Р.В. Константинов

ЛЕКЦИИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Долгопрудный, 2009–2019

Оглавление

Предисловие 5

Введение 7

Глава 1. Топологические и метрические пространства

1.1. Топологические пространства 10

1.2. Метрические пространства 46

1.3. Сепарабельные метрические пространства 52

1.4. Полные метрические пространства 60

1.5. Пополнение метрического пространства 80

1.6. Принцип сжимающих отображений Банаха 92

Глава 2. Компактные множества в топологических и метрических пространствах

2.1. Компактные множества в топологических пространствах 97

2.2. Компактные множества в метрических пространствах . 119

Глава 3. Линейные нормированные пространства и линейные операторы

3.1. Линейные нормированные пространства 139

3.2. Гильбертово пространство 165

3.3. Полные системы и базис 175

3.4. Линейные операторы 194

3.5. Обратимость линейных операторов 235

Глава 4. Мера и интеграл Лебега

4.1. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ 243

4.2. Измеримые функции 279

4.3. Интеграл Лебега 288

4.4. Пространство $\mathbb{L}_p$ 341

4.5. Мера и интеграл Лебега—Стилтьеса 388

Глава 5. Сопряжённое пространство

5.1. Теорема Хана—Банаха 409

5.2. Малые лебеговы пространства 427

5.3. Сопряжённое гильбертово пространство 448

5.4. Слабая топология 452

5.5. Слабая* топология 486

5.6. Сопряжённый оператор 532

5.7. Спектр линейного оператора 558

5.8. Компактный оператор 571

5.9. Самосопряжённый оператор 594

Заключение 616

Литература 617

Предисловие

Учебное пособие представляет собой курс лекций по функциональному анализу, читаемых автором студентам третьего курса факультета управления и прикладной математики МФТИ. Принятая в МФТИ программа годового курса функционального анализа накладывает довольно жёсткие ограничения на объём теоретического материала. Именно поэтому данная книга совсем не претендует на максимальную полноту и большую общность изложения теории функционального анализа. Изучение представленного в пособии материала предполагает у читателя знания основ математического анализа и линейной алгебры в рамках принятой в МФТИ программы, изучаемой студентами на первых двух курсах. Все сформулированные утверждения и теоремы полностью доказаны, и для их понимания не требуется привлечения дополнительной литературы по функциональному анализу. Автор надеется, что эта книга послужит читателю хорошей базой для дальнейшего изучения функционального анализа и его приложений.

Пособие начинается изложением свойств топологических, метрических и бесконечномерных линейных нормированных пространств. Основное внимание уделено изучению полноты, сепарабельности, пополнения и компактности в метрических пространствах, а также свойств линейных непрерывных операторов в бесконечномерных линейных нормированных пространствах. В небольшом объёме рассматриваются и топологические пространства. Обсуждается аксиоматика топологических пространств, а также взаимосвязь секвенциальных и топологических определений различных понятий функционального анализа (например, замкнутость и компактность множеств, непрерывность отображений). Подробно рассматриваются слабая и слабая* топологии в линейных нормированных пространствах. Отдельная глава посвящена изложению теории меры и интеграла Лебега и связанных с ними лебеговых пространств. В данной главе используется материал по теории меры и интеграла Лебега из книги У. Рудина “Основы математического анализа” [4]. Проведено сравнение известных студентам понятий измеримости множества по Жордану и интегрируемости функции по Риману соответственно с новыми понятиями измеримости множества и интегрируемости функции по Лебегу. Подробно рассмотрены линейные нормированные пространства $\mathbb{L}_p$. Исследована их полнота и доказан критерий вполне ограниченности их подмножеств.

Следует отметить, что изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров, контрпримеров и задач, помогающих усвоению основных идей курса. Практически ко всем теоремам приведены примеры, поясняющие различные условия и ограничения, которые встречаются в формулировках этих теорем. Рассматриваемые примеры и задачи могут быть весьма полезны при обсуждении соответствующих разделов функционального анализа со студентами на семинарах. Некоторые из таких примеров были предложены самими студентами, что отмечено в тексте пособия. Автор выражает этим студентам свою глубокую благодарность.

Также хотелось бы выразить свою искреннюю признательность доценту кафедры высшей математики МФТИ С.П. Коновалову, чьи лекции и семинары по функциональному анализу оказали огромное влияние на автора пособия, и профессору кафедры высшей математики МФТИ Б.И. Голубову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Введение

Учебное пособие представляет собой годовой курс лекций по функциональному анализу и состоит из пяти больших глав. С материалом первых трёх глав студенты знакомятся в осеннем семестре, а двух последних — в весеннем.

Первая глава посвящена аксиоматике топологических и метрических пространств и обсуждению понятий сходимости последовательностей, замкнутости множеств, непрерывности отображений в топологических и метрических пространствах. Основное внимание здесь уделено свойствам полноты и сепарабельности метрических пространств. Доказаны критерий полноты метрического пространства — принцип вложенных шаров и теорема Бэра о непредставимости полного метрического пространства счётным объединением своих нигде не плотных подмножеств. Определено пополнение неполного метрического пространства и доказана теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. В качестве важного прикладного результата рассмотрен принцип сжимающих отображений Банаха. Применение этого принципа проиллюстрировано доказательством с его помощью теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во второй главе рассматриваются компактные подмножества топологических и метрических пространств. В топологических пространствах основное внимание уделено обсуждению взаимосвязи счётной и секвенциальной компактности множеств. Доказан критерий компактности множества метрического пространства — эквивалентность компактности множества его полноте и вполне ограниченности, а также его секвенциальной компактности. Применение этого критерия проиллюстрировано в доказательстве важной прикладной теоремы Арцела—Асколи о компактности множества в метрическом пространстве непрерывных функций с равномерной метрикой.

В первых трёх параграфах третьей главы рассматриваются линейные нормированные и гильбертовы пространства. Основными результатами здесь являются теоремы об эквивалентности норм в конечномерном линейном нормированном пространстве, о некомпактности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве, о проекции точки на выпуклое замкнутое множество, о представлении гильбертова пространства в виде прямой суммы замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. В небольшом объёме обсуждаются полные счётные системы и счётные базисы в линейных нормированных пространствах.

В двух последних параграфах третьей главы рассматриваются линейные непрерывные (ограниченные) операторы в линейных нормированных пространствах. Приведены многочисленные примеры вычисления норм линейных операторов. Обсуждаются важные достаточные условия ограниченности линейного оператора, связанные с конечномерностью области определения или области значений оператора и замкнутости его ядра. Основными результатами являются теоремы о полноте пространства линейных ограниченных операторов, об ограниченности поточечно ограниченной последовательности линейных непрерывных операторов (теорема Банаха—Штейнгауза), об открытом отображении и об обратном операторе (теоремы Банаха).

Четвёртая глава целиком посвящена изложению теории меры и интеграла Лебега. Здесь используется материал по теории меры и интеграла Лебега из книги У. Рудина "Основы математического анализа" [4]. Основными результатами являются теоремы о счётной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега и теоремы о предельном переходе — Б. Леви о монотонной сходимости, Фату и Лебега об ограниченной сходимости, теорема Римана об осцилляции. Обсуждается взаимосвязь сходимости последовательности измеримых функций по мере, почти всюду и в среднем. Подробно рассмотрены Лебеговы пространства $\mathbb{L}_p$. Доказана их полнота и критерий Рисса—Колмогорова о вполне ограниченном подмножесве в $\mathbb{L}_p$. В небольшом объёме обсуждается мера и интеграл Лебега—Стилтьеса на примере монотонной функции скачков и дифференцируемой монотонной функции с ограниченной производной.

Последняя пятая глава посвящена изучению различных вопросов, связанных с понятием сопряжённого пространства для линейного нормированного пространства. Это прежде всего теорема Хана—Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала, теорема об отделимости выпуклых непересекающихся множеств и теорема Рисса—Фреше о структуре сопряжённого гильбертова пространства. Достаточно подробно обсуждаются слабая и слабая* топологии. В частности, показано, что любой слабо* непрерывный линейный функционал над сопряжённым пространством порождается вектором исходного пространства. Основными результатами здесь являются теоремы Мазура о слабой замкнутости замкнутого выпуклого множества, Банаха—Алаоглу о слабой* компактности шара в сопряжённом пространстве, Банаха—Тихонова о слабо сходящейся подпоследовательности ограниченной последовательности в рефлексивном сепарабельном пространстве. Доказан важный прикладной результат о существовании метрической проекции точки на выпуклое замкнутое подмножество рефлексивного сепарабельного пространства.

В теории спектра линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве показана непустота и компактность спектра и проведена классификация его компонент на точечную, непрерывную и остаточную части. Основными результатами здесь являются теоремы о спектральном радиусе и об отображении спектра многочленом. Для компактных операторов в банаховых пространствах доказана теорема Фредгольма и показана структура их спектра. Наконец, для компактных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве обсуждается важная теорема Гильберта—Шмидта и её приложения для вычисления резольвенты.

Глава 1

Топологические и метрические пространства

1.1. Топологические пространства

Определение 1.1.1. *Пусть X — некоторое множество. Семейство τ подмножеств множества X называется топологией, если выполнены следующие свойства:*

1) $X \in \tau$ и $\varnothing \in \tau$,

2) для любого семейства подмножеств

$$\left\{ U_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\} \subset \tau$$

(здесь $\mathcal{A}$ — произвольное множество индексов) выполнено вложение

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau,$$

3) для любого конечного семейства подмножеств

$$\left\{ U_k \;\middle|\; k \in \overline{1, N} \right\} \subset \tau$$

(здесь N — произвольное натуральное число) выполнено вложение

$$\bigcap_{k=1}^{N} U_k \in \tau.$$

Множество X с введённой в нём топологией τ называется топологическим пространством и обозначается (X, τ).

Определение 1.1.2. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Любое множество $U \in \tau$ называется τ-открытым (или просто открытым) в топологическом пространстве (X, τ). Топология τ называется семейством открытых подмножеств множества X.*

Определение 1.1.3. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Для любого элемента $x \in X$ окрестностью x называется произвольное τ-открытое множество, содержащее x. Для элемента $x \in X$ его окрестность $U \in \tau$ будем обозначать $U(x)$.*

Пример 1.1.4. Пусть X — произвольное множество. Самой слабой топологией в X является семейство $\tau_{\text{слаб.}}$, состоящее всего из двух подмножеств — X и $\varnothing$. По пункту 1 определения 1.1.1 любая топология τ в X содержит $\tau_{\text{слаб.}}$. Самой сильной топологией в X является семейство $\tau_{\text{сильн.}}$, состоящее из всех подмножеств множества X. Очевидно, что любая топология τ в X содержится в $\tau_{\text{сильн.}}$. ▲

Утверждение 1.1.5. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $G \subset X$. Тогда*

$$G \in \tau \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in G \quad \exists U(x) \in \tau : \quad U(x) \subset G.$$

Доказательство. Если $G \in \tau$, то для любого $x \in G$ очевидно само множество G является искомой τ–окрестностью x, содержащейся в G. Обратно, если любое $x \in G$ обладает τ–окрестностью $U(x) \subset G$, то получаем:

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} U(x) \subset G,$$

то есть

$$G = \bigcup_{x \in G} U(x) \in \tau$$

в силу пункта 2 определения 1.1.1. ■

Определение 1.1.6. *Пусть X — произвольное множество, τ_1 и τ_2 — две топологии в X. Говорят, что τ_1 слабее τ_2 (или τ_2 сильнее τ_1), если любое τ_1-открытое множество из X является τ_2-открытым, т. е. $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Пример 1.1.7. Не всякие две топологии из множества X сравнимы между собой. Рассмотрим $X = \mathbb{R}$ и определим в $\mathbb{R}$ две топологии τ' и τ''. Семейство τ' содержит всякое подмножество $\mathbb{R}$, каждая точка которого входит в него вместе с некоторым содержащим её интервалом. Семейство τ'' состоит из всех подмножеств $\mathbb{R}$, каждое из которых (если оно не пусто) отличается от $\mathbb{R}$ не более чем на счётное множество. То есть непустое $U \in \tau''$ тогда и только тогда, когда существует пустое, конечное или счётное множество $S \subset \mathbb{R}$, такое, что $U = \mathbb{R} \backslash S$.

Покажем, что τ' и τ'' являются топологиями в $\mathbb{R}$. Очевидно, что множества $\mathbb{R}$ и $\varnothing$ содержатся в τ' и τ''. Для любого семейства подмножеств

$$\{\ U_\alpha \quad \big| \quad \alpha \in \mathcal{A}\ \} \subset \tau'$$

требуется проверить вложение

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau'.$$

Для любого $x \in V$ существует $\alpha(x) \in \mathcal{A}$, такой, что $x \in U_{\alpha(x)}$. Так как $U_{\alpha(x)} \in \tau'$, то x входит в $U_{\alpha(x)}$ вместе с некоторым интервалом I, т. е. $x \in I \subset U_{\alpha(x)} \subset V$. Следовательно, любая точка V содержится в нем вместе с некоторым содержащим её интервалом, а значит, по определению $V \in \tau'$. Для любого конечного семейства подмножеств

$$\left\{ U_k \quad \middle| \quad k \in \overline{1, N} \right\} \subset \tau'$$

требуется проверить вложение

$$W = \bigcap_{k=1}^{N} U_k \in \tau'.$$

Для любого $x \in W$ и любого $k \in \overline{1, N}$ справедливо вложение $x \in$ $\in U_k$. По определению τ' для любого $k \in \overline{1, N}$ существует интервал $I_k = (a_k, b_k)$, содержащий x и содержащийся в U_k, т. е.

$$a_k < x < b_k \quad \text{и} \quad I_k \subset U_k.$$

Определим числа

$$a = \max_{k \in \overline{1, N}} a_k \quad \text{и} \quad b = \min_{k \in \overline{1, N}} b_k.$$

Тогда $a < x < b$, т. е. интервал $I = (a, b)$ содержит x, и для любого $k \in \overline{1, N}$ выполнены вложения $I \subset I_k \subset U_k$. Следовательно,

$$x \in I \subset W,$$

т. е. любая точка W содержится в нем вместе с некоторым содержащим её интервалом, что означает по определению $W \in \tau'$.

Для любого семейства подмножеств

$$\{ U_\alpha \quad | \quad \alpha \in \mathcal{A} \} \subset \tau''$$

требуется проверить вложение

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau''.$$

Если $V = \varnothing \in \tau''$, то доказывать нечего. Поэтому считаем, что $V \neq \neq \varnothing$, т. е. существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, такое, что $U_{\alpha_0} \neq \varnothing$. Получаем, что

$$\mathbb{R} \backslash V = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\mathbb{R} \backslash U_\alpha \right) \subset \mathbb{R} \backslash U_{\alpha_0}$$

не более чем счётное множество по определению τ''. Следовательно, V отличается от $\mathbb{R}$ не более чем на счётное множество, т. е. по определению принадлежит τ''. Для любого конечного семейства подмножеств

$$\left\{ \, U_k \quad \middle| \quad k \in \overline{1, N} \, \right\} \subset \tau''$$

требуется проверить вложение $W = \bigcap\limits_{k=1}^{N} U_k \in \tau''$. Если $W = \varnothing \in \tau''$, то доказывать нечего. Поэтому считаем, что $W \neq \varnothing$. Тогда $U_k \neq \varnothing$ для любого $k \in \overline{1, N}$, а значит, $\mathbb{R} \backslash U_k$ не более чем счётно. Получаем, что

$$\mathbb{R} \backslash W = \bigcup_{k=1}^{N} \left(\mathbb{R} \backslash U_k \right)$$

не более чем счётное множество, так как является конечным объединением не более чем счётных множеств.

Итак, доказано, что τ' и τ'' являются топологиями в $\mathbb{R}$. Покажем, что они несравнимы, т. е. существует $U \in \tau'$, такое, что $U \notin \tau''$, и существует $V \in \tau''$, такое, что $V \notin \tau'$. Пусть $U = (0, 1) \in \tau'$. Тогда $U \neq \varnothing$ и $\mathbb{R} \backslash U$ более чем счётно. Следовательно, $U \notin \tau''$. Пусть

$$V = \mathbb{R} \backslash \left\{ \tfrac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Тогда $V \in \tau''$. Однако для $x_0 = 0 \in V$ и для любого интервала $I = = (a, b)$, содержащего x_0 (т. е. $a < 0 < b$), существует $N \in \mathbb{N}$, такой, что $0 < \frac{1}{n} < b$ для любого $n > N$. Следовательно, $I \not\subset V$. Таким образом, ни один интервал, в который входит точка $x_0 = 0 \in V$, не содержится в V. Следовательно, $V \notin \tau'$. ▲

Определение 1.1.8. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится по топологии τ к элементу $x \in X$, если для любой окрестности $U(x)$ элемента x существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено вложение $x_n \in U(x)$. Сходимость x_n к x по топологии τ будем обозначать $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$.*

Пример 1.1.9. Пусть X — произвольное множество. Если ввести в X самую слабую топологию $\tau_{\text{слаб.}}$ (см. пример 1.1.4), то окажется, что любая последовательность из X сходится, причём к любой точке. Действительно, в слабейшей топологии любая точка из X имеет только одну окрестность — само множество X, где и находятся все элементы любой последовательности. Если же в X рассмотреть самую сильную топологию $\tau_{\text{сильн.}}$ (см. пример 1.1.4), то сходящейся по $\tau_{\text{сильн.}}$ будет только та последовательность, которая является стационарной с некоторого номера. Действительно, если $x_n \overset{\tau_{\text{сильн.}}}{\to} x$ при $n \to \infty$, то для $U(x) = \{x\} \in \tau_{\text{сильн.}}$ — окрестности точки x, состоящей лишь из самой точки x, найдется номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in U(x)$, т. е. $x_n = x$. Аналогичная ситуация имеет место в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau'')$ (описание топологии τ'' в $\mathbb{R}$ см. в примере 1.1.7). Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ сходится к $x \in \mathbb{R}$ по топологии τ'' (т. е. $x_n \overset{\tau''}{\to} x$ при $n \to \infty$). Рассмотрим окрестность точки x — множество

$$U(x) = \mathbb{R} \backslash \left\{ x_n \;\middle|\; x_n \neq x,\ n \in \mathbb{N} \right\} \in \tau''.$$

Так как существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено вложение $x_n \in U(x)$, то получаем $x_n = x$ для любого $n > N$. ▲

Определение 1.1.10. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $F \subset X$ назовём τ-замкнутым (или просто замкнутым), если его дополнение является τ-открытым, т. е.*

$$F^c = X \backslash F \in \tau.$$

Определение 1.1.11. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка x называется точкой прикосновения множества $S \subset X$, если для любой окрестности $U(x)$ точки x выполнено*

$$U(x) \cap S \neq \varnothing.$$

Утверждение 1.1.12. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда множество $F \subset X$ является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои точки прикосновения.*

Доказательство. Пусть множество F замкнуто в (X, τ), а $x \in X$ — его точка прикосновения. Предположим, что $x \notin F$. Тогда

$$x \in F^c \in \tau,$$

т. е. множество F^c является окрестностью точки x. Тогда по определению 1.1.11 множества F^c и F должны пересекаться, что невозможно. Получили противоречие. Следовательно, $x \in F$. Обратно, пусть F содержит все свои точки прикосновения. Рассмотрим произвольную точку $x \in F^c$. Так как $x \notin F$, то она не является точкой прикосновения множества F (все точки прикосновения множества F принадлежат ему по условию). Следовательно, существует окрестность $U(x)$ точки x, не пересекающаяся с F. Это означает, что

$$U(x) \subset F^c.$$

Следовательно, в силу утверждения 1.1.5, $F^c \in \tau$, то есть множество F является замкнутым. ∎

Утверждение 1.1.13. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда*

1) для любого семейства $\left\{ F_\alpha \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ замкнутых подмножеств множества X множество $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ является замкнутым;

2) для любого конечного семейства $\left\{F_k\right\}_{k=1}^{N}$ замкнутых подмножеств множества X множество $\bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$ является замкнутым.

Иными словами, произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых подмножеств из X является замкнутым в (X, τ).

Доказательство. 1) Рассмотрим

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(F_\alpha\right)^c.$$

Так как $\left(F_\alpha\right)^c \in \tau$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$, то по определению 1.1.1 получаем

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(F_\alpha\right)^c \in \tau.$$

Следовательно, $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ замкнуто в (X, τ).

2) Далее, аналогично рассмотрим

$$\left(\bigcup_{k=1}^{N} F_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^{N} \left(F_k\right)^c.$$

Так как $(F_k)^c \in \tau$ для любого $k \in \overline{1,N}$, то по определению 1.1.1 получаем

$$\bigcap_{k=1}^{N} (F_k)^c \in \tau.$$

Следовательно, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$ замкнуто в (X,τ). ■

Определение 1.1.14. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется секвенциальной точкой прикосновения множества $S \subset X$, если существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$.*

Определение 1.1.15. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство. Множество $S \subset X$ называется секвенциально замкнутым, если оно содержит все свои секвенциальные точки прикосновения.*

Утверждение 1.1.16. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство, а множество $F \subset X$ является замкнутым. Тогда F является секвенциально замкнутым.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную секвенциальную точку прикосновения x множества F. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любой окрестности $U(x)$ точки x существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in U(x)$. Так как $x_n \in F$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то для любого $n > N$ выполнено $x_n \in U(x) \cap F$, т. е. $U(x) \cap F \neq \varnothing$. Следовательно, x является точкой прикосновения множества F, и по утверждению 1.1.12 в силу замкнутости F получаем $x \in F$. Таким образом, любая секвенциальная точка прикосновения F принадлежит F, т. е. F является секвенциально замкнутым. ■

Пример 1.1.17. Приведём пример топологического пространства и его секвенциально замкнутого подмножества, которое не является замкнутым. Рассмотрим топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau'')$ (см. пример 1.1.7) и множество $S = [0,1] \subset \mathbb{R}$ — отрезок вещественной оси с концами в нуле и единице. Множество S не является замкнутым в $(\mathbb{R}, \tau'')$, так как оно более чем счётно, т. е. его дополнение $S^c = \mathbb{R} \backslash S$ отличается от $\mathbb{R}$ на более чем счётное множество S, и поэтому $S^c \notin \tau''$. Тем не менее множество S является секвенциально замкнутым в $(\mathbb{R}, \tau'')$. Действительно, возьмём произвольную секвенциальную точку прикосновения x множества S. Тогда

$$\exists\, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S : \quad x_n \xrightarrow{\tau''} x.$$

Как показано в примере 1.1.9, существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n = x$. Следовательно, $x \in S$, что и требовалось. ▲

Определение 1.1.18. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство всех секвенциально замкнутых подмножеств из (X, τ) будем обозначать $F_{\text{секв.}}(\tau)$.*

Утверждение 1.1.19. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда выполнены следующие свойства:*

1) *$\varnothing \in F_{\text{секв.}}(\tau)$ и $X \in F_{\text{секв.}}(\tau)$,*
2) *Для любого множества $M \subset F_{\text{секв.}}(\tau)$ выполнено*
$$\bigcap_{S \in M} S \in F_{\text{секв.}}(\tau),$$
3) *Для любого конечного набора множеств $S_1, \ldots, S_N \in F_{\text{секв.}}(\tau)$ выполнено*
$$\bigcup_{k=1}^{N} S_k \in F_{\text{секв.}}(\tau).$$

Доказательство. Свойство 1 очевидно. Если $x \in X$ является секвенциальной точкой прикосновения множества

$$S_M = \bigcap_{S \in M} S,$$

то существует последовательность $x_n \in S_M$, сходящаяся к x по топологии τ. Вложение $x_n \in S_M$ означает, что $x_n \in S$ для любого множества $S \in M$, которое секвенциально замкнуто. Следовательно, $x \in S$ для любого $S \in M$, то есть $x \in S_M$. Таким образом, множество S_M секвенциально замкнуто, и свойство 2 доказано.

Пусть теперь $x \in X$ является секвенциальной точкой прикосновения множества

$$S_0 = \bigcup_{k=1}^{N} S_k.$$

Тогда существует последовательность $x_n \in S_0$, сходящаяся к x по топологии τ. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $k_n \in \overline{1,N}$, такое, что $x_n \in S_{k_n}$. Так как последовательность натуральных чисел k_n принимает конечное число значений от 1 до N, то существует стационарная подпоследовательность $k_{n_m} = k_0 \in \overline{1,N}$. Следовательно, $x_{n_m} \in S_{k_0}$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Так как x_{n_m} также сходится к x по топологии τ, то, в силу секвенциальной замкнутости множества S_{k_0}, получаем вложение $x \in S_{k_0} \subset S_0$. Таким образом, множество S_0 секвенциально замкнуто, и свойство 3 доказано. ■

Утверждение 1.1.20. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда семейство*

$$\tau_{\text{секв.}} = \{\, S^c \;:\; S \in F_{\text{секв.}}(\tau) \,\}$$

является топологией в X, которая не слабее топологии τ, то есть

$$\tau \subset \tau_{\text{секв.}}.$$

Доказательство. По свойству 1 утверждения 1.1.19 получаем $X \in F_{\text{секв.}}(\tau)$ влечёт $\varnothing = X^c \in \tau_{\text{секв.}}$ и $\varnothing \in F_{\text{секв.}}(\tau)$ влечёт $\varnothing^c = X \in \tau_{\text{секв.}}$. Далее, для любого множества $M \subset \tau_{\text{секв.}}$, в силу свойства 2 утверждения 1.1.19, получаем

$$\bigcup_{V \in M} V = \bigcup_{V \in M} \left(V^c\right)^c = \Bigg(\underbrace{\bigcap_{V \in M} V^c}_{\in F_{\text{секв.}}(\tau)}\Bigg)^c \in \tau_{\text{секв.}}.$$

Наконец, для любого конечного набора множеств $V_1, \ldots, V_n \in \tau_{\text{секв.}}$, в силу свойства 3 утверждения 1.1.19, получаем

$$\bigcap_{k=1}^{N} V_k = \bigcap_{k=1}^{N} \left(V_k^c\right)^c = \Bigg(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{N} V_k^c}_{\in F_{\text{секв.}}(\tau)}\Bigg)^c \in \tau_{\text{секв.}}.$$

Следовательно, по определению 1.1.1, семейство $\tau_{\text{секв.}}$ является топологией в X.

Теперь рассмотрим произвольное множество $V \in \tau$. Тогда, по определению 1.1.10, множество V^c является τ–замкнутым. Тогда, по утверждению 1.1.16, справедливо вложение $V_c \in F_{\text{секв.}}(\tau)$, то есть $V \in \tau_{\text{секв.}}$. Таким образом, доказано вложение $\tau \subset \tau_{\text{секв.}}$. ■

Утверждение 1.1.21. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство, последовательность $x_n \in X$ и элемент $x \in X$. Тогда*

$$x_n \xrightarrow{\tau} x \quad \Leftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{\tau_{\text{секв.}}} x.$$

Доказательство. Так как по утверждению 1.1.20 справедливо вложение $\tau \subset \tau_{\text{секв.}}$, то, очевидно, выполнено

$$x_n \xrightarrow{\tau_{\text{секв.}}} x \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow{\tau} x.$$

Предположим, рассуждая от противного, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$, но $x_n \overset{\tau_{\text{секв.}}}{\not\to} x$. Тогда существует окрестность $U(x) \in \tau_{\text{секв.}}$ элемента x и подпоследовательность x_{n_m}, такая, что

$$x_{n_m} \notin U(x) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $x_{n_m} \in \big(U(x)\big)^c \in F_{\text{секв.}}(\tau)$. Так как $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x$, то элемент x является секвенциальной точкой прикосновения множества $\big(U(x)\big)^c$. В силу $\big(U(x)\big)^c \in F_{\text{секв.}}(\tau)$ получаем вложение $x \in \big(U(x)\big)^c$, которое невозможно, так как $x \in U(x)$. Полученное противоречие означает, что $x_n \xrightarrow{\tau_{\text{секв.}}} x$. ■

Следствие 1.1.22. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда S секвенциально замкнуто в (X,τ) если и только если оно секвенциально замкнуто в $(X,\tau_{\text{секв.}})$, то есть*

$$S \in F_{\text{секв.}}(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad S \in F_{\text{секв.}}(\tau_{\text{секв.}}).$$

Доказательство. Сразу следует из утверждения 1.1.21. ■

Утверждение 1.1.23. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство. Тогда в топологическом пространстве $(X,\tau_{\text{секв.}})$ множество S является топологически замкнутым если и только если оно секвенциально замкнуто.*

Доказательство. По утверждению 1.1.16, топологическая замкнутость множества влечёт его секвенциальную замкнутость.

Пусть множество $S \in F_{\text{секв.}}(\tau_{\text{секв.}})$, то есть секвенциально замкнуто в топологическом пространстве $(X,\tau_{\text{секв.}})$. Тогда, в силу следствия 1.1.22, оно секвенциально замкнуто и в (X,τ), то есть $S \in$ $\in F_{\text{секв.}}(\tau)$. Но тогда, по определению топологии $\tau_{\text{секв.}}$ (см. утверждению 1.1.20), получаем вложение $S^c \in \tau_{\text{секв.}}$, то есть множество S является $\tau_{\text{секв.}}$–замкнутым. ■

Пример 1.1.24. Рассмотрим пространство $(\mathbb{R}, \tau'')$ из примера 1.1.7. В примере 1.1.9 показано, что, последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ сходится к $x \in \mathbb{R}$ по топологии τ'' если и только если сущестует $N \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n = x$ для всех $n \geqslant N$. Следовательно, любое множество $S \subset \mathbb{R}$ является секвенциально замкнутым в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau'')$. Это означает, что соответствующая топология $\tau''_{\text{секв.}}$ состоит из всех подмножества $\mathbb{R}$, то есть $\tau''_{\text{секв.}} = \tau_{\text{сильн.}}$. ▲

Определение 1.1.25. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Замыканием множества $S \subset X$ (которое будем обозначать $[S]_\tau$) называется пересечение всех замкнутых множеств из X, содержащих S, т. е.*

$$[S]_\tau = \bigcap_{\left\{ F : \substack{S \subset F \\ F^c \in \tau} \right\}} F.$$

Заметим, что замыкание множества S топологического пространства (X, τ) является замкнутым множеством, так как

$$[S]_\tau^c = \bigcup_{\left\{ F : \substack{S \subset F \\ F^c \in \tau} \right\}} F^c \in \tau.$$

Утверждение 1.1.26. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда замыкание множества S совпадает с множеством всех точек прикосновения множества S, т. е.*

$$[S]_\tau = \left\{ x \in X \quad \middle| \quad \forall\, U(x) \in \tau \text{ выполнено } U(x) \cap S \neq \varnothing \right\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in [S]_\tau$. Предположим, что x не является точкой прикосновения множества S, т. е. существует окрестность $U(x)$ точки x, такая, что $U(x) \cap S = \varnothing$. Следовательно,

$$S \subset \big(U(x)\big)^c.$$

Так как множество $U(x)$ открыто, то его дополнение $\big(U(x)\big)^c$ по определению является замкнутым. Так как x принадлежит замыканию S, то по определению 1.1.25 выполнено вложение

$$x \in \big(U(x)\big)^c.$$

Следовательно, x лежит как в окрестности $U(x)$, так и в её дополнении, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает, что замыкание множества S содержится в множестве всех точек прикосновения множества S.

