) = 0$ . Тогда справедлива оценка

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in B_1(0). \quad (6)$$

Если равенство в (6) достигается хотя бы в одной точке  $z_0 \in B_1(0)$ ,  $z_0 \neq 0$ , то оно справедливо всюду в  $B_1(0)$  и существует  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  такое, что  $f(z) = e^{i\alpha} z$ , при всех  $z \in B_1(0)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $g(z) \triangleq \frac{f(z)}{z}$ . В силу условия  $f(0) = 0$  функция  $g$  имеет в нуле устранимую особенность, т.е. доопределяя ее по непрерывности в нуле, получаем, что  $g$  регулярна в круге  $B_1(0)$ . По принципу максимума модуля для любого  $r \in (0,1)$  максимум  $|g(z)|$  в круге  $B_r(0)$  достигается на границе  $\gamma_r \triangleq \{z \mid |z| = r\}$ . Отсюда и по условию леммы ( $|f(z)| \leq 1$ ) получаем оценку

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall z \in B_r(0). \quad (7)$$

Зафиксируем произвольное  $z_0 \in B_1(0)$ . Так как справедливо включение  $z_0 \in B_r(0)$  при любом  $r \in (|z_0|, 1)$ , то из оценки (7) имеем  $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r}$  при всех  $r \in (|z_0|, 1)$ . Устремляя  $r \rightarrow 1$ , получаем  $|g(z_0)| \leq 1$ , т.е.  $|f(z_0)| \leq |z_0|$ , т.е. оценка (6) доказана.

Допустим, что существует точка  $z_1 \in B_1(0)$ ,  $z_1 \neq 0$ , в которой в неравенстве (6) имеет место равенство. Тогда функция  $g$  достигает свой максимум в этой внутренней точке, т.е.  $|g(z_1)| = 1$ . Но по принципу максимума модуля это возможно только в случае, когда  $g$  константа, т.е. найдется  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  такое, что  $g(z) = e^{i\alpha}$ . Тогда  $f(z) = e^{i\alpha}z$ .  $\blacksquare$

**Упражнение 2.** Покажите, что в условиях леммы Шварца справедливо неравенство  $|f'(z)| \leq 1$ , в котором равенство возможно лишь в случае, когда  $f(z) = e^{i\alpha}z$ .

**Теорема 3 (Принцип максимума и минимума гармонической функции).** Пусть функция  $u : G \rightarrow \mathbb{R}^1$  гармонична в ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^2$  и непрерывна на ее замыкании  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ . Пусть  $u(x,y) \not\equiv \text{const}$ . Тогда максимум и минимум этой функции достигаются на границе области  $G$ .

**Доказательство.** 1. Допустим противное. Пусть в точке  $(x_0, y_0) \in G$  достигается  $\max\{u(x,y) \mid (x,y) \in G\}$ . Так как множество  $G$  есть область, то точка  $z_0 = x_0 + iy_0$  является внутренней точкой множества  $G$ , и существует число  $r > 0$  такое, что круг  $B_r(z_0) \subset G$ .

Как показано в теореме 2 из §4, существует регулярная функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $\text{Re } f(z) = u(x,y)$ . (На-

ПОМНИМ, ЧТО НАДО ВЗЯТЬ

$$v(x,y) \triangleq \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

и

$$f(z) \triangleq u(x,y) + iv(x,y).$$

Пусть  $w_0 = f(z_0)$ . По теореме 1 существует круг  $B_\varepsilon(w_0)$  такой, что  $B_\varepsilon(w_0) \subset f(B_r(z_0))$ . Возьмем в круге  $B_\varepsilon(w_0)$  точку  $w_1$  правее  $w_0$ , т. е.  $\operatorname{Re} w_1 > \operatorname{Re} w_0$  (см. рис. 50б), причем существует точка  $z_1 \in B_r(z_0)$  такая, что  $f(z_1) = w_1$ . Тогда  $\operatorname{Re} f(z_1) = u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0)$ , что противоречит допущению. Следовательно, допущение неверно.

2. Доказательство утверждения о минимуме следует из первой части доказательства о максимуме, так как  $\min u(x,y) = -\max(-u(x,y))$ , а функция  $-u(x,y)$  также является гармонической функцией. ■

Для гармонической функции  $u(x,y)$  удобно ввести обозначение:  $u(z) \triangleq u(x,y)$ , где  $z = x + iy$ .

**Теорема 4 (О среднем для гармонической функции).** Пусть функция  $u : B_R(a) \rightarrow \mathbb{R}$  является гармонической в круге  $B_R(a)$  и непрерывной на его замыкании  $\overline{B_R(a)}$ . Тогда справедлива формула

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (8)$$

**Доказательство.** По теореме 2 § 4 существует регулярная функция  $f : B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ . Тогда по интегральной формуле Коши для любой окружности  $\gamma_\rho = \{z \mid |z - a| = \rho\}$ , где  $\rho \in (0, R)$ , имеем равенство

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta.$$

Так как для всякой точки  $\zeta \in \gamma_\rho$ , справедливо представление  $\zeta = a + \rho e^{i\varphi}$ , где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , то  $d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ , и после замены

переменных в интеграле получаем

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{i\varphi}) i \rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (9)$$

Выбирая в (9) действительные части, получаем равенство

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (10)$$

Из непрерывности функции  $u(z) = u(x, y)$  на круге  $\overline{B_R(a)}$  следует равномерная по  $\varphi \in [0, 2\pi]$  непрерывность функции  $\rho \rightarrow u(a + \rho e^{i\varphi})$  при  $\rho \in (0, R]$ . По известной теореме математического анализа о переходе к пределу под знаком интеграла, устремляя  $\rho$  к  $R$ , получаем формулу (8). ■



## § 25. Конформные отображения в $\overline{\mathbb{C}}$

В данном параграфе сформулируем определение конформного отображения в произвольной области из  $\overline{\mathbb{C}}$  и объясним некоторые геометрические свойства такого отображения.

### 1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции.

Пусть задана функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , определенная в области  $G \subset \mathbb{C}$ . Пусть точка  $z_0 \in G$  такова, что в ней существует производная  $f'(z_0) \neq 0$ . Обозначим

$$w_0 = f(z_0), \quad \Delta w = f(z) - f(z_0), \quad \Delta z = z - z_0.$$

Тогда в силу определения производной имеем

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad (1)$$

где  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ ,  $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ .

Рассмотрим приращение функции  $\Delta w$  по формуле (1), воспользовавшись его приближенным представлением через дифференциал  $dw = f'(z_0)\Delta z$  (так как с точностью до члена более высокого порядка малости, чем  $|\Delta z|$ , имеет место приближенное равенство  $\Delta w \simeq dw$ ). Расписав дифференциал  $dw$  по компонентам, получаем

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} \frac{u_x}{K} & -\frac{v_x}{K} \\ \frac{v_x}{K} & \frac{u_x}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $K \triangleq |f'(z_0)|$ . Из выражения (2) следует, что линейное относительно  $\Delta z$  отображение  $dw = f'(z_0)\Delta z$  является суперпозицией двух отображений: растяжения с коэффициентом  $K = |f'(z_0)| > 0$  и ортогонального преобразования плоскости (так как очевидно, что последняя квадратная матрица в равенстве (2) является ортогональной).

В частности, так как  $|dw| = |f'(z_0)||\Delta z|$ , то образом окружности  $\gamma_r \triangleq \{z \mid |z - z_0| = r\}$  радиуса  $r > 0$  (на которой  $|\Delta z| = r$ ) при отображении  $f$  будет окружность  $\gamma = \{w \mid |w - w_0| = Kr\}$  радиуса  $Kr$  с точностью до  $o(|\Delta z|)$  (см. рис. 51).

Полученное свойство отображения  $f$  называют *свойством сохранения окружности в малом*, причем коэффициент линейного растяжения в точке  $z_0$  равен

$$K = |f'(z_0)| = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}. \quad (3)$$

Кроме того из формулы (2) также следует, что отображение  $f$  сохраняет углы между кривыми, выходящими из точки  $z_0$ , так как каждая из них повернется на один и тот же угол. Поясним это более подробно.

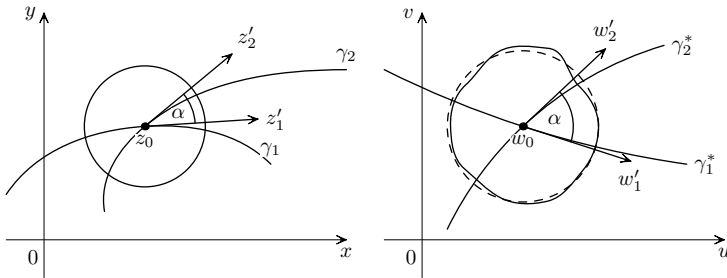


Рис. 51

Пусть функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна и  $f'(z) \neq 0$ . Пусть  $w_0 = f(z_0)$ . Рассмотрим два гладких контура  $\gamma_1, \gamma_2 \subset B_r(z_0)$ , проходящие через точку  $z_0$  (см. рис. 51), т. е. представимые в виде

$$\gamma_k \triangleq \{z \mid z = z_k(t), t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}, \delta > 0, k \in \overline{1,2}, \quad (4)$$

причем  $z'_k(t) \neq 0$  и  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ .

Тогда функция  $f$  отображает контуры  $\gamma_k, k \in \overline{1,2}$ , в кривые

$$\gamma_k^* = \{w \mid w = w_k(t) \triangleq f(z_k(t)), t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}. \quad (5)$$

Тогда в силу очевидной формулы

$$w'_k(t) = f'(z_k(t))z'_k(t), \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad k \in \overline{1,2}, \quad (6)$$

получаем, что  $w'_k(t) \neq 0, \forall t$ , т. е. кривые  $\gamma_k^*$  являются гладкими контурами.

Угол между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $z_0$  по определению есть угол между касательными векторами  $z'_1(t_0)$  и  $z'_2(t_0)$ . Соответственно, угол между кривыми  $\gamma_1^*$  и  $\gamma_2^*$  в точке  $w_0$  есть угол между векторами  $w'_1(t_0)$  и  $w'_2(t_0)$ . При этом из формулы (6) при  $t = t_0$  получаем

$$w'_k(t_0) = f'(z_0)z'_k(t_0),$$

откуда следует равенство

$$\text{Arg } w'_k(t_0) = \arg_{\text{гл}} f'(z_0) + \text{Arg } z'_k(t_0), \quad \forall k \in \overline{1,2}. \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что каждый касательный вектор  $z'_k(t_0)$  контура  $\gamma_k$  при отображении  $f$  поворачивается на один и тот же угол  $\arg_{\text{гл}} f'(z_0)$ . То есть угол между двумя кривыми, выходящими из точки  $z_0$ , сохраняется при регулярном отображении  $f$ , если  $f'(z_0) \neq 0$ . Это свойство называется *свойством сохранения углов*.

**2. Конформные отображения в  $\mathbb{C}$ .** На основе указанных геометрических свойств производной функции введем понятие конформного отображения в точке из  $\mathbb{C}$ .

**Определение 1.** Отображение  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  называется *конформным в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$* , если его компоненты  $u(x,y), v(x,y)$  дифференцируемы в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , а линейное отображение

$$\begin{cases} du = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y, \\ dv = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y, \end{cases} \quad (8)$$

представляет собой композицию растяжения и поворота относительно точки 0.

**Теорема 1.** *Отображение  $f$  конформно в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ .*

**Доказательство.** То, что дифференцируемая функция  $f$ , у которой  $f'(z_0) \neq 0$ , является конформной в точке  $z_0$  (по определению 1), было показано в начале этого параграфа. Пусть теперь отображение  $f$  конформно в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Тогда по определению 1 существуют  $K > 0$  и  $\theta \in [0, 2\pi)$  такие,

что выражение (8) принимает вид

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad (9)$$

откуда следует, что  $u_x = K \cos \theta$ ,  $u_y = K \sin \theta$ ,  $v_x = -K \sin \theta$ ,  $v_y = K \cos \theta$ , т. е. выполнены условия Коши–Римана, в результате чего функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $|f'(z_0)| = K \neq 0$ . ■

**Определение 2.** Отображение  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  называется *конформным в области*  $G \subset \mathbb{C}$ , если оно однолистно в области  $G$  и конформно в каждой точке области  $G$ .

*Замечание 1.* В силу теоремы Гурса (см. замечание 1 § 7) из того, что функция дифференцируема в каждой точке области следует, что она непрерывно дифференцируема в этой области, т. е. регулярна. Поэтому и в силу теоремы 1 функция, осуществляющая конформное отображение некоторой области из  $\mathbb{C}$  в комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  является регулярной в данной области. Отсюда и в силу принципа сохранения области (см. теорему 1 § 24) при конформном отображении образом области является область.

**3. Конформные отображения в  $\overline{\mathbb{C}}$ .** Обобщим понятие конформного отображения на случай расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Отметим, что определенное выше понятие конформности отображения в конечной точке включает в себя два геометрических свойства таких отображений: свойство сохранения углов и свойство сохранения окружностей в малом. Мы хотели бы определить конформность отображения в бесконечно удаленной точке  $\infty$ , опираясь на эти же геометрические свойства, по крайней мере, на свойство сохранения углов.

Для этого необходимо ввести понятие угла между кривыми в бесконечности. Отметим следующие два свойства стереографической проекции  $\overline{\mathbb{C}}$  на сферу Римана  $S$  (см. § 2).

1) Угол между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в некоторой конечной точке из  $\mathbb{C}$ , при стереогра-

фической проекции переходит в равный ему угол между образами данных кривых на сфере Римана  $S$ .

2) Отображение плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , осуществляемое функцией  $w = \frac{1}{z}$ , при стереографической проекции соответствует отображению  $S$  на себя, получаемому при повороте сферы Римана на угол  $\pi$  вокруг диаметра сферы с концами в точках, являющихся образами точек  $+1$  и  $-1$  из  $\mathbb{C}$ .

В силу этих свойств под углом между двумя неограниченными кривыми в точке  $\infty$  следует понимать угол между образами этих кривых (при стереографической проекции) на сфере Римана в верхней точке  $P$ , если эти образы имеют в точке  $P$  касательные. Этот угол, в свою очередь, совпадает с углом в точке нуль на плоскости  $\mathbb{C}$  между новыми кривыми, получаемыми из данных кривых при отображении  $w = 1/z$  плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.

Приведенные выше соображения порождают следующие определения.

**Определение 3.** Пусть функция  $f : \overset{\circ}{B}_R(\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  имеет в точке  $z_0 = \infty$  устранимую особую точку. Скажем, что отображение  $f$  конформно в точке  $\infty$ , если отображение  $g(z) \triangleq f\left(\frac{1}{z}\right)$ , доопределенное по непрерывности в нуле, конформно в точке нуль.

**Определение 4.** Пусть точка  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  является особой точкой функции  $f$ , но не является устранимой особой точкой. Скажем, что отображение  $f$  конформно в точке  $z_0$ , если отображение  $\varphi(z) \triangleq \frac{1}{f(z)}$ , доопределенное в точке  $z_0$  по непрерывности, конформно в точке  $z_0$ .

*Замечание 2.* Отметим, что в определении 4 особая точка может быть только полюсом 1-го порядка, так как иначе нарушается однолиственность в малом, т. е. в любой проколотой окрестности особой точки.

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите справедливость замечания 2.

Теперь мы можем ввести понятие отображения, конформного в области из расширенной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  в расширенную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Определение 5.** Отображение  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  называется *конформным в области*  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , если оно однолистно на области  $G$  и конформно в каждой точке области  $G$ .

Суммируя вышесказанное, сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Функция  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  осуществляет конформное отображение области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  на область  $f(G)$  тогда и только тогда, когда  $f$  однолистна на  $G$  и  $f$  регулярна во всех точках области  $G$ , за исключением, быть может, двух точек:*

- 1)  $\infty$ , если  $\infty \in G$  и  $\infty$  является устранимой особой точкой или полюсом первого порядка функции  $f$ ;
- 2) некоторой конечной точки  $z_0 \in G$ , которая является полюсом первого порядка функции  $f$ , при этом либо  $\infty \notin G$ , либо, если  $\infty \in G$ , то  $\infty$  есть устранимая особая точка функции  $f$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Докажите справедливость утверждения 1.

