Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

# ФУНКЦИИ ГРИНА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Учебно-методическое пособие

Составитель ***Р. В. Константинов***

МОСКВА
МФТИ
2019

УДК 517.95(075)
ББК 22.1я73
К65

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент *Е. Е. Нохрина*

**Константинов, Роман Викторович**
К65 **Функции Грина линейного дифференциального оператора** : уч.-метод. пособие / составитель : Р. В. Константинов. – Москва : МФТИ, 2019. – 48 с.

Рассмотрена техника вычисления функции Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в пространстве обобщённых функций одной вещественной переменной, формальный вид которого представляет собой суперпозицию оператора дифференцирования с произвольным комплексным многочленом, поэтому этот оператор естественно назвать «дифференциальным многочленом». Представлены алгоритм поиска частной функции Грина «дифференциального многочлена», основанный на специальной технике деления на комплексный многочлен в пространстве обобщённых функций одной переменной, и вычисление общего решения соответствующего однородного уравнения. Показано применение этой техники для поиска функции Грина линейного дифференциального оператора в частных производных на примере оператора уравнения Шрёдингера.

Предназначено для студентов и преподавателей вузов, изучающих и интересующихся применением теории обобщённых функций к различным задачам уравнений математической физики.

**УДК 517.95 (075)**
**ББК 22.1я73**

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2019
© Константинов Р. В., составление, 2019

# Содержание

1. Введение . . . . . . . . . . 4
2. Пространство основных функций . . . . . . . . . . 5
3. Пространство обобщённых функций . . . . . . . . . . 9
4. Определение функции Грина . . . . . . . . . . 19
5. Функция Грина «дифференциального многочлена» 21
6. Общее решение однородного уравнения . . . . . . 32
7. Функция Грина оператора Шрёдингера . . . . . . 40
8. Задачи . . . . . . . . . . 46

Литература . . . . . . . . . . 47

# 1. Введение

В задачах математической физики возникает необходимость в рассматрении линейных дифференциальных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами, которые действуют в пространстве обобщённых функций Л. Шварца нескольких действительных переменных (см. [1, 2, 3]). Таковы, например, дифференциальные операторы, возникающие при рассмотрении волнового уравнения, уравнения теплопроводности или уравнения Шрёдингера. Рассмотрение этих операторов на пространстве обобщённых функций связано с наличием в физических приложениях у соответствующих уравнений негладких и даже разрывных или сингулярных источников, что приводит к отсутствию их классических гладких решений. С другой стороны, встречающиеся в приложениях разрывные функции, как правило, попадают в пространство обобщённых функций, что приводит к естественному желанию попытаться искать обобщённое решение рассматриваемых уравнений. Теория обобщённых функций предоставляет нам обобщённое преобразование Фурье и операцию свёртки в качестве основных инструментов работы с линейными уравнениями в частных производных. Возникающее естественным образом понятие функции Грина линейного дифференциального оператора (или фундаментального решения) позволяет вычислять обобщённое решение операторного уравнения в терминах свёртки источника и функции Грина этого оператора. Если же полученное таким образом обобщённое решение уравнения окажется гладким, то оно автоматически становится классическим решением соответствующего уравнения, что является очень полезным фактом.

В настоящем пособии подробно мы будем рассматривать линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами общего вида в пространстве обобщённых функций одной вещественной переменной, который естественно назвать «дифференциальным многочленом», так как его формальный вид является суперпозицией оператора дифференцирования с произвольным комплексным многочленом. Такой оператор рассмотрен в [1, § 11.5] и [2, § 14.4], где представлен (скорее, угадан) вид его частной функции Грина. Мы сосредоточимся на формальной технике вычисления функции Грина этого дифференциального оператора с помощью обобщённого преобразования Фурье, следуя схеме его применения для нахождения фундаментальных решений из [3, § 5.8]. Важность решения данной задачи обусловлена тем обстоятельством, что вычисление функций Грина стандартных линейных дифференциальных операторов, возникающих при анализе волнового уравнения, уравнения теплопроводности или уравнения Шрёдингера, может быть сведено техникой преобразования Фурье уравнения по фазовым переменным к вычислению функции Грина подходящего «дифференциального многочлена», коэффициенты которого зависят от новых фазовых переменных. Эта техника продемонстрирована на примере поиска функции Грина оператора Шрёдингера в последнем разделе данного пособия.

## 2. Пространство основных функций

Начнём с некоторых необходимых для дальнейшего изложения обозначений и определений.

Строку целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ будем называть мультииндексом. Порядком мультииндекса $\alpha$ называется целое неотрицательное число

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k.$$

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество всех целых неотрицательных чисел. Тогда множество всех мультииндексов равно $\mathbb{N}_0^m$.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ состоит из всевозможных вещественных векторов $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ обозначим

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \quad x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда евклидова длина вектора $x \in \mathbb{R}^m$ равна $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и вектора $x \in \mathbb{R}^m$ обозначим

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}, \qquad \partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Пространство основных функций Л. Шварца [2, § 5.1] обозначим $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Напомним, что функция $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, если и только если она бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^m$, и

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^m \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_0 \qquad |x|^p\, \partial_x^\alpha \varphi(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty,$$

что равносильно

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m \qquad x^\beta\, \partial_x^\alpha \varphi(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty,$$

Очевидно, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является линейным пространством относительно поточечных операций сложения функций и умножения функции на скаляр.

**Упражнение 2.1.** Докажите, что для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеют место вложения

$$x^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \qquad \partial_x^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

**Упражнение 2.2.** Докажите, что для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и $q \in \mathbb{N}_0$ существует число $C > 0$, такое, что

$$\left|\partial_x^\alpha \varphi(x)\right| \leqslant \frac{C}{\left(1 + |x|^2\right)^q} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m.$$

**Упражнение 2.3.** Докажите, что для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ функции $\partial_x^\alpha \varphi(x)$ и $x^\alpha \varphi(x)$ являются абсолютно интегрируемыми на $\mathbb{R}^m$, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|\partial_x^\alpha \varphi(x)\right|\, dx < +\infty, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|x^\alpha \varphi(x)\right|\, dx < +\infty.$$

Введём сходимость последовательности функций в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Говорят, что последовательность $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, если

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^m \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_0 \quad |x|^p\, \partial_x^\alpha \left(\varphi_n(x) - \varphi(x)\right) \overset{x \in \mathbb{R}^m}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что равносильно

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m \qquad x^\beta\, \partial_x^\alpha \left(\varphi_n(x) - \varphi(x)\right) \overset{x \in \mathbb{R}^m}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Сходимость $\varphi_n$ к $\varphi$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ обозначим $\varphi_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \varphi$.

**Упражнение 2.4.** Докажите, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ дифференциальный оператор

$$\partial_x^\alpha \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

является линейным и непрерывным.

**Упражнение 2.5.** Докажите, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ отображение

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \ni \varphi(x) \mapsto x^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

является линейным и непрерывным.

Носителем непрерывной функции $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ называется множество

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{\ x \in \mathbb{R}^m \ :\ \varphi(x) \neq 0\ \}}.$$

Непрерывная функция $\varphi$ называется финитной, если её носитель $\operatorname{supp}\varphi$ является компактом в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) = \{\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)\ :\ \operatorname{supp}\varphi \text{ — компакт в } \mathbb{R}^m\ \}.$$

Очевидно, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ является подпространством в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и состоит из всевозможных финитных основных функций. Для произвольного открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ введём в рассмотрение множество

$$\mathcal{D}(G) = \{\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\ :\ \operatorname{supp}\varphi \subset G\ \}.$$

Очевидно, что $\mathcal{D}(G)$ также является подпространством в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

**Упражнение 2.6.** Докажите, что подпространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то есть

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad \exists\,\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \quad : \quad \varphi_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \varphi.$$

Классическим преобразованием Фурье функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется

$$\mathcal{F}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{i(x,y)}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

**З а д а ч а 2.7.** Докажите, что для любой функции $\varphi(x) \in \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет место вложение

$$\mathcal{F}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

и справедлива формула обращения

$$\mathcal{F}\,[\,\mathcal{F}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y)\,]\,(z) = (2\pi)^m \varphi(-z), \qquad z \in \mathbb{R}^m.$$

**З а д а ч а 2.8.** Докажите, что классическое преобразование Фурье $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является линейным и непрерывным на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Обратным преобразованием Фурье функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется

$$\mathcal{F}^{-1}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-i(x,y)}\,dx, \qquad y \in \mathbb{R}^m.$$

Очевидны равенства

$$\mathcal{F}^{-1}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y) = \frac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,\varphi(x)\,]\,(-y) = \frac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,\varphi(-x)\,]\,(y).$$

В силу формулы обращения, имеем

$$\mathcal{F}^{-1}\,[\,\mathcal{F}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y)\,]\,(z) = \mathcal{F}\left[\,\mathcal{F}^{-1}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y)\,\right](z) = \varphi(z).$$

**З а д а ч а 2.9.** Докажите, что для любой функции $\varphi(x) \in \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}\,[\,\partial_x^\alpha \phi(x)\,]\,(y) = (-iy)^\alpha \mathcal{F}\,[\,\varphi(x)\,]\,(y),$$

$$\partial_y^\alpha \mathcal{F}\,[\,\phi(x)\,]\,(y) = \mathcal{F}\,[\,(ix)^\alpha \varphi(x)\,]\,(y).$$

Для обобщённой функции $\varphi(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell)$ переменных $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^\ell$ можно определить преобразование Фурье только по части переменных, например, по переменной $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{F}_x\,[\,\varphi(x,y)\,]\,(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x,y) e^{i(x,z)}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^\ell, \quad z \in \mathbb{R}^m$$

и соответствующее обратное преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left[\,\varphi(x,y)\,\right](z) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x,y)e^{-i(x,z)}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^\ell \quad z \in \mathbb{R}^m.$$

**З а д а ч а 2.10.** Докажите, что для любой функции $\varphi(x,y) \in \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell)$ выполнено

$$\mathcal{F}_x\left[\,\varphi(x,y)\,\right](z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell),$$