Рассмотрим теперь произвольную точку прикосновения x множества S. Предположим, что $x \notin [S]_\tau$. Тогда существует замкнутое множество $F \supset S$, такое, что $x \notin F$. Следовательно, $x \in F^c$, а $F^c \in \tau$ в силу замкнутости F. Поэтому F^c является окрестностью точки x. Но любая окрестность точки x, как точки прикосновения множества S, должна пересекаться с S по определению 1.1.11. Однако,

$$S \cap F^c \subset F \cap F^c = \varnothing,$$

т. е. S не пересекается с F^c. Полученное противоречие доказывает, что множество всех точек прикосновения множества S содержится в замыкании множества S. ■

Определение 1.1.27. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Секвенциальным замыканием множества $S \subset X$ (которое будем обозначать $[S]_{\text{секв.}}$) называется множество всех секвенциальных точек прикосновения множества S, т. е.*

$$[S]_{\text{секв.}} = \left\{ x \in X \quad \middle| \quad \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S : \; x_n \xrightarrow{\tau} x \text{ при } n \to \infty \right\}.$$

Утверждение 1.1.28. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда*

$$[S]_{\text{секв.}} \subset [S]_{\tau_{\text{секв.}}} \subset [S]_\tau.$$

Доказательство. Так как в силу утверждения 1.1.20 топология τ слабее топологии $\tau_{\text{секв.}}$, то по определению 1.1.25 сразу получае вложение

$$[S]_{\tau_{\text{секв.}}} \subset [S]_\tau.$$

Пусть произвольная точка $x \in [S]_{\text{секв.}}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$. Рассмотрим произвольное множество $M \in F_{\text{секв.}}(\tau)$, содержащее S. Тогда

$$x_n \in M \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow{\tau} x \quad \Rightarrow \quad x \in M.$$

Следовательно, точка x принадлежит любому секвенциально замкнутому множеству, содержащему S, то есть принадлежит $[S]_{\tau_{\text{секв.}}}$. Таким образом, вложение $[S]_{\text{секв.}} \subset [S]_{\tau_{\text{секв.}}}$ доказано. ■

Пример 1.1.29. Покажем на примере, что замыкание множества в топологическом пространстве может не совпадать с его секвенциальным замыканием. Рассмотрим топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau'')$ (см. пример 1.1.7). В примере 1.1.17 показано, что множество $S = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ является секвенциально замкнутым и не является замкнутым. Следовательно, $S = [S]_{\text{секв.}} \neq [S]_{\tau''}$. Найдем замыкание множества S. По определению τ'' любое непустое замкнутое множество из $(\mathbb{R}, \tau'')$, не совпадающее с $\mathbb{R}$, является не более чем счётным. Следовательно, оно не может содержать несчётное множество S. Таким образом, единственным замкнутым множеством из $(\mathbb{R}, \tau'')$, содержащим S, является $\mathbb{R}$. Поэтому $[S]_{\tau''} = \mathbb{R}$. ▲

Определение 1.1.30. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется непрерывным, если для любого $x_0 \in X_1$ и любой окрестности $U\big(f(x_0)\big) \in \tau_2$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0, такая, что для любого $x \in V(x_0)$ выполнено $f(x) \in U\big(f(x_0)\big)$, т. е.*

$$f\big(V(x_0)\big) \subset U\big(f(x_0)\big).$$

Определение 1.1.31. *Пусть X_1 и X_2 — множества, отображение $f\colon X_1 \to X_2$. Прообразом произвольного множества $S \subset X_2$ под действием отображения f называется множество*

$$f^{-1}(S) = \left\{\, x \in X_1 \quad \middle| \quad f(x) \in S \,\right\}.$$

Утверждение 1.1.32. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства, отображение $f\colon X_1 \to X_2$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) f является непрерывным отображением;

2) для любого τ_2-открытого множества $G \subset X_2$ его прообраз $f^{-1}(G)$ является τ_1-открытым;

3) для любого τ_2-замкнутого множества $F \subset X_2$ его прообраз $f^{-1}(F)$ является τ_1-замкнутым.

Доказательство. Покажем, что условие 1 эквивалентно условию 2. Пусть выполнено условие 1, т. е. f является непрерывным отображением. Для любого множества $G \in \tau_2$ рассмотрим произвольную точку его прообраза $x \in f^{-1}(G)$. Так как $f(x) \in G$, то G является окрестностью точки $f(x)$. Следовательно, в силу непрерывности отображения f существует окрестность $U(x) \in \tau_1$ точки x, такая, что $f\big(U(x)\big) \subset G$, т. е. по определению 1.1.31 выполнено вложение $U(x) \subset f^{-1}(G)$. Получаем

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U(x) \subset f^{-1}(G).$$

Таким образом,

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U(x).$$

Значит, прообраз множества G под действием f представляет собой объединение τ_1-открытых множеств. Значит, по определению 1.1.1 прообраз $f^{-1}(G)$ является τ_1-открытым.

Пусть теперь выполнено условие 2. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in X_1$ и окрестность $U\left(f(x_0)\right) \in \tau_2$ её образа под действием f. В силу условия 2 множество $V = f^{-1}\left(U\left(f(x_0)\right)\right)$ является τ_1-открытым и содержит точку x_0. Следовательно, множество $V \in \tau_1$ является окрестностью точки x_0, причём по построению

$$f(V) \subset U\left(f(x_0)\right).$$

Таким образом, отображение f является непрерывным.

Покажем, что условия 2 и 3 эквивалентны. Прежде всего заметим, что для любого множества $S \subset X_2$ справедливо равенство

$$f^{-1}\left(S^c\right) = \left(f^{-1}(S)\right)^c.$$

Действительно, вложение $x \in f^{-1}\left(S^c\right)$ равносильно $f(x) \notin S$, т. е. $x \notin f^{-1}(S)$, что означает справедливость вложения $x \in \Big(f^{-1}(S)\Big)^c$. Пусть выполнено условие 2. Тогда для любого τ_2-замкнутого множества $F \subset X_2$ получаем

$$\left(f^{-1}(F_2)\right)^c = f^{-1}(F_2^c) \in \tau_1,$$

так как множество $F_2^c \in \tau_2$. Следовательно, множество $f^{-1}(F_2)$ является τ_1-замкнутым, т. е. справедливо условие 3. Пусть теперь выполнено условие 3. Тогда для любого τ_2-открытого множества $G \subset X_2$ получаем

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left((G^c)^c\right) = \left(f^{-1}(G^c)\right)^c \in \tau_1,$$

так как по условию 3 τ_2-замкнутость множества G^c влечёт τ_1-замкнутость множества $f^{-1}(G^c)$. ■

Определение 1.1.33. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется секвенциально непрерывным, если для любого $x_0 \in X_1$ и любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, сходящейся по топологии τ_1 к точке x_0, последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2$ сходится по топологии τ_2 к точке $f(x_0)$, т. е.*

$$x_n \xrightarrow{\tau_1} x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{\tau_2} f(x_0).$$

Утверждение 1.1.34. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства, отображение $f\colon X_1 \to X_2$ является непрерывным. Тогда отображение f является секвенциально непрерывным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in X_1$ и произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, сходящуюся по топологии τ_1 к точке x_0. Рассмотрим произвольную окрестность $U(f(x_0)) \in \tau_2$ точки $f(x_0)$. В силу непрерывности отображения f, по определению 1.1.30, существует окрестность $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0, такая, что

$$f\Big(V(x_0)\Big) \subset U(f(x_0)).$$

Так как $x_n \overset{\tau_1}{\to} x_0$ при $n \to \infty$, то существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in V(x_0)$. Следовательно, для любого $n > N$ справедливо вложение

$$f(x_n) \in U(f(x_0)).$$

Это означает, что

$$f(x_n) \overset{\tau_2}{\to} f(x_0) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, отображение f является секвенциально непрерывным. ■

Пример 1.1.35. Приведём пример секвенциально непрерывного отображения одного топологического пространства на другое, которое не является непрерывным. Рассмотрим тождественное отображение $f\colon (\mathbb{R}, \tau'') \to (\mathbb{R}, \tau')$, где топологии τ'' и τ' в $\mathbb{R}$ описаны в примере 1.1.7. По определению тождественного отображения, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ сходится к $x_0 \in \mathbb{R}$ по топологии τ''. Тогда, как показано в примере 1.1.9, существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n = x_0$. Следовательно, $f(x_n) = f(x_0)$ для любого $n > N$, что означает сходимость $f(x_n) \overset{\tau'}{\to} f(x_0)$. Следовательно, отображение f является секвенциально непрерывным. Покажем, что отображение f не является непрерывным. Действительно, рассмотрим произвольный $x \in \mathbb{R}$ и любой интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ конечной длины, содержащий x, т. е. интервал (a, b) является окрестностью точки x в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau')$. Любая окрестность $V(x) \in \tau''$ точки x в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau'')$ отличается от $\mathbb{R}$ не более чем на счётное множество. Следовательно, $V(x) \not\subset (a, b)$ и $f(V(x)) = V(x) \not\subset (a, b)$.

В силу произвольности окрестности $V(x) \in \tau''$ получаем, что f не является непрерывным. ▲

Выясним, при каких условиях на топологию секвенциально замкнутое подмножество топологического пространства является замкнутым, секвенциальное замыкание подмножества совпадает с его замыканием, а секвенциально непрерывное отображение топологического пространства является непрерывным.

Определение 1.1.36. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, точка $x \in X$. Семейство окрестностей*

$$\{\, U_\alpha(x) \quad \big| \quad \alpha \in \mathcal{A} \,\}$$

точки x назовём локальной базой точки x, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну окрестность этого семейства, т. е. для любой окрестности $V(x)$ точки x существует $\alpha \in \mathcal{A}$, такое, что

$$U_\alpha(x) \subset V(x).$$

Определение 1.1.37. *Будем говорить, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет аксиоме счётности, если любая точка $x \in X$ имеет счётную локальную базу.*

Утверждение 1.1.38. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме счётности, множество $S \subset X$. Тогда любая точка прикосновения множества S является его секвенциальной точкой прикосновения.*

Доказательство. Пусть точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества S. По условию она имеет счётную локальную базу

$$\{\, U_k(x) \,\}_{k=1}^{\infty}.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим

$$V_n(x) = \bigcap_{k=1}^{n} U_k(x).$$

Тогда семейство окрестностей $\{\, V_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ также является локальной базой точки x. Действительно, для любой окрестности $W(x)$ точки x существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$U_n(x) \subset W(x).$$

Так как $V_n(x) \subset U_n(x)$, то $V_n(x) \subset W(x)$, что и требовалось. Так как x является точкой прикосновения множества S, то любая её окрестность пересекается с S. В частности, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in V_n(x) \cap S$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ сходится к точке x. Рассмотрим произвольную окрестность $W(x)$ точки x. Существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $V_N(x) \subset W(x)$. Тогда для любого $n > N$ находим

$$x_n \in V_n(x) \subset V_N(x) \subset W(x).$$

Таким образом, $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$, т. е. точка x является секвенциальной точкой прикосновения. ■

Следствие 1.1.39. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме счётности. Тогда любое секвенциально замкнутое подмножество X является замкнутым, а секвенциальное замыкание любого подмножества X совпадает с его замыканием.*

Доказательство. Пусть множество $F \subset X$ является секвенциально замкнутым, т. е. содержит все свои секвенциальные точки прикосновения. В силу утверждения 1.1.38 любая точка прикосновения F является его секвенциальной точкой прикосновения, а значит, принадлежит F. Следовательно, в силу утверждения 1.1.12 множество F является замкнутым.

Далее рассмотрим произвольное множество $S \subset X$. По утверждению 1.1.28 $[S]_{\text{секв.}} \subset [S]_\tau$. Рассмотрим произвольную $x \in [S]_\tau$. В силу утверждения 1.1.26 x является точкой прикосновения множества S. Следовательно, по утверждению 1.1.38 x является секвенциальной точкой прикосновения S, т. е. по определению 1.1.27 $x \in [S]_{\text{секв.}}$. Таким образом, справедливо вложение $[S]_\tau \subset [S]_{\text{секв.}}$. Следовательно, $[S]_\tau = [S]_{\text{секв.}}$. ■

Следствие 1.1.40. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства, причём пространство (X_1, τ_1) удовлетворяет аксиоме счётности. Тогда любое секвенциально непрерывное отображение $f\colon X_1 \to X_2$ является непрерывным.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что некоторое секвенциально непрерывное отображение $f\colon X_1 \to$ $\to X_2$ не является непрерывным. Тогда существует точка $x_0 \in X_1$ и окрестность $U\left(f(x_0)\right) \in \tau_2$ точки $f(x_0) \in X_2$, такая, что для любой окрестности $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0 выполнено соотношение

$$f\left(V(x_0)\right) \not\subset U\Big(f(x_0)\Big).$$

По условию точка x_0 имеет счётную локальную базу

$$\{\, V_k(x_0)\,\}_{k=1}^{\infty}.$$

Определим для любого $n \in \mathbb{N}$ окрестность

$$W_n(x_0) = \bigcap_{k=1}^{n} V_k(x_0).$$

Тогда семейство $\{\, W_n(x_0)\,\}_{n=1}^{\infty}$ также является локальной базой точки x_0 (это показано в доказательстве утверждения 1.1.38). Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f\left(W_n(x_0)\right) \not\subset U\Big(f(x_0)\Big),$$

то существует $x_n \in W_n(x_0)$, такое, что

$$f(x_n) \notin U\left(f(x_0)\right).$$

Полученная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке x_0. Действительно, для любой окрестности $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0 существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что

$$W_N(x_0) \subset V(x_0).$$

Следовательно, для любого $n > N$ находим

$$x_n \in W_n(x_0) \subset W_N(x_0) \subset V(x_0),$$

т. е. справедливо

$$x_n \xrightarrow{\tau_1} x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Однако по построению $f(x_n) \notin U\left(f(x_0)\right)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$f(x_n) \overset{\tau_2}{\not\to} f(x_0) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Получили противоречие с секвенциальной непрерывностью отображения f. ■

О п р е д е л е н и е 1.1.41. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\beta \subset \tau$ называется базой топологии τ, если любое τ-открытое множество представимо в виде объединения некоторого семейства подмножеств из β, т. е. для любого $G \in \tau$ существует семейство*

$$\left\{ V_\alpha \in \beta \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \right\}$$

(здесь $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов), такое, что

$$G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

П р и м е р 1.1.42. Рассмотрим $(\mathbb{R},\tau')$ — топологическое пространство из примера 1.1.7. Покажем, что базой топологии τ' является семейство β, состоящее из всевозможных интервалов вещественной оси, т. е.

$$\beta = \left\{ (a,b) \subset \mathbb{R} \quad \middle| \quad -\infty < a < b < +\infty \right\}.$$

Действительно, для любого $G \in \tau'$ и любой точки $x \in G$ существует интервал $I(x) \in \beta$, содержащий x и содержащийся в G, т. е.

$$x \in I(x) \subset G.$$

Следовательно,

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} I(x) \subset G \quad \Rightarrow \quad G = \bigcup_{x \in G} I(x).$$

Таким образом, любое множество из τ' представимо в виде объединения интервалов, что и требовалось. ▲

У т в е р ж д е н и е 1.1.43. *Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство β подмножеств множества X было базой некоторой топологии τ в X, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

а) *для любого $x \in X$ существует $V \in \beta$, такое, что $x \in V$, т. е.*

$$X = \bigcup_{V \in \beta} V;$$

б) *для любых множеств $V_1 \in \beta$ и $V_2 \in \beta$ и любого $x \in V_1 \cap V_2$ существует множество $W \in \beta$, такое, что*

$$x \in W \subset V_1 \cap V_2.$$

Доказательство. Пусть τ — некоторая топология в множестве X, а семейство подмножеств β является её базой. Так как по определению топологии $X \in \tau$, то по определению 1.1.41 базы топологии существует семейство подмножеств

$$\left\{ V_\alpha \in \beta \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \right\},$$

такое, что

$$X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

Следовательно, для любого $x \in X$ существует $\alpha(x) \in \mathcal{A}$, такое, что

$$x \in V_{\alpha(x)},$$

т. е. выполнено условие а. Далее, так как по определению $\beta \subset \tau$, то для любых множеств $V_1 \in \beta$ и $V_2 \in \beta$ выполнено вложение $V_1 \cap V_2 \in \tau$. Следовательно, существует семейство подмножеств

$$\left\{ W_\alpha \in \beta \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \right\},$$

такое, что

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha.$$

Поэтому для любого $x \in V_1 \cap V_2$ существует $\alpha(x) \in \mathcal{A}$, такое, что

$$x \in W_{\alpha(x)} \subset V_1 \cap V_2,$$

т. е. выполнено условие б.

Пусть теперь семейство β подмножеств множества X удовлетворяет свойствам а и б. Определим семейство подмножеств τ, состоящее из всевозможных объединений множеств из β, т. е. множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство подмножеств

$$\left\{ V_\alpha \in \beta \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \right\},$$

такое, что

$$G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

Покажем, что τ является топологией в X. Для этого проверим для семейства τ определение 1.1.1.

По условию а, выполнено

$$X = \bigcup_{V \in \beta} V.$$

Следовательно $X \in \tau$. Пустое множество является пустым объединением подмножеств из β (для пустого индексного множества $\mathcal{A} = \varnothing$). Следовательно, $\varnothing \in \tau$. Таким образом, выполнено условие 1 определения 1.1.1.

Далее рассмотрим произвольное семейство

$$\left\{\, G_\alpha \in \tau \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \,\right\}.$$

Покажем, что

$$G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha \in \tau.$$

Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ существуют индексное множество $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ и семейство

$$\left\{\, V_{\tilde{\alpha}} \in \beta \quad \middle| \quad \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_\alpha \,\right\},$$

такие, что

$$G_\alpha = \bigcup_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_\alpha} V_{\tilde{\alpha}}.$$

Следовательно,

$$G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\bigcup_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_\alpha} V_{\tilde{\alpha}} \right),$$

т. е. множество G представлено в виде объединения подмножеств из β, поэтому $G \in \tau$. Таким образом, выполнено условие 2 определения 1.1.1.

Для проверки условия 3 определения 1.1.1 прежде всего покажем, что для любого конечного семейства подмножеств

$$\{\, V_k \,\}_{k=1}^{N} \subset \beta$$

выполнено вложение

$$V_1 \cap \ldots \cap V_N \in \tau.$$

По условию б, для любого $x \in V_1 \cap V_2$ существует $W(x) \in \beta$, такое, что

$$x \in W(x) \subset V_1 \cap V_2.$$

Следовательно,
$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{x\in V_1\cap V_2} \{x\} \subset \bigcup_{x\in V_1\cap V_2} W(x) \subset V_1 \cap V_2,$$
т. е.
$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{x\in V_1\cap V_2} W(x).$$
Значит, множество $V_1 \cap V_2$ представлено в виде объединения элементов β, т. е. по определению $V_1 \cap V_2 \in \tau$. Предположим, рассуждая по индукции, что для $N \geqslant 2$ пересечение произвольных N подмножеств из β принадлежит τ. Рассмотрим произвольное семейство из $N+1$ подмножества
$$\{V_k\}_{k=1}^{N+1} \subset \beta$$
и произвольный элемент
$$x \in V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}.$$
По предположению индукции множество $V_1 \cap \ldots \cap V_N \in \tau$. Следовательно, для $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_N$ существует множество $U(x) \in \beta$, такое, что
$$x \in U(x) \subset V_1 \cap \ldots \cap V_N.$$
Поэтому справедливо вложение $x \in U(x) \cap V_{N+1}$. Тогда существует $W(x) \in \beta$, такое, что
$$x \in W(x) \subset U(x) \cap V_{N+1} \subset V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}.$$
Следовательно, справедливо равенство
$$V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1} = \bigcup_{x\in V_1\cap\ldots\cap V_{N+1}} W(x).$$
Значит, множество $V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}$ представлено в виде объединения элементов β, т. е. по определению $V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1} \in \tau$.

Для окончательной проверки условия 3 определения 1.1.1 рассмотрим конечное семейство подмножеств
$$\{\, G_k \,\}_{k=1}^{N} \subset \tau.$$
Покажем, что
$$G = \bigcap_{k=1}^{N} G_k \in \tau.$$

По условию для любого $k \in \overline{1, N}$ существует индексное множество $\mathcal{A}_k$ и семейство
$$\{ V_{k,\alpha} \in \beta \quad | \quad \alpha \in \mathcal{A}_k \},$$
такое, что
$$G_k = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_k} V_{k,\alpha}.$$
Следовательно, справедливо равенство
$$G = \bigcap_{k=1}^{N} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_k} V_{k,\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}_N} \Big(V_{1,\alpha_1} \cap \ldots \cap V_{N,\alpha_N} \Big).$$
Как было показано выше, множество
$$V_{1,\alpha_1} \cap \ldots \cap V_{N,\alpha_N} \in \tau.$$
Следовательно, множество G представлено в виде объединения элементов семейства τ. Так как свойство 2 определения 1.1.1 для семейства τ уже доказано выше, то получаем вложение $G \in \tau$. ■

Определение 1.1.44. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\sigma \subset \tau$ называется предбазой топологии τ, если совокупность всевозможных конечных пересечений множеств семейства σ образует базу топологии τ.*

Утверждение 1.1.45. *Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство σ подмножеств множества X было предбазой некоторой топологии τ в X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ существовало $V \in \sigma$, такое, что $x \in V$, т. е.*
$$X = \bigcup_{V \in \sigma} V.$$

Доказательство. Пусть τ — некоторая топология в множестве X, а семейство подмножеств σ является её предбазой. Пусть β — база топологии τ, состоящая из всевозможных конечных пересечений множеств из σ. По утверждению 1.1.43 для любого $x \in X$ существует $U \in \beta$, такое, что $x \in U$. Так как множество U представляет собой конечное пересечение множеств из семейства σ, то вложение $x \in U$ означает существование множества $V \in \sigma$, такого, что $x \in V$, что и требовалось.

Обратно, пусть семейство подмножеств σ множества X удовлетворяет условию

$$X = \bigcup_{V \in \sigma} V.$$

Определим семейство β подмножеств множества X, каждое из которых представляет собой конечное пересечение множеств из σ. Проверим для семейства β условия а и б утверждения 1.1.43. Так как по определению $\sigma \subset \beta$, то

$$X = \bigcup_{V \in \sigma} V \subset \bigcup_{U \in \beta} U \subset X, \quad \Rightarrow \quad X = \bigcup_{U \in \beta} U.$$

Следовательно, условие а выполнено. Далее для любых множеств U_1 и U_2 из β по определению получаем $U_1 \cap U_2 \in \beta$, так как и U_1, и U_2 являются конечным пересечением подходящих множеств из σ, а значит, и $U_1 \cap U_2$ тоже представляет собой конечное пересечение множеств семейства σ. Следовательно, для любого $x \in U_1 \cap U_2$ существует $W = U_1 \cap U_2 \in \beta$, такое, что $x \in W = U_1 \cap U_2$. Следовательно, условие б выполнено. Таким образом, по утверждению 1.1.43, β является базой некоторой топологии τ в X. Значит, σ является предбазой этой топологии. ■

Пример 1.1.46. Рассмотрим множество X всех вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0, 1]$, т. е. множество X состоит из всех функций вида $x\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Введём в множестве X топологию τ, такую, что сходимость по этой топологии последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ к функции $y \in X$ (т. е. $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \to \infty$) эквивалентна поточечной сходимости $x_n(t) \to y(t)$ при $n \to \infty$ при каждом $t \in [0, 1]$. Рассмотрим для любых $x \in X$, $t \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$V(x, t, \varepsilon) = \left\{\, z \in X \quad \middle| \quad |x(t) - z(t)| < \varepsilon \,\right\}.$$

Объявим систему множеств

$$\sigma = \left\{\, V(x, t, \varepsilon) \;\middle|\; x \in X,\ t \in [0, 1],\ \varepsilon > 0 \right\}$$

предбазой искомой топологии. Так как для любого $x \in X$ справедливо вложение $x \in V(x, t, \varepsilon)$ при любых $t \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$, то семейство σ удовлетворяет условию утверждения 1.1.45. Следовательно, семейство σ действительно является предбазой некоторой топологии τ в множестве X. Тогда базой β топологии τ является совокупность всевозможных конечных пересечений множеств из σ. Таким образом, множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство множеств

$$\left\{ W_\alpha \in \beta \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\},$$

такое, что

$$G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha.$$

При этом вложение $W_\alpha \in \beta$ означает, что существует натуральное число N_α, а для любого номера $n \in \overline{1, N_\alpha}$ существуют функции $x_{n,\alpha} \in X$, числа $t_{n,\alpha} \in [0,1]$ и $\varepsilon_{n,\alpha} > 0$, такие, что

$$W_\alpha = \bigcap_{n=1}^{N_\alpha} V\left(x_{n,\alpha}, t_{n,\alpha}, \varepsilon_{n,\alpha}\right).$$

Заметим, что для любого $x \in W_\alpha$ существует положительное число

$$\varepsilon = \min_{n \in \overline{1, N_\alpha}} \left\{ \varepsilon_{n,\alpha} - \left| x(t_{n,\alpha}) - x_{n,\alpha}(t_{n,\alpha}) \right| \right\},$$

такое, что

$$x \in \bigcap_{n=1}^{N_\alpha} V\left(x, t_{n,\alpha}, \varepsilon\right) \subset W_\alpha.$$

Следовательно, множество $G \in \tau$ если и только если для любого $x \in G$ существует число $\varepsilon > 0$ и числа $t_1, \ldots, t_N \in [0,1]$, такие, что

$$\bigcap_{n=1}^{N} V\left(x, t_n, \varepsilon\right) \subset G.$$

Таким образом, семейство

$$\left\{ \bigcap_{n=1}^{N} V\left(x, t_n, \varepsilon\right) \;\middle|\; x \in X, \;\; N \in \mathbb{N}, \;\; t_1, \ldots, t_N \in [0,1], \;\; \varepsilon > 0 \right\}$$

также является базой топологии τ.

Покажем, что определённая таким образом топология τ является топологией поточечной сходимости в X. Пусть последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

сходится к $y \in X$ по определённой топологии τ. Тогда для любой окрестности $U(y) \in \tau$ точки $y \in X$ существует номер $N = N\big(U(y)\big)$, такой, что для всех натуральных $n \geqslant N$ выполнено вложение $x_n \in \in U(y)$. Возьмём для любых чисел $t \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ окрестность точки $y \in X$ из предбазы σ, т. е.

$$U(y) = V(y, t, \varepsilon).$$

Тогда для всех $n \geqslant N\big(U(y)\big)$ получаем

$$x_n \in V(y, t, \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad |x_n(t) - y(t)| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y поточечно на отрезке $[0,1]$.

Обратно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к $y \in \in X$ поточечно на отрезке $[0,1]$. Покажем, что в этом случае последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет сходиться к y по топологии τ. Рассмотрим произвольную окрестность $U(y) \in \tau$ точки $y \in X$. Тогда существует положительное число ε, натуральное M, а для любых $m \in \overline{1, M}$ существуют числа $t_m \in [0,1]$, такие, что

$$y \in \bigcap_{m=1}^{M} V(y, t_m, \varepsilon) \subset U(y).$$

Так как по условию для любого $m \in \overline{1, M}$ выполнено $x_n(t_m) \to y(t_m)$ при $n \to \infty$, то существует $N_m \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geqslant N_m$ выполнено неравенство

$$|x_n(t_m) - y(t_m)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_n \in V(y, t_m, \varepsilon).$$

Определим натуральное число

$$N\big(U(y)\big) = \max_{m=\overline{1,M}} N_m.$$

Тогда для любого $n \geqslant N\big(U(y)\big)$ получаем вложение

$$x_n \in \bigcap_{m=1}^{M} V(y, t_m, \varepsilon) \subset U(y),$$

т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y по топологии τ.

Построенная топология τ обладает следующим очень важным свойством — это слабейшая топология в X, относительно которой для любого $t \in [0,1]$ является непрерывным отображение $F_t \colon X \to \mathbb{R}$ вида

$$F_t(x) = x(t), \quad x \in X.$$

Покажем это. По определению τ, для любого $t \in [0,1]$, числа $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ получаем

$$\forall\, y \in V(x,t,\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |F_t(y) - F_t(x)| = |y(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Следовательно, отображение $F_t\colon (X,\tau) \to \mathbb{R}$ является непрерывным для каждого $t \in [0,1]$. Предположим, что $\tilde\tau$ — некоторая топология в X, такая, что для каждого $t \in [0,1]$ отображение $F_t\colon (X,\tilde\tau) \to \mathbb{R}$ непрерывно. Зафиксируем произвольно $x \in X$, $t \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Для любого $y \in V(x,t,\varepsilon)$ определим число $\delta = \varepsilon - |x(t) - y(t)| > 0$. Тогда, в силу $\tilde\tau$–непрерывности отображения F_t в точке y, существует $\tilde\tau$–окрестность $U(y) \in \tilde\tau$ точки y, такая, что

$$\begin{aligned}
&\forall\, z \in U(y) \quad \Rightarrow \quad |F_t(z) - F_t(y)| = |z(t) - y(t)| < \delta \quad \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \quad |z(t) - x(t)| \leqslant |z(t) - y(t)| + |y(t) - x(t)| < \delta + |y(t) - x(t)| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно, для любого $z \in U(y)$ выполнено $z \in V(x,t,\varepsilon)$, то есть

$$U(y) \subset V(x,t,\varepsilon) \quad \forall\, y \in V(x,t,\varepsilon).$$

Таким образом, в силу утверждения 1.1.5, имеет место вложение

$$V(t,x,\varepsilon) \in \tilde\tau \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Поэтому

$$\sigma \subset \tilde\tau \quad \Rightarrow \quad \beta \subset \tilde\tau \quad \Rightarrow \quad \tau \subset \tilde\tau.$$

Приведём пример подмножества $S \subset X$, секвенциальное замыкание которого по описанной топологии поточечной сходимости τ не совпадает с его топологическим замыканием, т. е.

$$[S]_{\text{секв.}} \neq [S]_\tau.$$

Определим множество S следующим образом. Функция $x \in S$, если существует разбиение $T = \{t_k\}_{k=0}^N$ отрезка $[0,1]$ вида

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1,$$

такое, что график x на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ образуют боковые ребра равнобедренного треугольника с основанием $[t_{k-1}, t_k]$ и высотой, равной единице. Указанное разбиение назовем разбиением, порождающим функцию x. Условно можно назвать S множеством “пилообразных” функций. Покажем, что функция y, равная тождественно нулю на отрезке $[0,1]$, принадлежит топологическому и не принадлежит секвенциальному замыканию S в топологическом пространстве (X,τ). Действительно, рассмотрим произвольную окрестность $U(y)\in\tau$ функции y. Тогда существует положительное число ε, натуральное M, и для любого $m\in\overline{1,M}$ числа $t_m\in[0,1]$, такие, что

$$y\in\bigcap_{m=1}^{M}V(y,t_m,\varepsilon)\subset U(y).$$

Построим "пилооообразную" функцию $x\in S$, порождающее разбиение которой содержит точки t_m для всех $m\in\overline{1,M}$. Тогда имеем равенства $x(t_m)=0=y(t_m)$ для всех $m\in\overline{1,M}$. Следовательно, справедливо вложение

$$x\in\bigcap_{m=1}^{M}V(y,t_m,\varepsilon)\subset U(y).$$

Таким образом в силу утверждения 1.1.26 $y\in[S]_\tau$. Тем не менее y не является поточечным пределом никакой последовательности из S, т. е. ни одна последовательность из S не сходится к y по топологии τ. Действительно, предположим, рассуждая от противного, что существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$, такая, что $x_n\stackrel{\tau}{\to}y$ при $n\to\infty$, т. е.

$$x_n(t)\to y(t)\quad\text{при}\quad n\to\infty\quad\text{для всех}\quad t\in[0,1].$$

Тогда, так как функции x_n непрерывны на отрезке $[0,1]$ и равномерно ограничены ($0\leqslant x_n(t)\leqslant 1$ при всех $t\in[0,1]$ и $n\in\mathbb{N}$), то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,dt=\int_0^1\lim_{n\to\infty}x_n(t)\,dt=\int_0^1 y(t)\,dt. \qquad (*)$$

Обоснование возможности занесения предела под интеграл в равенстве $(*)$ даётся сразу после рассматриваемого примера.

Таким образом, мы получаем противоречие:

$$\frac{1}{2}=\int_0^1 x_n(t)\,dt\stackrel{n\to\infty}{\to}\int_0^1 y(t)\,dt=0.$$

Следовательно, $y\notin[S]_{\text{секв.}}$, что и требовалось. ▲

Обоснование равенства предела от интеграла и интеграла от предела в соотношении $(*)$ основано на следующей теореме:

Теорема 1.1.47. *Пусть последовательность функций*

$$f_n\colon [0,1] \to [0,R]$$

поточечно сходится к нулевой функции на отрезке $[0,1]$, *и для любого номера* n *функция* f_n *интегрируема по Риману на отрезке* $[0,1]$. *Тогда*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

Эта теорема является следствием известной теоремы Лебега об ограниченной сходимости, формулировка и доказательство которой будут даны в главе 4. Однако в самой теореме 1.1.47 используется только интеграл Римана и поточечная сходимость на отрезке к нулю интегрируемых по Риману функций. Поэтому было бы интересно иметь доказательство этой теоремы, основанное лишь на теории интеграла Римана и измеримых по Жордану множеств. Приведённое ниже именно такое доказательство этой теоремы предложил студент 277 группы МФТИ А. Крошнин.