Исследование конкретных классов конформных отображений, получаемых с помощью элементарных функций, проделаем в следующих трех параграфах.

## § 26. Дробно-линейные отображения

В этом параграфе изучим свойства дробно-линейных отображений, как покажем, важнейшего класса конформных отображений плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.

**Определение 1.** Функция (или отображение) вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

где коэффициенты  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  и  $ad - bc \neq 0$ , называется *дробно-линейной функцией (или отображением)*.

Доопределим функцию  $w$  из (1) в особых точках по непрерывности в  $\overline{\mathbb{C}}$ :

1) если  $c = 0$ , то полагаем

$$w(\infty) = \infty, \quad (2')$$

2) если  $c \neq 0$ , то полагаем

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty. \quad (2)$$

Таким образом, функция (1), (2) отображает  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $\overline{\mathbb{C}}$ .

В случае, когда  $c = 0$ , получаем аффинную функцию, свойства которой считаем известными из курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Поэтому, как правило, полагаем, что  $c \neq 0$ .

**Теорема 1.** Дробно-линейная функция (1), (2) отображает расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  конформно.

**Доказательство.** 1. Докажем однолиственность функции (1), (2) на плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ . Из формул (1), (2) элементарными вычислениями можно выразить  $z$  через  $w$ , в результате чего получаем, что существует обратное отображение вида

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (3)$$

$$z(\infty) = -\frac{d}{c}, \quad z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty. \quad (4)$$

Таким образом, отображение (1), (2) однолистно отображает плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , причем, так как определитель

$$\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

то обратное отображение (3), (4) также является дробно-линейным.

2. Докажем конформность функции (1), (2) в каждой точке  $z_0$  плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ .

1) Пусть  $z_0 \neq -\frac{d}{c}$ ,  $z_0 \neq \infty$ . Тогда

$$w'(z_0) = \frac{a(cz_0 + d) - c(b + az_0)}{(cz_0 + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2} \neq 0. \quad (5)$$

2) Пусть  $z_0 = -\frac{d}{c}$ . Так как  $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = \infty$ , то рассмотрим функцию

$$g(z) \triangleq \frac{1}{w(z)} = \frac{cz + d}{az + b},$$

$$g'(z_0) = \frac{bc - ad}{(az_0 + b)^2} = \frac{c^2}{cb - ad} \neq 0.$$

Это значит, что функция  $g$  конформна в точке  $z_0$ , откуда по определению 4 § 25 функция  $w(z)$  конформна в точке  $z_0 = -\frac{d}{c}$ .

3) Пусть  $z_0 = \infty$ . Тогда  $\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \frac{a}{c}$ . Исследуем на конформность функцию

$$g(\zeta) \triangleq w\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}$$

в точке  $\zeta_0 = 0$ . Вычисляя производную в этой точке

$$g'(\zeta_0) = \frac{bc - ad}{(c + d\zeta_0)^2} = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0.$$

получаем, что функция  $g$  конформна в нуле. Отсюда по определению 3 § 25 функция  $w(z)$  конформна в точке  $\infty$ .

Итак, по определениям 1-5 § 25 функция (1), (2) конформно отображает плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ . ■

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите, что если некоторая функция  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  конформно отображает плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , то функция  $f$  является дробно-линейной.



Отметим следующее "круговое свойство" дробно-линейных отображений.

**Теорема 2.** При дробно-линейном отображении (1), (2) образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.

**Доказательство.** Для аффинного отображения (т. е. при  $c = 0$ )

$$w = az + b, \quad a \neq 0, \quad (6)$$

круговое свойство, приведенное в формулировке теоремы, очевидно, справедливо, так как из линейной алгебры известно, что аффинное отображение на плоскости  $\mathbb{R}^2$  сводится к суперпозиции преобразования подобия, поворота и переноса, при которых окружности переходят в окружности, а прямые в прямые.

В общем случае (при  $c \neq 0$ ) представим отображение (1) в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{-ad + bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d},$$

т. е. функцию (1) представим в виде суперпозиции трех отображений:

$$w = \alpha + \beta t, \quad t = \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta = cz + d. \quad (7)$$

В формулах (7) два отображения являются аффинными, и, как уже отмечали выше, они обладают круговым свойством. Осталось доказать, что отображение  $t = \frac{1}{\zeta}$  также обладает круговым свойством.

Зададим произвольную окружность  $\gamma$  в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ . Как следует из аналитической геометрии, она описывается некоторым уравнением 2-го порядка

$$A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + C\eta + D = 0, \quad (8)$$

где  $A, B, C, D$  — действительные числа, удовлетворяющие условиям  $A > 0$ ,  $B^2 + C^2 > 4AD$ . В случае, когда  $A = 0$ , уравнение (8) описывает некоторую прямую. Так как  $\xi^2 + \eta^2 = |\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta}$ ,  $\xi = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})$ ,  $\eta = \frac{1}{2i}(\zeta - \bar{\zeta})$ , то уравнение (8) можно переписать в виде

$$A\zeta\bar{\zeta} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\zeta + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\bar{\zeta} + D = 0. \quad (9)$$

Отображение  $t = \frac{1}{z}$  преобразует окружность (9) в кривую, уравнение которой имеет вид

$$A + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\bar{t} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)t + Dt\bar{t} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что уравнение (10) в случае, когда  $D \neq 0$ , также является уравнением окружности, а в случае, когда  $D = 0$ , является уравнением прямой. ■

*Замечание 1.* При дробно-линейном отображении окружности или прямой нетрудно уточнить, что же конкретно будет ее образом: окружность или прямая. Для этого достаточно посмотреть на точку  $z_0 = -\frac{d}{c}$ , для которой  $w(z_0) = \infty$ . Если точка  $z_0$  принадлежит исходной кривой, то образом будет прямая, в противном случае ее образом будет окружность.

Из средней школы известно понятие точки, симметричной данной точке относительно прямой. Расширим это понятие на случай окружности.

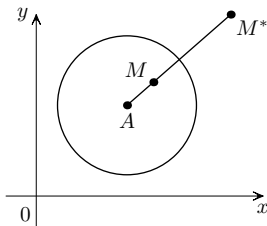


Рис. 52

**Определение 2.** Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2$  задана окружность  $\gamma$  радиуса  $R$  с центром в точке  $A$  (см. рис. 52). Точки  $M$  и  $M^*$  называются симметричными относительно окружности  $\gamma$ , если они лежат на одном луче, выходящем из центра  $A$ , и справедливо равенство

$$|AM| \cdot |AM^*| = R^2. \quad (11)$$

Переходя на язык комплексных чисел, получаем, что точки  $z_0, z_0^* \in \mathbb{C}$  являются симметричными относительно окружности  $\gamma = \{z \mid |z - a| = R\}$ , если справедливо равенство

$$z_0^* - a = \frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}}. \quad (12)$$

Так как в формуле (12) при  $z_0 \rightarrow a$  получаем  $z_0^* \rightarrow \infty$ , то будем считать, что точки  $a$  и  $\infty$  также являются симметричными относительно окружности  $\gamma = \{z \mid |z - a| = R\}$ .

**Теорема 3.** При всяком дробно-линейном отображении (1), (2) пара точек, симметричных относительно некоторой окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой кривой.

*Замечание 2.* В силу сходства получаемых свойств дробно-линейных отображений, связанных как с окружностями, так и с прямыми, для краткости изложения в формулировках теорем будем окружностью называть не только окружности, но также и прямые.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая

**Лемма 1.** Точки  $z_0$  и  $z_0^*$  являются симметричными относительно данной окружности (или прямой)  $\gamma$  тогда и только тогда, когда любая окружность или прямая  $\Gamma$ , проходящая через точки  $z_0$  и  $z_0^*$ , пересекает окружность  $\gamma$  под прямым углом.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть точки  $z_0$  и  $z_0^*$  симметричны относительно окружности  $\gamma$  радиуса  $R$  с центром в точке  $a$ . Пусть  $\Gamma$  — произвольная окружность, проходящая через точки  $z_0$  и  $z_0^*$  (см. рис. 53).

Проведем через точку  $a$  касательную прямую  $L$  к окружности  $\Gamma$ . При этом обозначим через  $\zeta$  точку касания окружности  $\Gamma$ , т.е.  $\zeta \in \Gamma \cap L$ .

По теореме о касательной и секущей получаем, что  $|\zeta - a|^2 = |z_0 - a| \cdot |z_0^* - a|$ . Отсюда и из определения 2

о симметричных точках (равенство (12)) получаем, что  $|\zeta - a| = R$ , т.е. точка  $\zeta$  лежит на окружности  $\gamma$ , т.е. точка  $\zeta$  есть точка пересечения окружностей  $\gamma$  и  $\Gamma$ . Так как радиус  $[a, \zeta]$  окружности  $\gamma$  перпендикулярен касательной  $l$  к окружности  $\gamma$ , проведенной через точку  $\zeta$ , то касательные  $L$  и  $l$  перпендикулярны, т.е. окружности  $\gamma$  и  $\Gamma$  перпендикулярны.

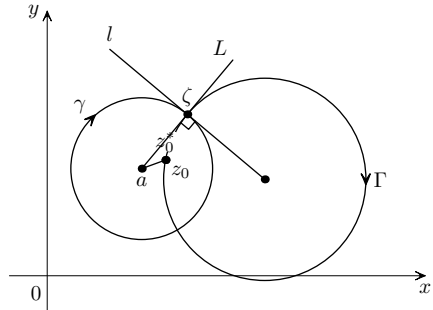


Рис. 53

*Достаточность.* Пусть точки  $z$  и  $z^*$  таковы, что любая окружность  $\Gamma$ , проходящая через эти точки, перпендикулярна данной окружности  $\gamma$  радиуса  $R$  с центром в точке  $a$ .

1) Рассмотрим в качестве кривой  $\Gamma$  прямую, проходящую через точки  $z$  и  $z^*$ . Так как по условию прямая  $\Gamma$  перпендикулярна окружности  $\gamma$ , то прямая  $\Gamma$  проходит через центр  $a$ . Более того, точки  $z$  и  $z^*$  лежат на одном луче с началом в точке  $a$ , так как в противном случае, проведя окружность  $\Gamma_1$  с диаметром, совпадающим с отрезком  $[z, z^*]$ , очевидно, получаем, что окружность  $\Gamma_1$  не перпендикулярна окружности  $\gamma$ , т. е. не выполнено условие.

2) Рассмотрим теперь в качестве  $\Gamma$  произвольную окружность, проходящую через точки  $z$  и  $z^*$ .

Обозначим через  $\zeta$  точку пересечения окружностей, т. е.  $\zeta \in \Gamma \cap \gamma$ . Тогда касательная к окружности  $\Gamma$  в точке  $\zeta$  (обозначим ее  $L$ ) по условию перпендикулярна касательной к окружности  $\gamma$  в точке  $\zeta$  (обозначим ее  $l$ ), следовательно, прямая  $L$  пройдет через центр  $a$ , т. е. отрезок  $[a, \zeta]$  лежит на касательной  $L$  к окружности  $\Gamma$ . По теореме о касательной и секущей получаем  $R^2 = |\zeta - a|^2 = |z - a| \cdot |z^* - a|$ . Это означает, что точки  $z$  и  $z^*$  являются симметричными относительно окружности  $\gamma$ . ■

**Доказательство** теоремы 3. Пусть  $z_0$  и  $z_0^*$  — симметричные точки относительно окружности  $\gamma$  и пусть дробно-линейное отображение  $f$  вида (1), (2) переводит окружность  $\gamma$  в кривую  $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$ . По круговому свойству (по теореме 2) кривая  $\tilde{\gamma}$  является окружностью (или прямой). Пусть  $w_0 = f(z_0), w_0^* = f(z_0^*)$ . Рассмотрим любую окружность  $\tilde{\Gamma}$  такую, что  $w_0, w_0^* \in \tilde{\Gamma}$ . Тогда существует окружность  $\Gamma$  такая, что  $f(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$  и  $z_0, z_0^* \in \Gamma$ .

Так как точки  $z_0$  и  $z_0^*$  симметричны, то по лемме 1 окружность  $\Gamma$  перпендикулярна окружности  $\gamma$ . По свойству сохранения углов при конформных отображениях и так как по теореме 1 дробно-линейное отображение конформно в  $\overline{\mathbb{C}}$ , окружность  $\tilde{\Gamma} = f(\Gamma)$  будет перпендикулярна окружности  $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$ .

Отсюда в силу произвольности окружности  $\tilde{\Gamma}$  и по лемме 1 следует, что точки  $w_0$  и  $w_0^*$  являются симметричными точками относительно окружности  $\tilde{\gamma}$ . ■

**Теорема 4.** Совокупность дробно-линейных отображений образует группу относительно операции суперпозиции, т. е. суперпозиция двух дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением, и обратное к любому дробно-линейному отображению также является дробно-линейным отображением.

**Доказательство.** Рассмотрим два дробно-линейных отображения

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad (13)$$

$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}. \quad (14)$$

Подставив (13) в (14), после элементарных преобразований получаем их суперпозицию вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (15)$$

где коэффициенты  $a, b, c, d$  таковы, что справедливо равенство определителей

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

т. е.  $ad - cb \neq 0$ , следовательно, отображение (15) также является дробно-линейным.

Доказательство того, что обратное отображение к дробно-линейному также является дробно-линейным, приведено в доказательстве теоремы 1. ■

Разберем некоторые примеры канонических областей в плоскости  $\mathbb{C}$  и их образов, получаемых при дробно-линейных отображениях.

**Пример 1.** Описать дробно-линейные отображения верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  в круг  $|w| < 1$ .

**Решение.** Выберем произвольную точку  $z_0$  в верхней полуплоскости. Найдем дробно-линейное отображение, которое переводит  $z_0$  в точку 0. Потребуем дополнительно, чтобы точка  $\bar{z}_0$  отобразилась в  $\infty$ , т. е. рассмотрим отображение вида

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad A \neq 0. \quad (17)$$

Так как симметричные относительно прямой  $\text{Im } z = 0$  точки  $z_0$  и  $\bar{z}_0$  по свойству дробно-линейных отображений перейдут в точки 0 и  $\infty$ , которые симметричны для любой окружности с центром в нуле, т. е. образом прямой  $\text{Im } z = 0$  будет некоторая окружность с центром в точке 0. Чтобы получить из (17) требуемое отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  в круг  $|w| < 1$ , заметим, что для любой граничной точки  $z_1$ ,  $\text{Im } z_1 = 0$ , ее образом должна быть граничная точка  $w_1$ , т. е. такая, что  $|w_1| = 1$ . Отсюда можем уточнить величину  $A$ , т. е.

$$1 = |w_1| = |A| \frac{|z_1 - z_0|}{|z_1 - \bar{z}_0|} = |A| \frac{|x_1 - z_0|}{|x_1 - \bar{z}_0|} = |A|.$$

Итак,  $A = e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — произвольное действительное число. В итоге получили, что отображения вида

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (18)$$

описывают семейство искомым конформных отображений, определяемых выбором трех действительных параметров: двумя координатами точки  $z_0$ , у которой  $\text{Im } z_0 > 0$ , и числа  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

**Пример 2.** Описать дробно-линейные отображения круга  $B_1(0) = \{z \mid |z| < 1\}$  на круг  $B_1(0) = \{w \mid |w| < 1\}$ .