справедлива формула обращения

$$\mathcal{F}_z^{-1}\left[\,\mathcal{F}_x\left[\,\varphi(x,y\,\right](z)\,\right](x') = \mathcal{F}_z\left[\,\mathcal{F}_x^{-1}\left[\,\varphi(x,y\,\right](z)\,\right](x') = \varphi(x',y),$$

и для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^\ell$ имеют место равенства:

$$\mathcal{F}_x\left[\,\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\,\right](z) = (-iz)^\alpha \partial_y^\beta \mathcal{F}_x\left[\,\varphi(x,y)\,\right](z),$$

$$\partial_z^\alpha \partial_y^\beta \mathcal{F}_x\left[\,\varphi(x,y)\,\right](z) = \mathcal{F}_x\left[\,(ix)^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\,\right](z).$$

## 3. Пространство обобщённых функций

Пространство обобщённых функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ Л. Шварца [2, § 5.2] состоит из всех линейных непрерывных функционалов над пространством основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Действие $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ на функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ обозначаем

$$\langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C}.$$

Линейность и непрерывность функционала $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ означает, что

$$\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle \quad \forall\, \varphi_{1,2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \quad \forall\, \lambda_{1,2} \in \mathbb{C},$$

$$\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \varphi.$$

Любой функционал $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ называют обобщённой функцией. Обычно для него используют традиционное обозначение $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^m$, а действие обобщённой функции $f(x)$ на функцию $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ обозначают как

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle \in \mathbb{C}.$$

Это обусловлено тем, что в пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ входят обычные числовые функции. Например, туда входят все абсолютно интегрируемые на $\mathbb{R}^m$ функции $f(x)$ или функции $f(x)$ медленного роста, для каждой из которых

$$\exists\, C > 0 \quad \exists\, q \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^m \qquad |f(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^q\right).$$

Действие таких функций на основные функции задаётся абсолютно сходящимся интегралом по $\mathbb{R}^m$:

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\, dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

и оно называется регулярным действием, а сами такие обобщённые функции называются регулярными.

**Упражнение 3.1.** Докажите, что для любой функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m$, действие

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

линейно и непрерывно зависит от $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

**Упражнение 3.2.** Докажите, что для любой функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ медленного роста действие

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

линейно и непрерывно зависит от $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Для обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ можно естественным образом определить её суперпозицию с линейной взаимно однозначной функцией $Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^m$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — невырожденная матрица, $b \in \mathbb{R}^m$, по формуле

$$\langle f(Ax+b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|\det A|} \left\langle f(x), \varphi\left(A^{-1}(x-b)\right) \right\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Такое определение $f(Ax+b)$ для регулярной обобщённой функции $f(x)$ корректно обобщает замену переменной интегрирования в её действии на основную функцию. В частности,

$$\langle f(-x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(-x)\rangle, \ \langle f(x-x_0), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(x+x_0)\rangle.$$

На пространстве обобщённых функций вводится операция обобщённого дифференцирования любого порядка $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$: для любой $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$

$$\langle \partial_x^\alpha f(x), \varphi(x)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f(x), \partial_x^\alpha \varphi(x)\rangle, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

**Упражнение 3.3.** Докажите, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ имеет место вложение

$$\partial_x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

Таким образом, любая обобщённая функция имеет обобщённые частные производные любого порядка, которые, в свою очередь, также являются обобщёнными функциями. Данное определение обобщённого дифференцирования на пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ корректно взаимодействует с классическим дифференцированием гладких функций медленного роста:

**Упражнение 3.4.** Пусть функция $f(x) \in C^N(\mathbb{R}^m)$ такова, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ вида $|\alpha| \leqslant N$ её соответствующая классическая частная производная $\partial_x^\alpha f(x)$ имеет медленный рост. Тогда для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\, \partial_x^\alpha f(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \partial_x^\alpha \varphi(x)\, dx,$$

то есть обобщённая и классическая частные производные функции $f(x)$ одинаково действуют на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, и, значит, являются равными обобщёнными функциями.

Любую обобщённую функцию можно умножать на любую обычную бесконечно гладкую функцию, все частные производные которой имеют медленный рост. Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, а функция $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, причём для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ функция $\partial_x^\alpha h(x)$ медленного роста. Докажите, что для любой функции

$\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет место вложение $h(x)\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, причём отображение $\varphi(x) \mapsto h(x)\varphi(x)$ линейно и непрерывно на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Тогда по определению полагаем, что

$$\langle h(x)f(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), h(x)\varphi(x)\rangle, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

В частности, любую обобщённую функцию из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ можно таким образом умножить на любую функцию из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

**Упражнение 3.5.** Докажите, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и произвольной функции $h(x) \in \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, все частные производные которой имеют медленный рост, справедливо вложение

$$h(x)f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

В частности, для любого комплексного многочлена $P(x)$, т. е. функции — конечной линейной комбинации целых неотрицательных степеней компонент вектора $x \in \mathbb{R}^m$, определено произведение $P(x)f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ на обобщённую функцию $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Теперь обсудим определение носителя обобщённой функции. Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ произвольное открытое множество. Говорят, что обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ равна нулю на множестве $G$, если для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(G)$ имеет место равенство

$$\langle f(x), \varphi(x)\rangle = 0.$$

В этом случае будем писать

$$f\big|_G = 0.$$

Через $G(f) \subset \mathbb{R}^m$ обозначим объединение всех открытых множеств $G \subset \mathbb{R}^m$, на которых $f(x)$ равна нулю. Тогда $G(f)$ является открытым подмножеством $\mathbb{R}^m$ (как объединение открытых). Носителем обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ называем

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^m \backslash G(f).$$

Это замкнутое подмножество $\mathbb{R}^m$ (как дополнение открытого множества $G(f)$). Обобщённую функцию $f(x)$ называют финитной, если её носитель $\operatorname{supp} f$ является компактом в $\mathbb{R}^m$.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого множества $M \subset \mathbb{R}^m$ через $O_\varepsilon(M)$ обозначим $\varepsilon$-окрестность множества $M$, то есть совокупность всех векторов из $\mathbb{R}^m$, удалённых от $M$ меньше, чем на $\varepsilon$:

$$O_\varepsilon(M) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \ : \ \rho(x, M) = \inf_{y \in M} |x - y| < \varepsilon \right\}.$$

**Задача 3.6.** Докажите, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ выполнено

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \ : \ \forall\, x \in O_\varepsilon(\operatorname{supp} f) \quad \varphi(x) = \psi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \psi(x) \rangle.$$

То есть действие $f(x)$ на финитную основную функцию $\varphi(x)$ не зависит от поведения $\varphi(x)$ вне $\varepsilon$-окрестности носителя $\operatorname{supp} f$.

**Задача 3.7.** Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^m$ таковы, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \ : \ \forall\, x \in O_\varepsilon(M) \quad \varphi(x) = \psi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \psi(x) \rangle.$$

Докажите, что в этом случае имеет место вложение $\operatorname{supp} f \subset M$.

Результат задачи 3.6 приводит к следующему важному утверждению:

**Утверждение 3.8.** Пусть для некоторой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ существуют попарно непересекающиеся компакты $K_1 \subset \mathbb{R}^m, \ldots, K_N \subset \mathbb{R}^m$, такие, что

$$\operatorname{supp} f \subset K_1 \cup \ldots \cup K_N.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \in \overline{1, N} \quad \exists\, f_n(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \ : \ \operatorname{supp} f_n \subset O_\varepsilon(K_n) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x).$$

**Доказательство.** Определим положительное число

$$r = \min_{1 \leqslant n < s \leqslant N} \rho(K_n, K_s) = \min_{1 \leqslant n < s \leqslant N} \inf_{\substack{x_n \in K_n \\ x_s \in K_s}} |x_n - x_s| > 0,$$

и рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon < \frac{r}{5}$. Для каждого $n \in \overline{1, N}$ рассмотрим открытое покрытие $P_n$ компакта $\overline{O_\varepsilon(K_n)}$ всеми открытыми шарами с центром в точках $\overline{O_\varepsilon(K_n)}$ радиуса $\varepsilon$. По теореме о гладком разбиении единицы, подчинённому открытому покрытию $P_n$ компакта $\overline{O_\varepsilon(K_n)}$ (см. [4], теорема 10.8), существуют функции $\psi_{n,1}, \ldots, \psi_{n,\ell} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, носители которых содержатся в множествах из покрытия $P_n$, такие, что

$$\psi_n(x) = \psi_{n,1}(x) + \ldots + \psi_{n,\ell}(x) = 1 \qquad \forall\, x \in \overline{O_\varepsilon(K_n)}.$$

Ясно, что функция $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ и имеет место вложение:

$$\operatorname{supp} \psi_n \subset \overline{O_{2\varepsilon}(K_n)}.$$

Так как по определению $\varepsilon$ имеем $\overline{O_{2\varepsilon}(K_n)} \cap \overline{O_{2\varepsilon}(K_s)} = \varnothing$ при любых $n \neq s$, то

$$\psi_n(x)\psi_s(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m \quad \text{при} \quad n \neq s.$$

Следовательно,

$$1 = \psi_1(x) + \ldots + \psi_N(x) + (1 - \psi_1(x)) \ldots (1 - \psi_N(x)) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m.$$

Функция

$$\xi(x) = (1 - \psi_1(x)) \ldots (1 - \psi_N(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \overline{O_\varepsilon(K_1)} \cup \ldots \cup \overline{O_\varepsilon(K_N)}.$$

Следовательно, для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ получаем, что

$$\xi(x)\varphi(x) = 0 \qquad \forall\, x \in O_\varepsilon(\operatorname{supp} f) \subset \overline{O_\varepsilon(K_1)} \cup \ldots \cup \overline{O_\varepsilon(K_N)}.$$

Поэтому

$$\varphi(x) = \psi_1(x)\varphi(x) + \ldots + \psi_N(x)\varphi(x) \qquad \forall\, x \in O_\varepsilon(\operatorname{supp} f).$$

Тогда, в силу результата задачи 3.6, получаем, что

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \psi_1(x)\varphi(x) + \ldots + \psi_N(x)\varphi(x) \rangle =$$
$$= \langle \psi_1(x) f(x), \varphi(x) \rangle + \ldots + \langle \psi_N(x) f(x), \varphi(x) \rangle.$$

Так как $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ (это упражнение 2.6), то получаем равенство

$$f(x) = \psi_1(x)f(x) + \ldots + \psi_N(x)f(x) \quad \text{на} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