Доказательство. Предположим противное:

$$I_n = \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Тогда существует $\varepsilon \in (0,R)$ и подпоследовательность номеров n_k, такие, что

$$I_{n_k} > \varepsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем номер k и обозначим $g_k = f_{n_k}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим равномерное разбиение P_n отрезка $[0,1]$ вида

$$P_n = \left\{\, x_i(n) = \frac{i}{n} \,\right\}_{i=0}^{n}.$$

Обозначим $\Delta_i(n) = [x_i(n), x_{i+1}(n)]$ для $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Определим

$$m_i(n) = \inf_{x\in\Delta_i(n)} g_k(x), \quad i \in \overline{0, n-1}.$$

По условию $m_i(n) \geqslant 0$. Нижняя сумма Дарбу функции g_k для разбиения P_n имеет вид

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_i(n)}{n}.$$

Тогда при $n \to \infty$ имеем $s_n \to I_{n_k}$. Следовательно, существует номер N, такой, что

$$s_N > \varepsilon.$$

Определим число ℓ — количество номеров $i \in \overline{0, N-1}$, для которых имеет место неравенство

$$m_i(n) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда получаем:

$$\varepsilon < s_N \leqslant R\frac{\ell}{N} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{N-\ell}{N} = \frac{\varepsilon}{2} + \left(R - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\ell}{N},$$

откуда находим

$$\frac{\ell}{N} > \frac{\varepsilon}{2R-\varepsilon} = C.$$

Рассмотрим множество

$$E_k = \left\{\, x \in [0,1] \ :\ g_k(x) > \frac{\varepsilon}{2} \,\right\}.$$

Тогда E_k содержит ℓ отрезков разбиения P_N, откуда следует, что его нижняя мера Жордана

$$\mu_*(E_k) \geqslant \frac{\ell}{N} > C.$$

Так как $g_k(x) \to 0$ при $k \to \infty$ для каждого $x \in [0,1]$, то

$$\forall\, x \in [0,1] \quad \exists\, N(x) \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geqslant N(x) \quad g_k(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим множество

$$A_k = \left\{\, x \in [0,1] \ :\ N(x) > k \,\right\}.$$

Очевидны вложения:

$$A_k \subset A_m \quad \text{при} \quad m \leqslant k,$$

и

$$E_k \subset A_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\mu_*(A_k) \geqslant \mu_*(E_k) > C.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует замкнутое клеточное множество $B_k \subset A_k$, такое, что

$$\mu_* A_k - \mu B_k < \frac{C}{2^{k+1}}.$$

Рассмотрим замкнутое клеточное множество

$$D_k = \bigcap_{i=1}^{k} B_i.$$

Имеем:

$$\mu_* A_1 - \mu D_1 = \mu_* A_1 - \mu B_1 < \frac{C}{2^{1+1}} = C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{1+1}}\right).$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для $k \in \mathbb{N}$ и всех $m \in \overline{1,k}$ имеет место неравенство

$$\mu_* A_m - \mu D_m < C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

Тогда в силу вложений $B_{k+1} \subset A_{k+1} \subset A_k$ получаем:

$$\mu(B_{k+1} \backslash D_k) = \mu(B_{k+1} \cup D_k) - \mu(D_k) \leqslant \mu_*(A_k) - \mu(D_k) < C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

и

$$\begin{aligned}\mu_*(A_{k+1}) - \mu(D_{k+1}) = \mu_*(A_{k+1}) - \mu(B_{k+1} \cap D_k) = \\ = \mu_*(A_{k+1}) - \mu(B_{k+1}) + \mu(B_{k+1} \backslash D_k) < \\ < \frac{C}{2^{k+2}} + C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+2}}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ доказано неравенство

$$\mu_* A_k - \mu D_k < C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Отсюда находим, что

$$\mu(D_k) > \mu_* A_k - C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) > \frac{C}{2}.$$

Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенсто $D_k \neq \varnothing$. Так как $D_{k+1} \subset D_k \subset [0,1]$, и множество D_k замкнуто, то существует

$$z \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \subset [0,1].$$

Но тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем $z \in D_k \subset A_k$, откуда для любого k следует неравенство $N(z) > k$, что в силу $N(z) \in \mathbb{N}$, очевидно, невозможно. Получили противоречие. Следовательно, теорема доказана. ■

Следствие 1.1.48. *Пусть функции $f_n, f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману на отрезке $[0,1]$, и выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Пусть существует $M > 0$, такое, что

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|, \quad x \in [0,1].$$

Тогда $h_n\colon [0,1] \to [0,2M]$, интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$, и

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Следовательно, по теореме 1.1.47 получаем:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\, dx = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\left|\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx - \int\limits_0^1 f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_0^1 h_n(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ■

Пример 1.1.49. В топологическом пространстве X, состоящем из всех вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0,1]$, с топологией τ поточечной сходимости, определённой в примере 1.1.46, приведём пример множества, секвенциальное замыкание которого не будет секвенциально замкнутым. Этот пример предложил студент 272 группы МФТИ И. Першин. Построим множество $S \subset X$, такое, что его первое секвенциальное замыкание не совпадает со вторым, то есть

$$[S]_{\text{секв.}} \subsetneq \big[[S]_{\text{секв.}}\big]_{\text{секв.}}.$$

Тогда секвенциальное замыкание $[S]_{\text{секв.}}$ множества S в пространстве (x,τ) не будет секвенциально замкнутым. Для этого рассмотрим множество M, состоящее из всех неубывающих бесконечно больших последовательностей натуральных чисел, то есть

$$\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n_k \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad n_k \leqslant n_{k+1} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \\ \lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty. \end{cases}$$

Как известно, множество M имеет мощность континуума. Рассмотрим биекцию

$$\psi\colon [0,1] \to M.$$

Тогда для любого $x \in [0,1]$ имеем последовательность

$$\psi(x) = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in M, \quad \text{т. е.} \quad \psi_k(x) \in \mathbb{N}, \quad \psi_k(x) \leqslant \psi_{k+1}(x) \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

и выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = +\infty,$$

а для любой последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in M$ существует единственный $x \in [0,1]$, такой, что

$$\psi_k(x) = n_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место вложение $\frac{1}{\psi_k} \in X$, причём

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\psi_k(x)} = 0 \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\psi_k} \xrightarrow{\tau} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим монжество

$$S = \left\{\ f_{k,m} = \frac{1}{\psi_k} + \frac{k^2}{\psi_m} \quad \middle| \quad k, m \in \mathbb{N} \right\} \subset X.$$

Так как для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$f_{k,m} \xrightarrow{\tau} \frac{1}{\psi_k} \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то получаем вложение

$$\frac{1}{\psi_k} \in [S]_{\text{секв.}} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Тем самым, доказано вложение

$$S \cup \left\{\ \frac{1}{\psi_k} \quad \middle| \quad k \in \mathbb{N} \right\} \subset [S]_{\text{секв.}}.$$

Покажем, что имеет место и обратное вложение. Действительно, рассмотрим произвольную функцию

$$g \in [S]_{\text{секв.}}.$$

Тогда существуют последовательности натуральных чисел k_s и m_s, такие, что

$$f_{k_s,m_s} \xrightarrow{\tau} g \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Если последовательность k_s ограничена, то она имеет стационарную подпоследовательность

$$k_{s_r} \equiv k_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеем

$$f_{k_0,m_{s_r}} \xrightarrow{\tau} g \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Если последовательность m_{s_r} ограничена, то она, в свою очередь, также имеет стационарную подпоследовательность

$$m_{s_{r_\ell}} \equiv m_0 \qquad \forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

Но тогда немедленно получаем равенство

$$g = f_{k_0, m_0} \in S.$$

Если же последовательность m_{s_r} не ограничена, то она имеет строго возрастающую подпоследовательность

$$n_\ell = m_{s_{r_\ell}} \to \infty \quad \text{при} \quad \ell \to \infty.$$

Тогда

$$\frac{1}{\psi_{n_\ell}} \xrightarrow{\tau} 0 \quad \text{при} \quad \ell \to \infty,$$

откуда получаем, что

$$f_{k_0, n_\ell} \xrightarrow{\tau} \frac{1}{\psi_{k_0}} \quad \text{при} \quad \ell \to \infty.$$

Следовательно, выполнено равенство

$$g = \frac{1}{\psi_{k_0}}.$$

Теперь предположим, что последоватеьность k_s неограничена. Тогда она имеет строго возрастающую подпоследовательность

$$\kappa_r = k_{s_r} \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\psi_{\kappa_r}(x)} = 0 \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

Если последовательность m_{s_r} ограничена, то, выделяя из неё стационарную подпоследовательность $m_{s_{r_\ell}} \equiv m_0$, получим для любого аргумента $x \in [0,1]$, что

$$g(x) = \lim_{\ell\to\infty} \left(\frac{1}{\psi_{\kappa_{r_\ell}}(x)} + \frac{\kappa_{r_\ell}^2}{\psi_{m_0}(x)} \right) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{\kappa_{r_\ell}^2}{\psi_{m_0}(x)} = +\infty,$$

что противоречит вложениею $g(x) \in \mathbb{R}$ при всех $x \in [0,1]$. Если же последовательность m_{s_r} неограничена, то выделим из неё строго возрастающую подпоследовательность

$$n_\ell = m_{s_{r_\ell}} \to \infty \quad \text{при} \quad \ell \to \infty.$$

Рассмотрим последовательность $q = \{q_j\}_{j=1}^{\infty} \in M$, такую, что

$$q_{n_\ell} = \kappa_{r_\ell} \qquad \forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

Определим аргумент $x_q \in [0,1]$ по формуле $q = \psi(x_q)$, то есть

$$q_j = \psi_j(x_q) \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$q_{n_\ell} = \kappa_{r_\ell} = \psi_{n_\ell}(x_q) \qquad \forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

Тогда получаем, что

$$g(x_q) = \lim_{\ell\to\infty} \left(\frac{1}{\psi_{\kappa_{r_\ell}}(x_q)} + \frac{\kappa_{r_\ell}^2}{\psi_{n_\ell}(x_q)} \right) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{\kappa_{r_\ell}^2}{\kappa_{r_\ell}} = +\infty,$$

то есть противоречие с вложением $g(x_q) \in \mathbb{R}$.

Таким образом, рассмотрев все возможные ситуации, мы доказали вложение

$$g \in S \cup \left\{ \frac{1}{\psi_k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$[S]_{\text{секв.}} = S \cup \left\{ \frac{1}{\psi_k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Видим, что тождественно нулевая функция не принадлежит $[S]_{\text{секв.}}$:

$$0 \notin S \cup \left\{ \frac{1}{\psi_k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} = [S]_{\text{секв.}}.$$

Однако последовательность $\frac{1}{\psi_k} \in [S]_{\text{секв.}}$ такова, что

$$\frac{1}{\psi_k} \xrightarrow{\tau} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то есть имеет место вложение

$$0 \in \big[[S]_{\text{секв.}}\big]_{\text{секв.}}.$$

Таким образом, тождественно нулевая функция принадлежит второму и не принадлежит первому секвенциальному замыканию множества S. Следовательно, секвенциальное замыкание множества S в пространстве (X,τ) секвенциально незамкнуто. ▲

1.2. Метрические пространства

О п р е д е л е н и е 1.2.1. *Пусть X — некоторое множество. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой в множестве X, если выполнены следующие свойства:*

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ для всех $x \in X$ и $y \in X$, причём $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x \in X$ и $y \in X$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$ для всех $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Множество X с введённой в нём метрикой ρ называется метрическим пространством (X, ρ).

О п р е д е л е н и е 1.2.2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытым шаром с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ называется множество*

$$O_R(x) = \Big\{\, y \in X \quad \Big| \quad \rho(x, y) < R \,\Big\}.$$

У т в е р ж д е н и е 1.2.3. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Пусть β_ρ — семейство всех открытых шаров множества X, т. е.*

$$\beta_\rho = \big\{\, O_R(x) \quad \big| \quad x \in X, \quad R > 0 \,\big\}.$$

Тогда семейство β_ρ является базой некоторой топологии в множестве X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим для семейства β_ρ условия а и б утверждения 1.1.43. Для любого $x \in X$ и числа $R > 0$ выполнено вложение $x \in O_R(x)$. Следовательно, условие а выполнено. Для произвольных точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и чисел $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ рассмотрим произвольный элемент

$$x \in O_{R_1}(x_1) \cap O_{R_2}(x_2).$$

Покажем, что существует $R > 0$, такое, что

$$O_R(x) \subset O_{R_1}(x_1) \cap O_{R_2}(x_2).$$

Определим число

$$R = \min\big\{R_1 - \rho(x_1, x)\,,\; R_2 - \rho(x_2, x)\big\} > 0.$$

Тогда для любого $y \in O_R(x)$ получаем

$$\rho(x_k, y) \leqslant \rho(x_k, x) + \rho(x, y) < \rho(x_k, x) + R \leqslant R_k,$$

т. е. $y \in O_{R_k}(x_k)$ для $k = \overline{1,2}$, что и требовалось. Следовательно, условие б выполнено. Таким образом, семейство β_ρ действительно является базой некоторой топологии в множестве X. ■

Определение 1.2.4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Топология в множестве X, базой для которой служит семейство β_ρ, называется метрической топологией τ_ρ в множестве X.*

Утверждение 1.2.5. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда множество $G \subset X$ является τ_ρ-открытым (т. е. $G \in \tau_\rho$) тогда и только тогда, когда для любого $x \in G$ существует $R > 0$, такое, что $O_R(x) \subset G$.*

Доказательство. Пусть множество $G \in \tau_\rho$. Тогда по определению метрической топологии τ_ρ множество G представляет собой некоторое объединение элементов базы β_ρ — открытых шаров. Следовательно, для любого $x \in G$ существуют $z \in X$ и число $r > 0$, такие, что

$$x \in O_r(z) \subset G.$$

Определим число $R = r - \rho(z, x) > 0$. Тогда для любого $y \in O_R(x)$ имеем

$$\rho(y, z) \leqslant \rho(x, z) + \rho(x, y) < \rho(x, z) + R = r,$$

т. е. $y \in O_r(z)$. Следовательно,

$$O_R(x) \subset O_r(z) \subset G,$$

что и требовалось.

Пусть теперь для любого $x \in G$ существует число $R_x > 0$, такое, что $O_{R_x}(x) \subset G$. Тогда

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} O_{R_x}(x) \subset G, \quad \text{т. е.} \quad G = \bigcup_{x \in G} O_{R_x}(x).$$

Следовательно, по определению 1.2.4 множество $G \in \tau_\rho$, т. е. является τ_ρ-открытым. ■

Утверждение 1.2.6. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к элементу $x \in X$ при $n \to \infty$ по метрической топологии τ_ρ тогда и только тогда, когда расстояние от x_n до x стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть*

$$x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x \quad \Leftrightarrow \quad \rho(x_n, x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x$ при $n \to \infty$. Тогда для любой окрестности $U(x) \in \tau_\rho$ точки x существует номер $N = N\big(U(x)\big)$, такой, что для любого $n > N$ выполнено вложение $x_n \in U(x)$. Рассмотрим для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U(x) = O_\varepsilon(x)$ и определим номер $N_\varepsilon = N\big(O_\varepsilon(x)\big)$. Тогда для любого $n > N_\varepsilon$ выполнено

$$x_n \in O_\varepsilon(x), \quad \text{т. е.} \quad \rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

Следовательно, $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$x_n \in O_\varepsilon(x).$$

Рассмотрим произвольную окрестность $U(x) \in \tau_\rho$ точки x. В силу утверждения 1.2.5 существует число $R > 0$, такое, что $O_R(x) \subset U(x)$. Следовательно, для любого $n > N(R)$ получаем

$$x_n \in O_R(x) \subset U(x),$$

что и требовалось. ■

Утверждение 1.2.7. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда метрическая топология τ_ρ удовлетворяет аксиоме счётности.*

Доказательство. Определим для любого элемента $x \in X$ счётное семейство окрестностей

$$\Big\{ O_{\frac{1}{n}}(x) \Big\}_{n=1}^{\infty}.$$

Покажем, что это семейство является локальной базой для точки x. Рассмотрим произвольную окрестность $U(x) \in \tau_\rho$ точки x. В силу утверждения 1.2.5 существует число $R > 0$, такое, что $O_R(x) \subset U(x)$. Следовательно, для любого номера $n > \frac{1}{R}$ получаем

$$O_{\frac{1}{n}}(x) \subset O_R(x) \subset U(x),$$

что и требовалось для проверки определения 1.1.36. ■

Следствие 1.2.8. *В метрическом пространстве (X, ρ) всякое секвенциально замкнутое множество является τ_ρ-замкнутым, секвенциальное замыкание любого множества совпадает с его τ_ρ-замыканием, и любое секвенциально непрерывное отображение из (X, ρ) в произвольное топологическое пространство является непрерывным топологически.*

Доказательство. Следует из следствий 1.1.39, 1.1.40. ■

Замечание 1.2.9. Рассмотрим на множестве X всех вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0,1]$, топологию τ поточечной сходимости, определённую в примере 1.1.46. В этом же примере построено множество $S \subset X$, такое, что $[S]_\tau \neq [S]_{\text{секв.}}$. Следовательно, топология τ не порождается метрикой, т. е. не метризуема. По этой же причине не метризуема топология τ'' на $\mathbb{R}$, определённая в примере 1.1.7, так как в примере 1.1.17 предъявлено секвенциально замкнутое подмножество топологического пространства $(\mathbb{R}, \tau'')$, не являющееся τ''-замкнутым. □

Замечание 1.2.10. Рассмотрим в произвольном множестве X сильнейшую топологию $\tau_{\text{сильн.}}$, состоящую из всех подмножеств множества X. Эта топология порождается метрикой ρ вида

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Действительно, для любого множества $G \subset X$ и любой точки $x \in G$ получаем $O_1(x) = \{x\} \subset G$. Следовательно, в силу утверждения 1.2.5 справедливо вложение $G \in \tau_\rho$. Таким образом, любое подмножество из X является τ_ρ-открытым. Поэтому $\tau_{\text{сильн.}} = \tau_\rho$. □

Пример 1.2.11. Пусть X — множество всех числовых последовательностей, т. е. любой элемент $x \in X$ является числовой последовательностью вида $x = \{x(k)\}_{k=1}^\infty$, где $x(k) \in \mathbb{R}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Введём в множестве X метрику ρ, сходимость по которой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ к элементу $y \in X$ равносильна поточечной сходимости, т. е. свойство $\rho(x_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$ равносильно выполнению для любого $k \in \mathbb{N}$ соотношения $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$. Определим метрику на X следующим образом:

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{-k}\,|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Покажем прежде всего, что для определённой функции ρ выполнены аксиомы метрики из определения 1.2.1. Условия 1 и 2 этого определения, очевидно, выполнены. Проверим условие 3 (неравенство треугольника). Заметим, что функция

$$f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

возрастает при $t \geqslant 0$, так как функция $\frac{1}{1+t}$ убывает при $t \geqslant 0$. Так как для любых $x, y, z \in X$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|x(k) - y(k)| \leqslant |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|,$$

то получаем

$$\frac{|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \leqslant \frac{|x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|}{1 + |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} + \frac{|y(k) - z(k)|}{1 + |y(k) - z(k)|}\,.$$

Домножив последнее неравенство на 2^{-k} и просуммировав по $k \in \mathbb{N}$, получим требуемое неравенство треугольника для рассматриваемой функции ρ.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ поточечно сходится к $y \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y) = 0.$$

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$. Определим для любого $\varepsilon > 0$ номер $M = M(\varepsilon)$, такой, что $2^{-M} < \varepsilon$. Тогда для любых $x, y \in X$ выполнено

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{2^{-k}\,|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \leqslant \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-M} < \varepsilon.$$

По условию поточечной сходимости последовательности x_n к элементу y для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(k, \varepsilon)$, такой, что для всех $n > N(k, \varepsilon)$ выполнено неравенство

$$|x_n(k) - y(k)| < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $n > \max\big\{N(1, \varepsilon), \ldots, N(M(\varepsilon), \varepsilon)\big\}$ получаем

$$\rho(x_n, y) \leqslant \sum_{k=1}^{M(\varepsilon)} \frac{2^{-k}\,|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} + \varepsilon < \sum_{k=1}^{M(\varepsilon)} 2^{-k}\varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Пусть теперь $\rho(x_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$\rho(x_n, y) < \varepsilon.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < 2^k \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Следовательно, при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ для любого $n > N\left(2^{-k}\varepsilon\right)$ получаем неравенство

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < \varepsilon, \qquad \text{т. е.} \qquad |x_n(k) - y(k)| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

что означает $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$. ▲

Пример 1.2.12. Приведём ещё один пример секвенциально непрерывного отображения, не являющегося непрерывным топологически. Рассмотрим множество X, состоящее из всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с вещественными значениями, лежащими на отрезке $[0,1]$. Введем в X топологию τ поточечной сходимости, описанную в примере 1.1.46. Определим также метрическое пространство (X, ρ), где метрика

$$\rho(x, y) = \int\limits_0^1 \Big| x(t) - y(t) \Big| \, dt.$$

Покажем, что функция ρ удовлетворяет аксиомам метрики из определения 1.2.1. Очевидно, что $\rho(x,y) \geqslant 0$ и $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для любых $x, y \in X$. Если $\rho(x,y) = 0$ и при этом существует $t_0 \in [0,1]$, такое, что

$$|x(t_0) - y(t_0)| > 0,$$

то в силу непрерывности функций x и y в точке t_0 существует $\delta \in \in (0,1)$, такое, что для любого $t \in [0,1]$ вида $|t - t_0| \leqslant \delta$ выполнено неравенство

$$|x(t) - y(t)| > \frac{|x(x_0) - y(t_0)|}{2}.$$

Следовательно, в силу известных свойств интеграла Римана получаем

$$\rho(x,y) \geqslant \int\limits_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0,1]} |x(t) - y(t)| \geqslant \tfrac{\delta}{2} |x(t_0) - y(t_0)| > 0,$$

т. е. получили противоречие. Далее для любых $x, y, z \in X$ и любого $t \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |y(t) - z(t)|.$$

Интегрируя это неравенство по $t \in [0,1]$, получим неравенство треугольника для ρ.

Рассмотрим тождественное отображение

$$I\colon (X,\tau) \to (X,\rho),$$

т. е. $I(x) = x$ для любого $x \in X$. Покажем, что I секвенциально непрерывно. Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится поточечно к $y \in X$ на $[0,1]$. Так как $0 \leqslant x_n(t) \leqslant 1$, то

$$|x_n(t) - y(t)| \leqslant 2 \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Также $|x_n(t)-y(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $t \in [0,1]$. Следовательно, по теореме 1.1.47, получаем:

$$\rho\bigl(I(x_n), I(y)\bigr) = \int\limits_0^1 \bigl|x_n(t) - y(t)\bigr|\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Покажем, что I не является топологически непрерывным отображением. Рассмотрим множество $S \subset X$ “пилообразных” функций, описанное в примере 1.1.46. Как показано в примере 1.1.46, тождественно нулевая на $[0,1]$ функция y_0 является точкой прикосновения множества S. Тогда получаем, что для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и для любой окрестности $U(y_0) \in \tau$ функции y_0 существует элемент $x_0 \in U(y_0) \cap S$, такой, что

$$\rho\bigl(I(x_0), I(y_0)\bigr) = \int\limits_0^1 x_0(t)\, dt = \varepsilon_0.$$

Следовательно, отображение I разрывно в точке y_0, так как образ любой окрестности $U(y_0)$ точки y_0 в топологическом пространстве (X,τ) не содержится в открытом шаре радиуса ε_0 с центром в $I(y_0) = y_0$ в метрическом пространстве (X,ρ). ▲

1.3. Сепарабельные метрические пространства

Определение 1.3.1. *Множество S из метрического пространства (X,ρ) называется всюду плотным в X, если его замыкание совпадает с X, т. е. для любого $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует $y \in S$, такое, что $\rho(x,y) < \varepsilon$.*

Определение 1.3.2. *Метрическое пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное множество.*

Пример 1.3.3. Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ) из примера 1.2.11, состоящее из всех числовых последовательностей, с метрикой поточечной сходимости:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}\,|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Покажем, что это сепарабельное метрическое пространство. Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$S_N = \Big\{\ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad \Big| \quad x(k) = 0 \ \ \forall\, k > N \ \Big\}.$$

Множество S_N состоит из всех числовых последовательностей с рациональными значениями, тривиальными на номерах, больших N. Очевидно, что S_N равномощно $\mathbb{Q}^N$, которое является счётным как конечное декартово произведение счётного множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Определим множество

$$S = \bigcup_{N=1}^{\infty} S_N.$$

Множество S счётно как счётное объединение счётных множеств. Покажем, что S всюду плотно в X, т. е. $[S]_{\tau_\rho} = X$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $x \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Существует номер N_ε, такой, что

$$\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем число $\delta_\varepsilon > 0$, такое, что

$$\left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} 2^{-k}\right) \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $k \in \overline{1, N_\varepsilon}$ существует рациональное число $y(k)$, такое, что

$$|x(k) - y(k)| < \delta_\varepsilon.$$

Полагая $y(k) = 0$ при $k > N_\varepsilon$, получаем элемент

$$y \in S_{N_\varepsilon} \subset S.$$

При этом имеем неравенство

$$\rho(x,y) < \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} 2^{-k}\delta_\varepsilon + \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось.

Заметим, что множество $A \subset X$, состоящее из всех числовых последовательностей с рациональными значениями, тоже, очевидно, является всюду плотным в X. Действительно, для любого элемента $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ можно для каждого номера k определить рациональное число $z(k)$ вида

$$|x(k) - z(k)| < \varepsilon.$$

Таким образом, определён элемент $z \in A$, такой, что

$$\rho(x,z) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon.$$

Однако множество A не является счётным. Покажем это. Предположим, рассуждая от противного, что множество A является счётным. Следовательно, можно взаимно однозначным образом занумеровать все элементы множества A, представив его в виде

$$A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Определим элемент $z \in X$ следующим образом:

$$z(k) = \begin{cases} 0, & a_k(k) \neq 0, \\ 1, & a_k(k) = 0 \end{cases} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, по построению z и определению множества A справедливо вложение $z \in A$. Однако $z \neq a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, так как $z(n) \neq a_n(n)$. Следовательно, $z \notin A$. Получили противоречие. ▲

Утверждение 1.3.4. *Пусть в метрическом пространстве (X,ρ) существует несчётное подмножество A_0 (т. е. бесконечное множество, неравномощное множеству натуральных чисел), для которого найдётся число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любых различных элементов $a, b \in A_0$ выполнено неравенство*

$$\rho(a,b) \geqslant \varepsilon_0.$$

Тогда метрическое пространство (X,ρ) является несепарабельным.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $S \subset X$, всюду плотное в X. Тогда для любого элемента $a \in A_0$ существует элемент $y_a \in S$, такой, что

$$\rho(a, y_a) \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Тогда для любых различных элементов $a, b \in A_0$ получаем неравенство

$$\varepsilon_0 \leqslant \rho(a,b) \leqslant \rho(a, y_a) + \rho(b, y_b) + \rho(y_a, y_b) \leqslant \tfrac{2}{3}\varepsilon_0 + \rho(y_a, y_b).$$

Следовательно,

$$\rho(y_a, y_b) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{3} > 0,$$

т. е. $y_a \neq y_b$. Таким образом, определено инъективное отображение

$$A_0 \ni a \mapsto y_a \in S.$$

Поэтому множество

$$S_0 = \left\{ \, y_a \quad \Big| \quad a \in A_0 \, \right\} \subset S$$

равномощно множеству A_0, т. е. само является несчётным. Следовательно, несчётным является и множество S, так как содержит несчётное подмножество. Таким образом, любое всюду плотное в X множество является несчётным, что означает несепарабельность метрического пространства (X, ρ). ■

Пример 1.3.5. Рассмотрим на множестве X всех числовых последовательностей метрику d равномерной сходимости вида

$$d(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \right) \quad \forall\, x, y \in X.$$

Покажем, что метрическое пространство (X, d) является несепарабельным. Для любого числа α рассмотрим числовую последовательность $x_\alpha(k) = \alpha k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Определим множество

$$A_0 = \left\{ \, x_\alpha \quad \Big| \quad \alpha \in \mathbb{R} \, \right\} \subset X.$$

Ясно, что множество A_0 равномощно вещественной оси и поэтому несчётно. При этом для любых различных чисел α и β имеем

$$d(x_\alpha, x_\beta) \geqslant \lim_{k \to \infty} \left(\frac{|\alpha - \beta|}{\frac{1}{k} + |\alpha - \beta|} \right) = 1 = \varepsilon_0.$$

Следовательно, в силу утверждения 1.3.4 метрическое пространство (X,d) несепарабельно. ▲

П р и м е р 1.3.6. Рассмотрим множество $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных на вещественной оси вещественнозначных функций, имеющих конечные пределы на $+\infty$ и $-\infty$, с метрикой равномерной сходимости вида

$$\rho_c(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - y(t)| \quad \forall\, x, y \in C(\mathbb{R}).$$

Так как непрерывная на $\mathbb{R}$ вещественная функция, имеющая конечные пределы на $\pm\infty$, является ограниченной на $\mathbb{R}$, то

$$\rho_c(x,y) < +\infty \qquad \forall\, x, y \in C(\mathbb{R}).$$

Покажем, что метрическое пространство $\big(C(\mathbb{R}), \rho_c\big)$ является сепарабельным. Для любых натуральных чисел N и M определим множество $S_{N,M} \subset C(\mathbb{R})$, такое, что любая функция $x \in S_{N,M}$ имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} Q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_M t^M, & -N \leqslant t \leqslant N, \\ Q(N), & t > N, \\ Q(-N), & t < -N, \end{cases}$$

где $a_0, \ldots, a_M$ — произвольные рациональные числа. Ясно, что множество $S_{N,M}$ равномощно множеству Q^{M+1}, которое является счётным как конечное декартово произведение счётного множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда множество

$$S = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{M=1}^{\infty} S_{N,M} \subset C(\mathbb{R})$$

является счётным как счётное объединение счётных множеств $S_{N,M}$. Покажем, что множество S является всюду плотным в $C(\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольную функцию $x \in C(\mathbb{R})$ и число $\varepsilon > 0$. По условию существует число $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $t \geqslant \delta$ и $\tau \leqslant -\delta$ выполнены неравенства

$$|x(t) - x(+\infty)| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad |x(\tau) - x(-\infty)| \leqslant \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное натуральное число $N > \delta$. На отрезке $[-N, N]$ по теореме Вейерштрасса непрерывную функцию x можно равномерно с точностью ε приблизить многочленом

$$P(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_M t^M,$$

т. е. справедливо неравенство

$$\sup_{t\in[-N,N]} |x(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Выберем число $\gamma > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$\gamma\left(1 + N + \ldots + N^M\right) \leqslant \varepsilon.$$

Для любого $k \in \overline{0, M}$ выберем рациональное число a_k так, чтобы

$$|a_k - b_k| \leqslant \gamma.$$

Определим многочлен

$$Q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_M t^M.$$

Таким образом, определена функция $y \in S_{N,M} \subset S$ следующего вида:

$$y(t) = \begin{cases} Q(t), & -N \leqslant t \leqslant N, \\ Q(N), & t > N, \\ Q(-N), & t < -N. \end{cases}$$

Так как для любого $t \in [-N, N]$ справедливо неравенство

$$|Q(t) - P(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{M} |a_k - b_k|\, |t|^k \leqslant \gamma \sum_{k=0}^{M} N^M \leqslant \varepsilon,$$

то получаем

$$\sup_{t\in[-N,N]} |x(t) - y(t)| \leqslant \sup_{t\in[-N,N]} \Big(|x(t) - P(t)| + |P(t) - Q(t)|\Big) \leqslant 2\varepsilon.$$

Далее для любого $t > N$ имеем

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - x(+\infty)| + |x(+\infty) - x(N)| + \\ + |x(N) - P(N)| + |P(N) - Q(N)| \leqslant 4\varepsilon.$$

Аналогично для любого $\tau < -N$ имеем

$$|x(\tau) - y(\tau)| \leqslant |x(\tau) - x(-\infty)| + |x(-\infty) - x(-N)| + \\ + |x(-N) - P(-N)| + |P(-N) - Q(-N)| \leqslant 4\varepsilon.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\rho_c(x, y) \leqslant 4\varepsilon,$$

что и требовалось. ▲

П р и м е р 1.3.7. Рассмотрим множество $BC(\mathbb{R})$ всех непрерывных и ограниченных на вещественной оси вещественнозначных функций с метрикой равномерной сходимости ρ_c из примера 1.3.6. Покажем, что метрическое пространство $\Big(BC(\mathbb{R}), \rho_c\Big)$ несепарабельно. Рассмотрим неотрицательную "пилообразную" функцию $x \in BC(\mathbb{R})$ вида: для любого целого числа k на отрезке

$$I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$$

функция x либо тождественно нулевая, либо её график образуют боковые рёбра равнобедренного треугольника с основанием I_k и единичной высотой. Множество всех таких "пилообразных" функций обозначим A_0. Любая функция $x \in A_0$ однозначно определяется своими значениями $x(k)$ в целых точках k. При этом для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $x(k) = 0$ либо $x(k) = 1$. Следовательно, множество A_0 равномощно множеству всех числовых последовательностей, принимающих значения 0 и 1, которое в свою очередь равномощно промежутку $[0, 1)$. Следовательно, множество A_0 несчётно. При этом для любых двух различных функций $x, y \in A_0$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое, что

$$|x(k_0) - y(k_0)| = 1.$$

Следовательно,

$$\rho_c(x, y) \geqslant |x(k_0) - y(k_0)| = 1 = \varepsilon_0.$$

Таким образом, по утверждению 1.3.4 получаем несепарабельность метрического пространства $\big(BC(\mathbb{R}), \rho_c\big)$. ▲

У т в е р ж д е н и е 1.3.8. *Пусть метрическое пространство (X, ρ) является сепарабельным. Пусть бесконечное множество $A \subset X$. Тогда метрическое пространство (A, ρ) тоже является сепарабельным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть счётное множество $S = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ из X является всюду плотным в пространстве X. Определим функцию расстояния от произвольного элемента $x \in X$ до множества A вида

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a).$$

Тогда по определению точной нижней грани числовой функции для любых номеров n и m существует элемент $a_{n,m} \in A$, такой, что выполнено неравенство

$$\rho(z_n, a_{n,m}) \leqslant \rho(z_n, A) + \frac{1}{m}.$$

Рассмотрим не более чем счётное множество

$$B = \{a_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty} \subset A.$$

Покажем, что множество B является всюду плотным в A. Так как множество S всюду плотно в X, для любого элемента $a \in A$ и числа $\varepsilon > 0$ существует номер n, такой, что справедливо неравенство

$$\rho(a, z_n) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\rho(z_n, A) \leqslant \rho(z_n, a) \leqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим номер m вида $\frac{1}{m} \leqslant \varepsilon$. Тогда получаем неравенства

$$\rho(z_n, a_{n,m}) \leqslant \rho(z_n, A) + \frac{1}{m} \leqslant 2\varepsilon$$

. Отсюда в силу неравенства треугольника находим

$$\rho(a, a_{n,m}) \leqslant \rho(a, z_n) + \rho(z_n, a_{n,m}) \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, множество $B \subset A$ является всюду плотным в A. Покажем, что множество B является счётным. Так как B не более чем счётно, то достаточно показать бесконечность множества B. Предположим, рассуждая о противного, что множество B конечно. Поскольку B всюду плотно в A, то для любого элемента $a \in A$ имеем равенство

$$\rho(a, B) = \inf_{b \in B} \rho(a, b) = 0.$$

Так как по предположению множество B конечно, то нижняя грань в определении величины $\rho(a, B)$ достигается, т. е. существует элемент $b_a \in B$, такой, что

$$\rho(a, B) = \rho(a, b_a) = 0.$$

Следовательно, получаем равенство $a = b_a \in B$. Таким образом, справедливо вложение

$$A \subset B.$$

Обратное вложение $B \subset A$ выполнено по построению множества B. Поэтому имеет место равенство $A = B$. Но это невозможно, так как множество A по условию бесконечно, а B по предположению конечно. Полученное противоречие доказывает бесконечность не более чем счётного множества B. Следовательно, B является счётным, что и требовалось. ■

1.4. Полные метрические пространства

Определение 1.4.1. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов метрического пространства (X, ρ) называется фундаментальной (или ρ–фундаментальной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n > N$ и $m > N$ выполнено неравенство*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Заметим, что сходящаяся в метрическом пространстве (X, ρ) последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к элементу $x \in X$ является фундаментальной. Действительно, условие

$$x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

в силу утверждения 1.2.6 означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $M(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > M(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Определим номер $N(\varepsilon) = M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда для любых $n > N(\varepsilon)$ и $m >$ $> N(\varepsilon)$, пользуясь неравенством треугольника, находим

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Заметим также, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из метрического пространства (X, ρ) может сходиться только к одному пределу. Действительно, если для элементов $y \in X$ и $z \in X$ выполнены условия

$$x_n \xrightarrow{\tau_\rho} y \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow{\tau_\rho} z \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то, пользуясь неравенством треугольника, получаем

$$0 \leqslant \rho(y, z) \leqslant \rho(x_n, y) + \rho(x_n, z) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $\rho(y, z) = 0$, и по определению 1.2.1 получаем $y = z$.