**Решение.** Выберем произвольную точку  $z_0$  в круге, т. е.  $|z_0| < 1$ . Найдем дробно-линейное отображение, переводящее точку  $z_0$  в точку 0, а симметричную ей относительно окружности  $|z| = 1$  точку  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  в точку  $\infty$ . Такое отображение, очевидно, имеет вид

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = \tilde{A} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}. \quad (19)$$

При отображении (19) окружность  $|z| = 1$  по теореме 3 переходит в некоторую окружность с центром в точке 0. Чтобы это окружность имела радиус  $R = 1$ , достаточно для любой граничной точки  $z_1 = e^{i\varphi}$  посчитать модуль образа

$$1 = |w| = |\tilde{A}| \frac{|z_0 - e^{i\varphi}|}{|1 - e^{i\varphi} \cdot z_0|} = |\tilde{A}| \frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|e^{i\varphi}| |e^{-i\varphi} - z_0|} = |\tilde{A}|.$$

Таким образом, число  $\tilde{A}$  имеет вид  $\tilde{A} = e^{i\alpha}$ . В итоге отображения вида

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \quad (20)$$

описывают семейство требуемых конформных отображений, определяемых выбором трех действительных параметров: двумя координатами точки  $z_0$  такой, что  $|z_0| < 1$ , и числа  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ .

В следующем параграфе мы покажем, что семейство (20) описывает все конформные отображения единичного круга на себя.

**Пример 3.** Описать дробно-линейные отображения, которые три различные точки  $z_1, z_2, z_3$  отображают в три различные точки  $w_1, w_2, w_3$ , т. е.  $w_k = f(z_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

**Решение.** Такое конформное отображение, очевидно, задается формулой

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (21)$$

Если выразить неявную функцию  $w = f(z)$  из (21), то получим, что функция  $f$  является дробно-линейным отображением, так как она представима в виде суперпозиции двух отображений

$$w = g^{-1} \cdot h, \quad \text{где} \quad h(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

и

$$g(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1},$$

а отображение  $g^{-1}$  также дробно-линейно (см. теорему 4).

Докажем, что требуемое дробно-линейное отображение единственно. Пусть некоторое дробно-линейное отображение  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  отображает три различные точки  $\{z_k\}$  на себя, точнее

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда получаем, что уравнение  $cz_k^2 + (d-a)z_k - b = 0$  имеет три различных решения  $z_1, z_2, z_3$ , что возможно (по теореме Гаусса) лишь при  $c = d - a = -b = 0$ , т. е.  $w(z) \equiv z$ . Допустим, что  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  — два дробно-линейных отображения, отображающие точки  $z_k$  в точки  $w_k$  при  $k = 1, 2, 3$ , тогда  $w = f_2^{-1} \cdot f_1(z)$  оставляет точки  $z_k$  на месте, т. е.  $f_2^{-1} \cdot f_1(z) \equiv z$ , т. е.  $f_1 \equiv f_2$ .

**Пример 4.** Описать конформные отображения, переводящие верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ .

**Решение.** Возьмем три различные точки на действительной оси  $x_1, x_2, x_3$  так, что  $x_1 < x_2 < x_3$ . При движении от точки  $x_k$  к точке  $x_{k+1}$  по возрастанию их индексов область  $\text{Im } z > 0$  остается слева. Так как каждое дробно-линейное отображение конформно на всей плоскости  $\mathbb{C}$ , то при отображении полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  граница (действительная ось) должна отобразиться на границу (действительную ось). Поэтому искомое дробно-линейное отображение должно отобразить данные точки  $x_1, x_2, x_3$  в три различные точки  $u_1, u_2, u_3$ , лежащие на действительной оси с той же ориентацией обхода точек, т. е. область  $\text{Im } w > 0$  при их соответствующем обходе должна оставаться слева (так как конформные отображения сохраняют углы).

Рассмотрим отображение, задаваемое формулой (21), где  $z_k = x_k$  и  $w_k = u_k$  при  $k = 1, 2, 3$ . В этой формуле все коэффициенты оказались действительными числами. Следовательно, после преобразования формулы (21) к виду  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  получаем в данной формуле также действительные коэффициенты  $a, b, c, d$ . Так как при этом действительная ось перешла в действительную ось с сохранением ориентации обхода (т. е. действительная



ось не поворачивается), то  $\arg w'(x) = 0$  при каждом действительном значении  $x$ . Поэтому

$$w'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0,$$

откуда следует, что  $ad - bc > 0$ .

В итоге показали, что дробно-линейное отображение осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда его коэффициенты  $a, b, c, d$  действительны и справедливо неравенство  $ad - bc > 0$ ,

## § 27. Конформные отображения элементарными функциями. Теорема Римана

Продолжим рассмотрение примеров конформных отображений, осуществляемых элементарными функциями, являющимися локально однолиственными.

**1. Степенная функция.** Зафиксируем число  $t > 0$  и рассмотрим на области  $G \triangleq \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  функцию

$$w = |z|^t e^{it \arg z}, \quad \text{где} \quad \arg z \in (0, 2\pi). \quad (1)$$

Эта функция регулярна в данной области  $G$ , так как она представима в виде  $w = e^{t \cdot h(z)}$ , где функция  $h(z) = \ln |z| + i \arg z$ ,  $\arg z \in (0, 2\pi)$ , есть регулярная ветвь логарифма в области  $G$ .

Функция (1), очевидно, однолистна на угловой области

$$G_{0, \varphi_0} \triangleq \{z \mid |z| > 0, 0 < \arg z < \varphi_0\}, \quad (2)$$

где  $\varphi_0 \leq 2\pi$ ,  $t\varphi_0 \leq 2\pi$ .

При этом всякий луч  $l_{\varphi_1} \triangleq \{z \mid z = re^{i\varphi_1}, \forall r \in (0, +\infty)\}$ , где  $\varphi_1 = \text{const} \in (0, \varphi_0)$ , отображится на луч  $l_{t\varphi_1} = \{w \mid w = \mu e^{it\varphi_1}, \forall \mu \in (0, +\infty)\}$ . Всякая дуга  $\{z \mid z = r_0 e^{i\varphi}, \forall \varphi \in (0, \varphi_0)\}$ , где  $r_0 = \text{const} > 0$ , взаимно однозначно отображится на дугу  $\{w \mid w = r_0^t e^{i\psi}, \forall \psi \in (0, t\varphi_0)\}$  (см. рис. 54).

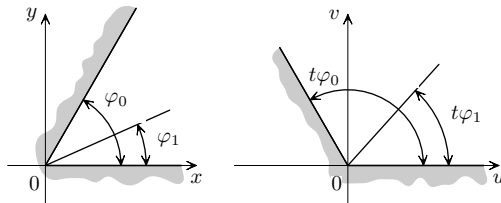


Рис. 54

В итоге область  $G_{0, \varphi_0}$  из (2) конформно отображается функцией (1) на область

$$G_{0, t\varphi_0} = \{w \mid |w| > 0, 0 < \arg w < t\varphi_0\}.$$

Рассмотрим более конкретные примеры таких отображений.

**Пример 1.** Пусть заданы функция  $w = z^2$  (т. е.  $t = 2$ ) и область  $G_1 \triangleq \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ . Тогда функция  $w = z^2$  конформна на области  $G_{0,\pi}$  и отображает область  $G_1 \subset \subset G_{0,\pi}$  конформно на область  $G_1^* = \{w \mid |w| < 1, w \notin [0,1]\}$  (см. рис. 55).

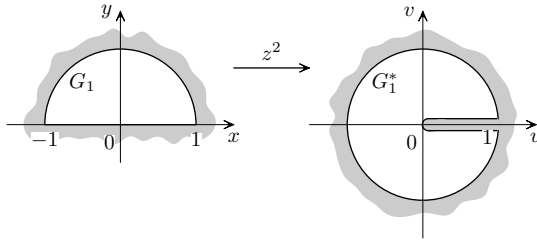


Рис. 55

**Пример 2.** Пусть функция  $w = z^2$  задана на области  $G_2 \triangleq \{z \mid \operatorname{Im} z > a > 0\} \subset G_{0,\pi}$ . Тогда граница области  $G_2$ , т. е. прямая  $\operatorname{Im} z = a$ , функцией  $w = z^2$  отображается в граничную кривую  $w = x^2 - a^2 + 2ixa, \forall x \in \mathbb{R}$ , образа  $G_2^*$ , т. е.

$$\begin{cases} u = x^2 - a^2, \\ v = 2ax, \end{cases}$$

откуда, исключая параметр  $x$ , получаем уравнение параболы  $u = \frac{v^2}{4a^2} - a^2$ . Отсюда и из того, что  $0 \notin G_2^*$ , получаем, что  $G_2^* = \{w = u + iv \mid v^2 > 4a^2(u + a^2)\}$  (см. рис. 56).

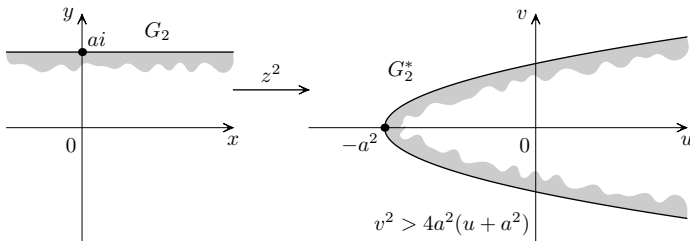


Рис. 56

**Пример 3.** Пусть необходимо область  $G_3 \triangleq \{z = x + iy \mid |y^2 > 2p(\frac{p}{2} + x)\}$ , где  $p > 0$ , конформно отобразить в некоторое полупространство. Если параметр  $p$  заменить на параметр  $a = \sqrt{\frac{p}{2}}$ , то в силу предыдущего примера 2 функция  $w = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i \arg z}{2}}$ , где  $\arg z \in (0, 2\pi)$ , конформно отображает область  $G_3$  на полуплоскость  $G_3^* = \{w \mid \text{Im } w > \sqrt{\frac{p}{2}}\}$  (см. рис. 57).

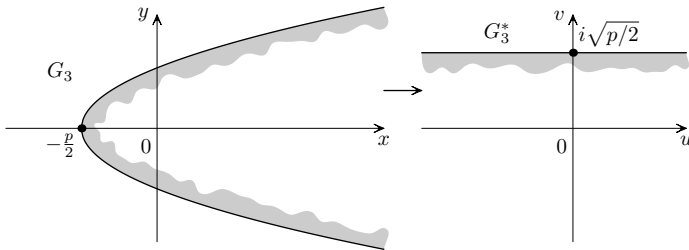


Рис. 57

**2. Экспоненциальная функция.** Пусть заданы действительные числа  $a, b, \alpha, \beta$  такие, что  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  и  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ . Рассмотрим функцию  $w = e^z$ . Эта функция на прямоугольнике

$$G \triangleq \{z = x + iy \mid a < x < b, \alpha < y < \beta\}, \quad \text{где} \quad \beta - \alpha \leq 2\pi,$$

однолистка (что показано нами в примере 2 из § 5) (см. рис. 58).

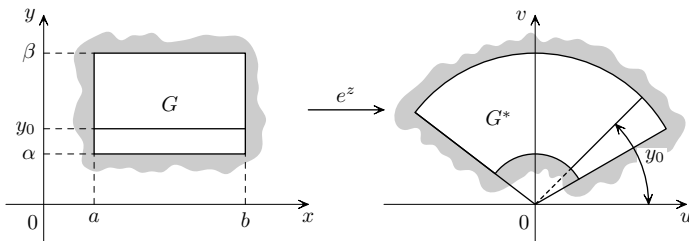


Рис. 58

При этом функция  $w = e^z$  интервал  $\{z \mid z = t + iy_0, a < t < b\}$ , где  $y_0 \in (\alpha, \beta)$ , отображает на интервал  $\{w \mid w = \tau e^{iy_0}, \tau \in (e^a, e^b)\}$ , а интервал  $\{z \mid z = x_0 + it, \alpha < t < \beta\}$ , отображает на дугу  $\{w \mid w = e^{x_0} \cdot e^{it}, \alpha < t < \beta\}$ .

В итоге функция  $w = e^z$  конформно отображает прямоугольник  $G$  на сектор

$$G^* = \{w \mid e^a < |w| < e^b, \alpha < \arg w < \beta\}.$$

Рассмотрим два частных случая прямоугольника  $G$ .

**Пример 4.** Пусть прямоугольник  $G$  имеет вид  $G_4 \triangleq \{z = x + iy \mid x < 0, 0 < y < \pi\}$ . Тогда в силу сказанного выше функция  $w = e^z$  конформно отображает область  $G_4$  на полуокруг  $G_4^* = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  (см. рис. 59).

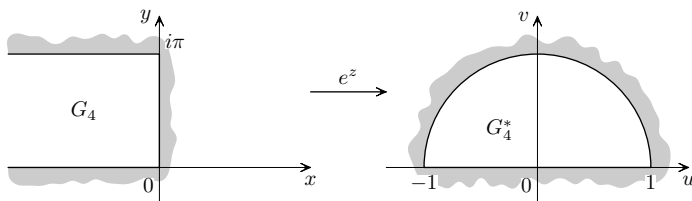


Рис. 59

**Пример 5.** Пусть прямоугольник  $G$  имеет вид  $G_5 \triangleq \{z = x + iy \mid x > 0, 0 < y < \pi\}$ . Тогда в силу сказанного выше функция  $w = e^z$  конформно отображает область  $G_5$  на область  $G_5^* = \{z \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  (см. рис. 60).

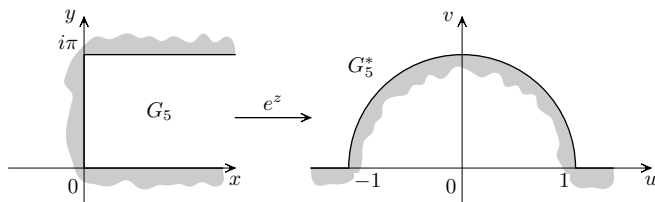


Рис. 60

*Замечание 1.* Так как конформные отображения во многих примерах (как в примерах 1, 2 и примерах 4, 5) заданы

регулярными функциями, однолиственными на соответствующих областях, то обратные к ним функции конформно отображают образы на соответствующие им прообразы. Это уже показано в примере 3. Также, например, полукруг  $G_4^*$  регулярной функцией  $h(z) = \ln |z| + i \arg z$ ,  $\arg z \in (0, \pi)$ , конформно отображается на область  $G_4$ , а область  $G_5^*$  этой же функцией  $h$  конформно отображается на область  $G_5$ .

**3. Функция Жуковского.** Функция

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (3)$$

называется *функцией Жуковского*.

Исследуем, каким условиям должна удовлетворять область, чтобы функция Жуковского (3) на ней была конформной.

Очевидно, что функция (3) регулярна в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . При этом

$$w'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right), \quad \text{т. е.} \quad w'(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq \pm 1.$$

В точке  $z = 0$  функция  $w$  (3) имеет полюс 1-го порядка. Тогда рассмотрим функцию

$$g(z) \triangleq \frac{1}{w(z)} = \frac{2z}{1+z^2}, \quad g'(z) = \frac{2-2z^2}{(1+z^2)^2}, \quad \text{т. е.} \quad g'(0) = 2 \neq 0.$$

Отсюда и из определения 4 § 25 следует, что функция  $w$  конформна в точке 0.

Аналогично для проверки конформности функции  $w$  в точке  $\infty$  достаточно рассмотреть функцию  $\tilde{g}(z) \triangleq w\left(\frac{1}{z}\right)$  в точке 0. Так как  $w\left(\frac{1}{z}\right) = w(z)$  и, как уже показали, функция  $w$  конформна в нуле, то по определению 3 § 25 функция  $w$  конформна в  $\infty$ .

Итак, мы показали, что функция Жуковского  $w$  конформна в каждой точке множества  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ .

Исследуем условия на область, при которых функция Жуковского будет однолиственной в этой области.

Допустим, что две различные точки  $z_1, z_2$  таковы, что  $w(z_1) = w(z_2)$ . Это значит, что

$$\frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left( z_2 + \frac{1}{z_2} \right), \quad \text{т. е.}$$

$$(z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, функция Жуковского однолистка в области  $G$  тогда и только тогда, когда для любого  $z \in G$  следует, что  $\frac{1}{z} \notin G$ .

Вывод. Функция Жуковского (3) конформна на всякой области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  такой, что  $\pm 1 \notin G$  и  $\forall z \in G \Rightarrow \frac{1}{z} \notin G$ .