Определим обобщённые функции

$$f_n(x) = \psi_n(x)f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m), \qquad n \in \overline{1,N}.$$

В силу вложения $\operatorname{supp}\psi_n \subset \overline{O_{2\varepsilon}(K_n)}$, для любой функции $\varphi \in$ $\in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^m \backslash \overline{O_{2\varepsilon}(K_n)}\right)$ получаем равенство

$$\psi_n(x)\varphi(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m,$$

то есть $\langle f_n(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \psi_n(x)\varphi(x)\rangle = \langle f(x), 0\rangle = 0$. Следовательно, по определению носителя обобщёной функции, получаем вложение

$$\operatorname{supp} f_n \subset \overline{O_{2\varepsilon}(K_n)} \subset O_{3\varepsilon}(K_n), \qquad n \in \overline{1,N},$$

что и требовалось. ■

Наконец, на пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ можно определить обобщённое преобразование Фурье. Рассмотрим произвольную обобщённую функцию $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Так как классическое преобразование Фурье на простанстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является линейным и непрерывнам, то действие

$$\langle f(x), \mathcal{F}\,[\,\varphi(y)\,]\,(x)\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

является линейным и непрерывным на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то есть определяет некоторую обобщённую функцию, которую мы обозначим $\mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и назовём обобщённым преобразованием Фурье обобщённой функции $f(x)$. Таким образом, по определению имеем

$$\langle \mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y), \varphi(y)\rangle = \langle f(x), \mathcal{F}\,[\,\varphi(y)\,]\,(x)\rangle \qquad \forall\, \varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Это определение обобщённого преобразовния Фурье в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ корректно взаимодействует с классическим преобразованием Фурье произвольной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m$

числовой функции $f(x)$. Действительно, для такой функции её классическое преобразование Фурье

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{i(x,y)}\, dx, \qquad y \in \mathbb{R}^m,$$

является числовой функцией, непрерывной на $\mathbb{R}^m$ (докажите это) и бесконечно малой при $|y| \to \infty$ по теореме Римана об осцилляции. Следовательно, $\widehat{f}(y)$ является ограниченной на $\mathbb{R}^m$ функцией и поэтому представляет собой регулярную обобщённую функцию медленного роста, действие которой на произвольную основную функцию $\varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет вид

$$\left\langle \widehat{f}(y), \varphi(y) \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(y)\, \varphi(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, f(x) \varphi(y) e^{i(x,y)}.$$

Так как функция $f(x)\varphi(y)e^{i(x,y)}$ очевидно обсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (проверьте это), то, по теореме Фубини (см. [5], теорема 8.8), справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, f(x)\varphi(y)e^{i(x,y)} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy\, f(x)\varphi(y)e^{i(x,y)} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy\, \varphi(y) e^{i(x,y)} = \langle f(x), \mathcal{F}\,[\,\varphi(y)\,]\,(x) \rangle\,,$$

то есть

$$\left\langle \widehat{f}(y), \varphi(y) \right\rangle = \left\langle f(x), \mathcal{F}\,[\,\varphi(y)\,]\,(x) \right\rangle, \qquad \forall\, \varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Следовательно, обобщённое преобразование Фурье $\mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y)$ абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m$ функции $f(x)$ действует на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ так же, как и её классическое преобразование Фурье $\widehat{f}(y)$, что и доказывает равенство этих обобщённых функций:

$$\mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y) = \widehat{f}(y), \qquad f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^m).$$

Взаимодействие операций обобщённого дифференцирования и обобщённого преобразования Фурье даёт следующее

**Упражнение 3.9.** Докажите, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}\,[\,\partial_x^\alpha f(x)\,]\,(y) = (-iy)^\alpha \mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y),$$

$$\partial_y^\alpha \mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y) = \mathcal{F}\,[\,(ix)^\alpha f(x)\,]\,(y).$$

Обратное обобщённое преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ определяется как

$$\mathcal{F}^{-1}\,[\,f(x)\,]\,(y) = \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(-y), \qquad f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

Тогда для любой $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ выполнены равенства:

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}\,[\,f(x)\,]\,(y), \varphi(y)\right\rangle = \left\langle f(x), \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,\varphi(-y)\,]\,(x)\right\rangle =$$

$$= \left\langle f(x), \mathcal{F}^{-1}\,[\,\varphi(y)\,]\,(x)\right\rangle = \left\langle f(x), \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,\varphi(y)\,]\,(-x)\right\rangle =$$

$$= \left\langle f(-x), \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,\varphi(y)\,]\,(x)\right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,f(-x)\,]\,(y), \varphi(y)\right\rangle,$$

то есть получаем равенство

$$\mathcal{F}^{-1}\,[\,f(x)\,]\,(y) = \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\,[\,f(-x)\,]\,(y), \qquad f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

**Упражнение 3.10.** Докажите, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}^{-1}\,[\,\mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y)\,]\,(z) = \mathcal{F}\left[\,\mathcal{F}^{-1}\,[\,f(x)\,]\,(y)\,\right](z) = f(z).$$

**Упражнение 3.11.** Докажите, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и произвольного $x_0 \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}\,[\,f(x - x_0)\,]\,(y) = e^{i(y,x_0)}\mathcal{F}\,[\,f(x)\,]\,(y).$$

Далее, для обобщённой функции $f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell)$ переменных $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^\ell$ определяем обобщённое преобразование Фурье $\mathcal{F}_x\,[\,f(x, y\,]\,(z)$ относительно переменной $x$ по формуле

$$\langle \mathcal{F}_x\,[\,f(x, y)\,]\,(z), \varphi(z, y)\rangle = \langle f(x, y), \mathcal{F}_z\,[\,\varphi(z, y)\,]\,(x)\rangle\,, \qquad \varphi(z, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell).$$

Это определение корректно определяет обобщённую функцию $\mathcal{F}_x\,[\,f(x,y)\,]\,(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell)$, так как классическое преобразование Фурье $\mathcal{F}_z\,[\,\varphi(z,y)\,]\,(x)$ по переменной $z \in \mathbb{R}^m$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell)$ линейно и непрерывно зависит от функции $\varphi(z,y) \in$ $\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell)$.

Взаимодействие операций обобщённого дифференцирования и обобщённого преобразования Фурье по части переменных даёт следующее

**Упражнение 3.12.** Докажите, что для любой обобщённой функции $f(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell)$ и мультииндексов $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^\ell$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}_x\left[\,\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(x,y)\,\right](z) = (-iz)^\alpha \partial_y^\beta \mathcal{F}_x\,[\,f(x,y)\,]\,(z),$$

$$\partial_z^\alpha \partial_y^\beta \mathcal{F}_x\,[\,f(x,y)\,]\,(z) = \mathcal{F}_x\left[\,(ix)^\alpha \partial_y^\beta f(x,y)\,\right](z).$$

Рассмотрим некоторые важные для дальнейшего изложения обобщённые функции. Во-первых, это дельта-функция Дирака $\delta(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, действие которой на произвольную основную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет вид

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0).$$

**Упражнение 3.13.** Докажите, что для дельта-функции $\delta(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ выполнены равенства

$$\mathcal{F}\,[\,\delta(x)\,]\,(y) = 1, \qquad \mathcal{F}\,[\,1\,]\,(y) = (2\pi)^m \delta(y).$$

**Упражнение 3.14.** Докажите, что для дельта-функции $\delta(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ выполнены равенства

$$\mathcal{F}\,[\,\partial_x^\alpha \delta(x)\,]\,(y) = (-iy)^\alpha, \qquad \mathcal{F}\,[\,x^\alpha\,]\,(y) = (2\pi)^m (-i)^{|\alpha|}\,\partial_y^\alpha \delta(y).$$

**Упражнение 3.15.** Докажите, что для дельта–функции $\delta(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и произвольного вектора $x_0 \in \mathbb{R}^m$ выполнены равенства

$$\mathcal{F}\,[\,\delta(x - x_0)\,]\,(y) = e^{i(y,x_0)}, \qquad \mathcal{F}\left[\,e^{i(x,x_0)}\,\right](y) = (2\pi)^m \delta(y + x_0).$$

Во-вторых, это так называемый «главный делитель на аргумент» в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, действие которой на произвольную основную функцию $\varphi(x) \in$ $\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\left\langle \mathcal{P}\tfrac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$$

**Упражнение 3.16.** Докажите, что $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Проверьте, что обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ удовлетворяет в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ уравнению

$$x\,\mathcal{P}\tfrac{1}{x} = 1,$$

то есть для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\left\langle x\,\mathcal{P}\tfrac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \langle 1, \varphi(x) \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx.$$

**Упражнение 3.17.** Докажите равенства

$$\mathcal{F}\left[\, \mathcal{P}\tfrac{1}{x} \,\right](y) = \pi i \operatorname{sign}(y), \quad \mathcal{F}^{-1}\left[\, \mathcal{P}\tfrac{1}{x} \,\right](y) = -\tfrac{i}{2} \operatorname{sign}(y).$$

## 4. Определение функции Грина

Линейный дифференциальный оператор в частных производных $L\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ имеет вид

$$L = \sum_{k=1}^{N} a_k \partial_x^{\alpha_k},$$

где числа $a_k \in \mathbb{C}$ и мультииндексы $\alpha_k \in \mathbb{N}_0^m$ при всех $k \in \overline{1, N}$.