Определение 1.4.2. *Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность из (X, ρ) является сходящейся.*

Замечание 1.4.3. Полнота метрического пространства является свойством метрики, но не метрической топологии. Приведём пример множества X и двух метрик ρ и d в нём, таких, что метрическое пространство (X, ρ) является полным, метрическое пространство (X, d) не является полным, однако метрические топологии τ_ρ и τ_d совпадают, т. е. $\tau_\rho = \tau_d$. Пусть множество $X = \mathbb{R}$ — вещественная ось,

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad d(x, y) = |e^x - e^y|, \quad \text{где} \quad x\, y \in \mathbb{R}.$$

Метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ является полным в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности. Покажем, что метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$ не является полным. Рассмотрим последовательность $x_n = -n$. Покажем, что она является d–фундаментальной. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и любых $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$ и $m > n$ имеем

$$d(x_n, x_m) = |e^{-n} - e^{-m}| < e^{-n} < \varepsilon,$$

что и требовалось. Тем не менее последовательность $x_n = -n$ не является сходящейся в метрическом пространстве $(\mathbb{R}, d)$, так как для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \left|e^{-n} - e^x\right| = e^x > 0.$$

Покажем теперь, что справедливо равенство метрических топологий $\tau_\rho = \tau_d$. Пусть множество $G \subset \mathbb{R}$ является ρ-открытым, т. е. $G \in \tau_\rho$. Надо показать, что $G \in \tau_d$, т. е. по утверждению 1.2.5 для любого $x \in G$ надлежит указать число $R = R(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $d(x, y) < R$ будет выполнено вложение $y \in G$. Так как $G \in \tau_\rho$, то для $x \in G$ существует число $r = r(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $\rho(x, y) < r$ имеем $y \in G$. Так как функция натурального логарифма непрерывна в точке $e^x > 0$, то существует $\delta = \delta(x) > 0$, такое, что для любого $z \in \mathbb{R}$ вида

$$|z - e^x| < \delta$$

выполнено неравенство

$$|\ln z - \ln e^x| < r.$$

Следовательно, для любого числа y вида

$$|e^y - e^x| < \delta$$

справедливо неравенство

$$|\ln e^y - \ln e^x| = |y - x| < r,$$

т. е. $y \in G$. Таким образом, число $R(x) = \delta(x)$ является искомым. Следовательно, множество G является d-открытым. Таким образом, доказано вложение $\tau_\rho \subset \tau_d$.

Обратно, пусть множество $G \in \tau_d$. Требуется для любого $x \in G$ найти число $r = r(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $\rho(x, y) < < r$ будет выполнено вложение $y \in G$. Так как множество $G \in \tau_d$, то для $x \in G$ существует число $R = R(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $d(x, y) < R$ имеем $y \in G$. Так как экспоненциальная функция непрерывна в точке x, то существует $\delta = \delta(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида

$$|y - x| < \delta$$

выполнено неравенство

$$|e^y - e^x| < R,$$

а значит, $y \in G$. Таким образом, число $r(x) = \delta(x)$ является искомым. Следовательно, множество G является ρ-открытым. Таким образом, доказано вложение $\tau_d \subset \tau_\rho$. $\square$

Утверждение 1.4.4. *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда метрическое пространство (S, ρ) является полным тогда и только тогда, когда множество S является замкнутым в метрическом пространстве (X, ρ).*

Доказательство. Пусть метрическое пространство (S, ρ) является полным. Рассмотрим произвольную секвенциальную точку прикосновения $z \in X$ множества S. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $\rho(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}$ является фундаментальной в метрическом пространстве (S, ρ). Тогда в силу полноты (S, ρ) существует $x \in S$, такой, что $\rho(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_n, z) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $\rho(x,z)=0$. Это означает равенство $x=z\in S$. Итак, множество S является секвенциально замкнутым в (X,ρ), а по следствию 1.2.8 является замкнутым. Заметим, что при доказательстве замкнутости множества S использовалась полнота (S,ρ), а не (X,ρ).

Пусть теперь множество S является замкнутым в полном метрическом пространстве (X,ρ). Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$. Тогда эта последовательность будет фундаментальной и в (X,ρ). В силу полноты пространства (X,ρ) существует $x\in X$, такой, что

$$\rho(x_n,x)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следовательно, x является секвенциальной точкой прикосновения множества S. В силу замкнутости S получаем, что $x\in S$. Следовательно, любая фундаментальная последовательность из множества S сходится к элементу S, т. е. (S,ρ) является полным метрическим пространством. ■

П р и м е р 1.4.5. Приведём пример неполного метрического пространства и его замкнутого подмножества, не являющегося полным метрическим пространством. Для этого рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{R},d)$, где метрика $d(x,y)=|e^x-e^y|$ (см. замечание 1.4.3). Как показано в замечании 1.4.3, метрическое пространство $(\mathbb{R},d)$ не является полным. Его подмножество $S=(-\infty,0]$ с метрикой d также представляет собой неполное метрическое пространство, так как d–фундаментальная последовательность $x_n=-n$ содержится в S и не является сходящейся (см. замечание 1.4.3). Тем не менее множество S является τ_d-замкнутым. Действительно, хорошо известно, что для обычной метрики $\rho(x,y)=|x-y|$ в $\mathbb{R}$ множество S является τ_ρ-замкнутым, так как его дополнение $S^c=(0,+\infty)$ является τ_ρ-открытым. Но, как показано в замечании 1.4.3, $\tau_d=\tau_\rho$. Следовательно, S^c является и τ_d-открытым, значит, само множество S является τ_d-замкнутым. ▲

О п р е д е л е н и е 1.4.6. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Замкнутым шаром с центром в точке $x\in X$ радиуса $R>0$ называется множество*

$$B_R(x)=\left\{\, y\in X \quad \middle| \quad \rho(x,y)\leqslant R \,\right\}.$$

З а м е ч а н и е 1.4.7. В метрическом пространстве (X,ρ) для любого $x\in X$ и числа $R>0$ множество $B_R(x)$ является τ_ρ-замкнутым. Действительно, рассмотрим произвольную точку z из его дополнения, т. е. $\rho(x,z) > R$. Определим число

$$r = \rho(x,z) - R > 0.$$

Покажем, что справедливо вложение

$$O_r(z) \subset X \backslash B_R(x).$$

Для любого $y \in O_r(z)$ по неравенству треугольника имеем

$$\rho(x,y) \geqslant \rho(x,z) - \rho(y,z) > \rho(x,z) - r = R, \quad \text{т. е.} \quad y \in X \backslash B_R(x),$$

что и требовалось. Следовательно, по утверждению 1.2.5 дополнение множества $B_R(x)$ является τ_ρ-открытым, т. е. по определению 1.1.10 само множество $B_R(x)$ является τ_ρ-замкнутым. □

Теорема 1.4.8. (принцип вложенных шаров) *Метрическое пространство (X,ρ) является полным тогда и только тогда, когда любая убывающая по вложению последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть метрическое пространство (X,ρ) является полным. Рассмотрим последовательность замкнутых шаров

$$\left\{B_{R_n}(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty},$$

убывающую по вложению, т. е.

$$B_{R_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{R_n}(x_n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

причём $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Требуется доказать, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{R_n}(x_n) \neq \varnothing.$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ центров этих шаров. Покажем, что она является фундаментальной. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $R_n < \varepsilon$. Так как для любого $m > n$ справедливо вложение

$$x_m \in B_{R_m}(x_m) \subset B_{R_n}(x_n),$$

то $\rho(x_m, x_n) \leqslant R_n$. Следовательно, для любых $m, n > N(\varepsilon)$ получаем

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Тогда в силу полноты метрического пространства (X, ρ) существует $x \in X$, такой, что

$$\rho(x_n, x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Покажем, что

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{R_n}(x_n).$$

Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ и $m > n$ получаем

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, x) \leqslant R_n + \rho(x_m, x) \to R_n \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, $\rho(x_n, x) \leqslant R_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось.

Предположим теперь, что в метрическом пространстве (X, ρ) любая убывающая по вложению последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Рассмотрим в X произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует номер m_k, такой, что для любых $n, m \geqslant m_k$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant 2^{-k-1}.$$

Определим последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$n_1 = m_1, \qquad n_{k+1} = \max\{m_{k+1}, n_k + 1\}.$$

Тогда $n_{k+1} > n_k \geqslant m_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leqslant 2^{-k-1}.$$

Рассмотрим последовательность замкнутых шаров с центрами в точках x_{n_k} и радиусами $R_k = 2^{-k} \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что эта последовательность шаров является убывающей по вложению. Действительно, для любого $y \in B_{R_{k+1}}(x_{n_{k+1}})$ имеем

$$\rho(x_{n_k}, y) \leqslant \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, y) \leqslant 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k} = R_k.$$

Таким образом,

$$B_{R_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \subset B_{R_k}(x_{n_k}) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

При этом $R_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, существует

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{R_k}(x_{n_k}).$$

Отсюда получаем, что

$$\rho(x_{n_k}, x) \leqslant R_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $k = k(\varepsilon) > \log_2 \frac{2}{\varepsilon}$, такой, что для любого $n \geqslant n_{k(\varepsilon)}$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x, x_{n_k}) \leqslant 2^{-k-1} + 2^{-k} < 2^{-k+1} < \varepsilon.$$

Это означает, что $x_n \overset{\tau_\rho}{\to} x$ при $n \to \infty$, что и требовалось. ■

П р и м е р 1.4.9. Покажем, что в полном метрическом пространстве пересечение замкнутых шаров, образующих убывающую по вложению последовательность, может быть пустым, если радиусы шаров не стремятся к нулю (см. [5, гл. 12, с. 201]). Рассмотрим множество $X = \mathbb{N}$, в котором метрика задана формулой

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n, \\ 0, & m = n. \end{cases}$$

Покажем, что для функции ρ выполнены аксиомы метрики из определения 1.2.1. Условия 1 и 2 очевидны. Покажем, что выполнено условие 3, т. е. неравенство треугольника. Действительно, для любых различных натуральных чисел m, n, k получаем

$$\rho(m, n) = 1 + \tfrac{1}{m+n} \leqslant 2 \leqslant 1 + \tfrac{1}{m+k} + 1 + \tfrac{1}{n+k} = \rho(m, k) + \rho(n, k).$$

Покажем, что метрическое пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ является полным. Если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ρ–фундаментальной, то существует номер N, такой, что для всех $k, s \geqslant N$ выполнено неравенство $\rho(n_k, n_s) < 1$. Если $n_k \neq n_s$, то $\rho(n_k, n_s) > 1$. Следовательно, $n_k = n_s = m$. Таким образом, всякая фундаментальная в метрическом пространстве $(\mathbb{N}, \rho)$ последовательность является стационарной с некоторого номера, а значит, сходящейся. Далее для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутый шар с центром в n и радиуса $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$, т. е.

$$B_{r_n}(n) = \left\{ \, m \in \mathbb{N} \quad \middle| \quad \rho(m, n) \leqslant r_n \, \right\}.$$

Тогда число $m \in \mathbb{N}$, не равное n, принадлежит $B_{r_n}(n)$ тогда и только тогда, когда

$$1 + \tfrac{1}{m+n} \leqslant 1 + \tfrac{1}{2n}, \quad \text{т. е.} \quad m \geqslant n.$$

Таким образом, справедливо равенство $B_{r_n}(n) = \{m\}_{m=n}^{\infty}$. Следовательно, $B_{r_n}(n) \supset B_{r_{n+1}}(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. построенные шары образуют убывающую по вложению последовательность, при этом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(n) = \varnothing$. ▲

Определение 1.4.10. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Диаметром непустого множества $S \subset X$ называется величина*

$$\operatorname{diam} S = \sup_{x,y \in S} \rho(x, y).$$

Утверждение 1.4.11. *Метрическое пространство (X, ρ) является полным тогда и только тогда, когда любая убывающая по вложению последовательность непустых замкнутых множеств из X, диаметр которых стремится к нулю, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть метрическое пространство (X, ρ) является полным. Рассмотрим произвольную последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ непустых замкнутых подмножеств X, таких, что

$$F_{n+1} \subset F_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

и $d_n = \operatorname{diam} F_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого номера n существует точка $x_n \in F_n$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ρ–фундаментальной. Так как

$$\lim_{n \to \infty} d_n = 0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $d_n < \varepsilon$. Так как для любого номера $m > n$ справедливо вложение

$$x_m \in F_m \subset F_n,$$

то получаем

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant d_n < \varepsilon.$$

Таким образом, для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу полноты метрического пространства (X, ρ) получаем, что существует элемент $x \in X$, такой, что

$$\rho(x_n, x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Покажем, что для любого номера n справедливо вложение $x \in F_n$. Так как для любого $m > n$ выполнено вложение $x_m \in F_n$ и $x_m \xrightarrow{\tau_\rho} x$ при $m \to \infty$, то x является секвенциальной точкой прикосновения множества F_n. Тогда в силу замкнутости F_n и утверждения 1.1.16 получаем, что $x \in F_n$. Следовательно,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

что и требовалось.

Пусть теперь любая убывающая по вложению последовательность непустых замкнутых множеств из X, диаметр которых стремится к нулю, имеет непустое пересечение. Рассмотрим в X произвольную последовательность замкнутых шаров $F_n = B_{R_n}(x_n)$, такую, что $F_{n+1} \subset F_n$ для любого номера n и $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для диаметра $d_n = \operatorname{diam} F_n$ шара F_n получаем

$$d_n = \sup_{y,z \in F_n} \rho(y, z) \leqslant \sup_{y,z \in F_n} \big(\rho(y, x_n) + \rho(z, x_n)\big) \leqslant$$
$$\leqslant R_n + R_n = 2R_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, по условию

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing.$$

Тогда по теореме 1.4.8 метрическое пространство (X, ρ) является полным. ■

П р и м е р 1.4.12. Рассмотрим линейное пространство ℓ_∞, состоящее из ограниченных числовых последовательностей, метрика в котором задаётся формулой

$$\rho(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k) - y(k)| \qquad \forall\, x, y \in \ell_\infty.$$

Покажем, что метрическое пространство ℓ_∞ является полным. Для этого рассмотрим произвольную ρ–фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_\infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|x_n(k) - x_m(k)| \leqslant \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

то числовая последовательность $\{x_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{R}$. Тогда по критерию Коши сходимости числовой последовательности для любого $k \in \mathbb{N}$ существует числовой предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n(k) = z(k) \in \mathbb{R}.$$

Получили числовую последовательность z, которая по построению является поточечным пределом последовательности x_n. Далее для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n, m > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ перейдём в неравенстве

$$|x_n(k) - x_m(k)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

к пределу по $m \to \infty$. Получим

$$|x_n(k) - z(k)| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > N\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - z(k)| = \rho(x_n, z) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\rho(x_n, z) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Осталось показать, что $z \in \ell_\infty$, т. е. z является ограниченной числовой последовательностью. Так как $x_n \in \ell_\infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то для $n = N(1) + 1$ существует $R > 0$, такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|x_n(k)| \leqslant R$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ находим

$$|z(k)| \leqslant |z(k) - x_n(k)| + |x_n(k)| \leqslant \rho(z, x_n) + R \leqslant 1 + R.$$

Следовательно, z — ограниченная числовая последовательность.

Предъявим в ℓ_∞ убывающую по вложению последовательность замкнутых множеств, пересечение которых пусто, а диаметры конечны и не стремятся к нулю. Рассмотрим для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$F_n = \left\{ x \in \ell_\infty \quad \middle| \quad x(1) = \ldots = x(n) = 0, \ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = 1 \right\}.$$

Очевидно, для любого номера n выполнено вложение

$$F_{n+1} \subset F_n.$$

Если z — точка прикосновения F_n, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F_n$, такой, что

$$\rho(z, x_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого номера $k \in \overline{1, n}$ имеем

$$|z(k)| = |z(k) - x_\varepsilon(k)| \leqslant \rho(z, x_\varepsilon) < \varepsilon,$$

т. е. в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $z(k) = 0$. Справедливы неравенства:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |z(k)| \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \Big(|z(k) - x_\varepsilon(k)| + |x_\varepsilon(k)| \Big) \leqslant \rho(z, x_\varepsilon) + 1 < \varepsilon + 1,$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |z(k)| \geqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \Big(|x_\varepsilon(k)| - |z(k) - x_\varepsilon(k)| \Big) \geqslant 1 - \rho(z, x_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем равенство

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |z(k)| = 1.$$

Таким образом, $z \in F_n$. Итак, доказана замкнутость множества F_n. Покажем, что диаметр множества F_n равен двум. Действительно, для любых элементов $x, y \in F_n$ справедлива оценка

$$\rho(x, y) \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \Big(|x(k)| + |y(k)| \Big) \leqslant 2,$$

т. е. $\operatorname{diam} F_n \leqslant 2$. С другой стороны, числовые последовательности $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ вида $\tilde{x}(k) = \tilde{y}(k) = 0$ для любого $k \neq n+1$, а $\tilde{x}(n+1) = 1$ и $\tilde{y}(n+1) = -1$, принадлежат множеству F_n. При этом

$$2 = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant \operatorname{diam} F_n.$$

Следовательно, $\operatorname{diam} F_n = 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, наконец, что пересечение всех множеств F_n по $n \in \mathbb{N}$ пусто. Если предположить, что существует

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

то по определению F_n получаем $x(n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и при этом

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)| = 1,$$

что невозможно. Таким образом,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing.$$

▲

Определение 1.4.13. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Множество $S \subset X$ называется нигде не плотным, если его замыкание $[S]_{\tau_\rho}$ не содержит ни одного открытого шара.*

Теорема 1.4.14. (Бэр) *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Предположим, рассуждая от противного, что существует счётное семейство нигде не плотных множеств $S_n \subset X$, таких, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Рассмотрим произвольный элемент $x_0 \in X$. Так как множество S_1 является нигде не плотным, то для любого $R > 0$ выполнено

$$O_R(x_0) \not\subset [S_1]_{\tau_\rho}.$$

Тогда множество

$$G_1 = O_1(x_0) \backslash [S_1]_{\tau_\rho} = O_1(x_0) \cap [S_1]^c_{\tau_\rho}$$

является открытым как пересечение двух открытых множеств и является непустым. Следовательно, существует $x_1 \in G_1$, причём в силу открытости множества G_1 существует число $\delta_1 > 0$, такое, что

$$O_{2\delta_1}(x_1) \subset G_1.$$

Определим положительное число

$$R_1 = \min\{\delta_1, 1\}.$$

Так как справедливо вложение

$$B_{R_1}(x_1) \subset O_{2R_1}(x_1) \subset O_{2\delta_1}(x_1),$$

то получаем, что

$$B_1(x_0) \supset B_{R_1}(x_1) \quad \text{и} \quad B_{R_1}(x_1) \cap S_1 = \varnothing.$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ построены $x_1, \ldots, x_n \in X$ и положительные числа $R_1, \ldots, R_n$, такие, что

$$B_1(x_0) \supset B_{R_1}(x_1) \supset \ldots \supset B_{R_n}(x_n),$$

причём

$$B_{R_k}(x_k) \cap S_k = \varnothing \quad \text{и} \quad R_k \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall\, k \in \overline{1,n}.$$

Так как множество S_{n+1} является нигде не плотным, то

$$O_{R_n}(x_n) \not\subset [S_{n+1}]_{\tau_\rho}.$$

Тогда множество

$$G_{n+1} = O_{R_n}(x_n) \backslash [S_{n+1}]_{\tau_\rho} = O_{R_n}(x_n) \cap [S_{n+1}]^c_{\tau_\rho}$$

является открытым как пересечение двух открытых множеств и является непустым. Следовательно, существует $x_{n+1} \in G_{n+1}$, причём в силу открытости множества G_{n+1} существует число $\delta_{n+1} > 0$, такое, что

$$O_{2\delta_{n+1}}(x_{n+1}) \subset G_{n+1}.$$

Определим положительное число

$$R_{n+1} = \min\left\{\delta_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Так как справедливо вложение

$$B_{R_{n+1}}(x_{n+1}) \subset O_{2R_{n+1}}(x_{n+1}) \subset O_{2\delta_{n+1}}(x_{n+1}),$$

то получаем, что

$$B_{R_n}(x_n) \supset B_{R_{n+1}}(x_{n+1})$$

и

$$B_{R_{n+1}}(x_{n+1}) \cap S_{n+1} = \varnothing.$$

Таким образом, по индукции построена убывающая по вложению последовательность замкнутых шаров

$$\left\{B_{R_n}(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty},$$

причём $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, по теореме 1.4.8 существует

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{R_n}(x_n).$$

Тогда для любого номера n в силу соотношения

$$B_{R_n}(x_n) \cap S_n = \varnothing$$

получаем $x \notin S_n$. Существование такого

$$x \in X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$$

противоречит равенству

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. ■

П р и м е р 1.4.15. Простейшим примером неполного метрического пространства, представимого в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств, является множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с обычной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Действительно, любое одноточечное множество из $\mathbb{Q}$ является нигде не плотным в $(\mathbb{Q}, \rho)$, так как любой открытый шар из $(\mathbb{Q}, \rho)$ представляет собой счётное множество всех рациональных чисел, содержащихся в заданном числовом интервале, т. е. состоит более чем из одной точки. При этом множество $\mathbb{Q}$ является счётным, т. е. представляет собой счётное объединение всех входящих в него точек.

Приведём пример неполного линейного метрического пространства, представимого в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств. Рассмотрим линейное пространство ℓ_1, состоящее из всех числовых последовательностей, компоненты которых образуют абсолютно сходящийся ряд, т. е.

$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\}.$$

Введём в ℓ_1 метрику

$$\rho(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k) - y(k)|,$$

рассмотренную ранее в примере 1.4.12 для линейного пространства ℓ_∞. Покажем, что метрическое пространство (ℓ_1, ρ) является неполным. Для этого рассмотрим в ℓ_1 последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Так как для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) = \sup_{n<k\leqslant m} \tfrac{1}{k} < \tfrac{1}{n},$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ является фундаментальной в (ℓ_1, ρ). Однако эта последовательность не сходится в (ℓ_1, ρ). Предположим, рассуждая от противного, что существует $z \in \ell_1$, такой, что

$$\rho(z, x_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда для любого номера $k \in \mathbb{N}$ и любого $n > k$ получаем

$$\left|z(k) - \tfrac{1}{k}\right| = |z(k) - x_n(k)| \leqslant \rho(z, x_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $z(k) = \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда $z \notin \ell_1$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает неполноту метрического пространства (ℓ_1, ρ). Рассмотрим для любого номера n множество

$$F_n = \left\{ x \in \ell_1 \quad \middle| \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \leqslant n \right\}.$$

Так как для любого $x \in \ell_1$ существует $n(x) \in \mathbb{N}$, такое, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \leqslant n(x),$$

т. е. $x \in F_{n(x)}$, то справедливо равенство

$$\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n является замкнутым в метрическом пространстве (ℓ_1, ρ). Пусть $z \in \ell_1$ — точка прикосновения множества F_n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F_n$, такое, что

$$\rho(z, x_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N} |z(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |z(k) - x_\varepsilon(k)| + \sum_{k=1}^{N} |x_\varepsilon(k)| \leqslant$$
$$\leqslant N\rho(z, x_\varepsilon) + n \leqslant N\varepsilon + n \to n \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{N} |z(k)| \leqslant n.$$

Следовательно, переходя в последнем неравенстве к пределу при $N \to \infty$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z(k)| \leqslant n.$$

Поэтому $z \in F_n$, т. е. множество F_n является замкнутым в (ℓ_1, ρ). Наконец, покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n является нигде не плотным в метрическом пространстве (ℓ_1, ρ). В силу замкнутости F_n достаточно показать, что ни один открытый шар из (ℓ_1, ρ) не содержится в F_n. Предположим, рассуждая от противного, что существуют $x_0 \in F_n$ и $R_0 > 0$, такие, что

$$O_{R_0}(x_0) \subset F_n.$$

Тогда для любого $x \in \ell_1$ вида $\rho(x, x_0) < R_0$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \leqslant n.$$

Существует номер N, такой, что

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{R_0}{2k} > 2n.$$

Рассмотрим элемент $y_N \in \ell_1$ следующего вида:

$$y_N(k) = \begin{cases} \frac{R_0}{2k}, & 1 \leqslant k \leqslant N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Тогда элемент

$$z_N = x_0 + y_N \in O_{R_0}(x_0),$$

так как $\rho(z_N, x_0) \leqslant \frac{R_0}{2} < R_0$. Однако справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_N(k)| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |y_N(k)| - \sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)| = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_0}{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)| > 2n - n = n,$$

т. е. $z_N \notin F_n$. Получили противоречие. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ доказано, что множество F_n является нигде не плотным в метрическом пространстве (ℓ_1, ρ). ▲

Рассмотрим несколько применений теоремы 1.4.14 Бэра в задачах теории функций действительного и комплексного переменных.

Задача 1.4.16. Доказать, что не существует функции

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

непрерывной в рациональных и разрывной в иррациональных точках.

Решение. Предположим, рассуждая от противного, что такая функция существует. Рассмотрим функцию

$$\omega\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$$

колебания функции f в точке, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ определим

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to +0} \sup_{\substack{y, z \in \mathbb{R}: \\ |y - x| < \delta \\ |z - x| < \delta}} |f(y) - f(z)|.$$

Известно, что функция f является непрерывной в точке x тогда и только тогда, когда $\omega(x) = 0$. Пусть $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — все рациональные числа, а $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ — все иррациональные. По условию для любого $x \in \mathbb{I}$ выполнено неравенство $\omega(x) > 0$, а для любого $y \in \mathbb{Q}$ выполнено $\omega(y) = 0$. Определим для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$F_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad \middle| \quad \omega(x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathbb{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Действительно, если $x \in \mathbb{I}$, то имеем $\omega(x) > 0$. Следовательно, существует $n(x) \in \mathbb{N}$, такое, что выполнено

$$\frac{1}{n(x)} \leqslant \omega(x), \quad \Rightarrow \quad x \in F_{n(x)}.$$

Если же $x \in \mathbb{Q}$, то $\omega(x) = 0$, т. е. $x \notin F_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n является замкнутым в $\mathbb{R}$ (по умолчанию предполагается, что в $\mathbb{R}$ рассматривается обычная метрика $\rho(x, y) = |x - y|$). Пусть x — точка прикосновения множества F_n, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F_n$, такой, что

$$|x - x_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Так как для любого $\delta > 0$ из неравенства

$$|y - x_\delta| < \delta$$

следует неравенство $|y - x| < 2\delta$, то получаем

$$\sup_{\substack{y,z \in \mathbb{R}: \\ |y-x|<2\delta \\ |z-x|<2\delta}} |f(y) - f(z)| \geqslant \sup_{\substack{y,z \in \mathbb{R}: \\ |y-x_\delta|<\delta \\ |z-x_\delta|<\delta}} |f(y) - f(z)| \geqslant \omega(x_\delta) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Следовательно, выполнено соотношение

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to +0} \sup_{\substack{y,z \in \mathbb{R}: \\ |y-x|<2\delta \\ |z-x|<2\delta}} |f(y) - f(z)| \geqslant \frac{1}{n},$$

т. е. $x \in F_n$. Таким образом, доказана замкнутость F_n. Далее покажем, что F_n является нигде не плотным множеством в $\mathbb{R}$. В силу замкнутости F_n достаточно показать, что F_n не содержит ни одного непустого числового интервала. Известно, что любой непустой числовой интервал обязательно содержит рациональные числа. Но в множестве F_n нет ни одного рационального числа. Таким образом, F_n действительно не содержит ни одного непустого числового интервала. Получаем, что справедливо равенство

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ F_n \cup \{r_n\} \right\},$$

где множество F_n и одноточечное множество $\{r_n\}$ являются нигде не плотными в $\mathbb{R}$. Таким образом, полное метрическое пространство $\mathbb{R}$ представлено в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств. Это противоречит теореме 1.4.14 Бэра. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. ▲

З а д а ч а 1.4.17. Пусть комплексная функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области $G \subset \mathbb{C}$. Пусть для каждого комплексного числа $z \in G$ существует натуральное число $n(z)$, такое, что

$$f^{(n(z))}(z) = 0.$$

Доказать, что f — многочлен.

Р е ш е н и е. Известно, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с метрикой $\rho = |z - w|$ является полным метрическим пространством. Рассмотрим произвольное $z_0 \in G$. В силу открытости множества G в метрическом пространстве $(\mathbb{C}, \rho)$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что замкнутый круг

$$K_0 = B_{\varepsilon_0}(z_0) = \left\{ \, z \in \mathbb{C} \;\; \middle| \;\; |z - z_0| \leqslant \varepsilon_0 \, \right\} \subset G.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$A_m = \left\{ \, z \in K_0 \;\middle|\; f^{(m)}(z) = 0 \, \right\}.$$

Так как комплексная функция f регулярна в области G, то множество A_m замкнуто в $(\mathbb{C}, \rho)$, причём для любого комплексного числа $z \in K_0$ выполнено вложение $z \in A_{n(z)}$. Следовательно,

$$K_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Так как метрическое пространство (K_0, ρ) является полным в силу утверждения 1.4.4, а все множества $A_m \subset K_0$ замкнуты в метрическом пространстве (K_0, ρ), то по теореме 1.4.14 Бэра существует номер $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что множество A_{m_0} в метрическом пространстве (K_0, ρ) содержит открытый шар. Это означает, что существуют $z_1 \in K_0$ и $\varepsilon_1 > 0$, такие, что

$$O_{\varepsilon_1}(z_1) \cap K_0 = \left\{ \, z \in K_0 \;\; \middle| \;\; |z - z_1| < \varepsilon_1 \, \right\} \subset A_{m_0}.$$

Покажем, что существует $z_2 \in O_{\varepsilon_1}(z_1) \cap K_0$, такое, что $|z_2 - z_0| < \varepsilon_0$. Действительно, определим

$$z_2 = z_1 + \alpha(z_0 - z_1) \quad \text{для} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда при $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ выполнены неравенства

$$|z_2 - z_1| = \alpha |z_0 - z_1| \leqslant \alpha \varepsilon_0 < \varepsilon_1,$$
$$|z_2 - z_0| = (1 - \alpha)|z_1 - z_0| \leqslant (1 - \alpha)\varepsilon_0 < \varepsilon_0.$$

Следовательно, любое число $\alpha \in \left(0, \min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right\}\right)$ подойдёт. Определим число

$$\varepsilon_2 = \min\{ \, \varepsilon_0 - |z_2 - z_0| \, , \, \varepsilon_1 - |z_2 - z_1| \, \} > 0.$$

Получаем, что справедливо вложение

$$O_{\varepsilon_2}(z_2) = \left\{ \, z \in \mathbb{C} \;\; \middle| \;\; |z - z_2| < \varepsilon_2 \, \right\} \subset O_{\varepsilon_1}(z_1) \cap K_0 \subset A_{m_0}.$$

Следовательно, для всех $z \in O_{\varepsilon_2}(z_2)$ имеем равенство

$$f^{(m_0)}(z) = 0.$$

Тогда для любого $k \geqslant m_0$ и любого $z \in O_{\varepsilon_2}(z_2)$ получаем

$$f^{(k)}(z) = 0.$$

Так как регулярная в открытом круге комплексной плоскости функция представима в нём своим рядом Тейлора, то рассматриваемая функция f является в $O_{\varepsilon_2}(z_2)$ многочленом степени меньше m_0. Так как многочлен P и функция f регулярны в области G и существует последовательность

$$w_k = z_2 + \tfrac{\varepsilon_2}{k+1} \in O_{\varepsilon_2}(z_2),$$

такая, что $w_k \to z_2$ при $k \to \infty$ и $f(w_k) = P(w_k)$, то, по теореме единственности регулярной функции, $f = P$ в области G. ▲

1.5. Пополнение метрического пространства

Определение 1.5.1. *Пусть* (X_1, ρ_1) *и* (X_2, ρ_2) *— метрические пространства. Отображение*

$$\varphi\colon X_1 \to X_2$$

называется изометрией, если φ *является взаимно однозначным (т. е. для любого* $x_2 \in X_2$ *существует единственный* $x_1 \in X_1$*, такой, что* $\varphi(x_1) = x_2$*), и для любых элементов* $x_1, y_1 \in X_1$ *выполнено равенство*

$$\rho_1(x_1, y_1) = \rho_2\left(\varphi(x_1), \varphi(y_1)\right).$$

Если между метрическими пространствами X_1 *и* X_2 *существует изометрия, то говорят, что они являются изометричными.*

Утверждение 1.5.2. *Пусть* (X_1, ρ_1) *и* (X_2, ρ_2) *— метрические пространства, и существует изометрия*

$$\varphi\colon X_1 \to X_2.$$

Тогда обратное отображение

$$\varphi^{-1}\colon X_2 \to X_1$$

тоже является изометрией.