Так как равенство  $z_2 = \frac{1}{z_1}$  означает, что  $z_2$  получено из  $z_1$  суперпозицией двух симметрий (см. рис. 61) — относительно окружности  $|z| = 1$  и относительно прямой  $\text{Im } z = 0$ , то для того, чтобы функция (3) была конформна на некоторой области  $G$ , достаточно, чтобы эта область не содержала пар точек, симметричных относительно указанной окружности, или указанной прямой. Поэтому примерами областей, на которых функция Жуковского конформна, очевидно, являются четыре области:

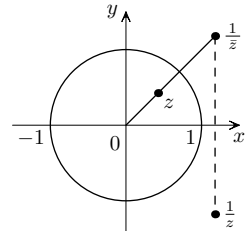


Рис. 61

- 1)  $\text{Im } z > 0$ ,      3)  $|z| > 1$ ,
- 2)  $\text{Im } z < 0$ ,      4)  $|z| < 1$ .

Для дальнейшего изучения свойств функции Жуковского (3) воспользуемся представлением числа  $z$  в полярной форме  $z = r e^{i\varphi}$ . Тогда функция Жуковского принимает вид

$$w = \frac{1}{2} r e^{i\varphi} + \frac{1}{2r} e^{-i\varphi} = u + iv,$$

где

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

а) Пусть задана окружность  $\gamma_{r_0} \triangleq \{z \mid z = r_0 e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  радиуса  $r_0 > 0$ , где  $r_0 \neq 1$ . Тогда из формулы (4) получаем, что ее образ удовлетворяет уравнению

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad (5)$$

где

$$a \triangleq \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right), \quad b \triangleq \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|, \quad (6)$$

т. е. функция Жуковского отображит окружности  $\gamma_{r_0}$  и  $\gamma_{\frac{1}{r_0}}$  при  $r_0 \neq 1$  в один и тот же эллипс (5), (6) с фокусами в точках  $+1$  и  $-1$  (так как очевидно, что  $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ ) (см. рис. 62).

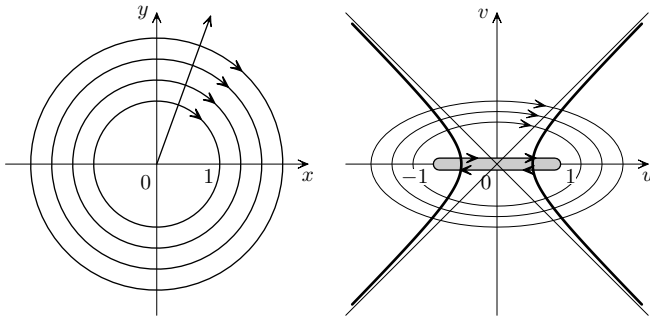


Рис. 62

б) Пусть задан луч

$$\lambda_{\varphi_0} \triangleq \{z \mid z = t e^{i\varphi_0}, 0 < t < \infty\}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi).$$

Вначале полагаем, что  $\varphi_0 \notin \{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\}$ . По формулам (4) для образа луча  $\lambda_{\varphi_0}$  получаем выражения

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} = \frac{1}{4} \left( t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right), \quad \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = \frac{1}{4} \left( t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right),$$

откуда следует, что

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1. \quad (7)$$

Это означает, что функция Жуковского отображает луч  $\lambda_{\varphi_0}$  на ветвь гиперболы (7), фокусы которой находятся в точках



+1 и -1 (так как здесь  $c^2 = a^2 + b^2 = \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 = 1$ ) (см. рис. 62).

Если  $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ , то из формул (4) получаем, что в образе  $u > 0$ , а функция  $v$  при возрастании параметра  $t$  возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. образом луча является правая ветвь гиперболы (7).

Если  $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$ , то из формул (4) получаем, что в образе  $u < 0$ , а функция  $v$  возрастает, т. е. образом этого луча является левая ветвь гиперболы (7).

Для рассмотрения образов лучей из третьей и четвертой четвертей плоскости отметим следующее. При замене  $\varphi_0$  на  $-\varphi_0$  из формул (4) следует, что образом луча  $\lambda_{-\varphi_0}$  служит та же ветвь гиперболы, что и образом луча  $\lambda_{\varphi_0}$ , с заменой направления движения по ней на противоположное.

В заключение осталось рассмотреть образы лучей, идущих по координатным осям. Для  $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  из формул (4) получаем, что образом каждого из лучей  $\lambda_{\frac{\pi}{2}}$  и  $\lambda_{-\frac{\pi}{2}}$  является мнимая ось (со взаимно противоположными направлениями обхода).

Для  $\varphi_0 = 0$  образом луча  $\lambda_0$  будет луч  $[1, +\infty)$  с двойным обходом.

Для  $\varphi_0 = \pi$  образ луча  $\lambda_\pi$  будет луч  $(-\infty, -1]$  с двойным обходом.

Разберем некоторые примеры областей, на которых функция Жуковского (3) конформна.

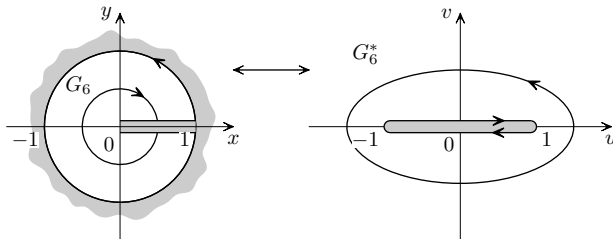


Рис. 63

**Пример 6.** Пусть задана область  $G_6 = B_1(0) \triangleq \{z \mid |z| < 1\}$ , то функция Жуковского конформна на  $G_6$ , при-

чем ее граница  $|z| = 1$  переходит в разрез по отрезку  $[-1, 1]$  (см. рис. 63).

Рассмотрев образы всех окружностей с центром в 0, содержащихся в области  $G_6$ , в силу приведенных выше рассуждений получаем, что функция Жуковского отображает область  $G_6$  на область  $G_6^* = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

**Пример 7.** Пусть задана верхняя полуплоскость  $G_7 = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$ . Тогда функция Жуковского на области  $G_7$  конформна, и, рассмотрев образы лучей, выходящих из нуля и лежащих в верхней полуплоскости, получаем, что образом области  $G_7$  является область  $G_7^* = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$  (см. рис. 64).

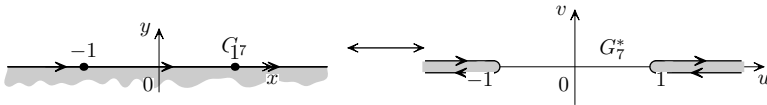


Рис. 64

*Замечание 2.* Разобранные выше примеры позволяют также конформно отображать область  $G_6^*$  на область  $G_6$ , а область  $G_7^*$  конформно отображать на область  $G_7$ . Для этого нужно рассмотреть обратные к функции Жуковского отображения. Из определения функции (3) получаем квадратное уравнение относительно  $z$

$$z^2 - 2wz + 1 = 0,$$

решая которое получаем, что в области  $G_6^*$  существуют две регулярные функции, обратные к функции Жуковского, это функции  $z = w \pm g_0(w)$ , где  $g_0(w)$  есть та регулярная ветвь корня  $\{\sqrt{w^2 - 1}\}$ , которая эквивалентна  $w$  при  $w \rightarrow \infty$ . Тогда область  $G_6^*$  конформно отображается на область  $G_6$  функцией  $z = w - g_0(w)$ , так как при  $w \rightarrow \infty$  ее предел равен нулю.

В односвязной области  $G_7^*$  также существуют две регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt{w^2 - 1}\}$ . Возьмем ее регулярную ветвь  $g_1(w)$  такую, что  $g_1(0) = +i$ . Тогда функция  $z = w + g_1(w)$  конформно отображает область  $G_7^*$  на область  $G_7$ .

**Пример 8.** Пусть задана область

$$G_8 = \{z \mid |z - ia| > \sqrt{1 + a^2}\}, \quad (8)$$

где число  $a > 0$ . Границей области  $G_8$  является окружность  $\gamma$ , проходящая через точки  $\pm 1$ ,  $ib$  и  $-\frac{i}{b}$ , где  $b \triangleq a + \sqrt{a^2 + 1}$  (см. рис. 65).

Дробно-линейное отображение  $f(z) = \frac{1}{z}$  отображает окружность  $\gamma$  на себя, так как три точки из  $\gamma$  отображаются на три точки из  $\gamma$ , т. е.  $f(-1) = -1$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(ib) = -\frac{i}{b}$ . Так как  $f(\infty) = 0$ , то функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  отобразит область  $G_8$  на дополнение  $\mathbb{C} \setminus \overline{G_8}$ , т. е. в области  $G_8$  нет точек, переходящих при отображении  $\frac{1}{z}$  в область  $G_8$ , т. е. по критерию ее однолиственности функция Жуковского на области  $G_8$  однолистка.

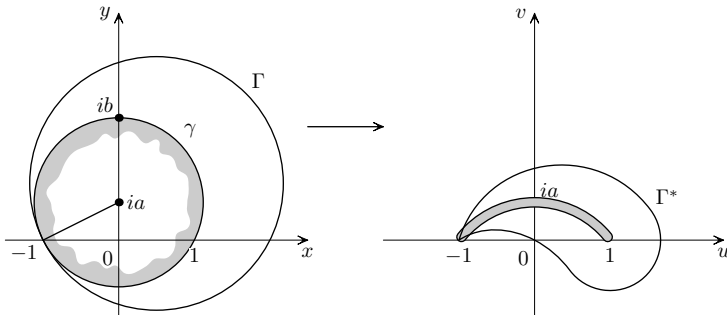


Рис. 65

Найдем образ области  $G_8$  при отображении функцией Жуковского. Представим функцию (3) как суперпозицию трех отображений:

$$w = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \quad (9)$$

$$\zeta = t^2, \quad t = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (10)$$

Дробно-линейное отображение  $t(z)$  (10), очевидно, переведет окружность  $\gamma$  в прямую, а функция  $\zeta = t^2$  переведет эту прямую в луч, идущий из 0 в  $\infty$  и не лежащий на действительной оси. Дробно-линейное отображение (9) переведет этот луч

в дугу окружности с концами в точках 1 и  $-1$ . Точку  $z = ib$  функция Жуковского переведет в точку

$$w = \frac{1}{2} \left( ib + \frac{1}{ib} \right) = ia.$$

Таким образом, функция Жуковского конформно отображит область  $G_8$  в плоскость  $\mathbb{C}$  с разрезом по дуге окружности с концами в точках  $+1$ ,  $-1$  и проходящей через точку  $ia$ . Если в области  $G_8$  взять любую окружность  $\Gamma$ , касающуюся окружности  $\gamma$  в точке  $-1$ , то функция Жуковского отображит ее в кривую  $\Gamma^*$ , называемую *профилем Жуковского* (см. рис. 65).

*Замечание 3.* Эти кривые  $\Gamma^*$  впервые использовались Н. Е. Жуковским для построения профилей крыла самолета при расчете подъемной силы крыла самолета.

**4. Теорема Римана.** Мы рассмотрели много примеров в § 26 и в § 27, когда регулярные и однолистные в области функции конформно отображают эту область на образ. Рассмотрим теперь более трудную и более важную для приложений обратную задачу. Пусть заданы две области  $G_1$  и  $G_2$  из  $\overline{\mathbb{C}}$  и требуется найти функцию  $f : G_1 \rightarrow G_2$ , осуществляющую конформное отображение области  $G_1$  на область  $G_2$ .

Для начала завершим исследование всех конформных отображений круга  $B_1(0)$  на себя. При изучении дробно-линейных отображений мы нашли некоторый класс таких отображений (см. пример 2 и формулу (20)). Покажем, что этот класс исчерпывает все возможности.

**Теорема 1.** *Все отображения, конформно переводящие круг  $B_1(0)$  на себя, являются дробно-линейными функциями вида*

$$w = \frac{z - a}{1 - z\bar{a}} e^{i\beta}, \quad (11)$$

где  $a$  – точка из  $B_1(0)$  и  $\beta \in \mathbb{R}^1$ .

**Доказательство.** Допустим, что функция  $g$  конформно отображает  $B_1(0)$  на себя. Тогда существует точка  $w_0 \in B_1(0)$  такая, что  $g(0) = w_0$ . Рассмотрим отображение  $h(w) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\Delta}{\Delta} \frac{w - w_0}{1 - w\bar{w}_0}$ , которое как показано в примере 2 конформно отоб-

ражает круг  $B_1(0)$  на круг  $B_1(0)$ . Тогда суперпозиция  $f \triangleq h \circ g$  также конформно отображает  $B_1(0)$  на  $B_1(0)$ , причем  $f(0) = 0$ . Кроме того, это значит, что  $|f(z)| < 1$  при всех  $z \in B_1(0)$ . Применяя лемму Шварца (см. лемму 2 § 24), получаем, что  $|f(z)| \leq |z|$  для всех  $z \in B_1(0)$ .

В свою очередь, обратное отображение  $f^{-1} : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  также конформно, ограничено и  $f^{-1}(0) = 0$ . По лемме Шварца получаем  $|f^{-1}(w)| \leq |w|$  для всех  $w \in B_1(0)$ , т.е.  $|z| \leq |f(z)|$  при всех  $z \in B_1(0)$ . В результате получаем равенство  $|f(z)| = |z|$  для всех  $z \in B_1(0)$ . По лемме Шварца существует число  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  такое, что  $f(z) = e^{i\alpha}z$  для всех  $z \in B_1(0)$ . Отсюда следует, что функция  $g$  имеет вид  $g = h^{-1} \circ f = h^{-1}(e^{i\alpha}z)$ , т.е.  $g$  является дробно-линейной функцией.

Существует точка  $a_0 \in B_1(0)$  такая, что  $g(a_0) = 0$ . Дифференцируя тождество  $e^{i\alpha}z = h \circ g$ , получаем, что  $e^{i\alpha} = h'(0)g'(a_0)$ , откуда и из того, что  $h'(0) = 1 - |w_0|^2 > 0$ , получаем, что  $\alpha \in \text{Arg } g'(a_0)$ . Рассмотрим функцию  $g_1$ , удовлетворяющую формуле (11) при  $a = a_0$  и  $\beta = \alpha$ . Легко проверить, что  $g'_1(a_0) = e^{i\alpha} \frac{1}{1 - |a_0|^2}$ , т.е.  $\alpha \in \text{Arg } g'_1(a_0)$ . Тогда дробно-линейная функция  $\varphi = g_1 \circ g^{-1}$  такова, что  $\varphi(0) = 0$  и  $0 \in \text{Arg } \varphi'(0)$ . Но это значит, что  $\varphi(z) = z$ , т.е.  $g = g_1$ , т.е. все конформные отображения  $B_1(0)$  на себя описываются формулой (11). ■

**Лемма 1.** Пусть область  $G_0$  такова, что существует функция  $f_0$ , конформно отображающая область  $G_0$  на круг  $B_1(0)$ . Тогда совокупность всех конформных отображений области  $G_0$  на круг  $B_1(0)$  задается формулой

$$f = h \circ f_0, \tag{12}$$

где  $h$  – дробно-линейное отображение вида (11).

**Доказательство.** Так как всякое отображение  $h$  вида (11), конформно отображает круг  $B_1(0)$  на себя, то отображение  $f$  из (12) очевидно конформно отображает  $G$  на  $B_1(0)$ . С другой стороны, пусть задано произвольное конформное отображение  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  области  $G$  на  $B_1(0)$ . Тогда отображение  $\varphi \triangleq f \circ f_0^{-1}$  конформно отображает  $B_1(0)$  на себя. В силу тео-

ремы 1 функция  $\varphi$  является дробно-линейной вида (11), и из последнего равенства получаем представление  $f$  в виде (12). ■

**Теорема 2 (единственности).** Если для области  $G \subset \subset \overline{\mathbb{C}}$  существует конформное отображение  $f_0$  области  $G$  на круг  $B_1(0)$ , то совокупность всех конформных отображений  $G$  на круг  $B_1(0)$  зависит от трех действительных параметров. В частности, существует единственное конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$ , нормированное условиями:

$$f(z_0) = 0, \arg f'(z_0) = \theta, \quad (13)$$

где  $z_0$  – произвольная точка из  $G$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

**Доказательство.** Первое утверждение следует из леммы 1 и того, что дробно-линейное отображение (11) зависит от трех действительных параметров: двух координат точки  $z_0$  и числа  $\beta$  в (11).