Функцией Грина оператора $L$ называется обобщённая функция $\mathcal{E}(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющая в простаранстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ уравнению

$$L\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Так как обобщённое преобразование Фурье взаимно однозначно на пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то это уравнение равносильно

$$\mathcal{F}\,[\, L\mathcal{E}(x) \,]\,(y) = \mathcal{F}\,[\, \delta(x) \,]\,(y) = 1.$$

Поскольку обобщённое преобразование Фурье линейно на пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то

$$\mathcal{F}\left[\, L\mathcal{E}(x) \,\right](y) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathcal{F}\left[\, \partial_x^{\alpha_k} \mathcal{E}(x) \,\right](y) = \sum_{k=1}^{N} a_k (-iy)^{\alpha_k} \mathcal{F}\left[\, \mathcal{E}(x) \,\right](y).$$

Следовательно, рассмотрев многочлен

$$P_L(y) = \sum_{k=1}^{N} a_k (-iy)^{\alpha_k}, \qquad y \in \mathbb{R}^m,$$

получаем эквивалентное уравнение для определения функции Грина $\mathcal{E}(x)$ оператора $L$:

$$P_L(y)\mathcal{F}\left[\, \mathcal{E}(x) \,\right](y) = 1.$$

Существование единственного решения этого уравнения в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ гарантирует отделимость многочлена $P_L(y)$ от нуля:

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^m \quad |P_L(y)| \geqslant C.$$

В этом случае функция $\frac{1}{P_L(y)}$ является бесконечно гладкой, а все её частные производные имеют медленный рост (докажите это). Тогда в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ допустимо умножение на функцию $\frac{1}{P_L(y)}$, то есть в этой ситуации получаем

$$P_L(y)\mathcal{F}\left[\, \mathcal{E}(x) \,\right](y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}\left[\, \mathcal{E}(x) \,\right](y) = \frac{1}{P_L(y)}.$$

Следовательно, если многочлен $P_L(y)$ отделён от нуля, то единственная функция Грина оператора $L$ имеет вид

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\, \frac{1}{P_L(y)} \,\right](x).$$

Рассмотрим одномерный случай $m = 1$, когда $x \in \mathbb{R}$, а оператор $L$ имеет вид «дифференциального многочлена»:

$$L = T\left(\tfrac{d}{dx}\right),$$

где комплексный многочлен

$$T(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

и коэффициент при старшей степени $a_N \neq 0$. Тогда соответствующий оператору $L$ многочлен $P_L(y)$ имеет вид

$$P_L(y) = T(-iy), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ — все различные комплексные корни многочлена $T(z)$ кратностей $r_1, \ldots, r_\ell$ соответственно. Тогда разложим многочлен $T(z)$ на множители:

$$T(z) = a_N(z - \lambda_1)^{r_1} \ldots (z - \lambda_\ell)^{r\ell}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$P_L(y) = T(-iy) = a_N(-iy - \lambda_1)^{r_1} \ldots (-iy - \lambda_\ell)^{r\ell}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Видим, что отделимость от нуля многочлена $P_L(y)$ равносильна отсутствию у многочлена $T(z)$ чисто мнимых корней, то есть когда

$$\operatorname{Re} \lambda_k \neq 0 \qquad \forall\, k \in \overline{1, \ell}.$$

В этом случае

$$|P_L(y)| \geqslant |a_N|\, |\operatorname{Re} \lambda_1|^{r_1} \ldots |\operatorname{Re} \lambda_\ell|^{r_\ell} > 0 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Если же многочлен $T(z)$ имеет хотя бы один чисто мнимый корень, то деление на $T(-iy)$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ неопределено. Техника поиска решения уравнения $T(-iy)w(y) = 1$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ при наличии у многочлена $T(z)$ чисто мнимых корней изложена в следующем разделе.

## 5. Функция Грина «дифференциального многочлена»

Мы рассматриваем в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ линейный оператор $L$, имеющий вид «дифференциального многочлена»

$$L = T\left(\tfrac{d}{dx}\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

для комплексного многочлена

$$T(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где коэффициент при старшей степени $a_N \neq 0$. Решаем задачу поиска функции Грина $\mathcal{E}(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ оператора $L$:

$$L\mathcal{E}(x) = \delta(x) \quad \Leftrightarrow \quad T(-iy)\mathcal{F}\,[\,\mathcal{E}(x)\,]\,(y) = 1.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ — все различные комплексные корни многочлена $T(z)$ кратностей $r_1, \ldots, r_\ell$ соответственно. Тогда рассмотрим комплексную функцию $\frac{1}{T(z)}$ при $z \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$, которую разложим на простые дроби:

$$\frac{1}{T(z)} = \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{r=1}^{r_s} \frac{b_{sr}}{(z-\lambda_s)^r}, \qquad z \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_\ell.$$

Нам требуется каким-то образом в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ определить аналог функции $\frac{1}{T(-iy)}$ как частное решение уравнения

$$T(-iy)w(y) = 1, \qquad w(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Разобьём корни многочлена $T(z)$ на три подмножества — чисто мнимые, с положительной и с отрицательной вещественной частью:

$$S_0 = \left\{\, s \in \overline{1,\ell} \;:\; \operatorname{Re}\lambda_s = 0 \,\right\},$$
$$S_+ = \left\{\, s \in \overline{1,\ell} \;:\; \operatorname{Re}\lambda_s > 0 \,\right\},$$
$$S_- = \left\{\, s \in \overline{1,\ell} \;:\; \operatorname{Re}\lambda_s < 0 \,\right\}.$$

Тогда получаем

$$\frac{1}{T(z)} = \sum_{s \in S_0} \sum_{r=1}^{r_s} \frac{b_{sr}}{(z-\lambda_s)^r} + \sum_{s \in S_+} \sum_{r=1}^{r_s} \frac{b_{sr}}{(z-\lambda_s)^r} + \sum_{s \in S_-} \sum_{r=1}^{r_s} \frac{b_{sr}}{(z-\lambda_s)^r}$$

при $z \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. Сумму по пустому множеству индексов считаем тождественно нулевой. Для любого $s \in S_+ \cup S_-$ и $r \in \overline{1, r_s}$ функция

$$\frac{1}{(-iy-\lambda_s)^r}, \qquad y \in \mathbb{R},$$

является непрерывной и ограниченной, так как

$$\left|\frac{1}{(-iy-\lambda_s)^r}\right| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda_s|^r} \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, она порождает в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ регулярный функционал медленного роста. При $s \in S_0$ корень $\lambda_s$ чисто мнимый и имеет вид $\lambda_s = i\mu_s$ для подходящего $\mu_s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{1}{(-iy-\lambda_s)^r} = \frac{i^r}{(y+\mu_s)^r}, \qquad y \neq -\mu_s.$$

Поэтому нам требуется для любого натурального $r$ определить в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ обобщённую функцию $\mathcal{P}\frac{1}{y^r}$ так, чтобы в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ было выполнено равенство

$$y^r \mathcal{P}\frac{1}{y^r} = 1.$$

Воспользуемся известной нам обобщённой функцией $\mathcal{P}\frac{1}{y}$ и классическим равенством

$$\frac{1}{y^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dy}\right)^{(r-1)}\frac{1}{y}, \qquad y \neq 0.$$

Так как обобщённые функции в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ имеют обобщённые производные любого порядка, то рассмотрим обобщённую функцию

$$f_r(y) = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dy}\right)^{(r-1)}\mathcal{P}\frac{1}{y} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

**Утверждение 5.1.** В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ для любого натурального $r$ справедливо равенство

$$y^r f_r(y) = 1.$$

**Доказательство.** Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеем равенства:

$$\langle y^r f_r(y), \varphi(y)\rangle = \langle f_r(y), y^r\varphi(y)\rangle = \frac{1}{(r-1)!}\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{y}, \left(\frac{d}{dy}\right)^{r-1}\bigl(y^r\varphi(y)\bigr)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\bigl(y^r\varphi(y)\bigr)^{(r-1)} - \bigl(y^r\varphi(y)\bigr)^{(r-1)}(-y)}{y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^{+\infty} dy \sum_{s=0}^{r-1} C_{r-1}^s r \ldots (r-s+1) \left( y^{r-s-1} \varphi^{(r-s-1)}(y) + \right.$$

$$\left. + (-y)^{r-s-1} \varphi^{(r-s-1)}(-y) \right) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^{+\infty} dy \sum_{s=0}^{r-1} C_{r-1}^s r \ldots (r-s+1) \Big( y^{r-s-1} \varphi^{(r-s-1)}(y) +$$

$$+ y^{r-s-1} \left( \varphi(-y) \right)^{(r-s-1)} \Big) \boxed{=}$$

Равенство будет продолжено после следующих рассуждений: заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ выполнены соотношения

$$\int\limits_0^{+\infty} y^k \varphi^{(k)}(y)\, dy = (-1)^k k! \int\limits_0^{+\infty} \varphi(y)\, dy,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} y^k \left( \varphi(-y) \right)^{(k)}\, dy = (-1)^k k! \int\limits_0^{+\infty} \varphi(-y)\, dy,$$

которые получаются интегрированием по частям $k$ раз. Поэтому для любого $s \in \overline{0, r-1}$ имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \Big( y^{r-s-1} \varphi^{(r-s-1)}(y) + y^{r-s-1} \left( \varphi(-y) \right)^{(r-s-1)} \Big)\, dy =$$

$$= (-1)^{r-s-1} (r-s-1)! \int\limits_0^{+\infty} \big( \varphi(y) + \varphi(-y) \big)\, dy =$$

$$= (-1)^{r-s-1} (r-s-1)! \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy.$$

Следовательно, получаем продолжение равенства:

$$\boxed{=} \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy \sum_{s=0}^{r-1} \underbrace{C_{r-1}^s r \ldots (r-s+1)(r-s-1)!}_{=(r-1)! C_r^s} (-1)^{r-s-1} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,dy \underbrace{\sum_{s=0}^{r-1} C_r^s (-1)^{(r-s)}(-1)}_{=(1-1)^r-1=-1} = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,dy = \langle 1, \varphi(y)\rangle.$$

Таким образом, для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ установлено равенство

$$\langle y^r f_r(y), \varphi(y)\rangle = \langle 1, \varphi(y)\rangle,$$

то есть $y^r f_r(y) = 1$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ■

Определённую таким образом обобщённую функцию $f_r(y)$ естественно обозначить через $\mathcal{P}\frac{1}{y^r}$, то есть по определению получаем, что

$$\mathcal{P}\frac{1}{y^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dy}\right)^{(r-1)} \mathcal{P}\frac{1}{y} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{y^r}$ удовлетворяет в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ равенству

$$y^r \mathcal{P}\frac{1}{y^r} = 1,$$

то есть является частным решением уравнения $y^r w(y) = 1$, где $w(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, и соответственно может быть названа «главным делителем на $r$-ю степень аргумента». Отсюда немедленно получаем, что для любого $y_0 \in \mathbb{R}$ обобщённая функция

$$\mathcal{P}\frac{1}{(y-y_0)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dy}\right)^{(r-1)} \mathcal{P}\frac{1}{y-y_0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