Доказательство. Так как φ является взаимно однозначным отображением X_1 на X_2, то существует обратное отображение

$$\varphi^{-1}\colon X_2 \to X_1.$$

Тогда для любых элементов $x_2, y_2 \in X_2$ получаем

$$\rho_2(x_2, y_2) = \rho_2\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x_2)\right), \varphi\left(\varphi^{-1}(y_2)\right)\right) = \rho_1\left(\varphi^{-1}(x_2), \varphi^{-1}(y_2)\right),$$

т. е. по определению 1.5.1 отображение φ^{-1} является изометрией. ■

Утверждение 1.5.3. *Пусть* (X_1, ρ_1)*,* (X_2, ρ_2) *и* (X_3, ρ_3) *— метрические пространства, причём существуют изометрии*

$$\varphi\colon X_1 \to X_2 \quad \text{и} \quad \psi\colon X_2 \to X_3.$$

Тогда отображение $\gamma\colon X_1 \to X_3$ *вида*

$$\gamma = \psi \circ \varphi,$$

т. е. суперпозиция отображений φ *и* ψ*, тоже является изометрией.*

Доказательство. Отображение γ взаимно однозначно отображает X_1 на X_3 как суперпозиция взаимно однозначных отображений φ и ψ. Далее для любых элементов $x_1, y_1 \in X_1$ находим

$$\rho_1(x_1, y_1) = \rho_2\left(\varphi(x_1), \varphi(y_1)\right) = \\ = \rho_3\left(\psi\left(\varphi(x_1)\right), \psi\left(\varphi(y_1)\right)\right) = \rho_3\left(\gamma(x_1), \gamma(y_1)\right).$$

Следовательно, по определению 1.5.1 отображение γ является изометрией. ■

Утверждение 1.5.4. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — изометричные метрические пространства, причём пространство (X_1, ρ_1) является полным. Тогда пространство (X_2, ρ_2) также является полным.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon X_1 \to X_2$ — изометрия. Рассмотрим произвольную ρ_2–фундаментальную последовательность

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N$ выполнено неравенство

$$\rho_2(z_n, z_m) < \varepsilon.$$

Определим последовательность

$$x_n = \varphi^{-1}(z_n).$$

Тогда по определению 1.5.1 получаем

$$\rho_1(x_n, x_m) = \rho_2(z_n, z_m) < \varepsilon \qquad \forall\, n, m > N.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$ является ρ_1–фундаментальной. Следовательно, в силу полноты пространства (X_1, ρ_1) существует элемент $x \in X_1$, такой, что

$$\rho_1(x_n, x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определим элемент $z = \varphi(x)$. Тогда находим

$$\rho_2(z_n, z) = \rho_2(\varphi(x_n), \varphi(x)) = \rho_1(x_n, x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Получили, что произвольная ρ_2–фундаментальная последовательность сходится в X_2, т. е. пространство (X_2, ρ_2) является полным. ■

О п р е д е л е н и е 1.5.5. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Будем говорить, что множество $A \subset X$ является всюду плотным (или ρ–всюду плотным) в множестве $B \subset X$, если выполнено вложение*

$$[A]_{\tau_\rho} \supset B,$$

т. е. для любого $b \in B$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $a \in A$, такое, что

$$\rho(a, b) < \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е 1.5.6. *Будем говорить, что полное метрическое пространство (Y, d) является пополнением метрического пространства (X, ρ), если существует множество $Z \subset Y$, d–всюду плотное в Y, такое, что метрические пространства (X, ρ) и (Z, d) изометричны.*

З а м е ч а н и е 1.5.7. Пусть (X, ρ) — неполное метрическое пространство, а (Y, d) — полное метрическое пространство, причём

$$X \subset Y.$$

Пусть сужение метрики d на множество X совпадает с метрикой ρ, а множество X является d–всюду плотным в Y. Тогда метрическое пространство (Y, d) является пополнением (X, ρ). Действительно, рассмотрим множество $Z = X$ и тождественное отображение

$$\varphi \colon X \to Z$$

вида $\varphi(x) = x$ в роли изометрии между (X, ρ) и (Z, d). Тогда определение 1.5.6 выполнено. Так как множество X всюду плотно в Y, то для любых элементов $y, \tilde{y} \in Y$ существуют последовательности

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \quad \text{и} \quad \{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X,$$

такие, что

$$d(x_n, y) \to 0 \quad \text{и} \quad d(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Покажем, что справедливо соотношение

$$d(y, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Действительно, по неравенству треугольника находим

$$d(y, \tilde{y}) \leqslant d(x_n, y) + d(\tilde{x}_n, \tilde{y}) + \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Переходя к нижнему пределу в этом неравенстве, получаем

$$d(y,\tilde{y}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n).$$

Далее по неравенству треугольника находим

$$\rho(x_n,\tilde{x}_n) \leqslant d(x_n,y) + d(\tilde{x}_n,\tilde{y}) + d(y,\tilde{y}).$$

Переходя к верхнему пределу в этом неравенстве, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n) \leqslant d(y,\tilde{y}).$$

Следовательно, справедливы оценки

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n) \leqslant d(y,\tilde{y}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n).$$

Так как всегда справедливо неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n),$$

то получаем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n) = \varliminf_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n) = d(y,\tilde{y}).$$

Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,\tilde{x}_n) = d(y,\tilde{y}).$$

$\square$

Пример 1.5.8. Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$, где метрика

$$d(x,y) = |e^x - e^y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

В замечании 1.4.3 была показана неполнота этого метрического пространства. Предъявим пополнение этого метрического пространства. Рассмотрим $Y = [0,+\infty)$ с обычной на вещественной оси метрикой

$$\rho(x,y) = |x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

Так как $(\mathbb{R}, \rho)$ является полным метрическим пространством, а множество Y является τ_ρ-замкнутым в $\mathbb{R}$, то в силу утверждения 1.4.4 метрическое пространство (Y, ρ) является полным. Рассмотрим множество

$$Z = (0,+\infty) \subset Y.$$

Так как $[Z]_{\tau_\rho} = Y$, то Z является ρ–всюду плотным в Y. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to Z$$

вида $\varphi(x) = e^x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Тогда отображение φ является изометрией между метрическими пространствами $(\mathbb{R}, d)$ и (Z, ρ). Действительно, отображение φ является взаимно однозначным из $\mathbb{R}$ на Z, и при этом для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$d(x,y) = |e^x - e^y| = |\,\varphi(x) - \varphi(y)| = \rho\left(\varphi(x), \varphi(y)\right).$$

Таким образом, по определению 1.5.6 метрическое пространство (Y, ρ) является пополнением неполного метрического пространства $(\mathbb{R}, d)$. Заметим, что в рассмотренном примере пополнение Y является собственным подмножеством пополняемого множества $\mathbb{R}$, т. е. выполнены вложение $Y \subset \mathbb{R}$ и неравенство $Y \neq \mathbb{R}$. ▲

Утверждение 1.5.9. *Любые два пополнения метрического пространства (X, ρ) изометричны.*

Доказательство. Пусть (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2) — два пополнения метрического пространства (X, ρ). Требуется доказать, что существует изометрия

$$\psi\colon Y_1 \to Y_2.$$

По определению 1.5.6, существует множество $Z_1 \subset Y_1$, ρ_1–всюду плотное в Y_1, и множество $Z_2 \subset Y_2$, ρ_2–всюду плотное в Y_2, такие, что метрическое пространство (X, ρ) изометрично метрическим пространствам (Z_1, ρ_1) и (Z_2, ρ_2). Следовательно, существуют изометрии

$$\varphi_1\colon X \to Z_1 \quad \text{и} \quad \varphi_2\colon X \to Z_2.$$

Определим отображение

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon Z_1 \to Z_2.$$

В силу утверждений 1.5.2 и 1.5.3 отображение φ является изометрией. Так как множество Z_1 является ρ_1–всюду плотным в Y_1, то для любого $y_1 \in Y_1$ существует последовательность

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z_1,$$

такая, что

$$\rho_1(z_n, y_1) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, так как отображение φ является изометрией, последовательность образов $\varphi(z_n) \in Z_2$ является ρ_2–фундаментальной в полном метрическом пространстве (Y_2, ρ_2). Поэтому существует элемент $y_2 \in Y_2$, такой, что

$$\rho_2\left(\varphi(z_n), y_2\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Объявим построенный элемент $y_2 \in Y_2$ образом элемента $y_1 \in Y_1$ под действием отображения ψ, т. е. $\psi(y_1) = y_2$. Таким образом, определено отображение

$$\psi \colon Y_1 \to Y_2.$$

Покажем, что это определение корректно, т. е. значение $\psi(y_1)$ не зависит от выбора последовательности $z_n \in Z_1$, сходящейся к y_1. Действительно, пусть другая последовательность $\tilde{z}_n \in Z_1$ сходится к y_1. Тогда по неравенству треугольника

$$\rho_1(z_n, \tilde{z}_n) \leqslant \rho_1(z_n, y_1) + \rho_1(\tilde{z}_n, y_1) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, так как отображение φ является изометрией, то

$$\rho_2\left(\varphi(z_n), \varphi(\tilde{z}_n)\right) = \rho_1(z_n, \tilde{z}_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда по неравенству треугольника получаем

$$\rho_2\left(\varphi(\tilde{z}_n), y_2\right) \leqslant \rho_2\left(\varphi(z_n), y_2\right) + \rho_2\left(\varphi(z_n), \varphi(\tilde{z}_n)\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. последовательность $\varphi(\tilde{z}_n) \in Z_2$ сходится к тому же элементу $y_2 \in Y_2$, что и последовательность $\varphi(z_n)$. Таким образом, корректность определения отображения ψ доказана. Покажем, что это отображение является изометрией между метрическими пространствами (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2). Проверим взаимную однозначность отображения ψ, т. е. для любого элемента $y_2 \in Y_2$ существует единственный элемент $y_1 \in Y_1$, такой, что $\psi(y_1) = y_2$. Действительно, так как множество Z_2 является ρ_2–всюду плотным в Y_2, то для любого $y_2 \in Y_2$ существует последовательность

$$\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z_2,$$

такая, что

$$\rho_2(w_n, y_2) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определим последовательность

$$z_n = \varphi^{-1}(w_n) \in Z_1.$$

Так как по утверждению 1.5.2 отображение φ^{-1} является изометрией, то последовательность z_n является ρ_1–фундаментальной в полном метрическом пространстве (Y_1, ρ_1). Следовательно, существует элемент $y_1 \in Y_1$, такой, что

$$\rho_1(z_n, y_1) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда по определению отображения ψ получаем $\psi(y_1) = y_2$. При этом для любого элемента $\tilde{y}_1 \in Y_1$, отличного от y_1, справедливо равенство

$$\rho_2\left(\psi(\tilde{y}_1), \psi(y_1)\right) = \rho_1(\tilde{y}_1, y_1) > 0.$$

Действительно, так как множество Z_1 является ρ_1–всюду плотным в Y_1, то существует последовательность

$$\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z_1,$$

такая, что

$$\rho_1(\tilde{z}_n, \tilde{y}_1) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда получаем:

$$\rho_2\left(\psi(\tilde{y}_1), \psi(y_1)\right) = \lim_{n\to\infty} \rho_2\left(\varphi(\tilde{z}_n), \varphi(z_n)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \rho_1(\tilde{z}_n, z_n) = \rho_1(\tilde{y}_1, y_1) > 0.$$

Следовательно, отображение ψ разные элементы множества Y_1 переводит в разные элементы множества Y_2. Таким образом, установлена взаимная однозначность отображения ψ. При этом также показано, что для любых элементов $y_1, \tilde{y}_1 \in Y_1$ выполнено равенство

$$\rho_2\left(\psi(\tilde{y}_1), \psi(y_1)\right) = \rho_1(\tilde{y}_1, y_1).$$

Следовательно, отображение ψ является изометрией. Таким образом, пополнения (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2) метрического пространства (X, ρ) изометричны. ■

Теорема 1.5.10. (Хаусдорф) *Для любого неполного метрического пространства существует пополнение.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — неполное метрическое пространство. Пусть F — множество всех фундаментальных последовательностей из X. Введём на множестве F отношение эквивалентности следующим образом. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\} \in F$ эквивалентна последовательности $\{y_n\} \in F$, если

$$\rho(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В этом случае будем писать

$$\{x_n\} \sim \{y_n\}.$$

Покажем, что введёное на множестве F отношение эквивалентности обладает свойствами: симметрией, транзитивностью и эквивалентностью любого элемента F самому себе.

Действительно, если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, то

$$\rho(y_n, x_n) = \rho(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $\{y_n\} \sim \{x_n\}$, и симметрия доказана.

Если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то по неравенству треугольника находим

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, получаем $\{x_n\} \sim \{z_n\}$, т. е. транзитивность доказана.

Свойство $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ очевидно, так как $\rho(x_n, x_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Разобьём множество F на классы эквивалентных фундаментальных последовательностей и определим множество Y как совокупность классов эквивалентных фундаментальных последовательностей из (X, ρ). Введём на множестве Y метрику d следующим образом. Для любых $y, \tilde{y} \in Y$ рассмотрим произвольные последовательности $\{x_n\} \in y$ и $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{y}$. Тогда определим

$$d(y, \tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Требуется доказать корректность этого определения, т. е. проверить существование указанного предела и его независимость от выбора последовательностей из классов эквивалентности y и $\tilde{y}$. После этого требуется проверить для d аксиомы метрики из определения 1.2.1.

Покажем, что для любых последовательностей $\{x_n\} \in y \in Y$ и $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{y} \in Y$ существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Для этого проверим фундаментальность числовой последовательности $\{\rho(x_n, \tilde{x}_n)\}$. По неравенству треугольника для любых $n, m \in \mathbb{N}$ находим

$$\rho(x_n, \tilde{x}_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \rho(x_m, \tilde{x}_m).$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\bigl|\rho(x_n, \tilde{x}_n) - \rho(x_m, \tilde{x}_m)\bigr| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m).$$

Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ являются фундаментальными в метрическом пространстве (X, ρ), то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнены неравенства

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых $n, m > N(\varepsilon)$ получаем неравенство

$$\bigl|\rho(x_n, \tilde{x}_n) - \rho(x_m, \tilde{x}_m)\bigr| < \varepsilon,$$

и тем самым доказываем фундаментальность числовой последовательности $\{\rho(x_n, \tilde{x}_n)\}$. Следовательно, в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности существует числовой предел

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Покажем независимость этого предела от выбора последовательностей из классов эквивалентности y и $\tilde{y}$. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_n^*\}$ принадлежат классу y, а последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ и $\{\tilde{x}_n^*\}$ принадлежат классу $\tilde{y}$. Тогда по определению

$$\{x_n\} \sim \{x_n^*\} \quad \text{и} \quad \{\tilde{x}_n\} \sim \{\tilde{x}_n^*\},$$

т. е.

$$\rho(x_n, x_n^*) \to 0 \quad \text{и} \quad \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как по неравенству треугольника справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, \tilde{x}_n) &\leqslant \rho(x_n, x_n^*) + \rho(x_n^*, \tilde{x}_n^*) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*),\\
\rho(x_n^*, \tilde{x}_n^*) &\leqslant \rho(x_n, x_n^*) + \rho(x_n, \tilde{x}_n) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*),
\end{aligned}$$

то получаем

$$\bigl|\rho(x_n, \tilde{x}_n) - \rho(x_n^*, \tilde{x}_n^*)\bigr| \leqslant \rho(x_n, x_n^*) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n^*, \tilde{x}_n^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n),$$

т. е. доказана корректность определения функции d.

Проверим аксиомы метрики для функции d. По определению d для любых $y, \tilde{y} \in Y$ имеем $d(y, \tilde{y}) \geqslant 0$. Пусть $d(y, \tilde{y}) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда для любых последовательностей $\{x_n\} \in y$ и $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{y}$ выполнено равенство

$$0 = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Следовательно, $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$, что равносильно равенству $y = \tilde{y}$. Далее имеем

$$d(y, \tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(\tilde{x}_n, x_n) = d(\tilde{y}, y).$$

Проверим для d неравенство треугольника. Рассмотрим произвольные $y, \tilde{y}, \hat{y} \in Y$. Тогда для любых последовательностей $\{x_n\} \in y$, $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{y}$ и $\{\hat{x}_n\} \in \hat{y}$ получаем

$$d(y, \tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} \big(\rho(x_n, \hat{x}_n) + \rho(\tilde{x}_n, \hat{x}_n)\big) = \\ = d(y, \hat{y}) + d(\tilde{y}, \hat{y}).$$

Таким образом, проверены все аксиомы метрики для функции d. Получили метрическое пространство (Y, d), состоящее из классов эквивалентных фундаментальных последовательностей из (X, ρ). Покажем, что метрическое пространство (Y, d) является пополнением метрического пространства (X, ρ).

Для любого элемента $x \in X$ обозначим через $s(x)$ класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из X, содержащий стационарную последовательность $x_n = x$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Определим множество

$$Z = \{\ s(x)\ \mid x \in X\ \} \subset Y.$$

Покажем, что метрические пространства (X, ρ) и (Z, d) изометричны. Рассмотрим отображение $\varphi\colon X \to Z$ вида $\varphi(x) = s(x)$ для любого $x \in X$. Тогда по определению $\varphi(X) = Z$, причём для любых элементов $x, \tilde{x} \in X$ находим

$$d\big(s(x), s(\tilde{x})\big) = \lim_{n \to \infty} \rho(x, \tilde{x}) = \rho(x, \tilde{x}).$$

Следовательно, отображение φ является изометрией.

Покажем, что множество Z является d–всюду плотным в Y. Рассмотрим произвольный элемент $y \in Y$ и любое $\varepsilon > 0$. Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\} \in y$. В силу фундаментальности этой последовательности в метрическом пространстве (X, ρ) существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m \geqslant N$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

Определим элемент $s(x_N) \in Z$. Тогда

$$d\left(s(x_N), y\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_N, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $[Z]_{\tau_d} = Y$, что и требовалось.

Покажем, наконец, что метрическое пространство (Y, d) является полным. Рассмотрим произвольную d–фундаментальную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено $d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Так как множество Z является d–всюду плотным в множестве Y, то для любого номера n существует элемент $x_n \in X$, такой, что

$$d\left(s(x_n), y_n\right) < \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset X$. Покажем, что она является ρ–фундаментальной. Действительно, для любых номеров

$$n, m > M(\varepsilon) = \max\left\{N\left(\tfrac{\varepsilon}{3}\right), \left[\tfrac{3}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$$

получаем

$$\rho(x_n, x_m) = d\left(s(x_n), s(x_m)\right) \leqslant$$

$$\leqslant d\left(s(x_n), y_n\right) + d\left(s(x_m), y_m\right) + d\left(y_n, y_m\right) <$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Следовательно, существует класс эквивалентных фундаментальных последовательностей $y \in Y$, такой, что последовательность $\{x_n\} \in y$. Покажем, что

$$d(y_n, y) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Действительно, для любого $n > M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ имеем

$$d(y_n, y) \leqslant d\left(s(x_n), y_n\right) + d\left(s(x_n), y\right) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что d–фундаментальная последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ сходится к элементу $y \in Y$. Следовательно, метрическое пространство (Y, d) является полным.

Итак, для метрического пространства (Y, d) проверено определение 1.5.6 пополнения метрического пространства (X, ρ). ■

Пример 1.5.11. Рассмотрим линейное пространство ℓ_1, состоящее из всех числовых последовательностей, компоненты которых образуют абсолютно сходящийся ряд (см. пример 1.4.15), метрика в котором имеет вид

$$\rho(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k) - y(k)| \qquad x, y \in \ell_1.$$

Как показано в примере 1.4.15, это метрическое пространство является неполным. Определим метрическое пространство c_0, состояшее из всех бесконечно малых числовых последовательностей, с той же метрикой ρ. Покажем, что пополнением метрического пространства (ℓ_1, ρ) является метрическое пространство (c_0, ρ).

Докажем полноту метрического пространства (c_0, ρ). Как показано в примере 1.4.12, метрическое пространство (ℓ_∞, ρ), состоящее из всех ограниченных последовательностей, является полным. Так как $c_0 \subset \ell_\infty$, то произвольная ρ–фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ сходится в (ℓ_∞, ρ) к некоторому элементу $z \in \ell_\infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, z) < \varepsilon.$$

Осталось показать, что $z \in c_0$, т. е. последовательность z является бесконечно малой. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем вложение $x_n \in$ $\in c_0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует номер $K_n(\varepsilon)$, такой, что для любого $k > K_n(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$|x_n(k)| < \varepsilon.$$

Тогда для номера $n = N(\varepsilon) + 1$ и любого $k > K_n(\varepsilon)$ находим

$$|z(k)| \leqslant |z(k) - x_n(k)| + |x_n(k)| < \rho(z, x_n) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность z является бесконечно малой. Таким образом, доказана полнота метрического пространства (c_0, ρ).

Покажем, что множество ℓ_1 является ρ–всюду плотным в c_0. Действительно, для любого $x \in c_0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер

$K(x,\varepsilon)$, такой, что $|x(k)| < \varepsilon$ для любого $k > K(x,\varepsilon)$. Определим элемент $z \in \ell_1$ следующим образом:

$$z(k) = \begin{cases} x(k), & 1 \leqslant k \leqslant K\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ 0, & k > K\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{cases}$$

Тогда получаем

$$\rho(x,z) = \sup_{k > K\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)} |x(k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad O_\varepsilon(x) \cap \ell_1 \neq \varnothing.$$

Следовательно, любая точка $x \in c_0$ является точкой прикосновения множества $\ell_1 \subset c_0$, т. е.

$$[\ell_1]_{\tau_\rho} = c_0.$$

Тогда, в силу замечания 1.5.7 метрическое пространство (c_0, ρ) является пополнением метрического пространства (ℓ_1, ρ). ▲

1.6. Принцип сжимающих отображений Банаха

Определение 1.6.1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение $f\colon X \to X$ называется сжимающим, если существует число $L \in [0,1)$, такое, что для любых элементов $x, y \in X$ выполнено неравенство*

$$\rho\left(f(x), f(y)\right) \leqslant L\rho(x,y).$$

Определение 1.6.2. *Пусть X — некоторое множество, отображение $f\colon X \to X$. Точка $x_0 \in X$ называется неподвижной для отображения f, если*

$$f(x_0) = x_0.$$

Теорема 1.6.3. (Банах) *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, отображение $f\colon X \to X$ является сжимающим. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть отображение f является сжимающим с константой $L \in [0,1)$. Возьмём любой элемент $x_1 \in X$ и определим последовательность

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\rho(x_{n+1}, x_{n+m}) \leqslant L^n \rho(x_1, x_m) \leqslant L^n \sum_{k=1}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant$$
$$\leqslant L^n \sum_{k=1}^{m-1} L^{k-1} \rho(x_1, x_2) \leqslant \frac{L^n}{1-L} \rho(x_1, x_2).$$

Так как $0 \leqslant L < 1$, то $L^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$L^n \rho(x_1, x_2) < (1 - L)\varepsilon.$$

Тогда для любых $n > N(\varepsilon)$ и $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\rho(x_{n+1}, x_{n+m}) < \varepsilon,$$

что означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в полном метрическом пространстве (X, ρ). Следовательно, существует элемент $x_0 \in X$, такой, что

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда получаем

$$\rho\left(f(x_0), x_0\right) \leqslant \rho\left(f(x_0), x_n\right) + \rho(x_0, x_n) \leqslant L\rho(x_0, x_{n-1}) + \rho(x_0, x_n) \to 0$$

при $n \to \infty$. Это означает, что $\rho(f(x_0), x_0) = 0$, т. е. выполнено равенство $f(x_0) = x_0$. Следовательно, элемент x_0 является неподвижной точкой отображения f.

Покажем единственность неподвижной точки сжимающего отображения f. Пусть элементы $y, z \in X$ являются неподвижными точками отображения f. Тогда находим, что

$$\rho(y, z) = \rho\left(f(y), f(z)\right) \leqslant L\rho(y, z), \quad \Rightarrow \quad (1 - L)\rho(y, z) \leqslant 0.$$

Так как $1 - L > 0$, то получаем $\rho(y, z) = 0$, т. е. $y = z$. Следовательно, сжимающее отображение имеет одну неподвижную точку. ■

Применим принцип сжимающих отображений Банаха для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Задача 1.6.4. Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество, функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём для любого компакта $K \subset G$ существует число $L_K > 0$, такое, что для любых $(t, x) \in K$ и $(t, y) \in K$ выполнено неравенство

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L_K |x - y|.$$

Доказать, что для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует $\delta_0 > 0$, такое, что на промежутке

$$I_0 = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$$

существует единственное решение задачи Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big) \quad \forall\, t \in I_0 \quad \text{и} \quad x(t_0) = x_0.$$

Решение. Для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ в силу открытости множества G существует число $r_0 > 0$, такое, что для любой точки $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ вида $|t - t_0| \leqslant r_0$ и $|x - x_0| \leqslant r_0$ выполнено вложение $(t, x) \in G$. Определим компакт

$$K_0 = \left\{ \ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \ \middle| \ |t - t_0| \leqslant r_0, \ \ |x - x_0| \leqslant r_0 \ \right\} \subset G.$$

По условию существует $L_0 > 0$, такое, что для любых $(t, x) \in K_0$ и $(t, y) \in K_0$ выполнено неравенство

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L_0 |x - y|.$$

Определим число

$$M_0 = \max_{(t,x) \in K_0} |f(t,x)|.$$

Пусть

$$\delta_0 = \min\{\frac{r_0}{M_0 + 1}, \frac{1}{L_0 + 1}\} \leqslant r_0.$$

Рассмотрим множество X_0, состоящее из всех непрерывных на отрезке I_0 функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, такими, что их графики лежат в компакте K_0. Метрику в множестве X_0 определим по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{t \in I_0} |x(t) - y(t)|.$$

Тогда метрическое пространство (X_0, ρ) является полным. Действительно, ρ–фундаментальность функциональной последовательности $\{x_n\}$ из X_0 равносильна равномерной фундаментальности $\{x_n\}$ на отрезке I_0. Следовательно, в силу критерия Коши равномерной сходимости на I_0 получаем равномерную сходимость $\{x_n\}$ к функции z на отрезке I_0, т. е.

$$\rho(x_n, z) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При этом функция z будет непрерывной на I_0 как равномерный предел непрерывных, а её график будет лежать в K_0 в силу замкнутости этого множества в $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, $z \in X_0$, что и требовалось.