Допустим, что существуют два конформных отображения  $f_1$  и  $f_2$  области  $G$  на круг  $B_1(0)$ , удовлетворяющие одинаковым условиям (13). Тогда функция  $h \triangleq f_1 \circ f_2^{-1}$  будет конформно отображать  $B_1(0)$  на себя, причем  $h(0) = 0$ . Кроме того, из равенства  $f_1 = h \circ f_2$  получаем по теореме о сложной функции  $f_1'(z_0) = h'(0) f_2'(z_0)$ , откуда получаем, что  $\arg h'(0) = 0$ . Из формулы (11) при  $h(0) = 0$  и  $\arg h'(0) = 0$  следует, что  $a = 0$  и  $\beta = 0$ , т.е.  $h(z) = z$ , т.е.  $f_1(z) = f_2(z)$  при любом  $z \in G$ . ■

*Замечание 4.* В силу леммы и теоремы единственности получаем, что функция (17) из §26 задает общий вид конформного отображения верхней полуплоскости на круг  $B_1(0)$ .

Заметим, что расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  и комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  нельзя конформно отобразить на круг  $B_1(0)$ . В самом деле, если бы такое отображение существовало, то это была бы целая функция, со значениями, ограниченными по норме единицей. Но по теореме Лиувилля такая функция может быть лишь постоянной, которая не может давать однолистное отображение на  $B_1(0)$ . Итак, чтобы существовало конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$  необходимо, чтобы граничных точек было больше одной. Оказывается этого и достаточно.

**Теорема 3 (Риман).** Пусть задана односвязная область  $G$  в  $\overline{\mathbb{C}}$ , граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$ .

Теорему приводим без доказательства. При желании доказательство можно найти в § 12 книги [10].

**Следствие 1.** Если заданы две односвязные области  $G$  и  $G_1$  в  $\overline{\mathbb{C}}$ , и граница каждой состоит более чем из одной точки, то существует конформное отображение, переводящее область  $G$  на область  $G_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $f : G \rightarrow B_1(0)$  и  $g : G_1 \rightarrow B_1(0)$  — конформные отображения, существующие по теореме 3, тогда  $g^{-1} \cdot f$  есть искомое конформное отображение. ■

Также без доказательства приведем следующий результат.

**Теорема 4 (Принцип соответствия границ).** Пусть заданы две ограниченные односвязные области  $G$  и  $G_1$ , границы которых  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  являются простыми, кусочно-гладкими кривыми. Пусть функция  $f : G \rightarrow G_1$  конформно отображает область  $G$  на область  $G_1$ . Тогда существует непрерывное продолжение  $\tilde{f}$  функции  $f$  с области  $G$  на ее замыкание  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ , причем эта функция  $\tilde{f}$  осуществляет взаимно однозначное отображение замкнутой области  $\overline{G}$  на замкнутую область  $\overline{G_1} = G_1 \cup \Gamma_1$ , и границу  $\Gamma$  отображает на границу  $\Gamma_1$  с сохранением ориентации относительно своей области.

**Упражнение 1.** Покажите, что для выполнения принципа сохранения границ одной регулярности отображения не достаточно. А именно: придумайте пример функции, регулярной (но не однолистной) на некоторой односвязной ограниченной области  $G$  со значениями, образующими некоторую ограниченную область  $G_1$ , причем границы этих областей являются кусочно-гладкими контурами, но для которой не существует непрерывного продолжения на границу области  $G$ .

## § 28. Принцип симметрии

Рассмотрим один из специальных принципов аналитического продолжения, относящийся к конформным отображениям.

**Теорема 1.** Пусть области  $G$  и  $G^*$  расположены в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и имеют кусочно-гладкие границы  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ . Пусть граница  $\Gamma$  содержит конечное число непересекающихся интервалов  $l_1, \dots, l_k$ , лежащих на действительной оси, а граница  $\Gamma^*$  содержит непересекающиеся интервалы  $l_1^*, \dots, l_k^*$ , также лежащие на действительной оси. Определим области  $\tilde{G}$  и  $\tilde{G}^*$ , симметричные относительно действительной оси с областями  $G$  и  $G^*$  соответственно (см. рис. 66).

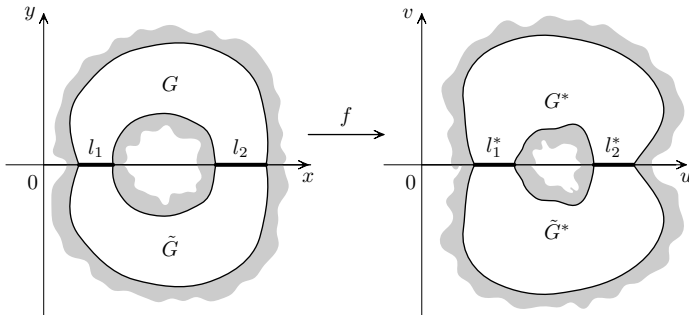


Рис. 66

Пусть задана непрерывная функция  $f : G \cup \left( \bigcup_{s=1}^k l_s \right) \rightarrow \mathbb{C}$ , которая конформно отображает область  $G$  на область  $G^*$ , а каждый интервал  $l_s$  взаимно однозначно отображает на интервал  $l_s^*$  при всех  $s \in \overline{1, k}$ . Тогда функция  $f$  допускает аналитическое продолжение на область  $G \cup \left( \bigcup_{s=1}^k l_s \right) \cup \tilde{G}$ , причем полученная регулярная функция конформно отображает область  $G \cup \left( \bigcup_{s=1}^k l_s \right) \cup \tilde{G}$  на область  $G^* \cup \left( \bigcup_{s=1}^k l_s^* \right) \cup \tilde{G}^*$ .



Доказательство. Покажем, что искомая функция имеет вид

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right); \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \tilde{G}. \end{cases} \quad (1)$$

По условиям теоремы функция  $f$  регулярна на области  $G$ . Из формулы (1) и из условий теоремы следует, что функция  $\mathcal{F}$  однозначна и непрерывна в области  $\tilde{G}$  и отображает эту область на область  $\tilde{G}^*$ .

1. Докажем регулярность функции  $\mathcal{F}$  в области  $\tilde{G}$ , доказав существование непрерывной производной  $\mathcal{F}'(z)$ . Зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in \tilde{G}$ . Тогда существует число  $r_0 > 0$  такое, что  $B_{r_0}(z_0) \subset \tilde{G}$ , следовательно, для каждого  $\Delta z$ ,  $0 < |\Delta z| < r_0$ , справедливо включение  $z_0 + \Delta z \in \tilde{G}$ . В силу (1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(z_0 + \Delta z) - \mathcal{F}(z_0)}{\Delta z} &= \frac{\overline{f(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{\Delta z} = \\ &= \overline{\left[ \frac{f(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z}) - f(\bar{z}_0)}{\overline{\Delta z}} \right]}. \end{aligned}$$

Так как из определения области  $\tilde{G}$  следует, что  $\bar{z}_0 \in G$  и  $\bar{z}_0 + \overline{\Delta z} \in G$ , то в силу регулярности функции  $f$  на области  $G$  существует предел

$$\lim_{\overline{\Delta z} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z}) - f(\bar{z}_0)}{\overline{\Delta z}} = f'(\bar{z}_0).$$

Отсюда следует существование производной  $\mathcal{F}'(z_0)$  и формулы

$$\mathcal{F}'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(z_0 + \Delta z) - \mathcal{F}(z_0)}{\Delta z} = \overline{f'(\bar{z}_0)}. \quad (2)$$

Непрерывность функции  $\mathcal{F}'$  на области  $\tilde{G}$  следует в силу формулы (2) из непрерывности функции  $f'$  на области  $G$ .

2. Докажем, что функция  $\mathcal{F}$  непрерывна на области  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$ . Для этого осталось доказать, что  $\mathcal{F}$  непрерывна

в произвольной точке  $x_0 \in \bigcup_{s=1}^k l_s$ . В самом деле, из непрерывности  $f$  на множестве  $G \cup (\bigcup_{s=1}^k l_s)$  получаем

$$\lim_{z \xrightarrow{\tilde{G}} x_0} \mathcal{F}(z) = \lim_{\bar{z} \xrightarrow{G} x_0} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\lim_{\bar{z} \xrightarrow{G} x_0} f(\bar{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0), \quad (3)$$

где последнее равенство в (3) следует из того, что по условию теоремы  $f(x_0) \in \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right)$ , т. е. является действительным числом.

В итоге, по теореме 4 из § 10 (о стирании разреза) функция  $\mathcal{F}$  регулярна на области  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$ .

Таким образом, функция  $\mathcal{F}$  является аналитическим продолжением функции  $f$  с области  $G$  на область  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$ .

3. Из взаимной однозначности отображения  $f : G \leftrightarrow G^*$  и взаимной однозначности  $f : \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \leftrightarrow \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right)$  и из формулы (1) следует взаимная однозначность отображения  $\mathcal{F} : \tilde{G} \leftrightarrow \tilde{G}^*$ . В итоге получаем однолиственное отображение  $\mathcal{F}$  области  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$  на область  $G^* \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right) \cup \tilde{G}^*$ . Из однолиственности и регулярности функции  $\mathcal{F}$  следует, что функция  $\mathcal{F}$  конформно отображает область  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$  на область  $G^* \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right) \cup \tilde{G}^*$ . ■

*Замечание 1.* Принцип симметрии (теорему 1) можно легко обобщить со случая симметрии относительно действительной оси на случай симметрии относительно произвольной прямой или окружности. Такое обобщение можно получить, воспользовавшись конформностью дробно-линейного отображения, которое переводит данную полуплоскость (или круг) на верхнюю полуплоскость, аналитическим продолжением в теореме 1 и об-

ратным дробно-линейным отображением, переводящим верхнюю полуплоскость в данную полуплоскость (или круг).

Приведем несколько примеров, демонстрирующих эффективность применения принципа симметрии при отыскании функций, осуществляющих конформные отображения заданных областей в заданные области, при наличии у этих областей симметрии относительно прямой или окружности.

**Пример 1.** Требуется найти конформное отображение, переводящее область

$$H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus (\{z \mid z = t(1+i), t \in [0,1]\} \cup \{z \mid z = t(-1+i), t \in [0,1]\})$$

(см. рис. 67а) в верхнюю полуплоскость плоскости  $\mathbb{C}$ .

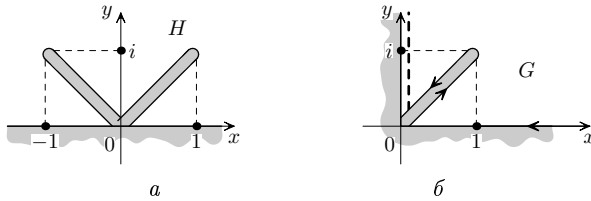


Рис. 67

Воспользуемся симметрией множества  $H$  относительно мнимой оси. Обозначим через  $G$  правую половину этого множества (см. рис. 67б). Чтобы не потерять введенный при этом дополнительный участок границы — интервал  $l_1 = (i0, +i\infty)$ , обозначим его на рисунке пунктиром. Задача свелась к тому, чтобы найти функцию  $f$ , которая непрерывна на замыкании области  $G$  по пунктиру на мнимой полуоси и конформно отображает область  $G$  в аналогичный угол первой четверти плоскости, но без разреза по отрезку  $\{z \mid z = t(1+i), t \in [0,1]\}$  (см. рис. 70). При этом образом пунктира должен быть он сам — интервал  $l_1$ . Тогда по принципу симметрии соответствующее аналитическое продолжение функции  $f$  с области  $G$  на область  $H$  отобразит область  $H$  в верхнюю полуплоскость.

1) Выбираем в области  $G$  функцию  $w_1 = z^4$ , которая однолистка (в области же  $H$  она не является однолистной). Эта

функция конформно отображает область  $G$  на область  $G_1 = \mathbb{C} \setminus [-4, +\infty)$ . При этом пунктир для области  $G$  этой функцией отображается на новый пунктир для области  $G_1$  — нижний край разреза по интервалу  $(0, +\infty)$  (см. рис. 68а).

2) Выбираем функцию  $w_2 = w_1 + 4$ . Она конформно отображает область  $G_1$  на область  $G_2 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ , причем пунктир отображается на новый пунктир — интервал  $(4, +\infty)$  на нижнем краю разреза (см. рис. 68б).

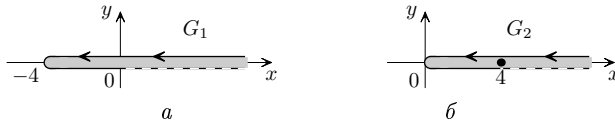


Рис. 68

3) Выбираем степенную функцию  $w_3 = |w_2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg w_2}$ , где  $\arg w_2 \in (0, 2\pi)$ . Эта функция, являющаяся регулярной ветвью квадратного корня, конформно отображает область  $G_2$  на верхнюю полуплоскость  $G_3$ , причем на границе  $G_3$  появится новый пунктир, который будет проходить по интервалу  $(-\infty, -2)$  (см. рис. 69а).

4) Выбираем функцию  $w_4 = w_3 + 2$ , при этом верхняя полуплоскость  $G_3$  отобразится на верхнюю полуплоскость  $G_4$ , причем на границе области  $G_4$  новый пунктир будет проходить по интервалу  $(-\infty, 0)$  (см. рис. 69б).

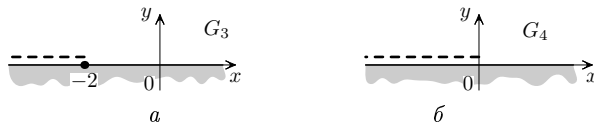


Рис. 69

5) Выбираем степенную функцию  $w_5 = |w_4|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg w_4}$ , где  $\arg w_4 \in (0, \pi)$ . Эта функция, являющаяся регулярной ветвью квадратного корня, конформно отображает область  $G_4$  на область  $G_5 = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$ , причем пунктир  $(-\infty, 0)$  отображается на новый пунктир  $(i0, +i\infty)$ , принадлежащий границе области  $G_5$  (см. рис. 70).

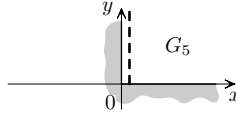


Рис. 70

Итак, суперпозиция всех указанных выше отображений, т.е. функция  $f = w_5 \cdot w_4 \cdot w_3 \cdot w_2 \cdot w_1$ , конформно отображает область  $G$  на область  $G_5$ , при этом она непрерывна на замыкании области  $G$  по пунктиру — интервалу  $(i0, +i\infty)$ , который при этом отображается на себя. Отсюда и из принципа симметрии относительно мнимой оси (см. замечание 1) следует существование аналитического продолжения функции  $f$  с области  $G$  на область  $H$ , которое и осуществляет конформное отображение области  $H$  на верхнюю полуплоскость.

**Пример 2.** Требуется найти конформное отображение, переводящее область  $H = \{z = x + iy \mid y^2 < 2p(x + \frac{p}{2})\}$ , где число  $p > 0$ , (см. рис. 71a) на верхнюю полуплоскость.

Границей области  $H$  является парабола. Всякая регулярная (например, в области  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ ) ветвь корня  $\{\sqrt{z}\}$  переводит данную параболу в прямую. Однако в отличие от примера 3 из § 27 многозначная функция  $\{\sqrt{z}\}$  не имеет регулярных ветвей в области  $H$ , так как в этой области содержится точка ветвления 0 функции  $\sqrt{z}$ .