удовлетворяет в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ равенству

$$(y-y_0)^r \mathcal{P}\frac{1}{(y-y_0)^r} = 1,$$

то есть является частным решением уравнения $(y-y_0)^r w(y) = 1$, $w(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Теперь, вспоминая полученное выше разложение на простые дроби функции $\frac{1}{T(-iy)}$, мы можем выписать частное решение уравнения

$$T(-iy)w(y) = 1, \qquad w(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

в следующем виде:

$$w(y) = \sum_{s\in S_0} \sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} i^r \mathcal{P} \frac{1}{(y+\mu_s)^r} + \sum_{s\in S_+\cup S_-} \sum_{r=1}^{r_s} \frac{b_{sr} i^r}{(y-i\lambda_s)^r}.$$

Тогда одной из функций Грина рассматриваемого «дифференциального многочлена» $L = T\left(\frac{d}{dx}\right)$ является

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\, w(y) \,\right](x) = \sum_{s\in S_0} \sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} i^r \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{(y+\mu_s)^r}\right](x) +$$

$$+ \sum_{s\in S_+\cup S_-} \sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} i^r \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(y-i\lambda_s)^r}\right](x).$$

Нам осталось вычислить обобщённые обратные преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{(y+\mu_s)^r}\right](x) = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{(y+\mu_s)^r}\right](-x) \quad \text{при} \quad s\in S_0,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\tfrac{1}{(y-i\lambda_s)^r}\right](x) = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\tfrac{1}{(y-i\lambda_s)^r}\right](-x) \quad \text{при} \quad s\in S_+\cup S_-.$$

Вспоминая обратное преобразование Фурье «главного делителя на аргумент» $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ (см. упражнение 3.17) и применяя результаты упражнения 3.11 и упражнения 3.9, для любого $s\in S_0$ и произвольного $r\in\overline{1,r_s}$ получаем соотношения:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{(y+\mu_s)^r}\right](x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dy}\right)^{(r-1)}\mathcal{P}\frac{1}{(y+\mu_s)}\right](-x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}(ix)^{r-1} e^{ix\mu_s}\pi i \operatorname{sign}(-x) =$$

$$= \frac{(-i)^r x^{r-1}}{(r-1)!}\frac{e^{ix\mu_s}\operatorname{sign}(x)}{2} = \frac{(-i)^r x^{r-1}}{(r-1)!}\frac{e^{x\lambda_s}\operatorname{sign}(x)}{2},$$

так как $\lambda_s = i\mu_s$ при $s\in S_0$.

Далее, для любого $s \in S_+ \cup S_-$ и произвольного $r \in \overline{1, r_s}$ имеем

$$\frac{1}{(y - i\lambda_s)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \left(\frac{d}{dy}\right)^{(r-1)} \frac{1}{y - i\lambda_s}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(y - i\lambda_s)^r}\right](x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left[\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \left(\frac{d}{dy}\right)^{(r-1)} \frac{1}{y - i\lambda_s}\right](-x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} (ix)^{r-1} \mathcal{F}\left[\frac{1}{y - i\lambda_s}\right](-x).$$

Видим, что нам для произвольного комплексного числа $\lambda$ с нетривиальной вещественной частью $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ требуется вычислить обобщённое преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{y - i\lambda}\right](x).$$

Заметим, что функция $\frac{1}{y-i\lambda}$ является квадратично интегрируемой на $\mathbb{R}$, то есть $\frac{1}{y-i\lambda} \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Действительно,

$$\left\|\tfrac{1}{y-i\lambda}\right\|_2 = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dy}{|y - i\lambda|^2}} = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(y + \operatorname{Im}\lambda)^2 + (\operatorname{Re}\lambda)^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{|\operatorname{Re}\lambda|}}.$$

Следовательно, по теореме Планшереля (см. [5], теорема 9.13), существует функция $h(x) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, такая, что

$$h_R(x) = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ixy}}{y - i\lambda}\, dy \to h(x) \quad \text{при} \quad R \to +\infty$$

по норме пространства $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, то есть

$$\lim_{R \to +\infty} \|h_R(x) - h(x)\|_2 = 0.$$

Эта функция $h(x) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ называется преобразованием Фурье–Планшереля в пространстве $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ функции $\frac{1}{y-i\lambda} \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что каждая функция из пространства $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ порождает регулярный функционал из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Действительно, любая основная функция $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ (проверьте это). Поэтому регулярное действие функции $h(x) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ на основную функцию $\varphi(x)$ фактически является скалярным произведением в пространстве $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ функций $\varphi(x)$ и комплексно-сопряжённой функции $h(x)$:

$$\langle h(x), \varphi(x) \rangle = \left(\varphi, \overline{h}\,\right)_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, h(x)\, dx.$$

Этот интеграл абсолютно сходится в силу неравенства Коши–Буняковского для скалярного произведения в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, |h(x)|\, dx \leqslant \|\varphi\|_2 \, \|h\|_2 < +\infty$$

и непрерывно зависит от функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (докажите это). Также из неравенства Коши–Буняковского следует, что для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ выполнены следующие соотношения

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, h_R(x)\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, h(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \; |h_R(x) - h(x)\, dx| \; dx \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_2 \; \|h_R(x) - h(x)\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

То есть имеет место равенство

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, h_R(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, h(x)\, dx.$$

Таким образом, имея функцию $h(x) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье–Планшереля функции $\frac{1}{y-i\lambda} \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, находим

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\frac{1}{y-i\lambda}\right](x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{y-i\lambda}, \mathcal{F}\left[\,\varphi(x)\,\right](y) \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{dy}{y-i\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy}\, \varphi(x)\, dx}_{\in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{dy}{y-i\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy}\, \varphi(x)\, dx =$$

$$\overset{\substack{\text{теорема}\\ \text{Фубини}}\ [5]}{=} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} dx\, \varphi(x) \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ixy}}{y-i\lambda}\, dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, h_R(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, h(x)\, dx = \langle h(x), \varphi(x) \rangle.$$

Следовательно, мы доказали равенство обобщённых функций $\mathcal{F}\left[\frac{1}{y-i\lambda}\right](x)$ и $h(x)$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, так как их действия на любую основную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ совпадают.

С другой стороны, для любого вещественного $x \neq 0$ мы можем вычислить числовой предел:

$$\lim_{R\to+\infty} h_R(x) = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ixy}}{y-i\lambda}\, dy,$$

применяя стандартную технику ТФКП (например, см. [6, § 13, с. 83–85]). При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ имеем

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ixy}}{y-i\lambda}\, dy = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2\pi i e^{-x\lambda}, & x > 0. \end{cases}$$

При $\operatorname{Re}\lambda < 0$ имеем

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ixy}}{y-i\lambda}\, dy = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -2\pi i e^{-x\lambda}, & x < 0. \end{cases}$$

Используя $\theta$-функцию Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

можем записать полученные результаты одной формулой:

$$\lim_{R\to+\infty} h_R(x) = 2\pi i e^{-x\lambda}\,\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\lambda)\,\theta(x\operatorname{Re}\lambda) = \psi(x).$$

Но тогда по теореме Фату (см. [4], теорема 11.31) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(x) - h(x)|^2\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{R\to+\infty} |h_R(x) - h(x)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} |h_R(x) - h(x)|^2\,dx = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(x) - h(x)|^2\,dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = \psi(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Итак, мы доказали, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ вида $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ выполнено

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{y - i\lambda}\right](x) = 2\pi i e^{-x\lambda}\,\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\lambda)\,\theta(x\operatorname{Re}\lambda) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Автору приятно отметить, что на применение теоремы Планшереля при доказательстве этого равенства ему указал доцент кафедры высшей математики МФТИ М. Е. Боговский.

Таким образом, возвращаясь к нашей задаче вычисления обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(y-i\lambda_s)^r}\right](x)$ для случая $s \in S_+ \cup S_-$ и $r \in \overline{1, r_s}$, мы получаем, что

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(y - i\lambda_s)^r}\right](x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\,(ix)^{r-1}\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{y - i\lambda_s}\right](-x) =$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\,(ix)^{r-1}\,i e^{x\lambda_s}\,\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\lambda_s)\,\theta(-x\operatorname{Re}\lambda_s) =$$

$$= \frac{(-i)^r x^{r-1}}{(r-1)!}\,e^{x\lambda_s}\,\operatorname{sign}(-\operatorname{Re}\lambda_s)\,\theta(-x\operatorname{Re}\lambda_s).$$

Подставляя найденные обратные преобразования Фурье

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{(y+\mu_s)^r}\right](x) &= \tfrac{(-i)^r x^{r-1}}{(r-1)!}\, e^{x\lambda_s}\, \tfrac{\operatorname{sign}(x)}{2}, && s\in S_0,\\
\mathcal{F}^{-1}\left[\tfrac{1}{(y-i\lambda_s)^r}\right](x) &= \tfrac{(-i)^r x^{r-1}}{(r-1)!}\, e^{x\lambda_s}\, (-\theta(-x)), && s\in S_+,\\
\mathcal{F}^{-1}\left[\tfrac{1}{(y-i\lambda_s)^r}\right](x) &= \tfrac{(-i)^r x^{r-1}}{(r-1)!}\, e^{x\lambda_s}\, \theta(x), && s\in S_-,
\end{aligned}$$

в раннее полученную формулу

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{s\in S_0}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} i^r \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{(y+\mu_s)^r}\right](x) + \\ + \sum_{s\in S_+\cup S_-}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} i^r \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(y-i\lambda_s)^r}\right](x)$$

для функции Грина $\mathcal{E}(x)$ «дифференциального многочлена» $T\left(\frac{d}{dx}\right)$, получаем

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{s\in S_0}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\frac{\operatorname{sign}(x)}{2} + \\ + \sum_{s\in S_+}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\big(-\theta(-x)\big) + \\ + \sum_{s\in S_-}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\theta(x).$$

Заметим, что $\operatorname{sign}(x) = 2\theta(x) - 1$. Следовательно, рассмотрев функцию

$$\mathcal{E}_0(x) = \sum_{s\in S_0}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\theta(x) + \\ + \sum_{s\in S_+}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\big(-\theta(-x)\big) + \\ + \sum_{s\in S_-}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\theta(x),$$

можем переписать формулу для $\mathcal{E}(x)$ в виде

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0(x) - \sum_{s \in S_0} \sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} \frac{x^{r-1} e^{x\lambda_s}}{2(r-1)!}.$$

Как известно из классической теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, функция

$$u_0(x) = \sum_{s \in S_0} \sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} \frac{x^{r-1} e^{x\lambda_s}}{2(r-1)!}$$

является классическим гладким решением однородного уравнения $T\left(\frac{d}{dx}\right) u_0(x) = 0$, причём она имеет медленный рост (так как $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$ при $s \in S_0$). Следовательно, $u_0(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ как регулярный функционал медленного роста, и автоматически удовлетворяет однородному уравнению $T\left(\frac{d}{dx}\right) u_0(x) = 0$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Таким образом, функция $\mathcal{E}_0(x)$ также является функцией Грина «дифференциального многочлена». Назовём её стандартной функцией Грина, а все остальные функции Грина оператора $T\left(\frac{d}{dx}\right)$ получаются прибавлением к $\mathcal{E}_0(x)$ подходящего решения однородного уравнения.