Определим отображение $F\colon X_0 \to X_0$ вида

$$\big(F(x)\big)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \qquad \forall\, t \in I_0.$$

Заметим, что для любых $x \in X_0$ и $t \in I_0$ выполнено неравенство

$$\Big|\big(F(x)\big)(t) - x_0\Big| \leqslant \delta_0 M_0 \leqslant r_0.$$

Тогда для любого $x \in X_0$ график функции $F(x)$ лежит в K_0, т. е.

$$F(x) \in X_0 \qquad \forall\, x \in X_0.$$

Далее, для любых $x, y \in X_0$ получаем неравенство

$$\rho\big(F(x), F(y)\big) \leqslant \delta_0 L_0 \rho(x, y),$$

причём $0 \leqslant \delta_0 L_0 < 1$. Следовательно, отображение F является сжимающим с константой $\delta_0 L_0$. Тогда в силу принципа сжимающих отображений Банаха существует единственная неподвижная точка $\hat{x} \in X_0$ отображения F. В силу непрерывности функции $\hat{x}$ на отрезке I_0 и равенства

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \hat{x}(\tau))\, d\tau \qquad \forall\, t \in I_0$$

получаем, что функция $\hat{x}$ является непрерывно дифференцируемой на I_0, причём для любого $t \in I_0$ выполнено равенство

$$\frac{\hat{x}(t)}{dt} = f\big(t, \hat{x}(t)\big).$$

Так как $\hat{x}(t_0) = x_0$, то получаем, что функция $\hat{x}$ является решением рассматриваемой задачи Коши. Если же $x \in X_0$ также является решением задачи Коши, то для любого $t \in I_0$ по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dx(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \big(F(x)\big)\,(t),$$

т. е. $x = F(x)$. Таким образом, x является неподвижной точкой отображения F, что означает $x = \hat{x}$ в силу единственности неподвижной точки отображения F. ▲

Глава 2

Компактные множества в топологических и метрических пространствах

2.1. Компактные множества в топологических пространствах

Определение 2.1.1. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Открытым покрытием множества S называется семейство τ-открытых множеств*

$$\left\{ V_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$$

(здесь $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов), такое, что выполнено вложение

$$S \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

Определение 2.1.2. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $S \subset X$ называется*

1) *компактным, если любое открытое покрытие множества S содержит конечное подпокрытие;*

2) *счётно-компактным, если любое счётное открытое покрытие множества S содержит конечное подпокрытие;*

3) *секвенциально компактным, если любая последовательность элементов множества S содержит подпоследовательность, сходящуюся по топологии τ к некоторому элементу из S.*

Утверждение 2.1.3. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$ является компактным. Тогда множество S является счётно-компактным.*

Доказательство. Сразу следует из определения 2.1.2. ■

Утверждение 2.1.4. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$ является секвенциально компактным. Тогда множество S является счётно-компактным.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что S не является счётно-компактным. Тогда существует счётное открытое покрытие

$$\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$$

множества S, не имеющее конечного подпокрытия. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in S$, такое, что

$$x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n} V_k.$$

В силу секвенциальной компактности множества S последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ к точке $x_0 \in S$, т. е.

$$x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x_0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Так как $\mathcal{P}$ является покрытием множества S, то существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$, такой, что

$$x_0 \in V_{k_0}.$$

Тогда существует номер $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $m \geqslant m_0$ выполнено вложение

$$x_{n_m} \in V_{k_0}.$$

Так как $n_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то $n_m \geqslant k_0$ при всех достаточно больших $m \geqslant m_0$. Но тогда при всех таких m выполнено соотношение

$$x_{n_m} \notin \bigcup_{k=1}^{n_m} V_k \supset V_{k_0},$$

т. е. $x_{n_m} \notin V_{k_0}$. Получили противоречие. ■

Определение 2.1.5. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Точка $x \in X$ называется предельной точкой множества S, если в любой её окрестности найдется точка множества S, отличная от x, т. е. для любой окрестности $U(x) \in \tau$ точки x существует точка $y \in U(x) \cap S$, такая, что $y \neq x$.*

Утверждение 2.1.6. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$ является компактным, или счётно-компактным, или секвенциально компактным. Тогда любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку.*

Доказательство. В силу утверждений 2.1.3 и 2.1.4 достаточно проверить это утверждение для счётно-компактного множества S. Итак, пусть множество S счётно-компактно. Покажем, что любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку. Предположим, рассуждая от противного, что ни одна точка из S не является предельной для множества E. В силу бесконечности множества E существует счётное подмножество $E_1 \subset E$, которое, очевидно, также лишено предельных точек в S. Следовательно, для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, такая, что

$$E_1 \cap \big(U(x) \backslash \{x\}\big) = \varnothing.$$

Тогда для любого $x \in S \backslash E_1$ указанная окрестность $U(x) \in \tau$ удовлетворяет условию $E_1 \cap U(x) = \varnothing$, т. е.

$$S \cap U(x) \subset S \backslash E_1.$$

Определим множество

$$V = \bigcup_{x \in S \backslash E_1} U(x).$$

По определению 1.1.1 множество V является τ-открытым. При этом справедливо соотношение

$$S \backslash E_1 \subset S \cap V = \bigcup_{x \in S \backslash E_1} \big(S \cap U(x)\big) \subset S \backslash E_1.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$S \cap V = S \backslash E_1.$$

Определим счётное открытое покрытие $\mathcal{P}$ множества S следующим образом:

$$\mathcal{P} = \{\ V\ ,\ U(x)\ \mid\ x \in E_1\ \}.$$

По построению, удаление из $\mathcal{P}$ любого его элемента $U(x)$ для $x \in E_1$ приведёт к тому, что оставшийся набор открытых множеств перестанет быть покрытием S. Действительно, для любых точек $x, y \in E_1$ вида $x \neq y$ справедливо

$$x \notin U(y).$$

Так как $S \cap V = S \backslash E_1$, то для $x \in E_1$ выполнено

$$x \notin V.$$

Следовательно, для любого $x \in E_1$ выполнено

$$x \notin \left(\bigcup_{\substack{y \in E_1 \\ y \neq x}} U(y) \right) \cup V,$$

что и требовалось. Если же из $\mathcal{P}$ удалить только V, то оставшийся набор окрестностей останется счётным. Таким образом, счётное покрытие $\mathcal{P}$ не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие со счётной компактностью множества S. ■

Пример 2.1.7. Приведём пример топологического пространства, которое не является счётно-компактным (а значит, также не является компактным или секвенциально компактным), любое подмножество которого имеет в нём предельную точку. Этот пример предложил студент 076 группы МФТИ Р. Таханов. Пусть $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Определим топологию τ в $\mathbb{N}$ следующим образом. Объявим базой топологии τ семейство

$$\beta = \left\{ \, V_k = \{2k-1, 2k\} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \, \right\},$$

т. е. любое множество V_k из семейства β состоит из двух чисел $2k-1$ и $2k$ для $k \in \mathbb{N}$. Так как разные множества из β не пересекаются, а объединение всех элементов семейства β совпадает с $\mathbb{N}$, то по теореме 1.1.43 получаем, что β действительно является базой некоторой топологии τ. Иными словами, множество $V \in \tau$, если и только если число $2k \in V$ тогда и только тогда, когда $2k-1 \in V$, где $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\mathbb{N}$ не является счётно-компактным, так как его счётное открытое покрытие $\{V_k\}_{k=1}^{+\infty}$, не имеет конечного подпокрытия. Тем не менее, любое непустое подмножество $E \subset \mathbb{N}$ имеет в $(\mathbb{N}, \tau)$ предельную точку. Действительно, если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ точка $2k \in E$, то $2k-1$ является предельной для E, так как любая окрестность точки $2k-1$ содержит точку $2k \in E$, и $2k \neq 2k-1$. Аналогично, если $2k-1 \in E$, то $2k$ является предельной для E, так как любая окрестность точки $2k$ содержит точку $2k-1 \in E$, и $2k-1 \neq 2k$. ▲

Определение 2.1.8. *Будем говорить, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости, если для любых различных точек $x, y \in X$, т. е. $x \neq y$, существуют их окрестности $U(x) \in \tau$ и $U(y) \in \tau$, такие, что $x \notin U(y)$ и $y \notin U(x)$.*

Утверждение 2.1.9. *Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости тогда и только тогда, когда любое его одноточечное подмножество является замкнутым.*

Доказательство. Действительно, для любого $x \in X$ замкнутость одноточечного подмножества $\{x\}$ равносильна по определению 1.1.10 открытости его дополнения. Это в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда для любого $y \neq x$ существует окрестность $U(y) \in \tau$, такая, что $x \notin U(y)$. Последнее совпадает с первой аксиомой отделимости. ■

З а м е ч а н и е 2.1.10. В монографии [1] понятие счётной компактности определяется иначе: множество S называется счётно-компактным по [1], если любое его бесконечное подмножество имеет в S предельную точку (см. [1, гл. II, § 6, с. 103]). Теорема 9 из [1, гл. II, § 6, с. 103] вроде бы устанавливает эквивалентность между определением счётной компактности из [1] и определением 2.1.2 счётной компактности через счётное открытое покрытие. Однако, как видно из примера 2.1.7, наличие предельной точки у любого бесконечного подмножества не влечёт наличие конечного подпокрытия у произвольного счётного покрытия. Ошибка в доказательстве упомянутой теоремы 9 из [1, гл. II, § 6, с. 103] заключается в том, что предельная точка x_0 последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящей из различных точек и не содержащей x_0, может и не быть предельной точкой "хвоста" этой последовательности $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ (см. детали доказательства теоремы 9 в [1, гл. II, § 6, с. 104]). Это было бы справедливо, если бы выполнялась первая аксиома отделимости. Действительно, в этом случае конечное множество $F_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ является замкнутым в силу утверждения 2.1.9 как конечное объединение замкнутых одноточечных множеств. Следовательно, для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 множество $V(x_0) = U(x_0) \cap F^c$ является открытым и содержит x_0. Поэтому $V(x_0)$ — окрестность точки x_0, не содержащая первые n элементов последовательности. Однако $V(x_0)$ содержит хотя бы один элемент последовательности, который таким образом имеет номер, больший n, т. е. принадлежит "хвосту". При отсутствии первой аксиомы отделимости, например, в топологическом пространстве из примера 2.1.7, последовательность различных точек $x_n = n+1$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предельную точку $x_0 = 1$, так как любая окрестность x_0 содержит x_1. Однако уже множество $\{x_2, x_3, \ldots\}$ не имеет x_0 в качестве предельной точки. □

Выясним, при каких условиях счётно-компактное множество $S \subset \subset X$ является секвенциально компактным.

У т в е р ж д е н и е 2.1.11. *Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости и аксиоме счётности (см. определение 1.1.37). Тогда всякое счётно-компактное множество $S \subset X$ является секвенциально компактным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, рассуждая от противного, что счётно-компактное множество $S \subset X$ не является секвенциально компактным. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ $\subset S$, не имеющая сходящейся к элементу S подпоследовательности. Покажем, что в этом случае для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, содержащая не более конечного набора элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Действительно, пусть существует $x \in S$, любая окрестность которого содержит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счётная локальная база точки x. Определим

$$W_m = \bigcap_{k=1}^{m} U_k.$$

Ясно, что $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ также является локальной базой точки x, при этом

$$W_{m+1} \subset W_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Так как в окрестности W_m точки x находится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_m, такая, что

$$x_{n_m} \in W_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Получили подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ рассматриваемой последовательности, которая сходится к x. Действительно, для любой окрестности $V(x) \in \tau$ точки x существует $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что

$$W_{m_0} \subset V(x).$$

Тогда для любого $m \geqslant m_0$ выполнено

$$x_{n_m} \in W_m \subset W_{m_0} \subset V(x), \quad \text{т. е.} \quad x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Получили противоречие с отсутствием у рассматриваемой последовательности сходящейся подпоследовательности.

Итак, для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, содержащая не более конечного набора элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для любого $x \in S$ выделим все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, входящие в $U(x)$ и не совпадающие с x. Обозначим их через $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{N}$. Так как в силу первой аксиомы отделимости для любого $k \in \overline{1,N}$ одноточечное множество $\{x_{n_k}\}$ замкнуто, то существует окрестность $U_k(x) \in \tau$ точки x, такая, что

$$x_{n_k} \notin U_k(x).$$

Тогда окрестность

$$V(x) = U(x) \cap U_1(x) \cap \ldots \cap U_N(x) \in \tau$$

точки x не содержит элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за исключением, быть может, самой точки x. Поэтому для любого

$$x \in S \backslash \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = E$$

его окрестность $V(x)$ не содержит ни одного элемента последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. справедливо вложение

$$S \cap V(x) \subset E.$$

Определим множество

$$V_0 = \bigcup_{x \in E} V(x).$$

По определению 1.1.1 множество V_0 является открытым, причём справедливо соотношение

$$E \subset S \cap V_0 = \bigcup_{x \in E} \big(S \cap V(x)\big) \subset E.$$

Следовательно,

$$E = S \backslash \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = S \cap V_0.$$

Далее для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $V_n = V(x_n)$. Определим счётное открытое покрытие

$$\mathcal{P} = \{V_n\}_{n=0}^{\infty}$$

множества S, которое по построению не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие со счётной компактностью множества S. ■

Замечание 2.1.12. Оказывается, можно не требовать выполнения первой аксиомы отделимости для топологического пространства (X, τ), чтобы получить результат утверждения 2.1.11. Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет только аксиоме счётности. Тогда всякое счётно-компактное множество $S \subset X$ является секвенциально компактным. Следующее доказательство этого факта предложил студент 972 группы К. Шестаков.

Пусть множество $S \subset X$ является счётно-компактным. Тогда утверждаем, что для любого счётного множества $M \subset S$ существует $x \in S$, такое, что в любой окрестности $U(x)$ есть бесконечно много элементов множества M. Предположим, рассуждая от противного, что это не так. Тогда для любого $x \in S$ существует окрестность $V(x)$, такая, что пересечение $V(x) \cap M$ конечно или пусто. Для любого конечного множества $F \subset M$ рассмотрим множество

$$X_F = \left\{\, x \in S \quad \middle| \quad V(x) \cap M = F \,\right\},$$

и определим открытое множество

$$W_F = \bigcup_{x \in X_F} V(x).$$

Рассмотрим также множество

$$X_0 = \{\, x \in S \quad | \quad V(x) \cap M = \varnothing \,\},$$

и определим открытое множество

$$W_0 = \bigcup_{x \in X_0} V(x).$$

Тогда совокупность множеств

$$\mathcal{P} = \{\, W_0,\ W_F \quad | \quad F \subset M \text{ и } F - \text{конечное множество} \,\}$$

образуют счётное открытое покрытие множества S. Действительно, по предположению, для любого $x \in S$ пересечение $V(x) \cap M$ конечно или пусто. Если $V(x) \cap M = F$ — конечное множество, то $x \in W_F$, если же $V(x) \cap M = \varnothing$, то $x \in W_0$. Счётность покрытия $\mathcal{P}$ следует из счётности совокупности всех конечных подмножеств счётного множества M. Тем не менее, любая конечная совокупность открытых множеств покрытия $\mathcal{P}$ по построению содержит не более конечного набора элементов счётного множества M, и поэтому не образует конечного покрытия даже множества M. Итак, построено счётное открытое покрытие множества S, не имеющее конечного подпокрытия, что противоречит условию счётной компактности S.

Таким образом, установлено, что для любого счётного множества $M \subset S$ существует $x \in S$, такое, что в любой окрестности $U(x)$ есть бесконечно много элементов множества M. Теперь рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Пусть

$$M = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

множество её значений. Если M конечно, то у рассматриваемой последовательности существует стационарная подпоследовательность, которая очевидно является сходящейся в S. Если же множество M счётно, то для него существует точка $x \in S$, в любой окрестности которой есть бесконечно много элементов множества M, т. е. элементов рассматриваемой последовательности. Пользуясь аксиомой счётности, рассмотрим локальную базу $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ точки x, такую, что

$$W_{m+1} \subset W_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Так как в любой окрестности W_m точки x находится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_m, такая, что

$$x_{n_m} \in W_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Получили подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ рассматриваемой последовательности, которая, как было показано в доказательстве утверждения 2.1.11, сходится к x. Таким образом, секвенциальная компактность множества S установлена. $\square$

Выясним, при каких условиях множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является счётно-компактным или секвенциально компактным.

Утверждение 2.1.13. *Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости. Тогда всякое множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является счётно-компактным.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset X$ таково, что любое его бесконечное подмножество имеет в нём предельную точку. Предположим, что множество S не является счётно-компактным. Тогда существует счётное открытое покрытие

$$\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$$

множества S, которое не имеет конечного подпокрытия. Следовательно, для любого номера n существует $x_n \in S$, такое, что

$$x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n} V_k.$$

Если множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечно, то существует стационарная подпоследовательность

$$x_{n_m} = x_0 \in S.$$

Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием S, то существует номер k_0, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер m_0, такой, что для всех $m > m_0$ выполнено неравенство $n_m > k_0$. Следовательно,

$$x_{n_m} = x_0 \in V_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n_m} V_k,$$

т. е. получили противоречие.

Если же множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно, то существует подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, целиком состоящая из различных точек, т. е.

$$x_{n_m} \neq x_{n_k} \quad \text{при} \quad m \neq k.$$

По условию бесконечное множество

$$E = \{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$$

имеет в S предельную точку x_0. Так как все элементы множества E различны, то без ограничения общности можно считать, что $x_0 \notin$ $\in E$. Действительно, так как в любой окрестности x_0 есть элемент множества E, отличный от x_0, то точка x_0 является предельной и для множества $E \backslash \{x_0\}$. Следовательно, если существует номер s_0, такой, что $x_0 = x_{n_{s_0}}$, то исключим элемент $x_{n_{s_0}}$ из рассматриваемой последовательности. Итак, далее считаем, что

$$x_0 \neq x_{n_m} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием S, то существует номер k_0, такой, что

$$x_0 \in V_{k_0}.$$

Тогда существует номер m_0, такой, что для всех $m > m_0$ выполнено неравенство $n_m > k_0$. Рассмотрим множество

$$F_0 = \{\, x_{n_1}, \ldots, x_{n_{m_0}} \,\}.$$

В силу первой аксиомы отделимости множество F_0 является замкнутым как конечное объединение замкнутых одноточечных множеств. Так как $x_0 \notin F_0$ то существует окрестность $U(x_0) \in \tau$, такая, что

$$U(x_0) \cap F_0 = \varnothing.$$

Так как x_0 является предельной точкой множества E, то в окрестности

$$W_0 = U(x_0) \cap V_{k_0} \in \tau$$

точки x_0 находится хотя бы один элемент множества E. Следовательно, существует номер m, такой, что $x_{n_m} \in W_0$. Так как первые m_0 элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ не лежат в $U(x_0)$, то получаем, что $m > m_0$. Следовательно, справедливо неравенство $n_m > k_0$, и при этом выполнено вложение

$$x_{n_m} \in W_0 \subset V_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n_m} V_k,$$

т. е. получили противоречие. ■

Утверждение 2.1.14. *Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости и аксиоме счётности. Тогда всякое множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является секвенциально компактным.*

Доказательство. Сазу следует из утверждений 2.1.13 и 2.1.11. ■

Пример 2.1.15. Покажем что свойство секвенциальной компактности (и, поэтому, счётной компактности) множества S топологического пространства (X, τ) не влечёт топологическую компактность S. Рассмотрим пространство X, состоящее из всех вещественных функций, определённых на отрезке $[0, 1]$, оснащённое топологией τ поточечной сходимости (см. пример 1.1.46). Пусть S — подмножество X, состоящее из всевозможных функций

$$x\colon [0, 1] \to [0, 1],$$

каждая из которых равна нулю за пределами некоторого счётного подмножества $M(x)$ отрезка $[0, 1]$. Иными словами, любая функция $x \in S$ может принимать значения из $(0, 1]$ на не более чем счётном подмножестве отрезка $[0, 1]$. Покажем, что S не является топологическим компактом в пространстве (X, τ). Действительно, рассмотрим функцию $x_0 \in S$, всюду на $[0, 1]$ равную нулю, и для любого $t \in [0, 1]$ рассмотрим её τ–окрестность вида

$$V(x_0, t, 1) = \left\{ \ z \in X \quad \middle| \quad |z(t)| < 1 \ \right\}.$$

Тогда вложение $z \in S \cap V(x_0, t, 1)$ равносильно соотношениям $z \in S$ и $0 \leqslant z(t) < 1$. Семейство τ–открытых множеств

$$\mathcal{P} = \left\{ \ V(x_0, t, 1) \quad \middle| \quad t \in [0, 1] \ \right\}$$

образует τ–открытое покрытие множества S, так как любая функция $z \in S$ равна нулю на любом аргументе $t \in [0,1] \backslash M(z) \neq \varnothing$, и поэтому справедливо вложение

$$z \in V(x_0, t, 1) \quad \forall\, t \in [0,1] \backslash M(z).$$

Тем не менее, для любого конечного подсемейства семейства $\mathcal{P}$ вида $V(x_0, t_1, 1), \ldots, V(x_0, t_N, 1)$ существует функция $z \in S$, значение которой на любом аргументе t_i равно единице, а на остальных аргументах $t \in [0,1] \backslash \{t_1, \ldots, t_N\}$ её значения равны нулю. Такая функция z, очевидно, не принадлежит ни одному множеству $V(x_0, t_i, 1)$ для $i \in \overline{1, N}$. Следовательно, открытое покрытие $\mathcal{P}$ множества S не содержит конечного подпокрытия.

Теперь покажем, что множество S является секвенциальным компактом (и, поэтому, счётным компактом в силу утверждения 2.1.4). Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Рассмотрим числовое множество

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(x_n) \subset [0,1].$$

Множество M является счётным как счётное объединение счётных множеств. Пусть $M = \{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$. Заметим, что $x_n(t) = 0$ для любого номера $n \in \mathbb{N}$ и всех аргументов $t \in [0,1] \backslash M$. Рассмотрим числовую последовательность $x_n(t_1)$. Её значения лежат на отрезке $[0,1]$, поэтому, по теореме Больцано-Вейерштрасса, она имет сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k(1)}(t_1)$. Далее, рассмотрим числовую последовательность $x_{n_k(1)}(t_2)$. Так как её значения лежат на отрезке $[0,1]$, то опять она имеет сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k(2)}(t_2)$. При этом последовательносить $x_{n_k(2)}(t_1)$ осталась сходящейся как подпоследовательность сходящейся последовательности $x_{n_k(1)}(t_1)$. Теперь, рассуждая по индукции, предположим, что для $m \in \mathbb{N}$ мы построили строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k(m)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой являются сходящимися последовательности $x_{n_k(m)}(t_i)$ при всех $i \in \overline{1, m}$. Тогда рассматриваем числовую последовательность $x_{n_k(m)}(t_{m+1})$, значения которой лежат на отрезке $[0,1]$. Она имеет сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k(m+1)}(t_{m+1})$. При этом последовательностим $x_{n_k(m+1)}(t_i)$ для всех $i \in \overline{1, m}$ остались сходящимися как подпоследовательности сходящихся последовательностей $x_{n_k(m)}(t_i)$. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$. Она является строго возрастающей, так как для любого $m \in \mathbb{N}$ по построению справедливы

неравенства:
$$n_{m+1}(m+1) \geqslant n_{m+1}(m) > n_m(m).$$

Таким образом, $x_{n_k(k)}$ — подпоследовательность последовательности x_n, причём для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $x_{n_k(k)}(t_m)$ является сходящейся как подпоследовательность сходящейся последовательности $x_{n_k(m)}(t_m)$. Так как для любого $t \in [0,1] \backslash M$ выполнено равенство $x_{n_k(k)}(t) = 0$, то получаем, что последовательность $x_{n_k(k)}$ является поточечно сходящейся на отрезке $[0,1]$ к функции, равной нулю на любом аргументе вне счётного множества M. Таким образом, любая последовательность множества S имеет подпоследовательность, поточечно сходящуюся к функции из S, что означает секвенциальную компактность S в топологическом пространстве (X, τ). ▲

Пример 2.1.16. Покажем что свойство топологической компактности (и, поэтому, счётной компактности) множества S топологического пространства (X, τ) не влечёт секвенциальную компактность S. Как и в примере 2.1.15, рассмотрим пространство X, состоящее из всех вещественных функций, определённых на отрезке $[0,1]$, оснащённое топологией τ поточечной сходимости (см. пример 1.1.46). Пусть S — подмножество X, состоящее из всевозможных функций

$$x\colon [0,1] \to [0,1].$$

Заметим, что топология поточечной сходимости τ есть слабейшая топология на множестве X, относительно которой непрерывны все отображения $\pi_t\colon X \to \mathbb{R}$ вида $\pi_t(x) = x(t)$, $x \in X$, для любого $t \in$ $\in [0,1]$. Действительно, τ–непрерывность отображения π_t на множестве X следует из равенства

$$\pi_t^{-1}\Big(x(t) - \varepsilon, x(t) + \varepsilon\Big) = V(x,t,\varepsilon) \in \tau \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Если же τ_1 — некоторая топология на X, относительно которой непрерывны все отбражения π_t, $t \in [0,1]$, то для любой функции $x \in$ $\in X$, числа $t \in [0,1]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ в силу утверждения 1.1.32 имеем:
$$V(x,t,\varepsilon) = \pi_t^{-1}\Big(x(t) - \varepsilon, x(t) + \varepsilon\Big) \in \tau_1.$$

Следовательно, любое множество из предбазы топологии τ содержится в топологии τ_1, что означает вложение $\tau \subset \tau_1$.

Вернёмся к определённому выше множеству S. Фактически оно представляет собой декартово произведение отрезков $I_t = [0,1]$ по всем $t \in [0,1]$. Индуцируя на каждый отрезок I_t обычную топологию вещественной оси с базой из всевозможных числовых интервалов, мы наделяем множество S как декартово произведение всех отрезков I_t, $t \in [0,1]$, топологией декартова произведения τ_c, т. е. слабейшей топологией, относительно которой непрерывны все определённые выше отображения $\pi_t : S \to I_t$ для всех $t \in [0,1]$. Следовательно, топология декартова произведения τ_c на S совпадает с сужением на множество S топологии τ поточечной сходимости. По теореме Тихонова (см. теорему А3 из [2, С. 413]), множество S с топологией декартова произведения является топологически компактным пространством. В силу равенства топологии τ_c и сужения топологии τ на S, получаем τ–компактность множества S.

Покажем, что множество S не является секвенциальным компактом в пространстве (X, τ). Рассмотрим последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такую, что $x_n(t)$ есть n–ая цифра после запятой в двоичной записи числа $t \in [0,1]$. Тогда для любой строго возрастающей последовательности натуральных чисел n_k соответствующая подпоследовательность x_{n_k} не является сходящейся поточечно на $[0,1]$. Действительно, определим число $t \in [0,1]$ так, что в двоичном представлении его n_k–ая цифра после запятой равна нулю при чётных значениях k и равна единице при нечётных значениях k. Тогда числовая последовательность $x_{n_k}(t)$ является расходящейся. Следовательно, последовательность x_n не имеет τ–сходящейся подпоследовательности. ▲

Теперь обсудим связь компактности и замкнутости подмножества топологического пространства.

О п р е д е л е н и е 2.1.17. *Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет второй аксиоме отделимости, если любые две различные точки из X имеют непересекающиеся окрестности, т. е. для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, существуют их окрестности $U(x) \in \tau$ и $U(y) \in \tau$, такие, что*

$$U(x) \cap U(y) = \varnothing.$$

Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме отделимости, называется хаусдорфовым.

У т в е р ж д е н и е 2.1.18. *Пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Тогда любое компактное множество $S \subset X$ является замкнутым.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset X$ является компактным. Рассмотрим произвольную точку $x \notin S$. Тогда в силу второй аксиомы отделимости для любого $y \in S$ существует окрестность $U_y(x) \in \tau$ точки x и окрестность $U(y) \in \tau$ точки y, такие, что

$$U_y(x) \cap U(y) = \varnothing.$$

Получаем открытое покрытие

$$\mathcal{P} = \left\{ \, U(y) \quad \middle| \quad y \in S \, \right\}$$

множества S. В силу компактности S его открытое покрытие $\mathcal{P}$ имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор точек $y_1, \ldots y_N$ множества S, такой, что семейство

$$\left\{ \, U(y_k) \quad \middle| \quad k \in \overline{1, N} \, \right\}$$

является покрытием S. Определим окрестность точки x вида

$$V(x) = \bigcap_{k=1}^{N} U_{y_k}(x).$$

Так как

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{N} U(y_k) \quad \text{и} \quad U_{y_k}(x) \cap U(y_k) = \varnothing \qquad \forall\, k = \overline{1, N},$$

то $V(x) \cap S = \varnothing$, т. е. $V(x) \subset S^c$. Поэтому для дополнения множества S справедливо равенство

$$S^c = \bigcup_{x \in S^c} V(x),$$

т. е. по определению 1.1.1 множество $S^c \in \tau$. Следовательно, по определению 1.1.10 множество S является замкнутым. ■

Утверждение 2.1.19. *Пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Тогда любое секвенциально компактное множество $S \subset X$ является секвенциально замкнутым.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset X$ является секвенциальным компактным. Рассмотрим любую точку $z \in [S]_{\text{секв.}}$.

По определению 1.1.27 существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что
$$x_n \xrightarrow{\tau} z \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$
Так как множество S является секвенциальным компактом, то существует подпоследовательность x_{n_m} и точка $x_0 \in S$, такая, что
$$x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x_0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$
Однако x_{n_m} также является сходящейся и к точке z как подпоследовательность сходящейся к z последовательности x_n. Предположим, что $z \neq x_0$. Тогда по определению 2.1.17 существуют непересекающиеся окрестности $U(z) \in \tau$ и $U(x_0) \in \tau$ соответственно точек z и x_0. В силу сходимости x_{n_m} к точке z существует номер N, такой, что для всех $m > N$ выполнено вложение
$$x_{n_m} \in U(z).$$
Аналогично в силу сходимости x_{n_m} к точке x_0 существует номер M, такой, что для всех $m > M$ выполнено вложение
$$x_{n_m} \in U(x_0).$$
Следовательно, для всех $m > \max\{N, M\}$ получаем
$$x_{n_m} \in U(z) \cap U(x_0),$$
т. е. пересечение $U(z) \cap U(x_0) \neq \varnothing$. Получили противоречие. Таким образом, выполнено соотношение $z = x_0 \in S$. Следовательно, любая секвенциальная точка прикосновения множества S принадлежит S, т. е. множество S является секвенциально замкнутым. ■

Покажем на примере, что компактное подмножество топологического пространства, удовлетворяющего первой и не удовлетворяющего второй аксиоме отделимости, может быть незамкнутым, а секвенциально компактное множество может быть секвенциально незамкнутым.

Пример 2.1.20. Пусть $X = [0, 1]$. Непустое множество $V \subset X$ объявим открытым, если оно отличается от X не более чем на конечное множество точек. Так определенная совокупность открытых множеств образует в X топологию τ. Действительно, вложения $\varnothing \in$ $\in \tau$ и $X \in \tau$ выполнены по определению τ. Рассмотрим произвольное семейство
$$\left\{ V_\alpha \subset \tau \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$$

и множество
$$W = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$
Если $W = \varnothing$, то получаем $W \in \tau$. Если же $W \neq \varnothing$, то существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, такое, что
$$V_{\alpha_0} \neq \varnothing.$$
Поэтому множество
$$X \backslash W \subset X \backslash V_{\alpha_0}$$
не более чем конечно. Следовательно, по определению τ, справедливо вложение $W \in \tau$. Рассмотрим конечное семейство
$$\left\{ \, V_k \subset \tau \quad \middle| \quad k \in \overline{1, N} \, \right\}$$
и множество
$$W = \bigcap_{k=1}^{N} V_k.$$
Если $W = \varnothing$, то $W \in \tau$. Если же $W \neq \varnothing$, то для любого $k \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство $V_k \neq \varnothing$. Поэтому множество
$$X \backslash W = \bigcup_{k=1}^{N} \big(X \backslash V_k \big)$$
не более чем конечно как конечное объединение не более чем конечных множеств. Следовательно, $W \in \tau$. Таким образом, доказано, что семейство τ является топологией в X.

Ясно, что любое одноточечное подмножество $\{x\} \subset X$ замкнуто в (X, τ), так как его дополнение $X \backslash \{x\} \in \tau$ по определению τ. Отметим также, что (X, τ) не является хаусдорфовым, так как ни одна пара различных точек из X не имеет непересекающихся окрестностей. Действительно, если $x, y \in X$ и $x \neq y$, а $U(x) \in \tau$ и $U(y) \in \tau$ — окрестности точек x и y соответственно, то $U(x) \cap V(x)$ отличается от X не более чем на конечное множество точек, а значит, не пусто.

Заметим, что любая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, состоящая из различных элементов, является сходящейся по топологии τ к любой точке $z \in X$. Действительно, для любой точки $z \in X$ любая её окрестность $U(z) \in \tau$ отличается от X не более чем на конечное множество точек. Следовательно, так как рассматриваемая последовательность имеет счётное множество значений, существует номер

N, такой, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in U(z)$. Это означает, что
$$x_n \xrightarrow{\tau} z \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$
Рассмотрим произвольное счётное множество $K \subset X$ вида
$$K = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},$$
причём выполнено $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$. Так как множество K счётно, то
$$X \backslash K \notin \tau,$$
т. е. $X \backslash K$ не открыто. Следовательно, множество K не замкнуто. Тем не менее множество K является компактом в (X, τ). Действительно, пусть
$$\mathcal{P} = \left\{ \ V_\alpha \in \tau \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \ \right\}$$
произвольное открытое покрытие множества K. Тогда существует $\alpha_1 \in \mathcal{A}$, такое, что справедливо вложение
$$x_1 \in V_{\alpha_1}.$$
Так как множество V_{α_1} отличается от X не более чем на конечное число точек, то существует номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо вложение
$$x_n \in V_{\alpha_1}.$$
Так как для любого $n \in \overline{2, N_1}$ существует $\alpha_n \in \mathcal{A}$, такой, что
$$x_n \in V_{\alpha_n},$$
то получаем вложение
$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N_1} V_{\alpha_n}.$$
Следовательно, семейство $\left\{V_{\alpha_n}\right\}_{n=1}^{N_1}$ является конечным подпокрытием покрытия $\mathcal{P}$ для K. Компактность множества K доказана.

Так как последовательность K состоит из различных точек, то она является сходящейся в (X, τ) к любой точке $z \in X$. Тогда получаем, что
$$[K]_{\text{секв.}} = X \neq K.$$
Следовательно, множество K не является секвенциально замкнутым. Тем не менее множество K является секвенциальным компактом. Действительно, рассмотрим произвольную последовательность

$y_m = x_{n_m}$ элементов множества K. Если множество значений последовательности y_m конечно, то она имеет стационарную подпоследовательность $y_{m_k} = x_{n_0}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, естественно сходящуюся к точке $x_{n_0} \in K$. Если же множество значений последовательности y_m бесконечно, то она имеет подпоследовательность y_{m_k}, состоящую из различных точек. Но тогда она является сходящейся по топологии τ к любой точке пространства X, в частности, к $x_1 \in K$. Таким образом, любая последовательность элементов счётного множества K имеет подпоследовательность, сходящуюся к точке множества K, что и требовалось доказать для секвенциальной компактности K. ▲

Утверждение 2.1.21. *Топологическое пространство* (X, τ) *является компактным тогда и только тогда, когда любое его собственное замкнутое подмножество является компактным.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство (X, τ) является компактным. Рассмотрим произвольное замкнутое множество $F \subset X$, такое, что $F \neq X$. Пусть семейство

$$\{\, V_\alpha \in \tau \quad \big| \quad \alpha \in \mathcal{A} \,\}$$

образует открытое покрытие множества F, т. е.

$$F \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

В силу замкнутости F получаем, что его дополнение $W = X \backslash F$ открыто. Так как

$$X = F \cup W \subset \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \right) \cup W,$$

то семейство открытых множеств

$$\{\, W,\ V_\alpha \quad \big| \quad \alpha \in \mathcal{A} \,\}$$

образует открытое покрытие компакта X. Следовательно, оно имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}$, такой, что

$$X \subset \left(\bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k} \right) \cup W.$$

Так как множество W не пересекается с F, то получаем, что

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k}.$$

Таким образом, произвольное открытое покрытие множества F имеет конечное подпокрытие. Следовательно, множество F является компактом.

Обратно, пусть любое собственное замкнутое множество из X является компактом. Рассмотрим произвольное открытое покрытие

$$\mathcal{P} = \left\{ \; V_\alpha \in \tau \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \; \right\}$$

множества X, т. е.