Чтобы обойти эту трудность, воспользуемся симметрией области  $H$  относительно действительной оси. Выберем в качестве новой области  $G$  верхнюю половину области  $H$ , т.е.

$$G \triangleq \{z = x + iy \mid y^2 < 2p(x + \frac{p}{2}), y > 0\}.$$

При этом проводим пунктир по добавленному участку границы, т.е. по интервалу  $(-\frac{p}{2}, +\infty)$  (см. рис. 71б).

1) Выбираем на области  $G$  степенную функцию  $w_1 = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg z}$ , где  $\arg z \in (0, \pi)$ . Эта функция, являющаяся регулярной ветвью корня, конформно отображает область  $G$  на полуполосу  $G_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \in [0, \sqrt{p/2}]\}$ . При этом образом пунктира будет новый пунктир, который пойдет по

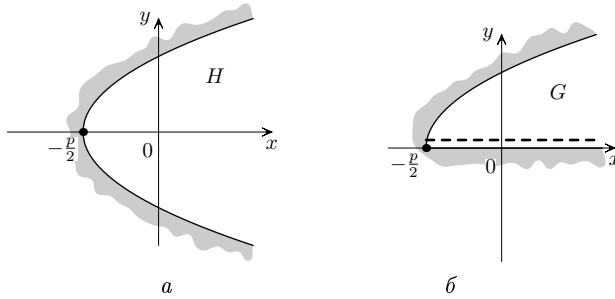


Рис. 71

действительной полуоси и отрезку  $[0, i\sqrt{p/2}]$  на мнимой оси. (см. рис. 72а).

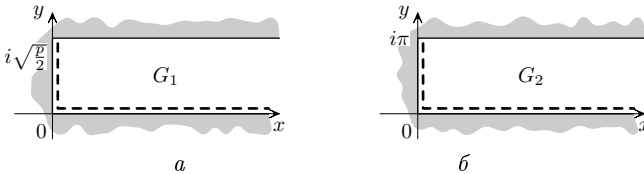


Рис. 72

2) Выбираем линейную функцию  $w_2 = \pi\sqrt{2/p}w_1$ . Она конформно отображает область  $G_1$  на полуполосу  $G_2 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \in [0, \pi]\}$  (см. рис. 72б).

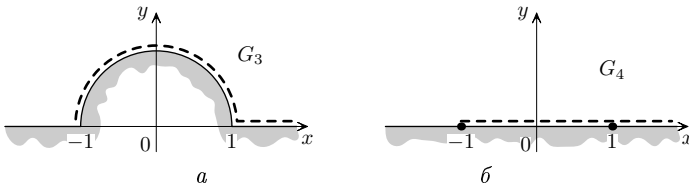


Рис. 73

3) Выбираем  $w_3 = e^{w_2}$ . Эта функция  $w_3$  конформно отображает полуполосу  $G_2$  на область  $G_3 = \{z \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ , причем образом пунктира будет граничная полуокружность и отрезок  $[1, +\infty)$  (см. рис. 73а).

4) Выбираем функцию Жуковского  $w_4 = \frac{1}{2} \left( w_3 + \frac{1}{w_3} \right)$ , которая конформна на области  $G_3$  и отображает ее на верхнюю

полуплоскость  $G_4$ , причем образом пунктира будет интервал  $(-1, +\infty)$  (см. рис. 73б).

Применяя теорему 1 (принцип симметрии), отсюда получаем, что аналитическое продолжение суперпозиции указанных выше четырех отображений  $w_4 \cdot w_3 \cdot w_2 \cdot w_1$  конформно отображает область  $H$  на плоскость с разрезом, т. е. на область  $G_5 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ .

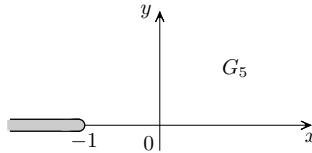


Рис. 74

5) Выбираем отображения  $w_5 = w_4 + 1$  и  $w_6 = i \sqrt{|w_5|} e^{\frac{i}{2} \arg_{\text{гл}} w_5}$ , суперпозиция которых, очевидно, конформно отображает область  $G_5$  на верхнюю полуплоскость.

В итоге, взяв суперпозицию приведенных выше шести отображений, получим искомое отображение области  $H$  на верхнюю полуплоскость.

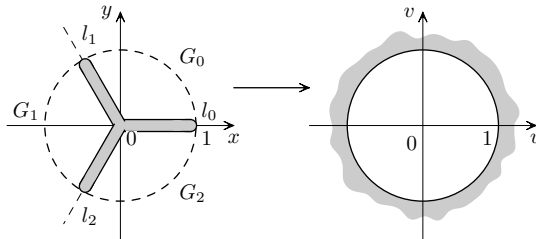


Рис. 75

**Пример 3.** Требуется найти конформное отображение, переводящее область

$$H = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=0}^2 \{z = te^{i\frac{2\pi}{3}k} \mid t \in [0,1]\}$$

(см. рис. 75) на единичный круг  $B_1(0)$ .

Для решения задачи разобьем область  $H$  на три подобласти  $G_0, G_1, G_2$ , где

$$G_k = \left\{ z \neq 0 \mid \arg z \in \left( \frac{2}{3}\pi k, \frac{2}{3}\pi(k+1) \right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (4)$$

при этом дополнительные (пунктирные) интервалы границы пойдут по лучам

$$l_k = \{ z = te^{i\frac{2\pi}{3}k} \mid t > 1 \}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (5)$$

На границе области  $G_0$  рисуем пунктир по интервалу  $l_0$  и штрих-пунктир по интервалу  $l_1$  (см. рис. 76). С помощью суперпозиции простых конформных отображений ищем отображение, переводящее область  $G_0$  в область

$$G_0^* = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left( 0, \frac{2}{3}\pi \right) \right\}. \quad (6)$$

Более того, искомое отображение должно быть непрерывным на замыкании области  $G_0$  по лежащим на границе области  $G_0$  пунктиру  $l_0$  и штрих-пунктиру  $l_1$ , которые должны отобразиться каждый сам на себя (см. рис. 79).

1) Возьмем в области  $G_0$  степенную функцию

$$w_1 = |z|^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i}{2} \arg z}, \quad \text{где} \quad \arg z \in \left( 0, \frac{2\pi}{3} \right).$$

Как показано в пункте 1 § 27, эта функция конформно отображает область  $G_0$  на верхнюю полуплоскость  $G_0^1$ . При этом пунктир  $l_0$  отображается на себя, а штрих-пунктир  $l_1$  отображается на интервал  $(-\infty, -1)$  (см. рис. 77).

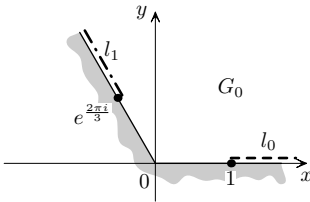


Рис. 76

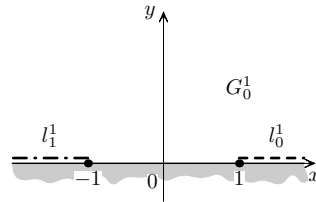


Рис. 77



2) Возьмем функцию  $w_2 = w_1 + g(w_1^2 - 1)$ , являющуюся регулярной ветвью обратной функции к функции Жуковского, причем такой, что  $w_2(i) = (1 + \sqrt{2})i$  (здесь функция  $g$  есть соответствующая регулярная ветвь корня). Эта функция конформно отображает область  $G_0^1$  на область  $G_0^2 = \{z \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ , граница которой содержит пунктир (образ пунктира) по интервалу  $(1, +\infty)$  и штрих-пунктир (образ штрих-пунктира) по интервалу  $(-\infty, -1)$  (см. рис. 78).

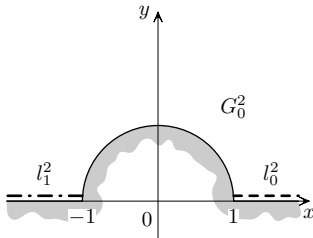


Рис. 78

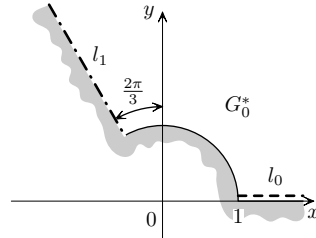


Рис. 79

3) Возьмем степенную функцию

$$w_3 = |w_2|^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2i}{3} \arg w_2}, \quad \text{где} \quad \arg w_2 \in (0, \pi).$$

Как показано в § 27, эта функция конформно отображает область  $G_0^2$  на область  $G_0^*$  из (6) (см. рис. 79), граница которой содержит пунктир по интервалу  $l_0$  и штрих-пунктир по интервалу  $l_1$ .

Итак, определим функцию  $f_0(z) = w_3(w_2(w_1(z)))$  на области  $G_0$ . Она конформно отображает область  $G_0$  (см. (4) и рис. 76 на область  $G_0^*$  (см. (6) и рис. 79, она непрерывна на замыкании области  $G_0$  по пунктиру  $l_0$  и штрих-пунктиру  $l_1$ , при этом они отображаются каждый сам на себя. Более того, так как входящие в функцию  $f_0$  степенные функции  $w_1$  и  $w_3$ , очевидно, отображают точки с равными модулями в точки с равными модулями, а обратная функция  $w_2$  к функции Жуковского нечетна, т. е.  $w_2(x) = -w_2(-x)$  при любом действительном  $x$ , то для точек пунктира  $l_0$  и штрих-пунктира  $l_1$  справедливо со-

отношение

$$\lim_{z \xrightarrow{G_0} x} f_0(z) e^{2\pi i/3} = \lim_{z \xrightarrow{G_0} x} f_0(z), \quad \forall x \in l_0. \quad (7)$$

Продолжим функцию  $f_0$  с области  $G_0$  на области  $G_1$  и  $G_2$ , определенные в (4).

Определим функцию

$$f_1(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} f_0(e^{-\frac{2\pi i}{3}} z), \quad \forall z \in G_1.$$

Эта функция  $f_1$  конформно отображает область  $G_1$  на область

$$G_1^* = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right) \right\},$$

причем в силу равенства (7) получаем равенство на границе  $l_1$

$$\lim_{z \xrightarrow{G_1} z_0} f_1(z) = \lim_{z \xrightarrow{G_0} z_0} f_0(z), \quad \forall z_0 \in l_1.$$

Определим функцию

$$f_2(z) = e^{\frac{4\pi i}{3}} f_0(e^{-\frac{4\pi i}{3}} z), \quad \forall z \in G_2.$$

Эта функция  $f_2$  конформно отображает область  $G_2$  на область

$$G_2^* = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left( \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right) \right\},$$

причем в силу равенства (7) получаем равенства

$$\lim_{z \xrightarrow{G_2} z_0} f_2(z) = \lim_{z \xrightarrow{G_1} z_0} f_1(z), \quad \forall z_0 \in l_2,$$

$$\lim_{z \xrightarrow{G_0} x_0} f_0(z) = \lim_{z \xrightarrow{G_2} x_0} f_2(z), \quad \forall x_0 \in l_0.$$

В итоге, воспользовавшись теоремой 4 § 10 (о стирании разреза), получаем, что функция  $\mathcal{F} = \{(G_k, f_k), k = 0, 1, 2\}$  является аналитической в области  $H$ , причем она конформно отображает область  $H$  на внешность круга  $|w| > 1$ . Для получения окончательного решения нужно применить отображение  $\frac{1}{w}$ , которое внешность круга конформно отображает на круг  $B_1(0)$ .

### § 29. Задача Дирихле на плоскости

В этом параграфе мы продолжим изучение свойств гармонических функций на плоскости, которые, как мы уже знаем, тесно связаны с регулярными функциями.

Для всякой функции  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  введем обозначение:  $u(z) \triangleq u(x, y)$ , где  $z = x + iy$ .

**Теорема 1.** Пусть регулярная функция  $w = f(z)$  отображает область  $G$  в область  $D$  и  $f(z) \neq \text{const}$ . Пусть в области  $D$  задана гармоническая функция  $\tilde{u}(w)$ . Тогда функция  $u(z) \triangleq \tilde{u}(f(z))$  будет также гармонической функцией в области  $G$ .

**Доказательство.** По принципу сохранения области (теорема 1) множество  $f(G)$  есть область и по условию  $f(G) \subset \subset D$ . Выберем произвольную точку  $z_0$  в области  $G$  и пусть точка  $w_0 \in D$  такая, что  $w_0 = f(z_0)$ . Так как  $f(G)$  область, то существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$ . Так как функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0$  и  $G$  — область, то существует число  $\delta > 0$  такое, что  $B_\delta(z_0) \subset G$  и  $f(B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(w_0)$ . По теореме 2 из § 4 в круге  $B_\varepsilon(w_0)$  существует регулярная функция  $h$  такая, что  $\text{Re } h(w) = \tilde{u}(w)$ . По теореме 1 из § 5 (о сложной функции) функция  $z \rightarrow h(f(z))$ , определенная в круге  $B_\delta(z_0)$ , будет регулярной. Следовательно, по теореме 1 из § 4, функция

$$u(z) \triangleq \text{Re } h(f(z)) = \tilde{u}(f(z))$$

будет гармонической функцией в круге  $B_\delta(z_0)$ , а в силу произвольности выбора точки  $z_0$  функция  $u(z)$  является гармонической во всей области  $G$ . ■

Приведем формулировки классической и общей задач Дирихле.

*Классическая задача Дирихле.* Пусть задана ограниченная односвязная область  $G \subset \mathbb{C}$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , и на границе  $\Gamma$  задана непрерывная функция  $u_0 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Требуется найти функцию  $u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , гармоническую в области  $G$  и непрерывную на замыкании области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , которая на границе совпадает с заданной функцией, т. е.  $u(\zeta)|_{\zeta \in \Gamma} = u_0(\zeta)$ .

*Общая задача Дирихле.* Пусть задана односвязная область  $G$  в расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , и на границе  $\Gamma$  задана ограниченная функция  $u_0 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1$ , непрерывная всюду, кроме, быть может, конечного числа точек  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , где эта функция имеет точки разрыва 1-го рода (вдоль границы  $\Gamma$ ). Обозначим через  $\tilde{\Gamma} \triangleq \Gamma \setminus \{\cup_{k=1}^n \zeta_k\}$ . Требуется найти гармоническую и ограниченную в области  $G$  функцию  $u$ , которая непрерывна на множестве  $G \cup \tilde{\Gamma}$  и принимает значения  $u_0(\zeta)$  в каждой точке  $\zeta$  из множества  $\tilde{\Gamma}$ .

*Замечание 1.* В общей задаче Дирихле область  $G$  может быть неограниченной и содержать бесконечно удаленную точку  $\infty$  как внутри себя, так и на границе  $\Gamma$ . В первом случае из условия ограниченности решения задачи Дирихле следует, что  $\infty$  есть устранимая особая точка этого решения. Если же бесконечно удаленная точка лежит на границе  $\Gamma$  области  $G$ , то из условия общей задачи Дирихле следует, что граничная функция  $u_0$  имеет конечные односторонние пределы в  $\infty$  вдоль кривой  $\Gamma$ .

**Лемма 1.** *Если существует решение  $u(z)$  общей задачи Дирихле в ограниченной односвязной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , то оно принимает значения в интервале  $[m, M]$ , где  $m$  и  $M$  — инфимум и супремум граничной функции  $u_0$  на множестве  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \{\cup_{k=1}^n \zeta_k\}$ , где  $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Gamma$  — все точки разрыва функции  $u_0$ .*

*Доказательство.* Через  $d$  обозначим диаметр области  $G$ , т.е.  $d \triangleq \sup\{|z_1 - z_2| \mid z_1, z_2 \in G\}$ , и пусть выбрано произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим функцию

$$U_\varepsilon(z) \triangleq M + \varepsilon \sum_{k=1}^n \ln \frac{d}{|z - \zeta_k|}. \quad (1)$$

Функция  $U_\varepsilon$ , очевидно, является гармонической в области  $G$  и непрерывной на множестве  $G \cup \tilde{\Gamma}$ .