Если комплексный многочлен $T(z)$ не имеет чисто мнимых корней, то есть множество $S_0 = \varnothing$, то в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ функция Грина «дифференциального многочлена» $T\left(\frac{d}{dx}\right)$ единственна и имеет вид

$$\mathcal{E}_0(x) = \sum_{s \in S_+} \sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} \frac{x^{r-1} e^{x\lambda_s}}{(r-1)!} \big(-\theta(-x)\big) + \sum_{s \in S_-} \sum_{r=1}^{r_s} b_{sr} \frac{x^{r-1} e^{x\lambda_s}}{(r-1)!} \theta(x).$$

## 6. Общее решение однородного уравнения

Вычислив стандартную функцию Грина $\mathcal{E}_0(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ «дифференциального многочлена» $T\left(\frac{d}{dx}\right)$, займёмся поиском общего решения $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ однородного уравнения

$$T\left(\tfrac{d}{dx}\right) u(x) = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$T(-iy)\mathcal{F}\left[\, u(x) \,\right](y) = 0.$$

Если комплексный многочлен $T(z)$ не имеет чисто мнимых корней, т. е. при $S_0 = \varnothing$, то однородное уравнение имеет только тривиальное решение, так как в этом случае многочлен $T(-iy)$ отделён от нуля, и рассматриваемое однородное уравнение будет эквивалентно равенству $\mathcal{F}\,[\,u(x)\,]\,(y) = 0$, которое в свою очередь равносильно $u(x) = 0$. Поэтому всюду далее считаем $S_0 \neq \varnothing$. Так как для каждого $s \in S_+ \cup S_-$ функция $(-iy - \lambda_s)^{r_s}$ при $y \in \mathbb{R}$ отделена от нуля в силу неравенства

$$|-iy - \lambda_s|^{r_s} \geqslant |\operatorname{Re}\lambda_s|^{r_s} > 0 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R},$$

то рассматриваемое однородное уравнение равносильно

$$\prod_{s \in S_0} (-iy - \lambda_s)^{r_s} \mathcal{F}\,[\,u(x)\,]\,(y) = 0.$$

Обозначая при всех $s \in S_0$ чисто мнимый корень $\lambda_s = i\mu_s$ для подходящего $\mu_s \in \mathbb{R}$, получаем равносильное равенство

$$\prod_{s \in S_0} (y + \mu_s)^{r_s} \mathcal{F}\,[\,u(x)\,]\,(y) = 0.$$

Для краткости введём в рассмотрение вещественный многочлен

$$P_0(y) = \prod_{s \in S_0} (y + \mu_s)^{r_s}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Итак, мы ищем общее решение уравнения

$$P_0(y)v(y) = 0, \qquad v(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

**Утверждение 6.1.** Пусть обобщённая функция $v(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ является решением уравнения $P_0(y)v(y) = 0$. Тогда для каждого $s \in S_0$ существует обобщённая функция $v_s(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, такая, что

$$\operatorname{supp} v_s = \{-\mu_s\} \quad \text{и} \quad (y + \mu_s)^{r_s} v_s(y) = 0 \quad \forall\, s \in S_0,$$

и выполнено равенство

$$v(y) = \sum_{s \in S_0} v_s(y).$$

**Доказательство.** Для любой функции $\varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, носитель которой не содержит чисел $(-\mu_s)$ для всех $s \in S_0$, получем, что функция

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{\varphi(y)}{P_0(y)}, & y \in \operatorname{supp}\varphi, \\ \\ 0, & y \notin \operatorname{supp}\varphi, \end{cases}$$

также принадлежит $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. При этом $\varphi(y) = P_0(y)\psi(y)$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Поэтому получаем

$$\langle v(y), \varphi(y)\rangle = \langle P_0(y)v(y), \psi(y)\rangle = 0.$$

Следовательно, носитель обобщённой функции $v(y)$ содержится в конечном числовом множеств $M_0 = \left\{ \, (-\mu_s) : \, s \in S_0 \, \right\}$. Определим положительное число

$$\varepsilon = \min\left\{ \, \tfrac{|\mu_s - \mu_k|}{5} \; : \; s \in S_0, \;\; k \in S_0, \;\; s \neq k \, \right\} > 0.$$

В силу доказанного ранее утверждения 3.8, для любого $s \in S_0$ существует обобщённая функция $v_s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, носитель которой содержится в $\varepsilon$-окрестности числа $(-\mu_s)$, то есть

$$\operatorname{supp} v_s \subset (-\mu_s - \varepsilon, -\mu_s + \varepsilon) = O_\varepsilon(-\mu_s),$$

и выполнено равенство

$$v(y) = \sum_{s \in S_0} v_s(y) \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Для каждого $s \in S_0$ рассмотрим функцию $\eta_s(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такую, что

$$\eta_s(y) = 1 \quad \forall\, y \in O_{2\varepsilon}(-\mu_s) \quad \text{и} \quad \operatorname{supp}\eta_s \subset O_{3\varepsilon}(-\mu_s).$$

Такую функцию обычно называют «срезкой» в окрестности точки $(-\mu_s)$. Так как для любой функции $\varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ выполнено равенство

$$\varphi(y) = \eta_s(y)\varphi(y) \quad \forall\, y \in O_\varepsilon(\operatorname{supp} v_s) \subset O_{2\varepsilon}(-\mu_s),$$

то, в силу результата задачи 3.6, имеем равенство действий

$$\langle v_s(y), \varphi(y)\rangle = \langle v_s(y), \eta_s(y)\varphi(y)\rangle \qquad \forall\, \varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Для любого $s \in S_0$ определим многочлен

$$P_s(y) = \prod_{k \in S_0 \setminus \{s\}} (y + \mu_k)^{r_k}, \quad \text{то есть} \quad P_0(y) = P_s(y)(y + \mu_s)^{r_s}.$$

Заметим, что для любого $k \in S_0 \setminus \{s\}$ выполнено

$$O_{3\varepsilon}(-\mu_s) \cap O_\varepsilon(-\mu_k) = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp} \eta_s \cap O_\varepsilon(-\mu_k) = \varnothing.$$

Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, и рассмотрим функцию

$$\psi_s(y) = \begin{cases} \frac{\eta_s(y)\varphi(y)}{P_s(y)}, & y \in \operatorname{supp} \eta_s, \\ \\ 0, & y \notin \operatorname{supp} \eta_s. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi_s(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, причём $\operatorname{supp} \psi_s \subset \operatorname{supp} \eta_s$ и справедливо равенство

$$\eta_s(y)\varphi(y) = P_s(y)\psi_s(y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Получаем

$$\langle (y + \mu_s)^{r_s} v_s(y), \varphi(y) \rangle = \langle v_s(y), \eta_s(y)(y + \mu_s)^{r_s} \varphi(y) \rangle =$$

$$= \left\langle v(y) - \sum_{k \in S_0 \setminus \{s\}} v_k(y), P_0(y)\psi_s(y) \right\rangle =$$

$$= \langle P_0(y)v(y), \psi_s(y) \rangle - \sum_{k \in S_0 \setminus \{s\}} \langle v_k(y), P_0(y)\psi_s(y) \rangle.$$

Но по условию $\langle P_0(y)v(y), \psi_s(y) \rangle = 0$, а для любого $k \in S_0 \setminus \{s\}$ выполнены вложения

$$\operatorname{supp}(P_0\, \psi_s) \subset \operatorname{supp} \psi_s \subset \operatorname{supp} \eta_s \subset O_{3\varepsilon}(-\mu_s),$$

причём

$$O_{3\varepsilon}(-\mu_s) \cap \operatorname{supp} v_k = \varnothing,$$

то есть $\langle v_k(y), P_0(y)\psi_s(y) \rangle = 0$. Таким образом, выполнено

$$\langle (y + \mu_s)^{r_s} v_s(y), \varphi(y) \rangle = 0 \qquad \forall\, \varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Так как $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (упражнение 2.6), то получаем

$$(y+\mu_s)^{r_s} v_s(y) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Нам осталось доказать равенство $\operatorname{supp} v_s = \{-\mu_s\}$. Для любой функции $\varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, носитель которой не содержит $(-\mu_s)$, рассмотрим функцию

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{\varphi(y)}{(y+\mu_s)^{r_s}}, & y \in \operatorname{supp} \varphi, \\ 0, & y \notin \operatorname{supp} \varphi. \end{cases}$$

Очевидны вложение $\psi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и равенство

$$\varphi(y) = (y+\mu_s)^{r_s} \psi(y) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\langle v_s(y), \varphi(y)\rangle = \langle v_s(y), (y+\mu_s)^{r_s}\psi(y)\rangle = \langle (y+\mu_s)^{r_s} v_s(y), \psi(y)\rangle = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{supp} v_s \subset \{-\mu_s\}$. Так как множество $\{-\mu_s\}$ содержит только одну точку, то $\operatorname{supp} v_s = \{-\mu_s\}$. ■

В свете только что доказанного утверждения 6.1, осталось выяснить общий вид обобщённых функций $v_s(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ для каждого $s \in S_0$, удовлетворяющих равенству

$$(y+\mu_s)^{r_s} v_s(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^{r_s} v_s(z-\mu_s) = 0.$$

**Утверждение 6.2.** Для любого $r \in \mathbb{N}$ общим решением $w(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ уравнения $z^r w(z) = 0$ является

$$w(z) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k\, \delta^{(k)}(z) \quad \forall\, c_k \in \mathbb{C}, \quad k \in \overline{0, r-1}.$$

**Доказательство.** Пусть $w(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ является решением уравнения $z^r w(z) = 0$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Тогда выполнено равенство $\operatorname{supp} w = \{0\}$. Действительно, для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем, не содержащим ноль, рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{\varphi(z)}{z^r}, & z \in \operatorname{supp} \varphi, \\ 0, & z \notin \operatorname{supp} \varphi. \end{cases}$$

Тогда $\psi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $z^r\psi(z) = \varphi(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\langle w(z), \varphi(z)\rangle = \langle w(z), z^r\psi(z)\rangle = \langle z^r w(z), \psi(z)\rangle = \langle 0, \psi(z)\rangle = 0,$$

что и требовалось.