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

Выберем индекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ так, чтобы

$$V_{\alpha_0} \neq \varnothing.$$

Если $X \subset V_{\alpha_0}$, то конечное подпокрытие для покрытия $\mathcal{P}$ состоит из одного множества V_{α_0}. Если же $X \not\subset V_{\alpha_0}$, то рассмотрим множество

$$F_0 = X \backslash V_{\alpha_0}.$$

Тогда в силу $V_{\alpha_0} \neq \varnothing$ получаем $F_0 \neq X$. Также множество F_0 замкнуто, так как V_{α_0} открыто. Следовательно, по условию множество F_0 является компактом. При этом семейство открытых множеств $\mathcal{P} \backslash \{V_{\alpha_0}\}$ образует покрытие для F_0. Тогда у него существует конечное подпокрытие, т. е. найдётся конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}$, такой, что

$$F_0 \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k}.$$

Поэтому

$$X \subset \bigcup_{k=0}^{N} V_{\alpha_k}.$$

Таким образом, покрытие $\mathcal{P}$ имеет конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_k}\}_{k=0}^{N}$. Следовательно, множество X является компактом. ■

Определение 2.1.22. *Семейство множеств*

$$\{\ S_\alpha\ \mid\ \alpha \in \mathcal{A}\ \}$$

(здесь $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов) называется центрированным, если для любого конечного множества индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ выполнено неравенство

$$\bigcap_{k=1}^{N} S_{\alpha_k} \neq \varnothing.$$

Утверждение 2.1.23. *Топологическое пространство (X, τ) является компактным тогда и только тогда, когда любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть множество X является компактным. Рассмотрим произвольное центрированное семейство его замкнутых подмножеств

$$\{\ F_\alpha\ \mid\ \alpha \in \mathcal{A}\ \}.$$

Предположим, что

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \varnothing.$$

Определим для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ множество

$$V_\alpha = X \backslash F_\alpha.$$

Так как множество F_α является замкнутым, то множество V_α является открытым. При этом справедливо равенство

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = X \backslash \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = X.$$

Следовательно, семейство множеств

$$\{\ V_\alpha\ \mid\ \alpha \in \mathcal{A}\ \}$$

образует открытое покрытие множества X. В силу компактности X у этого покрытия существует конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}$, такой, что

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k}.$$

Поэтому
$$\bigcap_{k=1}^{N} F_{\alpha_k} = X \setminus \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k} = \varnothing.$$
Получили противоречие с определением 2.1.22 центрированного семейства множеств. Таким образом, выполнено соотношение
$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \neq \varnothing.$$

Пусть теперь любое центрированное семейство замкнутых подмножеств множества X имеет непустое пересечение. Рассмотрим произвольное открытое покрытие
$$\left\{\ V_\alpha \ \middle|\ \alpha\in\mathcal{A}\ \right\}$$
множества X, т. е. $V_\alpha\in\tau$ для любого $\alpha\in\mathcal{A}$, и
$$X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha.$$
Предположим, что для любого конечного набора индексов
$$\alpha_1\,,\ldots\,,\alpha_N\in\mathcal{A}$$
семейство $\{V_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N}$ не является покрытием множества X. Следовательно,
$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k} \neq \varnothing.$$
Определим для любого $\alpha\in\mathcal{A}$ замкнутое множество
$$F_\alpha = X\setminus V_\alpha.$$
Тогда
$$\bigcap_{k=1}^{N} F_{\alpha_k} = X \setminus \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k} \neq \varnothing$$
для любого конечного набора индексов $\alpha_1\,,\ldots\,,\alpha_N\in\mathcal{A}$. Поэтому семейство замкнутых множеств
$$\left\{\ F_\alpha \ \middle|\ \alpha\in\mathcal{A}\ \right\}$$

является центрированным. Но тогда по условию

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \neq \varnothing.$$

Однако, с другой стороны,

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha = \varnothing,$$

т. е. получили противоречие. Таким образом, произвольное открытое покрытие множества X имеет конечное подпокрытие, что означает компактность множества X. ■

2.2. Компактные множества в метрических пространствах

Определение 2.2.1. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Множество $S\subset X$ называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon>0$ существует конечный набор точек $x_1,\ldots,x_N$ множества S, такой, что*

$$S\subset\bigcup_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k).$$

Указанный набор точек $\{x_k\}_{k=1}^{N}\subset S$ называется конечной ε–сетью множества S.

Замечание 2.2.2. Заметим, что вполне ограниченное множество метрического пространства является ограниченным (т. е. содержится в некотором шаре), обратное же не верно. Действительно, пусть (X,ρ) — метрическое пространство, а множество $S\subset X$ является вполне ограниченным. Тогда у множества S существует конечная 1–сеть $x_1,\ldots,x_N\in S$, т. е. справедливо вложение

$$S\subset\bigcup_{k=1}^{N} B_1(x_k).$$

Определим число

$$R = 1+\max_{k\in\overline{1,N}}\rho(x_1,x_k).$$

Так как для любого $z \in S$ существует $k \in \overline{1, N}$, такой, что $\rho(z, x_k) \leqslant$ $\leqslant 1$, то

$$\rho(z, x_1) \leqslant \rho(z, x_k) + \rho(x_1, x_k) \leqslant 1 + \rho(x_1, x_k) \leqslant R.$$

Следовательно, справедливо вложение

$$S \subset B_R(x_1),$$

т. е. множество S является ограниченным. Покажем на примере, что ограниченное множество метрического пространства может не быть вполне ограниченным. Рассмотрим метрическое пространство ℓ_∞, описанное в примере 1.4.12, и множество

$$S = \left\{ x \in \ell_\infty \quad \middle| \quad |x(k)| \leqslant 1 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N} \right\},$$

т. е. $S = B_1(0)$. Следовательно, S является ограниченным в ℓ_∞. При этом оно содержит последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$$

вида $x_n(k) = 0$ при $n \neq k$ и $x_n(n) = 1$. Тогда $\rho(x_n, x_m) = 1$ для любых $n \neq m$. Если предположить, что множество S является вполне ограниченным в ℓ_∞, то в нём существует конечная $\frac{1}{4}$–сеть $z_1, \ldots, z_N$. Поэтому существует номер $m \in \overline{1, N}$, такой, что в шаре $B_{\frac{1}{4}}(z_m)$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, существуют два номера $n_1 \neq n_2$, такие, что

$$x_{n_1}, x_{n_2} \in B_{\frac{1}{4}}(z_m).$$

Отсюда получаем

$$1 = \rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \leqslant \rho(x_{n_1}, z_m) + \rho(x_{n_2}, z_m) \leqslant \frac{1}{2},$$

т. е. получили противоречие. □

Т е о р е м а 2.2.3. (критерий компактности Фреше) *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) *множество S является компактом;*

2) *метрическое пространство (S, ρ) является полным и вполне ограниченным;*

3) *множество S является секвенциально компактным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие 1. Для доказательства полноты метрического пространства S воспользуемся принципом вложенных шаров (см. теорему 1.4.8). Рассмотрим в метрическом пространстве (S, ρ) произвольную убывающую по вложению последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами. Эта последовательность шаров образует в S центрированное семейство замкнутых множеств, так как пересечение любого конечного набора таких шаров $F_{n_1}, \ldots, F_{n_m}$ содержит шар с номером $k = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$:

$$F_k \subset \bigcap_{s=1}^{m} F_{n_s}.$$

Следовательно, такое пересечение не пусто. Тогда по утверждению 2.1.23 пересечение всех шаров из рассматриваемой последовательности не пусто. В силу принципа вложенных шаров (теорема 1.4.8) метрическое пространство (S, ρ) является полным. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим покрытие множества S открытыми шарами радиуса ε с центрами во всех точках множества S, т. е.

$$\mathcal{P} = \left\{ \; O_\varepsilon(x) \quad \middle| \quad x \in S \; \right\}.$$

В силу компактности множества S открытое покрытие $\mathcal{P}$ имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор точек $x_1, \ldots, x_N$ множества S, такой, что

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{N} O_\varepsilon(x_k) \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k).$$

Получили, что набор точек $x_1, \ldots, x_N$ образует ε–сеть множества S. Следовательно, множество S является вполне ограниченным.

Пусть выполнено условие 2. Покажем, что множество S является секвенциально компактным. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Определим бесконечно малую числовую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. Так как множество S является вполне ограниченным, то для любого номера k у него существует конечная ε_k–сеть. Тогда существует шар $B_{\varepsilon_1}(z_1)$, в котором находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Образуем из этих элементов подпоследовательность

$$\{x_{n_1(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset B_{\varepsilon_1}(z_1) \cap S.$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для номера k определена подпоследовательность

$$\{x_{n_k(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset B_{\varepsilon_k}(z_k) \cap S.$$

Так как множество S имеет конечную ε_{k+1}–сеть, то существует шар $B_{\varepsilon_{k+1}}(z_{k+1})$, содержащий бесконечно много элементов последовательности $\{x_{n_k(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Образуем из этих элементов $(k+1)$–ую подпоследовательность

$$\{x_{n_{k+1}(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset B_{\varepsilon_{k+1}}(z_{k+1}) \cap S.$$

Тогда, в силу вложения $(k+1)$-ой подпоследоватедльности в k-ую, автоматически имеем неравенство

$$n_{k+1}(k) \geqslant n_k(k).$$

Так как по определению подпоследовательности имеем неравенство

$$n_{k+1}(m+1) > n_{k+1}(m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

то выполнено также неравенство

$$n_{k+1}(k+1) > n_{k+1}(k).$$

Следовательно, получаем

$$n_{k+1}(k+1) > n_{k+1}(k) \geqslant n_k(k), \quad \text{т. е.} \quad n_{k+1}(k+1) > n_k(k).$$

Таким образом, по индукции мы определяем «диагональную» подпоследовательность $\{x_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ исходной последовательности. Описанная процедура построения такой подпоследовательности называется Канторовым диагональным процессом.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, такой, что для любых $k > N(\varepsilon)$ и $s \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$\rho\left(x_{n_k(k)}, x_{n_{k+s}(k+s)}\right) \leqslant \rho\left(x_{n_k(k)}, z_k\right) + \rho\left(x_{n_{k+s}(k+s)}, z_k\right) \leqslant \frac{2}{k} < \varepsilon.$$

Следовательно, полученная подпоследовательность $\{x_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в полном метрическом пространстве (S, ρ), а значит, является сходящейся в S. Таким образом, множество S является секвенциально компактным.

Пусть выполнено условие 3. Докажем компактность множества S. Прежде всего покажем, что секвенциальная компактность множества S влечёт его вполне ограниченность. Действительно, если предположить, что множество S не является вполне ограниченным, то существует $\varepsilon > 0$, для которого не существует конечной ε–сети множества S. Выберем произвольную точку $x_1 \in S$. По предположению справедливо соотношение

$$S \not\subset B_\varepsilon(x_1).$$

Следовательно, существует

$$x_2 \in S \backslash B_\varepsilon(x_1),$$

т. е. $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$. Предположим, рассуждая по индукции, что построены n точек $x_1, \dots, x_n$ множества S, таких, что $\rho(x_k, x_m) > \varepsilon$ для любых номеров $k \neq m$, где $k, m \in \overline{1, n}$. По предположению справедливо соотношение

$$S \not\subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k).$$

Следовательно, существует

$$x_{n+1} \in S \backslash \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k),$$

т. е. $\rho(x_{n+1}, x_k) > \varepsilon$ для всех $k \in \overline{1, n}$. Таким образом, определена последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S,$$

такая, что для любых номеров $k \neq m$ выполнено неравенство

$$\rho(x_k, x_m) > \varepsilon.$$

Следовательно, любая подпоследовательность построенной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является фундаментальной, т. е. является расходящейся. Получили противоречие с секвенциальной компактностью множества S. Далее предположим, что секвенциально компактное множество S не является компактным. Тогда существует открытое покрытие

$$\mathcal{P} = \left\{ \ V_\alpha \quad \middle| \quad \alpha \in \mathcal{A} \ \right\}$$

множества S, не имеющее конечного подпокрытия. Так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество S имеет конечную $\frac{1}{n}$–сеть, то существует элемент этой сети — точка $z_n \in S$, такая, что шар $B_{\frac{1}{n}}(z_n)$ не может быть покрыт конечным набором множеств из семейства $\mathcal{P}$. В силу секвенциальной компактности множества S последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{z_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, т. е. существует точка $z_0 \in S$, такая, что

$$\rho(z_{n_m}, z_0) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием множества S, существует индекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, при котором $z_0 \in V_{\alpha_0}$. Так как множество V_{α_0} является τ_ρ-открытым, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$O_{\varepsilon_0}(z_0) \subset V_{\alpha_0}.$$

Существует номер M_0, такой, что для всех $m > M_0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \text{и} \quad \rho(z_{n_m}, z_0) < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Следовательно, для любых $m > M_0$ и $y \in B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$ получаем

$$\rho(y, z_0) \leqslant \rho(y, z_{n_m}) + \rho(z_{n_m}, z_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Следовательно,

$$B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset O_{\varepsilon_0}(z_0) \subset V_{\alpha_0} \qquad \forall\, m > M_0.$$

Но по построению ни один шар $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$ не может быть покрыт конечным набором множеств семейства $\mathcal{P}$. Получили противоречие. ■

Замечание 2.2.4. Пусть замкнутое множество S из полного метрического пространства (X, ρ) является вполне ограниченным. Из утверждения 1.4.4 следует полнота метрического пространства (S, ρ). Следовательно, по теореме 2.2.3 множество S будет компактным. □

Замечание 2.2.5. Пусть множество S из полного метрического пространства (X, ρ) является вполне ограниченным. Тогда замыкание $[S]_{\tau_\rho}$ множества S также является вполне ограниченным (это простое следствие определения 2.2.1). Следовательно, множество $[S]_{\tau_\rho}$ является компактом. В частности, отсюда следует, что любая последовательность из множества S имеет ρ–фундаментальную подпоследовательность. □

Утверждение 2.2.6. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Тогда множество $S \subset X$ является вполне ограниченным если и только если любая последовательность из S имеет ρ–фундаментальную подпоследовательность.*

Доказательство. Рассмотрим пополнение (Y,d) метрического пространства (X,ρ). Существование такого пополнения доказано в теореме 1.5.10 Хаусдорфа. Тогда существует d–всюду плотное в Y множество $Z \subset Y$, такое, что метрические пространства (X,ρ) и (Z,d) изометричны. Рассмотрим изометрию

$$\varphi\colon (X,\rho) \to (Z,d)$$

и определим множество $M = \varphi(S) \subset Z$.

Пусть множество S является вполне ограниченным в (X,ρ). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ в множестве S существует конечная ε–сеть вида $x_1,\ldots,x_N$. Тогда элементы

$$y_1 = \varphi(x_1),\ldots,y_N = \varphi(x_N)$$

из множества M будет его конечной ε–сетью. Действительно, для любого $y \in M$ рассмотрим его прообраз

$$x = \varphi^{-1}(y) \in S.$$

По определению ε–сети множества S, существует номер $n \in \overline{1,N}$, такой, что

$$\rho(x,x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$d(y,y_n) = d(\varphi(x),\varphi(x_n)) = \rho(x,x_n) \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось. Вполне ограниченность множества M влечёт вполне ограниченность его замыкания $[M]_{\tau_d}$. Следовательно, по теореме 2.2.3, множество $[M]_{\tau_d}$ является компактом в (Y,d). Произвольная последовательность $u_n \in S$ порождает последовательность

$$v_n = \varphi(u_n) \in M,$$

которая, в силу компактности множества $[M]_{\tau_d}$, имеет d–фундаментальную подпоследовательность v_{n_k}. Так как φ — изометрия, то отсюда немедленно получаем ρ–фундаментальность подпоследовательности u_{n_k}.

Пусть теперь любая последовательность из S имеет ρ–фундаментальную подпоследовательность. Тогда любая последовательность из множества M имеет d–фундаментальную подпоследовательность. Рассмотрим произвольную последовательность $w_n \in [M]_{\tau_d}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $v_n \in M$, такой, что

$$d(w_n, v_n) < \frac{1}{n}.$$

Существует d–фундаментальная подпоследовательность v_{n_k}, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k, m \geqslant K \quad d(v_{n_k}, v_{n_m}) < \varepsilon.$$

Так как последовательность n_k строго возрастает, то $n_k \geqslant k$. Следовательно, для любых $k, m \geqslant \max\left\{ K, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \right\}$ получаем:

$$d(w_{n_k}, w_{n_m}) \leqslant d(w_{n_k}, v_{n_k}) + d(w_{n_m}, v_{n_m}) + d(v_{n_k}, v_{n_m}) <$$

$$< \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_m} + \varepsilon \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon.$$

В силу полноты пространства (Y, d) и замкнутости множества $[M]_{\tau_d}$ заключаем, что существует элемент $w \in [M]_{\tau_d}$, такой, что

$$d(w_{n_k}, w) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, множество $[M]_{\tau_d}$ является секвенциально компактным. Поэтому, в силу теоремы 2.2.3, множество $[M]_{\tau_d}$ вполне ограничено. Тогда вполне ограничено и его подмножество M. Отсюда сразу получаем вполне ограниченность его изометрического прообраза $S = \varphi^{-1}(M)$. ■

Утверждение 2.2.7. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда непустое множество $S \subset X$ не является вполне ограниченным если и только если существует число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $x_n \in S$, такие, что*

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0 \qquad \forall\, n \neq m.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество S не является вполне ограниченным. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для множества S не существует конечной ε_0–сети. Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in S$. Так как однв точка x_1 не образует ε_0–сеть множества S, то

$$S \not\subset B_{\varepsilon_0}(x_1), \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_2 \in S \setminus B_{\varepsilon_0}(x_1).$$

Следовательно, построена точка $x_2 \in S$, такая, что

$$\rho(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon_0.$$

Далее, рассуждая по индукции, предположим, что построены точки $x_1, \ldots, x_N$ из множества S, такие, что

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{для любых} \quad 1 \leqslant n < m \leqslant N.$$

Так как конечное множество $x_1, \ldots, x_N$ не образует ε_0–сеть множества S, то

$$S \not\subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{\varepsilon_0}(x_n), \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_{N+1} \in S \setminus \bigcup_{n=1}^{N} B_{\varepsilon_0}(x_1).$$

Следовательно, построена точка $x_{N+1} \in S$, такая, что

$$\rho(x_{N+1}, x_n) \geqslant \varepsilon_0 \qquad \forall\, n \in \overline{1, N}.$$

Таким образом, по индукции построена искомая последовательность $x_n \in S$.

Достаточность. Пусть существует число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $x_n \in S$, такая, что $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0$ при любых $n \neq m$. Покажем, что в этом случае для множества S не существует конечной $\frac{\varepsilon_0}{3}$– сети. Действительно, рассмотрим шар $B_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(y)$ с произвольным центром $y \in X$. Если предположить, что при $n \neq m$ точки x_n и x_m принадлежат этому шару, то получим противоречие:

$$\varepsilon_0 \leqslant \rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, y) + \rho(x_m, y) \leqslant \frac{2}{3}\,\varepsilon_0.$$

Следовательно, в любом шаре радиуса $\frac{\varepsilon_0}{3}$ не может содержаться более одной точки последовательности x_n. Поэтому объединение конечного числа шаров радиуса $\frac{\varepsilon_0}{3}$ содержит не более конечного набора элементов последовательности x_n, и, поэтому, не может содержать множество S. Следовательно, множество S не является вполне ограниченным. ■

П р и м е р 2.2.8. Приведём пример неполного метрического пространства и его замкнутого вполне ограниченного некомпактного подмножества. Рассмотрим множество ℓ_1, состоящее из всех числовых последовательностей $\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty.$$

Метрику ρ в ℓ_1 определим следующим образом:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \big(x(k) - y(k)\big)^2} \qquad \forall\, x, y \in \ell_1.$$

Это метрическое пространство является неполным. Действительно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

является ρ–фундаментальной, так как для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\rho(x_n, x_{n+s}) < \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

для всех $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ и $s \in \mathbb{N}$. Если предположить, что существует $z \in \ell_1$, такое, что

$$\rho(x_n, z) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то получим для любого номера k и $n > k$ соотношение

$$\left| z(k) - \frac{1}{k} \right| \leqslant \rho(z, x_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $z(k) = \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $z \notin \ell_1$. Получили противоречие. Таким образом, доказана неполнота метрического пространства (ℓ_1, ρ).

Рассмотрим множество

$$S = \left\{ x \in \ell_1 \;\middle|\; |x(k)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Метрическое пространство (S, ρ) не является полным, так как содержит указанную выше фундаментальную расходящуюся в (ℓ_1, ρ), а значит, и в (S, ρ), последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, по теореме 2.2.3 множество S не является компактом в (ℓ_1, ρ). Покажем, что множество S замкнуто и вполне ограничено в (ℓ_1, ρ). Пусть $z \in \ell_1$ — точка прикосновения множества S. Тогда существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что

$$\rho(z, z_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$|z(k)| \leqslant |z_n(k)| + |z(k) - z_n(k)| \leqslant \frac{1}{k} + \rho(z, z_n) \to \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$|z(k)| \leqslant \frac{1}{k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \Rightarrow \qquad z \in S.$$

Таким образом, множество S замкнуто. Далее для любого $\varepsilon > 0$ определим номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим для положительного числа $\delta = \frac{\varepsilon\sqrt{6}}{2\pi}$ разбиение

$$-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = 1$$

отрезка $[-1, 1]$ мелкости меньше δ. Так как для любой точки $x \in S$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено вложение $k\, x(k) \in [-1, 1]$, то существует $n_k \in \overline{0, M}$, такое, что выполнено неравенство

$$|k\, x(k) - t_{n_k}| < \delta.$$

Определим конечное множество S_ε, состоящее из последовательностей $y = \{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$y(k) = \begin{cases} 0, & k > N, \\ \frac{t_{n_k}}{k} & k \in \overline{1, N}, \end{cases} \qquad \text{где} \quad n_k \in \overline{0, M}.$$

Количество точек множества S_ε не превышает $(M+1)^N$. По построению имеем вложение

$$S_\varepsilon \subset S,$$

причем для любого $x \in S$ существует $y \in S_\varepsilon$, такой, что для любого $k \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство

$$|x(k) - y(k)| < \frac{\delta}{k}.$$

Тогда получаем

$$\rho(x, y) \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \big(x(k) - y(k)\big)^2} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \big(x(k)\big)^2} <$$

$$< \delta\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$S \subset \bigcup_{y\in S_\varepsilon} B_\varepsilon(y),$$

т. е. S_ε — конечная ε–сеть для S. Следовательно, множество S является вполне ограниченным в (ℓ_1, ρ). ▲

Определение 2.2.9. *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Множество, состоящее из всех непрерывных на T вещественнозначных функций, метрика в котором определяется формулой*

$$d(x, y) = \sup_{t\in T} |x(t) - y(t)|,$$

будем называть метрическим пространством $C(T)$.

Замечание 2.2.10. Любая функция из множества $C(T)$ ограничена на T. Действительно, для любого $x \in C(T)$ существует максимизирующая последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T$, т. е.

$$\sup_{t\in T} |x(t)| = \lim_{n\to\infty} |x(t_n)|.$$

Так как по теореме 2.2.3 метрический компакт T является секвенциальным компактом, то последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Следовательно, существует $t_0 \in T$, такое, что

$$\rho(t_{n_m}, t_0) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

В силу непрерывности функции x получаем

$$|x(t_{n_m}) - x(t_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда справедливо равенство

$$\sup_{t\in T} |x(t)| = \lim_{m\to\infty} |x(t_{n_m})| = |x(t_0)| < +\infty.$$

Таким образом, $d(x, y) < +\infty$ для любых $x, y \in C(T)$. Остальные свойства метрики (неотрицательность, симметрия и неравенство треугольника), очевидно, выполнены для функции d. □

Теорема 2.2.11. *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Тогда метрическое пространство $C(T)$ является полным.*

Доказательство. Пусть последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(T)$$

является d–фундаментальной, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $m, n \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Так как для любого $t \in T$ выполнено неравенство

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant d(x_n, x_m),$$

то числовая последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Следовательно, в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности для любого $t \in T$ существует числовой предел

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = z(t).$$

Так как для любых $\varepsilon > 0$, $t \in T$ и любых $m, n \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon,$$

то, перейдя в нём к пределу по $m \to \infty$, получим

$$|x_n(t) - z(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого $t \in T$, то и

$$\sup_{t \in T} |x_n(t) - z(t)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, n \geqslant N(\varepsilon).$$

Следовательно, выполнено соотношение

$$d(x_n, z) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Осталось показать, что $z \in C(T)$, т. е. функция z является непрерывной на T. Для любого $t_0 \in T$ и любого $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности функции $x_{N(\varepsilon)}$ на множестве T существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, такое, что для любого $t \in T$ вида $\rho(t, t_0) < \delta$ справедливо неравенство

$$|x_{N(\varepsilon)}(t) - x_{N(\varepsilon)}(t_0)| < \varepsilon.$$

Тогда для любого $t \in T$ вида $\rho(t, t_0) < \delta$ получаем

$$|z(t) - z(t_0)| \leqslant |z(t) - x_{N(\varepsilon)}(t)| + |z(t_0) - x_{N(\varepsilon)}(t_0)| +$$

$$+ |x_{N(\varepsilon)}(t) - x_{N(\varepsilon)}(t_0)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, функция z является непрерывной в произвольной точке $t_0 \in T$, что и требовалось. ■

Теорема 2.2.12. (Кантор) *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Тогда любая функция $x \in C(T)$ является равномерно непрерывной на T, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, такое, что для любых $t, \tau \in T$, таких, что $\rho(t, \tau) \leqslant \delta$, выполнено неравенство*

$$|x(t) - x(\tau)| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что существует функция $x \in C(T)$, которая не является равномерно непрерывной на T. Следовательно, существует $\varepsilon_0 > 0$, а для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $t_n, \tau_n \in T$, такие, что

$$\rho(t_n, \tau_n) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |x(t_n) - x(\tau_n)| > \varepsilon_0.$$

Так как метрический компакт T является секвенциальным компактом, то последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Следовательно, существует $t_0 \in T$, такое, что

$$\rho(t_{n_m}, t_0) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда получаем

$$\rho(\tau_{n_m}, t_0) \leqslant \rho(\tau_{n_m}, t_{n_m}) + \rho(t_{n_m}, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n_m} + \rho(t_{n_m}, t_0) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

В силу непрерывности функции x находим

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant \lim_{m \to \infty} |x(t_{n_m}) - x(\tau_{n_m})| = |x(t_0) - x(t_0)| = 0,$$

т. е. получили противоречие. ■

Определение 2.2.13. *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Множество $S \subset C(T)$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $t, \tau \in T$, таких, что $\rho(t, \tau) \leqslant \delta$, и для любого $x \in S$ выполнено неравенство*

$$|x(t) - x(\tau)| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 2.2.14. (Арцела—Асколи) *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Множество $S \subset C(T)$ является вполне ограниченным в $C(T)$ тогда и только тогда, когда S ограничено в $C(T)$ (т. е. существует $R > 0$, такое, что для любого $x \in S$ выполнено неравенство $\sup\limits_{t \in T} |x(t)| \leqslant R$) и S равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset C(T)$ является вполне ограниченным. Тогда по замечанию 2.2.2 множество S содержится в некотором шаре пространства $C(T)$, т. е. существует число $r > 0$ и функция $z \in C(T)$, такие, что

$$S \subset B_r(z).$$

Определим число

$$R = r + \sup_{t \in T} |z(t)|.$$

В силу замечания 2.2.10 имеем $R < +\infty$. Тогда для любого $x \in S$ находим

$$\sup_{t \in T} |x(t)| \leqslant d(x, z) + \sup_{t \in T} |z(t)| \leqslant r + \sup_{t \in T} |z(t)| = R.$$

Следовательно, S является ограниченным в $C(T)$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε–сеть множества S, т. е. существуют функции $x_1, \ldots, x_N \in S$, такие, что

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k).$$

По теореме 2.2.12 Кантора каждая функция x_k равномерно непрерывна на T, т. е. для каждого $k \in \overline{1, N}$ найдётся $\delta_k > 0$, такое, что для любых $t, \tau \in T$ вида $\rho(t, \tau) \leqslant \delta_k$ выполнено неравенство

$$|x_k(t) - x_k(\tau)| \leqslant \varepsilon.$$

Определим
$$\delta = \min_{k\in\overline{1,N}} \delta_k > 0.$$
Так как для любой функции $x \in S$ существует номер $k \in \overline{1,N}$, такой, что
$$d(x, x_k) \leqslant \varepsilon,$$
то для любых $t, \tau \in T$ вида $\rho(t,\tau) \leqslant \delta$ находим
$$|x(t) - x(\tau)| \leqslant |x(t) - x_k(t)| + |x(\tau) - x_k(\tau)| + |x_k(t) - x_k(\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant 2d(x, x_k) + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon.$$
Следовательно, множество S является равностепенно непрерывным.

Пусть теперь множество S является ограниченным в $C(T)$ и равностепенно непрерывным. По теореме 2.2.3 метрический компакт является вполне ограниченным. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\delta(\varepsilon)$–сеть множества T вида $t_1, \ldots, t_N \in T$. Рассмотрим отображение $F\colon S \to \mathbb{R}^N$ вида
$$F(x) = \big(x(t_1), \ldots, x(t_N)\big) \in \mathbb{R}^N \qquad \forall\, x \in S.$$
В силу ограниченности множества S в $C(T)$ существует число $R > 0$, такое, что для любых $x \in S$ и $t \in T$ выполнено неравенство
$$|x(t)| \leqslant R.$$
Рассмотрим разбиение вещественного отрезка $[-R, R]$ мелкости меньше ε точками
$$-R = a_1 < a_2 < \ldots < a_L = R.$$
Определим конечное множество
$$A = \left\{\; a = (a_{k_1}, \ldots, a_{k_N}) \in \mathbb{R}^N \quad \middle| \quad k_s \in \overline{1,L} \;\; \forall\, s \in \overline{1,N} \;\right\}.$$
Количество элементов множества A не превышает L^N. Введём в пространстве $\mathbb{R}^N$ метрику
$$\Delta_N(u,v) = \max_{s\in\overline{1,N}} |u_s - v_s| \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^N.$$
Тогда для любого $x \in S$ существует $a \in A$, такой, что
$$\Delta_N\left(F(x), a\right) \leqslant \varepsilon.$$

Занумеруем все элементы множества A, получим

$$A = \big\{a(m)\big\}_{m=1}^{M}.$$

Определим множество номеров

$$I = \Big\{\ m \in \overline{1,M}\ \Big|\ \exists\, x \in S:\ \Delta_N\big(F(x), a(m)\big) \leqslant \varepsilon\ \Big\}.$$

Выберем для любого $m \in I$ функцию $x_m \in S$, для которой выполнено неравенство

$$\Delta_N\big(F(x_m), a(m)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Так как для любого $x \in S$ существует $m \in \overline{1,M}$, такой, что

$$\Delta_N\big(F(x), a(m)\big) \leqslant \varepsilon,$$

то выполнено вложение $m \in I$ и неравенство

$$\Delta_N\big(F(x), F(x_m)\big) \leqslant 2\varepsilon.$$

Так как для любого $t \in T$ существует $k \in \overline{1,N}$, такой, что

$$\rho(t, t_k) \leqslant \delta(\varepsilon),$$

то находим

$$|x(t) - x_m(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |x(t) - x(t_k)| + |x_m(t) - x_m(t_k)| + |x(t_k) - x_m(t_k)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \Delta_N\big(F(x), F(x_m)\big) \leqslant 4\varepsilon.$$

Следовательно, $d(x, x_m) \leqslant 4\varepsilon$, т. е. множество $\{x_m\}_{m\in I} \subset S$ является конечной 4ε–сетью множества S. Теорема доказана. ■

Пример 2.2.15. Пусть функция $f\colon [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$ по переменной $x \in \mathbb{R}$ для любого $t \in [0,1]$, т. е.

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x - y| \qquad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — ограниченное и замкнутое множество. Рассмотрим множество $S \subset C[0,1]$ вида

$$S = \left\{\ x \in C^1[0,1]\quad \middle|\quad \frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big) \quad \forall\, t \in [0,1], \quad x(0) \in K\ \right\}.$$

Здесь $C^1[0,1]$ — множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ вещественнозначных функций. Покажем, что множество S является компактом в $C[0,1]$. В силу полноты метрического пространства $C[0,1]$ достаточно доказать замкнутость и вполне ограниченность S в $C[0,1]$. Для любого $x \in S$ и любого $t \in [0,1]$ справедливо равенство

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f\bigl(\tau, x(\tau)\bigr)\, d\tau.$$

Так как множество $K \subset \mathbb{R}$ ограничено, то существует число $D > 0$, такое, что для любого числа $a \in K$ выполнено неравенство $|a| \leqslant D$. Далее, поскольку функция $t \mapsto f(t,0)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t,0)| = M_0 < +\infty.$$

Тогда для любого $x \in S$ и любого $t \in [0,1]$ получаем

$$|x(t)| \leqslant D + \int\limits_0^t |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau,0)|\, d\tau + \int\limits_0^t |f(\tau,0)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant D + M_0 + L\int\limits_0^t |x(\tau)|\, d\tau.$$

Следовательно, в силу известной леммы Гронуолла,[1] получаем для любого $t \in [0,1]$ неравенство

$$|x(t)| \leqslant (D + M_0)\exp(Lt) \leqslant (D + M_0)\exp(L) = R.$$

[1]Напомним лемму Гронуолла: если для непрерывной на отрезке $[0,1]$ вещественнозначной функции z существуют неотрицательные числа A и B, такие, что

$$z(t) \leqslant A + B\int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

то справедливо неравенство $z(t) \leqslant A\exp(Bt)$ для всех $t \in [0,1]$.

Докажем лемму Гронуолла. Если $B = 0$, то утверждние леммы очевидно. Пусть $B > 0$. Тогда для любого $t \in [0,1]$ имеем

$$\int\limits_0^t \exp(-B\tau)z(\tau)d\tau = \exp(-Bt)\int\limits_0^t z(\xi)\, d\xi + B\int\limits_0^t \exp(-B\tau)\left(\int\limits_0^\tau z(\xi)\, d\xi\right) d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \exp(-Bt)\left(\frac{z(t) - A}{B}\right) + \int\limits_0^t \exp(-B\tau)(z(\tau) - A)\, d\tau.$$

Поэтому множество S является ограниченным в пространстве $C[0,1]$.