При приближении к любой из точек  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , очевидно, получаем

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_k} U_\varepsilon(z) = +\infty, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (2)$$

Для каждого достаточно малого числа  $r > 0$  и номера  $k \in \overline{1, n}$  определим множества (см. рис. 80):

$$G_r \triangleq G \setminus \bigcup_{k=1}^n B_r(\zeta_k), \quad \gamma_r^k \triangleq \{z \in G \mid |z - \zeta_k| = r\}. \quad (3)$$

В силу равенства (2) для каждого номера  $k \in \overline{1, n}$  получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \min\{U_\varepsilon(z) \mid z \in \gamma_r^k\} \right] = +\infty. \quad (4)$$

Рассмотрим разность функций  $U_\varepsilon(z) - u(z)$ . Из выражения (1) и определения числа  $M$  получаем, что  $U_\varepsilon(z) > M \geq u(z)$  для любой точки  $z \in \tilde{\Gamma}$ . Отсюда, из ограниченности по условию функции  $u(z)$  и из выражения (4) существует число  $r_0 > 0$  для всякого числа  $r \in (0, r_0)$  справедливо неравенство  $U_\varepsilon(z) - u(z) > 0$  на границе области  $G_r$ . Отсюда в силу принципа максимума и минимума гармонических функций (см. теорему 3 из § 24) получаем неравенство  $U_\varepsilon(z) - u(z) > 0$  для всех  $z \in G_r$ . Из того, что для любого  $z \in G$  существует  $r_1 \in (0, r_0)$  такое, что  $z \in G_r$  при любом  $r \in (0, r_1)$ , из последнего неравенства получаем, что

$$U_\varepsilon(z) - u(z) > 0, \quad \forall z \in G, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5)$$

В свою очередь, для каждой точки  $z \in G$  в силу (1) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon(z) = M. \quad (6)$$

В итоге из выражений (5) и (6) следует, что  $u(z) \leq M \quad \forall z \in G$ .

Чтобы получить нижнюю оценку для  $u(z)$ , рассмотрим функцию  $-u(z)$ , которая также является гармонической и в силу приведенных выше рассуждений для нее следует верхняя оценка  $-u(z) \leq -m \quad \forall z \in G$ , что и завершает доказательство леммы. ■

**Следствие 1.** Если в лемме 1 функция  $u_0(z) \neq \text{const}$ , то решение общей задачи Дирихле удовлетворяет строгим неравенствам  $m < u(z) < M, \forall z \in G$ .

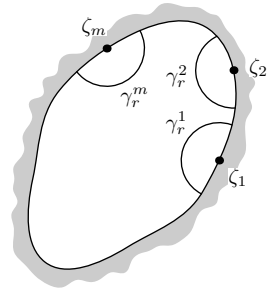


Рис. 80

**Доказательство.** От противного. Если бы существовала точка  $z_0 \in G$ , в которой достигается равенство  $u(z_0) = M$ , то из принципа максимума гармонической функции следовало бы, что найдется другая точка  $z_1 \in G$ , в которой  $u(z_1) > M$ , что невозможно в силу леммы 1. Аналогично доказывается, что  $u(z) > m$  на  $G$ . ■

**Теорема 2.** В односвязной ограниченной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  общая задача Дирихле может иметь не более одного решения.

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\Gamma}$  то же, что и в лемме 1. Допустим, что существуют две функции  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$ , являющиеся ограниченными гармоническими в области  $G$ , непрерывными на множестве  $G \cup \tilde{\Gamma}$  и удовлетворяющие одному и тому же граничному условию. Определим функцию

$$w(z) = u_1(z) - u_2(z).$$

Эта функция является гармонической и ограниченной в области  $G$ , и равна нулю во всех точках множества  $\tilde{\Gamma}$ . По лемме 1 получаем, что  $w \equiv 0$ . ■

*Замечание 2.* Отметим, что в теореме единственности (теореме 2) условие ограниченности области  $G$  можно убрать, однако это приведет к значительному усложнению доказательства теоремы (доказательство см., например, в [3]). В свою очередь, в теореме 2 условие ограниченности решения  $u(z)$  общей задачи Дирихле в области  $G$  существенно.

Покажем это на примере. Рассмотрим функцию

$$u(z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = \operatorname{Re} \left( 1 - \frac{2}{z} \right).$$

Эта функция является гармонической в круге  $|z - 1| < 1$ , т. е. при  $x^2 + y^2 < 2x$ . При этом она равна нулю на границе круга всюду, кроме одной точки 0. В результате эта функция дает неограниченное решение общей задачи Дирихле в данном круге, отличное от другого решения, тождественно равного нулю.

Перейдем к исследованию простейшей *классической задачи Дирихле на круге*  $B_R(0)$ , где число  $R > 0$ . Допустим, что решение классической задачи Дирихле на круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < R, \\ u|_{|z|=R} = u_0(x, y), \end{cases} \quad (7)$$

существует. Более того, допустим, что решение  $u(x, y)$  задачи (7), является гармонической функцией в большем круге  $B_{R_1}(0)$  радиуса  $R_1 > R$ . Тогда, в силу теоремы 2 § 4, найдется регулярная в круге  $B_{R_1}(0)$  функция  $f$  такая, что

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \forall z = x + iy \in B_{R_1}(0). \quad (8)$$

Зафиксируем произвольную точку  $z \in B_R(0)$ , и пусть окружность  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta| = R\}$  ориентирована движением против хода часовой стрелки. По интегральной формуле Коши (теорема 1 § 8)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta(\psi))\zeta(\psi)}{\zeta(\psi) - z} d\psi, \quad (9)$$

где во втором интеграле мы заменили  $\zeta$  на функцию  $\zeta(\psi) = Re^{i\psi}$ , и, соответственно,  $d\zeta = i\zeta(\psi) d\psi$ .

Рассмотрим точку, симметричную выбранной точке  $z$  относительно окружности  $\gamma_R$ . Эта точка имеет вид  $R^2 \cdot (\bar{z})^{-1}$  и лежит вне круга  $B_R(0)$ . Аналогично равенству (9) получаем равенство интегралов

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - R^2(\bar{z})^{-1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - R^2(\bar{z})^{-1}} d\psi. \quad (10)$$

Левый интеграл в (10) равен нулю в силу того, что его подинтегральная функция является регулярной в круге  $B_R(0)$ , и для нее справедлива теорема Коши (теорема 1 из § 7). В правом интеграле в (10)  $\zeta = \zeta(\psi) = Re^{i\psi}$ .

Вычитая (10) из (9), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \left[ \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2} \right] d\psi. \quad (11)$$

Так как  $R^2 = \zeta\bar{\zeta}$ , то упростим выражение в интеграле (11):

$$\left[ \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2} \right] = \left[ \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right] = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}. \quad (12)$$

Подставляя в интеграл (11) выражение (12) и  $\zeta = Re^{i\psi}$ , получаем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\psi} - z|^2} d\psi. \quad (13)$$

Выбирая слева и справа в равенстве (13) действительные части и обозначая

$$u_0(\zeta) \Big|_{|\zeta|=R} \triangleq \tilde{u}_0(\psi),$$

получаем так называемую *формулу Пуассона*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}_0(\psi) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\psi} - z|^2} d\psi. \quad (14)$$

Правая часть формулы (14) называется *интегралом Пуассона*, она вычисляется через значение функции  $u_0$  на границе круга. Слева в (14) стоит решение задачи Дирихле  $u(x, y)$  на круге  $B_R(0)$ .

Таким образом, мы показали, что если решение классической задачи Дирихле существует, то оно выражается через интеграл Пуассона (14).

Определим ядро интеграла Пуассона (14) по формуле

$$K(\zeta, z) \triangleq \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad (15)$$

Легко проверить, что  $K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ , откуда получим другую форму интеграла Пуассона:

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{(\zeta - z)\zeta} d\zeta, \quad (16)$$



удобную для его вычисления с помощью вычетов.

Перейдем к вопросу о существовании решения *общей задачи Дирихле на круге* и покажем, что именно интеграл Пуассона (14) является решением, причем не только классической, но и общей задачи Дирихле на круге.

Для этого вначале изучим свойства ядра (15) интеграла Пуассона.

**Лемма 2.** *Справедливо равенство*

$$J(z) \triangleq \int_0^{2\pi} K(Re^{i\psi}, z) d\psi \equiv 1, \quad \forall z \in B_R(0). \quad (17)$$

**Доказательство.** Интеграл  $J(z)$  представим в виде  $J(z) = \operatorname{Re} J^*(z)$ , где интеграл  $J^*(z)$  удовлетворяет равенству

$$J^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

По теореме о вычетах, обозначая через  $f$  подинтегральную функцию  $f(\zeta) = (\zeta + z)/((\zeta - z)\zeta)$ , вычислим интеграл

$$J^*(z) = \operatorname{res}_z f + \operatorname{res}_0 f = -1 + 2 = 1.$$

Отсюда следует, что  $J(z) = \operatorname{Re} J^*(z) = 1$ . ■

**Лемма 3.** *Пусть на окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta| = R\}$  выбрана точка  $\zeta_0$  и пусть угол  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$  такой, что  $\zeta_0 = Re^{i\psi_0}$ . Для каждого  $\delta \in (0, \pi)$  определим дугу*

$$\gamma(0, \delta) \triangleq \{\zeta \mid \zeta = Re^{i\psi}, \psi \in [\psi_0 + \delta, \psi_0 + 2\pi - \delta]\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{z \xrightarrow{B_R(0)} \zeta_0} \max\{K(\zeta, z) \mid \zeta \in \gamma(0, \delta)\} = 0. \quad (18)$$

**Доказательство.** Так как ядро  $K(\zeta, z)$  можно записать в виде

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta_0|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad (19)$$

то числитель в (19) при  $z$ , стремящемся к  $\zeta_0$ , очевидно, стремится к нулю. Оценим поведение знаменателя при  $z \rightarrow \zeta_0$ . Так

как функция  $e^{i\psi}$  непрерывна, то найдется число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что  $|\zeta - \zeta_0| = R|1 - e^{i(\psi - \psi_0)}| \geq \varepsilon_0$  при  $\psi \in [\psi_0 + \delta, \psi_0 + 2\pi - \delta]$ . Выбирая точку  $z \in B_R(0)$  из условия  $|z - \zeta_0| < \varepsilon_0/2$ , получаем

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - \zeta_0| - |\zeta_0 - z| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

В итоге

$$\max\{K(\zeta, z) \mid \zeta \in \gamma(0, \delta)\} \leq \frac{2}{\pi\varepsilon_0^2}(|\zeta_0|^2 - |z|^2),$$

откуда следует утверждение леммы. ■

**Теорема 3.** *Решение общей задачи Дирихле на круге  $B_R(0)$  существует и описывается интегралом Пуассона (14).*

*Доказательство.* Покажем, что если граничная функция  $u_0(\zeta)$  является кусочно-непрерывной на окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta| = R\}$ , то формула Пуассона (14) дает решение общей задачи Дирихле на круге  $B_R(0)$ . В самом деле, правая часть формулы (14) определяется значениями функции  $u_0(\zeta)$  на окружности  $\gamma_R$ , причем интеграл Пуассона (14) определен на круге  $B_R(0)$ . В силу формулы (16) интеграл Пуассона (14) можно преобразовать к виду  $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ , где

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi, \quad \zeta = Re^{i\psi}. \quad (20)$$

Покажем, что функция  $f$  из (20) регулярна в круге  $B_R(0)$ , откуда последует гармоничность функции  $u$  в круге  $B_R(0)$ . Для этого вычислим выражение

$$\begin{aligned} & \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \left\{ \left[ \frac{\zeta + z + \Delta z}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right] \frac{1}{2\Delta z} - \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} \right\} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \left\{ \frac{\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} - \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} \right\} d\psi = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta z}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \frac{\zeta d\psi}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)}. \quad (21)$$

Таким образом, эта разность стремится к нулю при  $\Delta z \rightarrow 0$ , т. е. существует производная  $f'$ . Она задается интегралом, приведенным в разности (21), который, очевидно, является непрерывной функцией на круге  $B_R(0)$ . В итоге мы показали, что функция  $f$  регулярна, а интеграл Пуассона (14) является гармонической функцией на круге  $B_R(0)$ .

Покажем, что функция  $u$  из формулы Пуассона (14) на круге  $B_R(0)$  ограничена. Обозначим через  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  точки разрыва 1-го рода функции  $u_0$  на  $\gamma_R$ . Обозначим через  $\tilde{\gamma}_R \triangleq \gamma_R \setminus \{\cup \cup_{k=1}^n \zeta_k\}$ . Пусть  $M = \sup\{|u_0(\zeta)| \mid \zeta \in \tilde{\gamma}_R\}$ . Тогда из формулы Пуассона (14) и леммы 2 получаем, что

$$|u(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\psi \stackrel{(17)}{=} M.$$

Осталось показать, что в каждой точке  $\zeta_0 \in \tilde{\gamma}_R$  (т. е. в каждой точке непрерывности функции  $u_0$ ) для функции  $u$  из (14) справедливо равенство

$$\lim_{z \xrightarrow{B_R(0)} \zeta_0} u(z) = u_0(\zeta_0).$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta I &\triangleq \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) K(\zeta, z) d\psi - u_0(\zeta_0) \stackrel{(17)}{=} \\ &\stackrel{(17)}{=} \int_0^{2\pi} (u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)) K(\zeta, z) d\psi. \end{aligned} \quad (22)$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $u_0$  непрерывна в точке  $\zeta_0 = Re^{i\psi_0}$ , существует число  $\delta \in (0, \pi)$  такое, что для всех точек  $\zeta = Re^{i\psi}$ , у которых  $|\psi - \psi_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)| < \varepsilon$ . Обозначим  $\gamma(1, \delta) = \{\zeta \mid \zeta = Re^{i\psi}, |\psi - \psi_0| < \delta\}$ ,  $\gamma(0, \delta) = \gamma_R \setminus \gamma(1, \delta)$ . Разобьем

интеграл (22) на два интеграла по дугам  $\gamma(1, \delta)$  и  $\gamma(0, \delta)$ . В силу выбора числа  $\delta$  и из леммы 2 получаем

$$\left| \int_{\gamma(1, \delta)} (u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)) K(\zeta, z) d\psi \right| \leq \varepsilon \int_{\gamma(1, \delta)} K(\zeta, z) d\psi < \varepsilon. \quad (23)$$

Теперь обозначим  $z = re^{i\varphi} \in B_R(0)$ , и так как  $z \rightarrow \zeta_0$ , то считаем, что  $|\varphi - \psi_0| < \delta$ . В силу леммы 3 найдется число  $\rho \in (0, R)$  такое, что  $K(\zeta, z) < \varepsilon$  при всех  $\zeta \in \gamma(0, \delta)$  и всех  $z \in B_R(0)$ , у которых  $|z - \zeta_0| < \rho$ . Поэтому для указанных  $z$  получаем

$$\left| \int_{\gamma(0, \delta)} (u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)) K(\zeta, z) d\psi \right| < 2M \int_{\gamma(0, \delta)} K(\zeta, z) d\psi \leq 4M\varepsilon\pi. \quad (24)$$

Объединяя (23) и (24), получаем  $|\Delta I| \leq (1 + 4\pi M)\varepsilon$ , что в силу произвольности числа  $\varepsilon > 0$  дает выполнение граничного условия в точке  $\zeta_0$ . ■

**Теорема 4.** Для любой ограниченной односвязной области  $G$  с простой кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  и для любой кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва 1-го рода) на  $\Gamma$  функции  $u_0(\zeta)$  решение общей задачи Дирихле существует.