Рассмотрим функцию-срезку $\eta(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ в окрестности нуля, то есть для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено $\eta(z) = 1$ при $|z| < \varepsilon$. Тогда для произвольной функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\langle w(z), \varphi(z)\rangle = \langle w(z), \eta(z)\varphi(z)\rangle.$$

Для функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ рассмотрим её многочлен Тейлора степени $r-1$ по степеням $z$:

$$\mathcal{T}_r(z) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^k(0)}{k!} z^k, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Определим функцию

$$\xi(z) = \begin{cases} \frac{\varphi(z) - \mathcal{T}_r(z)}{z^r}, & z \neq 0, \\ \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}, & z = 0. \end{cases}$$

Докажите в качестве полезного упражнения, что $\xi(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ (достаточно доказать бесконечную дифференцируемость $\xi(z)$ при $z = 0$, так как вне нуля это очевидно). Тогда функция $\eta(z)\xi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и выполнено равенство

$$\eta(z)\varphi(z) = z^r\eta(z)\xi(z) + \eta(z)\mathcal{T}_r(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, получаем

$$\langle w(z), \varphi(z)\rangle = \langle w(z), \eta(z)\varphi(z)\rangle = \langle w(z), z^r\eta(z)\xi(z) + \eta(z)\mathcal{T}_r(z)\rangle =$$

$$= \langle z^r w(z), \eta(z)\xi(z)\rangle + \sum_{k=0}^{r-1} \langle w(z), \eta(z) z^k\rangle\, \tfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} =$$

$$= \langle 0, \eta(z)\xi(z) + \sum_{k=0}^{r-1} \tfrac{(-1)^k}{k!} \langle w(z), \eta(z) z^k\rangle \langle \delta^{(k)}(z), \varphi(z)\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{r-1} \tfrac{(-1)^k}{k!} \langle w(z), \eta(z) z^k\rangle \delta^{(k)}(z), \varphi(z) \right\rangle.$$

Определяя коэффициенты

$$c_k = \tfrac{(-1)^k}{k!}\langle w(z), \eta(z) z^k\rangle, \quad k \in \overline{0, r-1},$$

получаем равенство

$$\langle w(z), \varphi(z)\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{r-1} c_k \delta^{(k)}(z), \varphi(z) \right\rangle \qquad \forall\, \varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Так как подпространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (упражнение 2.6), то для $w(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ получаем требуемое равенство в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

С другой стороны, для каждого $k \in \overline{0, r-1}$ верно равенство

$$z^r \delta^{(k)}(z) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

так как для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\langle z^r \delta^{(k)}(z), \varphi(z)\rangle = (-1)^k \left(z^r \varphi(z)\right)^{(k)}\Big|_{z=0} =$$

$$= (-1)^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s \underbrace{(z^r)^{(s)}|_{z=0}}_{=0} \varphi^{(k-s)}(0) = 0.$$

Следовательно, произвольная линейная комбинация функций

$$\delta(z), \delta'(z), \ldots, \delta^{r-1}(z)$$

является общим решением однородного уравнения $z^r w(z) = 0$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ■

Вспоминаем об общем решении уравнения $P_0(y)v(y) = 0$, которое по утверждению 6.1 представлено суммой

$$v(y) = \sum_{s \in S_0} v_s(y)$$

для подходящих обобщённых функций $v_s(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, удовлетворяющих уравнениям $z^{r_s} v_s(z - \mu_s) = 0$. Тогда, в силу утверждения 6.2, получаем, что

$$v_s(z - \mu_s) = \sum_{k=0}^{r_s - 1} c_{sk} \delta^{(k)}(z) \quad \Leftrightarrow \quad v_s(y) = \sum_{k=0}^{r_s - 1} c_{sk} \delta^{(k)}(y + \mu_s).$$

Следовательно, общим решением уравнения $P_0(y)v(y) = 0$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ является обобщённая функция

$$v(y) = \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} c_{sk} \delta^{(k)}(y + \mu_s) \qquad \forall\, c_{sk} \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, мы вычислили обобщённое преобразование Фурье общего решения уравнения $T\left(\frac{d}{dx}\right) u(x) = 0$:

$$\mathcal{F}\left[\, u(x) \,\right](y) = \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} c_{sk} \delta^{(k)}(y + \mu_s),$$

откуда немедленно находим и само решение $u(x)$:

$$u(x) = \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} c_{sk} \mathcal{F}^{-1} \left[\, \delta^{(k)}(y + \mu_s) \,\right](x) =$$

$$= \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} \frac{c_{sk}}{2\pi} \mathcal{F} \left[\, \delta^{(k)}(y + \mu_s) \,\right](-x) =$$

$$= \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} \frac{c_{sk}}{2\pi}\, e^{i\mu_s x}\, \mathcal{F} \left[\, \delta^{(k)}(y) \,\right](-x) =$$

$$= \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} \frac{c_{sk}}{2\pi}\, e^{i\mu_s x}\, (ix)^k\, \underbrace{\mathcal{F}\left[\, \delta(y) \,\right](-x)}_{=1} =$$

$$= \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} \frac{i^k c_{sk}}{2\pi}\, x^k\, e^{i\mu_s x} = \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} d_{sk}\, x^k\, e^{\lambda_s x},$$

где $d_{sk} = \frac{i^k c_{sk}}{2\pi}$ — произвольные комплексные числа. Таким образом, общим решением однородного уравнения $T\left(\frac{d}{dx}\right) u(x) = 0$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ является произвольная линейная комбинация функций $x^k e^{\lambda_s x}$ для $s \in S_0$ и $k \in \overline{0, r_s - 1}$, где $r_s$ — кратность чисто мнимого корня $\lambda_s$ комплексного многочлена $T(z)$.

Следовательно, общей функцией Грина «дифференциального многочлена» $T\left(\frac{d}{dx}\right)$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ является

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0(x) + \sum_{s \in S_0} \sum_{k=0}^{r_s - 1} d_{sk}\, x^k\, e^{\lambda_s x} \qquad \forall\, d_{sk} \in \mathbb{C},$$

где частная функция Грина

$$\mathcal{E}_0(x) = \sum_{s\in S_0}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\theta(x) + \\ + \sum_{s\in S_+}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\big(-\theta(-x)\big) + \\ + \sum_{s\in S_-}\sum_{r=1}^{r_s} b_{sr}\frac{x^{r-1}e^{x\lambda_s}}{(r-1)!}\,\theta(x),$$

а коэффициенты $b_{sr}$ определяются однозначно из разложения функции $\frac{1}{T(z)}$ на простые дроби:

$$\frac{1}{T(z)} = \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{r=1}^{r_s}\frac{b_{sr}}{(z-\lambda_s)^r}, \qquad z \neq \lambda_1, \dots, \lambda_\ell.$$

## 7. Функция Грина оператора Шрёдингера

Полученный результат о функциях Грина «дифференциального многочлена» можно применить для вычисления функций Грина некоторых стандартных операторов, возникающих в задачах математической физики, например, оператора в уравнении переноса, в волновом уравнении, в уравнении теплопроводности и в уравнении Шрёдингера. Здесь мы вычислим функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ оператора Шрёдингера:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + a^2\Delta_x\right)\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x), \quad t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}^m, \tag{7.1}$$

носитель которой $\operatorname{supp}\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m = \left\{ \binom{t}{x} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \ : \ t \geqslant 0 \right\}$. Вещественное $a > 0$ — это фиксированный числовой параметр, а оператор $\Delta_x$ — это обычный оператор Лапласа:

$$\Delta_x = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Применяя к уравнению (7.1) преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^m$ и используя очевидное равенство $\mathcal{F}_x\,[\,\delta(t,x)\,]\,(y) = \delta(t)1(y)$ (проверьте это!), получаем равносильное уравнение

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - a^2|y|^2\right)\mathcal{F}_x\,[\,\mathcal{E}(t,x)\,]\,(y) = \delta(t)1(y), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m. \qquad (7.2)$$

При фиксированном $y \in \mathbb{R}^m$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\left(i\frac{d}{dt} - a^2|y|^2\right)w(t) = \delta(t), \quad w(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \qquad (7.3)$$

с условием $\operatorname{supp} w \subset [0,+\infty)$. Оператор $i\frac{d}{dt} - a^2|y|^2$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}^m$ представляет собой «дифференциальный многочлен», порождённый комплексным многочленом

$$T(z) = iz - a^2|y|^2, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{то есть} \quad i\tfrac{d}{dt} - a^2|y|^2 = T\left(\tfrac{d}{dt}\right).$$

Многочлен $T(z)$ имеет единственный простой чисто мнимый корень $\lambda = -ia^2|y|^2$, при этом

$$\frac{1}{T(z)} = \frac{(-i)}{z-\lambda}, \qquad z \neq \lambda.$$

Поэтому общее решение уравнения (7.3) в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ имеет вид

$$w_c(t) = -i\,\exp\left(-ia^2|y|^2t\right)\theta(t) + c\,\exp\left(-ia^2|y|^2t\right) \qquad \forall\, c \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, что справедливо вложение $\operatorname{supp} w_0 \subset [0,+\infty)$. Покажем, что только $w_0(t)$ среди всех обобщённых функций $w_c(t)$ обладает таким свойством. Пусть для некоторого $c \in \mathbb{C}$ выполнено вложение $\operatorname{supp} w_c \subset [0,+\infty)$. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такую, что $\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty,0)$. Тогда имеем равенство $\langle w_c(t),\varphi(t)\rangle = 0$. Так как $\operatorname{supp} w_0 \subset [0,+\infty)$, то выполнено также $\langle w_0(t),\varphi(t)\rangle = 0$, откуда получаем, что

$$c\left\langle \exp\left(-ita^2|y|^2\right), \varphi(t)\right\rangle = \langle w_c(t) - w_0(t), \varphi(t)\rangle = 0.$$