**Доказательство.** По теореме Римана (теорема 3 § 27) существует регулярная функция  $w = f(z)$ , осуществляющая конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$ . Пусть  $z = g(w)$  — обратная функция к функции  $f$ . По принципу соответствия границ (теорема 4 § 27) функция  $f(z)$  (и соответственно  $g(w)$ ) непрерывно продолжима на границу  $\Gamma$  (на окружность  $|w| = 1$ ). Поэтому и в силу кусочной непрерывности на  $\Gamma$  функции  $u_0(\zeta)$  функция  $u_0(g(\alpha))$  будет кусочно-непрерывной на окружности  $|\alpha| = 1$ . По этой граничной функции запишем через интеграл Пуассона функцию  $\tilde{u}(w)$ , определенную в круге  $|w| < 1$ . Тогда по теореме 1 функция  $u(z) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{u}(f(z))$  будет гармонической в области  $G$ . В силу теоремы 3 она ограничена

и непрерывна на  $G \cup \Gamma$  всюду за исключением точек разрыва функции  $u_0$ . Введем обозначение

$$\tilde{u}_0(\alpha) \triangleq u_0(g(\alpha)) = u_0(\zeta), \quad |\alpha| = 1, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Запишем решение  $\tilde{u}(w)$  через интеграл Пуассона

$$\tilde{u}(w) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\alpha|=1} \tilde{u}_0(\alpha) \frac{\alpha + w}{\alpha - w} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad |w| < 1.$$

Так как  $\alpha = f(\zeta)$ ,  $\zeta \in \Gamma$  и  $w = f(z)$ ,  $z \in G$ , то, делая замену переменных  $\alpha$  и  $w$  через  $\zeta$  и  $z$ , при этом допуская, что функция  $f'(z)$  также непрерывно продолжима на границу  $\Gamma$ , получаем формулу решения общей задачи Дирихле в области  $G$  вида

$$u(z) = \tilde{u}(f(z)) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} u_0(\zeta) \frac{f(\zeta) + f(z)}{f(\zeta) - f(z)} \cdot \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta. \quad (25)$$

*Замечание 3.* Утверждение теоремы 4 остается справедливым для случая неограниченной области  $G$ , граница которой содержит точку  $\infty$ , если существует конформное отображение  $f$  области  $G$  на круг  $|w| < 1$ , удовлетворяющее принципу соответствия границ. Если же при этом функция  $f$  удовлетворяет усиленному принципу соответствия границ, т. е. функции  $f$  и  $f'$  непрерывно продолжимы на границу области, то справедлива формула (25). ■

Например, это верно, когда область  $G$  конформно отображается на круг  $|w| < 1$  некоторым дробно-линейным отображением  $f$ , так как оно конформно отображает всю расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  и поэтому оно и его производная непрерывно продолжимы на границу данной области  $G$ . В качестве демонстрации этой возможности получим решение *общей задачи Дирихле на верхней полуплоскости*.

**Теорема 5.** Пусть задана ограниченная и кусочно-непрерывная функция  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с конечным числом точек разрыва первого рода (включая точки  $+\infty$  и  $-\infty$ ). Тогда существует

решение  $u(z)$  общей задачи Дирихле в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  с граничным условием  $u_0$  на прямой  $\Gamma = \{z \mid \text{Im } z = 0\}$ . При этом для решения  $u(z)$  справедлива формула Пуассона вида

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y u_0(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad (26)$$

где  $z = x + iy$ ,  $y > 0$ .

**Доказательство.** Существование решения  $u(z)$  следует из теоремы 4 и замечания 3. Формула (26) легко следует из формулы (25), если в качестве функции  $f$ , отображающей верхнюю полуплоскость в единичный круг, взять, например, функцию  $f(z) = (z - i)/(z + i)$  и провести упрощения выражений под интегралом (25). ■

Формулу (26) можно получить, не используя теорему 4 и формулы (25). Зафиксируем произвольную точку  $z_0 = x_0 + iy_0$ , где  $y_0 > 0$ , и рассмотрим дробно-линейное отображение

$$w = f(z) \triangleq \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad (27)$$

конформно отображающее полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на круг  $|w| < 1$ , при котором  $f(z_0) = 0$ . Из формулы (27) получаем обратное отображение

$$z = g(w) = \frac{w\bar{z}_0 - z_0}{w - 1} \quad (28)$$

круга  $|w| < 1$  на верхнюю полуплоскость.

По теореме 1 функция  $\tilde{u}(w) \triangleq u(g(w))$  будет гармонической в круге  $|w| < 1$ . При этом она будет непрерывной в замкнутом круге  $|w| \leq 1$ , за исключением конечного числа точек разрыва, полученных от функции  $u_0$ , включая, может быть, и точку  $w_0 = 1$ . По формуле Пуассона (14) (или по теореме 4 § 24 о среднем для гармонических функций) для функции  $\tilde{u}$  получаем

$$u(z_0) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\psi}) d\psi. \quad (29)$$

В интеграле (29) сделаем замену и вернемся к прежним переменным. Пусть  $w = e^{i\psi}$ , тогда  $g(e^{i\psi}) = t$ , т. е. принимает действительные значения. И обратно, по формуле (27) получаем

$$e^{i\psi} = \frac{t - z_0}{t - \bar{z}_0} = f(t), \quad (30)$$

где  $t$  — действительное число. Поэтому

$$\tilde{u}(e^{i\psi}) = \tilde{u}(f(t)) = u(g(f(t))) = u_0(t).$$

Из формулы (30) находим

$$d\psi = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{i|t - z_0|^2} dt = \frac{2y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} dt. \quad (31)$$

В итоге из выражений (29), (30) и (31) получаем формулу

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t) \frac{y_0}{(t - x_0)^2 + (y_0)^2} dt.$$

Заменяя в полученной формуле произвольную точку  $z_0$  на точку  $z$ , получим формулу Пуассона (26).

*Замечание 4.* Так как справедливо равенство

$$\frac{y}{(t - x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t - z)},$$

то формула Пуассона (26) может быть преобразована к другому виду

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{t - z} dt. \quad (32)$$

**Пример 1.** Найти решение классической задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < 1, \\ u|_{|z|=1} = \frac{\sin \psi}{5 + 4 \cos \psi}. \end{cases} \quad (33)$$

**Решение.** Воспользуемся формулой Пуассона (16) для решения задачи (33). Для этого сделаем замену переменных

на окружности:  $\zeta = e^{i\psi}$ . Тогда  $\sin \psi = \frac{1}{2i} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right)$ ,  $\cos \psi = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ , откуда

$$u_0(\zeta) = \frac{\sin \psi}{5 + 4 \cos \psi} = \frac{\zeta^2 - 1}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)}.$$

Подставляя  $u_0(\zeta)$  в формулу (16), получаем, что  $u(z) = \operatorname{Re} J(z)$ , где

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)\zeta} d\zeta. \quad (34)$$

Вычислим интеграл (34) с помощью вычетов. Подынтегральная функция

$$f(\zeta) \triangleq \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)\zeta(\zeta - z)}$$

в области  $|\zeta| > 1$  имеет две особые точки. Это  $\zeta_1 = -2$  — полюс 1-го порядка и  $\zeta_2 = \infty$  — устранимая особая точка, так как очевидно, что  $f(\infty) = 0$ .

По теореме о вычетах получаем

$$J(z) = -\operatorname{res}_{-2} f - \operatorname{res}_{\infty} f. \quad (35)$$

Вычислим вычеты:

$$\operatorname{res}_{-2} f = \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(\zeta - z)(4\zeta + 5)\zeta} \Big|_{\zeta=-2} = \frac{2 - z}{4i(z + 2)},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\infty} f &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\zeta(f(\infty) - f(\zeta))] = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[ \frac{-(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{4i(\zeta^2 + \frac{5}{2}\zeta + 1)(\zeta - z)} \right] = -\frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

В итоге из формулы (35) получаем, что

$$J(z) = \frac{z}{2i(z + 2)},$$

откуда

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{z}{2i(z + 2)} = \frac{y}{(x + 2)^2 + y^2}.$$

**Пример 2.** Решить общую задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad G = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\},$$



$$u|_{\text{Im } z=0} = 0, \quad u|_{|z|=1} = 1.$$

Решение. Возьмем функцию  $w = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , которая конформно отображает данный полукруг  $G$  на верхнюю полуплоскость. Тогда данные граничные условия преобразуются на новой границе  $\text{Im } w = 0$  в условия

$$\tilde{u}_0(t) = 0, \quad \text{при } |t| > 1; \quad \tilde{u}_0(t) = 1, \quad \text{при } t \in [-1, +1].$$

По формуле Пуассона (26) получаем решение

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\eta dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\left(\frac{t}{\eta}\right)}{\left(\frac{t}{\eta} - \frac{\xi}{\eta}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \text{arctg} \left( \frac{1 - \xi}{\eta} \right) + \text{arctg} \left( \frac{1 + \xi}{\eta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Так как для  $w = \xi + i\eta$  и  $z = x + iy$  функция  $w = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  дает соотношения

$$\xi = -\frac{x}{2} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} + 1 \right), \quad \eta = -\frac{y}{2} \left( 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

откуда заменой переменных получаем решение данной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \left[ \text{arctg} \left( \frac{2(x+1)}{y(1-x^2-y^2)} - \frac{x+2}{y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{arctg} \left( \frac{2(1-x)}{y(1-x^2-y^2)} + \frac{x-2}{y} \right) \right]. \end{aligned}$$

### Список литературы

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. – М.: Физматлит, 2013.
2. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969, 1972, 1984.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Т.1, – М.: Наука, 1998.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 1987.
6. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т.2, – М.: Наука, 1991.
7. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. –14-е изд. – М.: Высшая школа, 1999.
8. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982, 1989.
9. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988; М.: Изд-во МФТИ, 1997.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч.1,2, – М.: Наука, 1985.
11. *Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного / М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006.- 362 с.
12. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Часть 2, – М.: Физматлит, 2001.

## Предметный указатель

- Абеля  
теорема . . . . . 60  
аналитическое продолжение . .  
157–165  
вдоль контура . . . . 160–162  
вдоль цепочки элементов . .  
158–160, 162
- Вейерштрасса  
теорема . . . . . 66–68
- ветви  
многозначной функции  
непрерывные . . 117–121  
регулярные . . . . 116–121
- ветвь  
главная регулярная  
функции  $\operatorname{Ln} z$  . . . . . 42  
функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$  . . . . . 41
- ветвь многозначной функции  
регулярная (непрерывная) 40
- вычет функции . . . . . 96–106  
в бесконечности . . . . . 97
- Гаусса  
теорема . . . . . 184  
геометрический смысл модуля  
и аргумента производной  
функции . . . . . 193
- граница области  
гладкие компоненты . . . 50  
кусочно-гладкая . . . . 50–51  
ориентация . . . . . 51  
правильные гладкие компо-  
ненты . . . . . 51
- Дирихле  
задача классическая 235, 247  
на круге . . . . . 238–240  
задача общая . . 235–238, 248  
на верхней полуплоскост-  
ти . . . . . 245–247  
на круге . . . . . 241–244
- Жордана  
теорема . . . . . 43
- Жуковского  
профиль . . . . . 220  
функция . . . . . 214–220
- интеграл  
по контуру . . . . . 45  
свойства . . . . . 46–47
- комплексная плоскость  
расширенная . . . . . 16  
комплексное число . . . . . 9–14  
аргумент . . . . . 11  
главное значение . . . 11  
действительная (веществен-  
ная) часть . . . . . 10  
комплексно-сопряженное 10  
корень  $n$ -й степени . . . . 14  
мнимая единица . . . . . 9  
мнимая часть . . . . . 10  
модуль . . . . . 10  
предел последовательности  
15  
свойства . . . . . 10  
тригонометрическая (поляр-  
ная) форма . . . . . 12  
функция *см.* функция комп-  
лексного переменного
- контур . . . . . 43  
кусочно-гладкий . . . . . 44
- Коши  
интегральная теорема 49–50  
интегральная формула . 56  
неравенство для коэффици-  
ентов ряда Лорана 84–85  
обобщенная теорема . . . 55  
теорема о вычетах . . 98–101
- Коши–Адамара  
теорема . . . . . 175–177  
формула . . . . . 61
- Коши–Римана  
условия . . . . . 24

кривая	
Жордана . . . . .	см. простая
гладкая . . . . .	43
непрерывная . . . . .	43
ориентированная см. контур	
простая . . . . .	43
замкнутая . . . . .	43
кривые	
гомотопные . . . . .	112
лемма	
об открытости . . . . .	186–187
Лиувилля	
теорема . . . . .	147
Лорана	
ряд . . . . .	78–93, 96, 98, 137, 142, 144, 147, 148, 150–151, 153, 156
Лорана–Вейерштрасса	
теорема . . . . .	79–82
множество	
звездное . . . . .	52–54
Морера	
теорема . . . . .	73–74
Муавра	
формула . . . . .	12
непрерывная деформация глад-	
кого контура . . . . .	112–113
Ньютона–Лейбница	
формула . . . . .	76
окрестность бесконечности .	16
окрестность точки . . . . .	15
проколотая . . . . .	15
ориентация	
контура . . . . .	43
отображение	
дробно-линейное . . . . .	199–209
конформное . . . . .	195–199, 205, 206, 208, 210–224, 235
в области . . . . .	198
первообразная функции . . . . .	71
Пикара	
теорема . . . . .	150
принцип	
аргумента . . . . .	182–183
максимума и минимума гар-	
монической функции	190–
191	
максимума модуля . . . . .	188–189
симметрии . . . . .	224–234
соответствия границ . . . . .	223
сохранения области . . . . .	188
произведение . . . . .	9
производная функции . . . . .	23
пространство	
комплексных чисел . . . . .	9
Пуассона	
интеграл . . . . .	240–241
формула . . . . .	240
разбиение отрезка . . . . .	44
разрез . . . . .	51
Римана	
сфера . . . . .	17, 18
теорема . . . . .	220–223
риманова поверхность	
функции $\operatorname{Ln} z$ . . . . .	169, 171
функции $\sqrt{z}$ . . . . .	173
Руше	
теорема . . . . .	183–184
ряд	
кольцо сходимости . . . . .	78–79
степенной 60–65, 68, 175–178,	
180	
круг сходимости . . . . .	61
радиус сходимости . . . . .	61
функциональный . . . . .	21–22, 48
сходимость . . . . .	65
числовой . . . . .	18–19, 22
элементарных дробей . . . . .	152, 155–156
свойство	
сохранения окружности в	
малом . . . . .	193
сохранения углов . . . . .	195

- система контуров правильная . 152–155
- Сохоцкого  
теорема . . . . . 148–149
- сумма  
интегральная функции . 45
- Тейлора  
ряд . . . . . 61–63
- теорема  
Морера *см.* Морера теорема единственности регулярной функции . . . . . 69–70  
о монодромии . . . . . 163  
о сложной функции . . . . . 35  
о среднем для гармонической функции . . . 191–192  
о стирании разреза . . 74–75  
о существовании первообразной . . . . . 71–73  
об обратной функции 35–38
- теоремы  
Вейерштрасса . . . . . 66
- точка  
ветвления . . . . 178–180, 229
- множества  
внутренняя . . . . . 20  
предельная . . . . . 20
- особая  
изолированная . . . 86–95  
однозначного характера  
*см.* изолированная  
полюс 86–90, 96, 148, 150, 151  
порядок полюса . . . . 90  
существенно . 86, 87, 148, 149  
устраняемая . . 86, 87, 148, 149, 151, 153  
особая аналитической функции . . . . . 174–180
- точки симметричные относительно окружности . 202–206, 215, 239
- функции  
мероморфные . . . . 150–154  
тригонометрические . 30–31  
целые . . . . . 147–151
- функция  
аналитическая . . . . 162–163, 166–180  
полная . . . . . 162  
взаимно однозначная . . . *см.* однолиственная  
гармоническая . . . . . 32–34  
голоморфная *см.* регулярная комплексного переменного  
мероморфная . . . . . 150  
многозначная . . . . . 39  
 $\operatorname{Ln} z$  . . . . . 42  
 $\{\sqrt[n]{z}\}$  . . . . . 41  
непрерывная в точке . . . 21  
непрерывная на замыкании 51  
непрерывная на множестве 21  
однолиственная . . . . . 38  
предел по множеству . . . 20  
регулярная . . . . . 29–31  
сопряженная . . . . . 32  
целая . . . . . 147  
трансцендентная . . . . 148  
экспоненциальная . . . . 30, 212–214
- центр элемента . . . . . 157
- Эйлера  
формула . . . . . 13  
элемент аналитической функции . . . . . 157