Теперь рассмотрим $\psi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ такую, что

$$\operatorname{supp}\psi \subset (-\infty,0) \quad \text{и} \quad \langle 1(t),\psi(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt \neq 0.$$

Функция $\varphi(t) = \exp\left(ia^2|y|^2 t\right)\psi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ очевидно удовлетворяет условию $\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty, 0)$. Поэтому

$$0 = c\left\langle \exp\left(-ita^2|y|^2\right), \varphi(t)\right\rangle =$$

$$= c\left\langle 1(t), \exp\left(-ita^2|y|^2\right)\varphi(t)\right\rangle = c\underbrace{\left\langle 1(t), \psi(t)\right\rangle}_{\neq 0}, \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Итак, единственной функцией Грина оператора $T\left(\frac{d}{dt}\right)$, носитель которой содержится в множестве $[0, +\infty)$, является обобщённая функция $w_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Теперь рассматриваем обобщённую функцию

$$v(t, y) = -i\,\exp\left(-ia^2|y|^2 t\right)\theta(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m).$$

Она является решением уравнения

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - a^2|y|^2\right) v(t, y) = \delta(t)1(y) \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m).$$

Действительно, для любой функции $\varphi(t, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ имеем равенства:

$$\left\langle \left(i\frac{\partial}{\partial t} - a^2|y|^2\right) v(t, y), \varphi(t, y)\right\rangle =$$

$$= \left\langle v(t, y), \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - a^2|y|^2\right)\varphi(t, y)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_0^{+\infty} dt\,(-i)\,\exp\left(-ia^2|y|^2 t\right)\left(-i\,\varphi_t'(t, y) - a^2|y|^2\varphi(t, y)\right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_0^{+\infty} dt\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(-\exp\left(-ia^2|y|^2 t\right)\varphi(t, y)\Big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy\,\varphi(0, y) = \langle \delta(t)1(y), \varphi(t, y)\rangle.$$

Следовательно, функцией Грина $\mathcal{E}(t, x)$ оператора Шрёдингера, носитель которой содержится в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, является обобщённая функция

$$\mathcal{E}(t,x) = \mathcal{F}_y^{-1}\left[\, v(t,y)\,\right](x) = \mathcal{F}_y^{-1}\left[\, -i\,\exp\left(-ia^2|y|^2t\right)\theta(t)\,\right](x).$$

Нам осталось вычислить это обратное преобразование Фурье. Для любой функции $\varphi(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ находим

$$\langle \mathcal{E}(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \left\langle \mathcal{F}_y^{-1}\left[\, -i\,\exp\left(-ia^2|y|^2t\right)\theta(t)\,\right](x), \varphi(t,x)\right\rangle =$$

$$= \left\langle -i\,\exp\left(-ia^2|y|^2t\right)\theta(t), \mathcal{F}_x^{-1}\left[\,\varphi(t,x)\,\right](y)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy\, \frac{(-i)\exp\left(-ia^2|y|^2t\right)}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(t,x)\, \exp\left(-\, i(x,y)\right) =$$

$$= \frac{(-i)}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(t,x)\, \exp\left(-ia^2|y|^2t - i(x,y)\right).$$

Заметим, что функция

$$\varphi(t,x)\exp\left(-ia^2|y|^2t - i(x,y)\right) \notin \mathbb{L}_1\left(x\in\mathbb{R}^m,\ y\in\mathbb{R}^m\right),$$

но для любого $R>0$ очевидно выполнено вложение

$$\varphi(t,x)\exp\left(-ia^2|y|^2t - i(x,y)\right) \in \mathbb{L}_1\left(x\in\mathbb{R}^m,\ y\in[-R,R]^m\right).$$

Следовательно, для любого $t>0$, применяя теорему Фубини (см. [5], теорема 8.8), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(t,x)\, \exp\left(-ia^2|y|^2t - i(x,y)\right) =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{[-R,R]^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(t,x)\, \exp\left(-ia^2|y|^2t - i(x,y)\right) =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(t,x) \int\limits_{[-R,R]^m} dy\, \exp\left(-ia^2|y|^2t - i(x,y)\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$\phi_R(t,x) = \int\limits_{[-R,R]^m} \exp\left(-ia^2|y|^2t - i(x,y)\right)\,dy =$$

$$= \int\limits_{[-R,R]^m} \exp\left(-i\left|a\sqrt{t}y + \tfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right|^2 + i\tfrac{|x|^2}{4a^2t}\right)\,dy =$$

$$= \frac{\exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)}{\left(a\sqrt{t}\right)^m} \int\limits_{z\in\frac{x}{2a\sqrt{t}}+a\sqrt{t}[-R,R]^m} \exp\left(-\,i|z|^2\right)\,dz =$$

$$= \frac{\exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)}{\left(a\sqrt{t}\right)^m} \int\limits_{\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}-Ra\sqrt{t}}^{\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}+Ra\sqrt{t}} e^{-iz_1^2}dz_1 \ldots \int\limits_{\frac{x_m}{2a\sqrt{t}}-Ra\sqrt{t}}^{\frac{x_m}{2a\sqrt{t}}+Ra\sqrt{t}} e^{-iz_m^2}dz_m.$$

Определим функцию $\varPhi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ по формуле

$$\varPhi(\tau) = \int\limits_0^\tau \exp\left(-\,i\xi^2\right)\,d\xi, \qquad \tau\in\mathbb{R}.$$

Тогда можем переписать значение $\phi_R(t,x)$ в виде

$$\phi_R(t,x) = \frac{\exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)}{\left(a\sqrt{t}\right)^m} \prod_{k=1}^m \left(\varPhi\left(\tfrac{x_k}{2a\sqrt{t}} + Ra\sqrt{t}\right) - \varPhi\left(\tfrac{x_k}{2a\sqrt{t}} - Ra\sqrt{t}\right)\right).$$

Функция $\varPhi$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в силу непрерывности интеграла по переменному пределу интегрирования, и существует предел

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \varPhi(\tau) = \pm\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-i\tfrac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, она ограничена на $\mathbb{R}$:

$$\exists\, M>0 \quad \forall\,\tau\in\mathbb{R} \quad |\varPhi(\tau)| \leqslant M.$$

Поэтому для любого $R>0$ получаем неравенство

$$|\phi_R(t,x)| \leqslant \left(\frac{2M}{a\sqrt{t}}\right)^m \quad \forall\, t>0, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^m,$$

из которого следует, что при фиксированном $t>0$ выполнено

$$\bigl|\varphi(t,x)\phi_R(t,x)\bigr| \leqslant \left(\frac{2M}{a\sqrt{t}}\right)^m \bigl|\varphi(t,x)\bigr| \in \mathbb{L}_1(x\in\mathbb{R}^m).$$

Далее, для любых $t>0$ и $x\in\mathbb{R}^m$ существует предел

$$\lim_{R\to+\infty}\phi_R(t,x) = \frac{\exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)}{\left(a\sqrt{t}\right)^m}\left(\sqrt{\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right)^m.$$

Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости (см. [4], теорема 11.32), получаем, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\,\varphi(t,x)\,\phi_R(t,x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\,\varphi(t,x)\,\lim_{R\to+\infty}\phi_R(t,x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\,\varphi(t,x)\left(\frac{\sqrt{\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{a\sqrt{t}}\right)^m \exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)$$

Окончательно получаем, что

$$\langle \mathcal{E}(t,x),\varphi(t,x)\rangle =$$

$$= \frac{(-i)}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{+\infty} dt\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\,\varphi(t,x)\left(\frac{\sqrt{\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{a\sqrt{t}}\right)^m \exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right) =$$

$$= \left\langle (-i)\,\theta(t)\left(\frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^m \exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right),\varphi(t,x)\right\rangle.$$

Итак, искомая функция Грина оператора Шрёдингера имеет вид

$$\mathcal{E}(t,x) = (-i)\,\theta(t)\left(\frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^m \exp\left(i\frac{|x|^2}{4a^2t}\right).$$

## 8. Задачи

1. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ найти все функции Грина оператора
$$L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + 1.$$

2. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ найти все функции Грина оператора
$$L = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} + i.$$

3. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ найти все функции Грина оператора
$$L = i\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - i.$$

4. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ найти функцию Грина оператора переноса
$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (b, \nabla_x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad b \in \mathbb{R}^m,$$
носитель которой содержится в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

5. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ найти функцию Грина оператора уравнения теплопроводности
$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad a > 0,$$
носитель которой содержится в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.

6. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ найти функцию Грина оператора Даламбера одномерного волнового уравнения
$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$
носитель которой содержится в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

7. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ найти функцию Грина оператора Даламбера трёхмерного волнового уравнения
$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad a > 0,$$
носитель которой содержится в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$.

# Литература


1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1971. — 512 с.
2. *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. — М. : Наука, 1976. — 280 с.
3. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — 2-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2003. — 303 с.
4. *Rudin W.* Principles of mathematical analysis, Third Edition, McGraw-Hill, 1976. — 342 p.
5. *Rudin W.* Real and Complex Analysis, Third Edition, McGraw-Hill, 1987. — 416 p.
6. *Половинкин Е. С.* Курс лекций по теории функций комплексного переменного. — М. : Физматкнига, 2003. — М. : Издательство МФТИ, 2003. — 208 с.

Учебное издание

**Константинов** Роман Викторович

# ФУНКЦИИ ГРИНА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. П. Котова.* Корректор *И. А. Волкова*
Компьютерная верстка *Р. В. Константинов, Е. А. Казеннова*
Подписано в печать 26.04.2019. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,0.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 50 экз. Заказ № 98.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408 84 30. E-mail: polygraph@mipt.ru