Далее, так как функция f непрерывна, то

$$\sup_{\substack{t\in[0,1]\\|x|\leqslant R}} |f(t,x)| = M_R < +\infty.$$

Тогда для любого $x \in S$ и любых $t, \tau \in [0,1]$ по теореме Лагранжа существует число ξ между t и τ, такое, что

$$|x(t) - x(\tau)| = \left|\frac{dx(\xi)}{dt}\right| |t-\tau| = |f(\xi, x(\xi))|\, |t-\tau| \leqslant M_R |t-\tau|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M_R+1}$, такое, что для любых $t, \tau \in [0,1]$ вида $|t-\tau| \leqslant \delta(\varepsilon)$ и любой функции $x \in S$ справедливо неравенство

$$|x(t) - x(\tau)| \leqslant M_R \delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, множество S является равностепенно непрерывным в $C[0,1]$. Следовательно, по теореме 2.2.14 Арцела—Асколи получаем, что множество S является вполне ограниченным в пространстве $C[0,1]$.

Докажем замкнутость множества S в $C[0,1]$. Пусть функция $z \in \in C[0,1]$ является точкой прикосновения множества S. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |z(t) - x_n(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В частности,

$$|z(0) - x_n(0)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, число $z(0)$ является точкой прикосновения замкнутого числового множества K, т. е. $z(0) \in K$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $m, n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда получаем $A\left(\dfrac{1-\exp(-Bt)}{B}\right) \geqslant \exp(-Bt)\left(\dfrac{z(t)-A}{B}\right)$, т. е. $A\exp(Bt) - - A \geqslant z(t) - A$ и $A\exp(Bt) \geqslant z(t)$, что и требовалось.

Так как для любого $t \in [0,1]$ и любых $n, m > N\left(\frac{\varepsilon}{L+1}\right)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_m(t)}{dt}\right| \leqslant |f(t, x_n(t)) - f(t, x_m(t))| \leqslant$$

$$\leqslant L|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant L \sup_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon,$$

то последовательность

$$\left\{\frac{dx_n}{dt}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset C[0,1]$$

является фундаментальной в $C[0,1]$. Следовательно, в силу полноты метрического пространства $C[0,1]$ (см. теорему 2.2.11) существует функция $w \in C[0,1]$, такая, что

$$\sup_{t \in [0,1]} \left|\frac{dx_n(t)}{dt} - w(t)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определим непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0,1]$ функцию

$$y(t) = z(0) + \int_0^t w(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [0,1].$$

Тогда получаем

$$\sup_{t \in [0,1]} |x_n(t) - y(t)| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \left|x_n(0) - z(0) + \int_0^t \left(\frac{dx_n(\tau)}{dt} - w(\tau)\right) d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n(0) - z(0)| + \sup_{t \in [0,1]} \left|\frac{dx_n(t)}{dt} - w(t)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $y(t) = z(t)$ для любого $t \in [0,1]$, т. е. функция z является непрерывно дифференцируемой, и для любого $t \in [0,1]$ справедливо равенство

$$\frac{dz(t)}{dt} = w(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{dx_n(t)}{dt} = \lim_{n \to \infty} f(t, x_n(t)) = f(t, z(t)).$$

Таким образом, справедливо вложение $z \in S$, т. е. множество S является замкнутым в пространстве $C[0,1]$. ▲

Глава 3

Линейные нормированные пространства и линейные операторы

3.1. Линейные нормированные пространства

Определение 3.1.1. *Пусть X — комплексное линейное пространство. Функция $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ называется нормой в X, если выполнены следующие условия:*

1) $\|x\| \geqslant 0$ *для любого* $x \in X$*;*

2) $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$ *(т. е.* x *является нулевым элементом линейного пространства* X*);*

3) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ *для любых* $x \in X$ *и* $t \in \mathbb{C}$*;*

4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *для всех* $x, y \in X$ *(неравенство треугольника).*

Линейное пространство с фиксированной в нём нормой будем называть линейным нормированным пространством.

Замечание 3.1.2. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Тогда функция

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in X,$$

является метрикой на X. Действительно, по определению 3.1.1 получаем

$$\rho(x, y) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \rho(x, y) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$$

$$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\,\|x - y\| = \rho(x, y),$$

и наконец, для ρ справедливо неравенство треугольника

$$\rho(x, y) = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(y, z)$$

для всех $x, y, z \in X$. Таким образом, будем рассматривать линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ как метрическое с указанной метрикой ρ. □

Определение 3.1.3. *Пусть X — линейное пространство, множества $A, B \subset X$, а $t \in \mathbb{C}$. Тогда суммой Минковского множеств A и B будем называть множество*

$$A + B = \left\{\, a + b \quad \middle| \quad a \in A,\ b \in B \,\right\},$$

а произведением множества A на скаляр t будем называть множество

$$tA = \left\{ \, ta \quad \middle| \quad a \in A \, \right\}.$$

Замечание 3.1.4. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, вектор $x \in X$, число $R > 0$. Тогда справедливы равенства

$$O_R(x) = x + R\,O_1(0) \quad \text{и} \quad B_R(x) = x + R\,B_1(0).$$

Действительно,

$$y \in O_R(x) \quad \Leftrightarrow \quad \|y - x\| < R, \quad \Leftrightarrow \quad y = x + R\,\frac{y - x}{R} \in x + R\,O_1(0).$$

Аналогично,

$$y \in B_R(x) \quad \Leftrightarrow \quad \|y - x\| \leqslant R \quad \Leftrightarrow \quad y = x + R\,\frac{y - x}{R} \in x + R\,B_1(0).$$

$\square$

Замечание 3.1.5. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, векторы $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, числа $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{array}{rcl} O_{R_1}(x_1) + O_{R_2}(x_2) & = & O_{R_1+R_2}(x_1 + x_2), \\ B_{R_1}(x_1) + B_{R_2}(x_2) & = & B_{R_1+R_2}(x_1 + x_2). \end{array}$$

Действительно, докажем сначала эти равенства для $x_1 = x_2 = 0$. Если $x \in O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0)$, то существуют векторы

$$u \in O_{R_1}(0) \quad \text{и} \quad v \in O_{R_2}(0),$$

такие, что $x = u + v$. Тогда

$$\|x\| \leqslant \|u\| + \|v\| < R_1 + R_2, \quad \text{т. е.} \quad x \in O_{R_1+R_2}(0).$$

Следовательно,

$$O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0) \subset O_{R_1+R_2}(0).$$

Если же $x \in O_{R_1+R_2}(0)$, то либо $\|x\| < R_1$ и тогда

$$x \in O_{R_1}(0) \subset O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0),$$

либо $R_1 \leqslant \|x\| < R_1 + R_2$. В последнем случае возьмём число L вида

$$\|x\| < L < R_1 + R_2.$$

Тогда

$$\tfrac{R_1}{L} x \in O_{R_1}(0) \quad \text{и} \quad \left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) x \in O_{R_2}(0),$$

так как

$$\left\|\left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) x\right\| = \left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) \|x\| < \left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) L = L - R_1 < R_2.$$

При этом

$$x = \tfrac{R_1}{L} x + \left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) x \in O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0).$$

Следовательно,

$$O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0) = O_{R_1+R_2}(0).$$

Доказательство равенства $B_{R_1}(0) + B_{R_2}(0) = B_{R_1+R_2}(0)$ проводится совершенно аналогично. Далее, в силу замечания 3.1.4, для произвольных векторов x_1 и x_2 получаем

$$\begin{aligned} O_{R_1}(x_1) + O_{R_2}(x_2) = x_1 + x_2 + O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0) = \\ = x_1 + x_2 + O_{R_1+R_2}(0) = O_{R_1+R_2}(x_1 + x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{R_1}(x_1) + B_{R_2}(x_2) = x_1 + x_2 + B_{R_1}(0) + B_{R_2}(0) = \\ = x_1 + x_2 + B_{R_1+R_2}(0) = B_{R_1+R_2}(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

$\square$

Замечание 3.1.6. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, множество $S \subset X$. Тогда для замыкания множества S справедливо равенство

$$[S] = \bigcap_{\varepsilon>0} \left(S + O_\varepsilon(0)\right) = \bigcap_{\varepsilon>0} \left(S + B_\varepsilon(0)\right).$$

Действительно, для любого $x \in [S]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in S$, такой, что

$$\|x - y\| < \varepsilon,$$

что равносильно

$$x \in y + O_\varepsilon(0) \subset S + O_\varepsilon(0).$$

Следовательно, справедливо вложение

$$[S] \subset S + O_\varepsilon(0) \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

что означает

$$[S] \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \big(S + O_\varepsilon(0)\big) .$$

Далее, так как

$$O_\varepsilon(0) \subset B_\varepsilon(0) \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

то выполнено вложение

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \big(S + O_\varepsilon(0)\big) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \big(S + B_\varepsilon(0)\big) .$$

Наконец, если

$$z \in \bigcap_{\varepsilon>0} \big(S + B_\varepsilon(0)\big) ,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $y \in S$, такой, что

$$z \in y + B_{\varepsilon(0)},$$

что равносильно

$$\|z - y\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $z \in [S]$, что и требовалось. $\square$

Замечание 3.1.7. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, множества $A, B \subset X$, скаляр $t \neq 0$. Тогда справедливы соотношения

$$[A] + [B] \subset [A + B] \qquad t[A] = [tA].$$

Действительно, если вектор $x \in [A] + [B]$, то по замечанию 3.1.6 для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$x \in A + O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + B + O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) = A + B + O_\varepsilon(0).$$

Следовательно,

$$x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \big(A + B + O_\varepsilon(0)\big) = [A + B].$$

Таким образом, выполнено вложение

$$[A] + [B] \subset [A + B].$$

Далее находим

$$t[A] = t\bigcap_{\varepsilon>0}\big(A + O_\varepsilon(0)\big) = \bigcap_{\varepsilon>0}\big(tA + O_{|t|\varepsilon}(0)\big) = \\ = \bigcap_{\delta>0}\big(tA + O_\delta(0)\big) = [tA],$$

что и требовалось. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1.8. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Тогда для любого вектора $x \in X$ и числа $R > 0$ шары $O_R(x)$ и $B_R(x)$ являются выпуклыми. Действительно, для любых $y, z \in O_R(x)$ и любого $t \in (0,1)$ получаем

$$\|ty + (1-t)z - x\| = \|t(y-x) + (1-t)(z-x)\| \leqslant \\ \leqslant t\|y-x\| + (1-t)\|z-x\| < tR + (1-t)R = R,$$

т. е. $ty + (1-t)z \in O_R(x)$, что означает выпуклость открытого шара $O_R(x)$. Аналогично для любых $y, z \in B_R(x)$ и любого $t \in (0,1)$ получаем

$$\|ty + (1-t)z - x\| = \|t(y-x) + (1-t)(z-x)\| \leqslant \\ \leqslant t\|y-x\| + (1-t)\|z-x\| \leqslant tR + (1-t)R = R,$$

т. е. $ty + (1-t)z \in B_R(x)$, что означает выпуклость замкнутого шара $B_R(x)$. $\square$

У т в е р ж д е н и е 3.1.9. *Пусть X — линейное пространство, в котором существует функция*

$$d\colon X \to \mathbb{R},$$

для которой выполнены свойства 1, 2, 3 определения 3.1.1 нормы, и при этом множество

$$S = \{\ x \in X \quad \big| \quad d(x) < 1\ \}$$

выпукло. Тогда функция d является нормой в X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется проверить для функции d неравенство треугольника. Рассмотрим произвольные векторы $x, y \in X$. Тогда для любых чисел $a > d(x) \geqslant 0$ и $b > d(y)$ справедливы вложения

$$\frac{x}{a} \in S \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} \in S.$$

Следовательно, в силу выпуклости множества S для любого $t \in [0,1]$ выполнено вложение

$$t\frac{x}{a} + (1-t)\frac{y}{b} \in S.$$

Возьмём $t = \frac{a}{a+b} \in (0,1)$. Тогда $1-t = \frac{b}{a+b}$. Следовательно, получаем

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{(a+b)}\,\frac{x}{a} + \frac{b}{(a+b)}\,\frac{y}{b} \in S, \quad \text{т. е.} \quad d(x+y) < a+b.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $a \to d(x)+0$ и $b \to d(y)+0$, получим неравенство

$$d(x+y) \leqslant d(x) + d(y),$$

что и требовалось. ■

Пример 3.1.10. Рассмотрим для любого $p \in (0,1)$ линейное пространство числовых последовательностей

$$\ell_p = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty \right\}.$$

Определим функцию $d_p\colon \ell_p \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$d_p(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, x \in \ell_p.$$

Очевидно, что функция d_p удовлетворяет условиям 1, 2, 3 определения 3.1.1. Рассмотрим множество

$$S = \left\{ x \in \ell_p \quad \middle| \quad d_p(x) < 1 \right\}.$$

Так как $0 < p < 1$, то $1 - \frac{1}{p} < 0$, и выполнено неравенство

$$2^{1-\frac{1}{p}} < 1.$$

Выберем произвольное число

$$\delta \in \left(2^{1-\frac{1}{p}}, 1\right),$$

и рассмотрим две последовательности из ℓ_p вида

$$x_\delta = (\delta, 0, 0, 0\ldots) \quad \text{и} \quad y_\delta = (0, \delta, 0, 0, \ldots).$$

Так как
$$d_p(x_\delta) = d_p(y_\delta) = \delta < 1,$$
то $x_\delta \in S$ и $y_\delta \in S$. Но для последовательности
$$z_\delta = \tfrac{1}{2}(x_\delta + y_\delta) = \left(\tfrac{\delta}{2}, \tfrac{\delta}{2}, 0, 0, \ldots\right)$$
получаем неравенство
$$d_p(z_\delta) = \left(2^{1-p}\delta^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(2^{1-p}2^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$
Следовательно, $z_\delta \notin S$, т. е. множество S не является выпуклым. Поэтому в силу замечания 3.1.8 функция d_p не является нормой в линейном пространстве ℓ_p для любого $p \in (0, 1)$. ▲

О п р е д е л е н и е 3.1.11. *Пусть X — линейное пространство. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в X называются эквивалентными, если существуют два положительных числа C_1 и C_2, такие, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство*
$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1.$$

П р и м е р 3.1.12. Рассмотрим линейное пространство числовых последовательностей
$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\},$$
и введём в нём две нормы
$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \quad \text{и} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2} \quad \forall\, x \in \ell_1.$$
Для любого нетривиального $x \in \ell_1$ справедливо неравенство
$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1.$$
Следовательно,
$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \qquad \forall\, x \in \ell_1.$$
Если предположить, что существует $C_1 > 0$, такое, что для всех $x \in$ $\in \ell_1$ выполнено неравенство
$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2,$$

то для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

получаем следующее противоречие:

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}} > \|x_n\|_2 \geqslant C_1 \|x_n\|_1 = C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, указанного числа C_1 не существует, и нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ не являются эквивалентными в ℓ_1. ▲

Заметим, что возможность линейной оценки одной нормы через другую в линейном пространстве имеет следующую геометрическую интерпретацию:

Утверждение 3.1.13. *Пусть X — линейное пространство, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы в X. Для любого $r > 0$ и $x \in X$ обозначим через $O'_r(x)$ и $O''_r(x)$ открытые шары в X по первой и второй норме соответственно. Тогда*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, x \in X \quad \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, R > 0 \quad O'_R(0) \subset O''_1(0).$$

Доказательство. Пусть существует $C > 0$, такое, что

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in X.$$

Определим число $R = \frac{1}{C}$. Тогда для любого $x \in O'_R(0)$ получаем

$$\|x\|_1 < R \quad \Rightarrow \quad \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 < CR = 1 \quad \Rightarrow \quad x \in O''_1(0).$$

Обратно, пусть существует $R > 0$, такое, что выполнено вложение

$$O'_R(0) \subset O''_1(0).$$

Рассмотрим произвольный нетривиальный $x \in X$. Тогда для любого $t > 1$ получаем

$$\frac{R}{t}\,\frac{x}{\|x\|_1} \in O'_R(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{t}\,\frac{x}{\|x\|_1} \in O''_1(0).$$

Следовательно,

$$\left\| \tfrac{R}{t}\,\tfrac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \|x\|_2 \leqslant \tfrac{t}{R}\|x\|_1.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to 1+0$, находим

$$\|x\|_2 \leqslant \tfrac{1}{R}\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in X\backslash\{0\}.$$

Так как при тривиальном x это неравенство очевидно, что для числа $C = \frac{1}{R}$ получаем требуемое неравенство. ■

Следствие 3.1.14. *Пусть X — линейное пространство, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы в X. Тогда $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, если и только если существуют числа $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, такие что*

$$O'_{R_1}(0) \subset O''_1(0) \subset O'_{R_2}(0).$$

Доказательство. В силу утверждения 3.1.13, имеем

$$O'_{R_1}(0) \subset O''_1(0) \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|_2 \leqslant \tfrac{1}{R_1}\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X,$$

$$O''_1(0) \subset O'_{R_2}(0) \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|_1 \leqslant R_2\|x\|_2 \quad \forall\, x \in X.$$

Следовательно,

$$O'_{R_1}(0) \subset O''_1(0) \subset O'_{R_2}(0) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{R_2}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \tfrac{1}{R_1}\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X,$$

что и требовалось. ■

Замечание 3.1.15. Пусть в линейном пространстве X имеются две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Обозначим τ_1 и τ_2 топологии в X, порождённые соответственно первой и второй нормами. Тогда

$$\exists\, R > 0 \quad O'_R(0) \subset O''_1(0) \quad \Leftrightarrow \quad \tau_2 \subset \tau_1.$$

Действительно, вложение $\tau_2 \subset \tau_1$ влечёт $O''_1(0) \in \tau_1$, откуда следует, что нулевой вектор, принадлежащий шару $O''_1(0)$, также является его τ_1–внутренней точкой. Отсюда сразу следует, что существует $R > 0$, такое, что

$$O'_R(0) \subset O''_1(0).$$

Обратно, пусть выполнено последнее вложение. Рассмотрим произвольное непустое τ_2–открытое множество $G \subset X$ и любой вектор $x \in G$. Тогда существует $r > 0$, такое, что

$$G \supset O''_r(x) = x + rO''_1(0) \supset x + rO'_R(0) = O'_{rR}(x).$$

Следовательно, вектор x является τ_1–внутренней точкой для множества G. Тогда множество G является τ_1–открытым. Поэтому справедливо вложение $\tau_2 \subset \tau_1$. □

Утверждение 3.1.16. *Пусть X — линейное пространство, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы в X, τ_1 и τ_2 — топологии в X, порождённые соответственно первой и второй нормами. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны;

2) топологии τ_1 и τ_2 равны;

3) τ_1–сходимость последовательности в X равносильна её τ_2–сходимости.

Доказательство. Эквивалентность условий 1 и 2 сразу следует из следствия 3.1.14 и замечания 3.1.15. Условие 2 очевидно влечёт условие 3. Поэтому нам достаточно доказать, что условие 3 влечёт условие 1. Пусть условие 3 выполнено. Предположим, рассуждая от противного, что $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ не эквивалентны. Пусть, без ограничения общности, вторую норму нельзя оценить сверху первой, то есть

$$\forall\, C > 0 \quad \exists\, x(C) \in X \quad \|x(C)\|_2 > C\|x(C)\|_1.$$

Ясно, что $x(C) \neq 0$ для любого $C > 0$. Рассмотрим

$$y(n) = \sqrt{n}\,\frac{x(n)}{\|x(n)\|_2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда получаем, что

$$\|y(n)\|_1 < \frac{\|y(n)\|_2}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

однако

$$\|y(n)\|_2 = \sqrt{n} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $y(n)$ является τ_1–сходящейся к нулевому вектору и τ_2 расходящейся как бесконечно большая по второй норме. Получаем противоречие с условием 3, что и требовалось. ■

Пример 3.1.17. Если в линейном пространстве имеются две эквивалентные нормы, то, очевидно, что сходимость последовательности по одной норме к некоторому вектору влечёт её сходимость по другой норме к тому же вектору. Приведём пример линейного пространства, двух норм в нём и последовательности, которая сходится по каждой норме к разным векторам. Рассмотрим линейное пространство

$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}.$$

Рассмотрим в ℓ_1 две нормы

$$\|x\|_* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{n} \quad \text{и} \quad \|x\|_{**} = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\right| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x(n)|}{n}, \quad x \in \ell_1.$$

Легко проверить, что для функций $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ в ℓ_1 выполняются свойства 1–4 определения 3.1.1 нормы в линейном пространстве. Рассмотрим последоватльность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$x_m(n) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Тогда

$$\|x_m\|_* = \frac{1}{m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то есть x_m сходится к нулевому вектору по норме $\|\cdot\|_*$. Однако при $m > 1$ имеем

$$\|x_m\|_{**} = 1 + \frac{1}{m} \to 1 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, x_m не сходится к нулевому вектору по норме $\|\cdot\|_{**}$. Но для любого $m > 1$ имеем

$$\|x_m - x_1\|_{**} = \frac{1}{m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то есть x_m сходится к x_1 по норме $\|\cdot\|_{**}$.

Отметим, что наличие такой последовательности означает, что нельзя линейно оценить на ℓ_1 норму $\|\cdot\|_*$ через норму $\|\cdot\|_{**}$ и наоборот. Пусть τ_* и τ_{**} — топологии в ℓ_1, порождённые нормами $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ соответственно. Тогда, в силу утверждения 3.1.13 и замечания 3.1.15 получаем, что $\tau_* \not\subset \tau_{**}$ и $\tau_{**} \not\subset \tau_*$. ▲

Теорема 3.1.18. *Пусть X — конечномерное линейное пространство. Тогда любые две нормы в X являются эквивалентными.*

Доказательство. Пусть размерность X равна $n \in \mathbb{N}$, а конечное семейство векторов $e_1, \ldots, e_n$ из X образует базис в X, т. е. для любого вектора $x \in X$ существует единственный набор комплексных чисел $x(1), \ldots, x(n)$, такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k.$$

Введём в X норму

$$\|x\|_e = \sum_{k=1}^{n} |x(k)|$$

(свойства 1—4 определения 3.1.1, очевидно, выполнены для $\|\cdot\|_e$). Покажем, что любая норма в X эквивалентна норме $\|\cdot\|_e$. Тогда любые две нормы в X, эквивалентные норме $\|\cdot\|_e$, будут эквивалентны и друг другу.

Итак, рассмотрим в X некоторую норму $\|\cdot\|$. В силу неравенства треугольника, для любого $x \in X$ получаем неравенство

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x(k)| \, \|e_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\max_{k \in \overline{1,n}} \|e_k\| \right) \sum_{k=1}^{n} |x(k)| = C_2 \|x\|_e,$$

где положительное число

$$C_2 = \max_{k \in \overline{1,n}} \|e_k\|.$$

Предположим, рассуждая от противного, что нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_e$ не эквивалентны, т. е. норму $\|\cdot\|_e$ нельзя линейно оценить сверху нормой $\|\cdot\|$ на X. Следовательно,

$$\forall\, C > 0 \quad \exists\, x_C \in X \quad \|x_C\|_e > C \, \|x_C\|.$$

Тогда для любого $C > 0$ выполнено неравенство $x_C \neq 0$. Определим для любого номера N вектор

$$y_N = \frac{x_N}{\|x_N\|_e}.$$

Тогда выполнено соотношение

$$1 = \|y_N\|_e > N \|y_N\|, \quad \text{т. е.} \quad \|y_N\| < \frac{1}{N}.$$

С другой стороны, для любого $k \in \overline{1,n}$ и любого $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|y_N(k)| \leqslant \|y_N\|_e = 1.$$

Тогда, по теореме Больцано—Вейерштрасса, существует строго возрастающая последовательность номеров $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$, такая, что числовая последовательность $\{y_{N_m}(k)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится при каждом $k \in \overline{1,n}$. Обозначим

$$z(k) = \lim_{m \to \infty} y_{N_m}(k) \qquad \forall\, k \in \overline{1,n}.$$

Тогда вектор

$$z = \sum_{k=1}^{n} z(k) e_k$$

является пределом по норме $\|\cdot\|_e$ последовательности $\{y_{N_m}\}_{m=1}^{\infty}$, так как

$$\|y_{N_m} - z\|_e = \sum_{k=1}^{n} |y_{N_m}(k) - z(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Это, в частности, означает, что

$$\|z\|_e = \lim_{m\to\infty} \|y_{N_m}\|_e = 1.$$

С другой стороны, справедливо следующее соотношение:

$$\|y_{N_m} - z\| \leqslant C_2 \|y_{N_m} - z\|_e \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда, в силу неравенства $\|y_{N_m}\| < \frac{1}{N_m}$, получаем

$$\|z\| = \lim_{m\to\infty} \|y_{N_m}\| = 0.$$

Следовательно, $z = 0$, т. е. $z(k) = 0$ для любого $k \in \overline{1,n}$. Но это противоречит равенству

$$\|z\|_e = \sum_{k=1}^{n} |z(k)| = 1.$$

Полученное противоречие доказывает существование числа $C_1 > 0$, такого, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство

$$C_1 \|x\|_e \leqslant \|x\|,$$

что и требовалось. ■

Следствие 3.1.19. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, а $L \subset X$ — конечномерное подпространство. Тогда линейное нормированное пространство $(L, \|\cdot\|)$ является полным, а любое замкнутое ограниченное подмножество L является компактом.*

Доказательство. Пусть L — n-мерное подпространство X, а $e_1, \ldots, e_n \in L$ — базис в L, т. е. для любого вектора $x \in L$ существует единственный набор комплексных чисел $x(1), \ldots, x(n)$, такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k.$$

Введём в L норму

$$\|x\|_e = \sum_{k=1}^{n} |x(k)|, \qquad x \in L.$$

По теореме 3.1.18 нормы $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны в L, т. е. существуют положительные числа C_1 и C_2, такие, что для любого $x \in L$ выполнены неравенства

$$C_1 \|x\|_e \leqslant \|x\| \leqslant C_2 \|x\|_e.$$

Пусть последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ является фундаментальной по норме $\|\cdot\|$. Тогда она является фундаментальной и по норме $\|\cdot\|_e$, так как для всех $m, s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|x_m - x_s\|_e \leqslant \frac{1}{C_1} \|x_m - x_s\|.$$

Так как для любого номера $k \in \overline{1,n}$ и для всех $m, s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|x_m(k) - x_s(k)| \leqslant \|x_m - x_s\|_e,$$

то числовая последовательность $\{x_m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной для любого $k \in \overline{1,n}$. Следовательно, по критерию Коши сходимости числовой последовательности для любого номера $k \in \overline{1,n}$ существует

$$\lim_{m \to \infty} x_m(k) = z(k).$$

Определим вектор

$$z = \sum_{k=1}^{n} z(k) e_k \in L.$$

Тогда получаем

$$\|x_m - z\| \leqslant C_2 \|x_m - z\|_e = C_2 \sum_{k=1}^{n} |x_m(k) - z(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т. е. полнота линейного нормированного пространства $(L, \|\cdot\|)$ доказана.

Рассмотрим ограниченное и замкнутое в линейном нормированном пространстве $(L, \|\cdot\|)$ множество $S \subset L$. Докажем, что S является компактом в $(L, \|\cdot\|)$. По теореме 2.2.3 для этого достаточно доказать секвенциальную компактность S. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S$. В силу ограниченности S, существует число $R > 0$, такое, что

$$\|x\| \leqslant R \qquad \forall\, x \in S.$$

Следовательно,

$$\|x\|_e \leqslant \frac{R}{C_1} \qquad \forall\, x \in S.$$

Тогда для любого номера $k \in \overline{1,n}$ и любого $m \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$|x_m(k)| \leqslant \|x_m\|_e \leqslant \frac{R}{C_1}.$$

По теореме Больцано—Вейерштрасса существует строго возрастающая последовательность номеров $\{m_s\}_{s=1}^{\infty}$, такая, что числовая последовательность $\{x_{m_s}(k)\}_{s=1}^{\infty}$ является сходящейся для любого номера $k \in \overline{1,n}$. Обозначим

$$z(k) = \lim_{s\to\infty} x_{m_s}(k), \qquad k \in \overline{1,n},$$

и определим вектор

$$z = \sum_{k=1}^{n} z(k) e_k \in L.$$

Получаем

$$\|x_{m_s} - z\| \leqslant C_2 \|x_{m_s} - z\|_e = C_2 \sum_{k=1}^{n} |x_{m_s}(k) - z(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

В силу замкнутости множества S также получаем $z \in S$. Таким образом, секвенциальная компактность S доказана. ■

Замечание 3.1.20. Пусть X — n-мерное линейное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Пусть непустое выпуклое множество S является открытым и ограниченным в смысле нормы $\|\cdot\|_e$, и для любого комплексного скаляра α вида $|\alpha| = 1$ выполнено равенство

$\alpha S = S$. Тогда в X существует норма $\|\cdot\|$, такая, что выполнено равенство

$$\{\ x \in X \quad \Big| \quad \|x\| < 1\ \} = S.$$

Прежде всего заметим, что нулевой вектор из X содержится в S. Действительно, по условию для $x \in S$ выполнено $(-x) \in S$. Следовательно, в силу выпуклости множества S получаем

$$0 = \frac{x}{2} + \frac{(-x)}{2} \in S.$$

Определим функцию Минковского множества S следующим образом:

$$\mu_S(x) = \inf\{\ t > 0 \quad \Big| \quad \tfrac{x}{t} \in S\ \} \qquad \forall\, x \in X.$$

Так как множество S открыто по норме $\|\cdot\|_e$ и $0 \in S$, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $x \in X$ вида $\|x\|_e < \varepsilon_0$ выполнено вложение $x \in S$. Тогда

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, t > \frac{\|x\|_e}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Big\|\frac{x}{t}\Big\|_e < \varepsilon_0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x}{t} \in S.$$

Следовательно, для любого $x \in X$ получаем неравенство

$$\mu_S(x) \leqslant \frac{\|x\|_e}{\varepsilon_0}.$$

Покажем, что функция μ_S удовлетворяет определению нормы на X. Действительно, по определению $\mu_S(x) \geqslant 0$ для любого $x \in X$. Равенство $\mu_S(x) = 0$ для некоторого $x \in X$ означает, что для любого $\delta > 0$ существует $t_\delta \in (0, \delta)$, такое, что

$$\frac{x}{t_\delta} \in S.$$

Так как множество S ограничено по норме $\|\cdot\|_e$, то существует число $R > 0$, такое, что для любого вектора $z \in S$ выполнено неравенство

$$\|z\|_e \leqslant R.$$

Тогда получаем, что вложение $\frac{x}{t_\delta} \in S$ влечёт неравенство

$$\|x\|_e \leqslant t_\delta R \leqslant \delta R \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно, $\|x\|_e = 0$, что означает равенство $x = 0$. Для любого нетривиального комплексного числа α по условию выполнено равенство $\frac{|\alpha|}{\alpha} S = S$. Тогда для любого $x \in X$ получаем

$$\mu_S(\alpha x) = \inf \left\{ \, t > 0 \quad \Big| \quad \frac{|\alpha| x}{t} \in \frac{|\alpha|}{\alpha} S = S \, \right\} =$$
$$= \inf \left\{ \, |\alpha|\tau > 0 \quad \Big| \quad \frac{x}{\tau} \in S \, \right\} = |\alpha| \mu_S(x).$$

Если же $\alpha = 0$, то очевидны следующие равенства

$$\mu_S(\alpha x) = \mu_S(0) = 0 = |\alpha| \mu_S(x).$$

Заметим, что для любого вектора $x \in X$ и любого числа $t > \mu_S(x)$ выполнено вложение

$$\frac{x}{t} \in S.$$

Действительно, по определению нижней грани для любого $t > \mu_S(x)$ существует положительное $\tau_t < t$, такое, что $\frac{x}{\tau_t} \in S$. Так как множество S выпукло и содержит ноль, то

$$\frac{\tau_t}{t} S = \frac{\tau_t}{t} S + \left(1 - \frac{\tau_t}{t}\right) 0 \subset S.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{t} = \frac{\tau_t}{t} \, \frac{x}{\tau_t} \in \frac{\tau_t}{t} S \subset S.$$

Тогда для любых векторов $x, y \in X$ и любых чисел $a > \mu_S(x)$ и $b > \mu_S(y)$ получаем вложения

$$\frac{x}{a} \in S \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} \in S.$$

В силу выпуклости множества S получаем

$$\frac{x + y}{a + b} = \frac{a}{a + b} \, \frac{x}{a} + \frac{b}{a + b} \, \frac{y}{b} \in S.$$

Следовательно, $\mu_S(x + y) \leqslant a + b$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $a \to \mu_S(x) + 0$ и $b \to \mu_S(y) + 0$, получим неравенство треугольника

$$\mu_S(x + y) \leqslant \mu_S(x) + \mu_S(y).$$

Таким образом, для функции $\mu_S(\cdot)$ доказаны все свойства нормы. Покажем, наконец, что множество S является открытым единичным шаром с центром в нуле в смысле нормы $\mu_S(\cdot)$. Обозначим

$$D = \left\{ \, x \in X \quad \Big| \quad \mu_S(x) < 1 \, \right\}.$$

Если вектор $x \in D$, то для любого $t \in (\mu_S(x), 1)$ получаем

$$x \in tS = tS + (1-t)\,0 \subset S.$$

Следовательно, справедливо вложение $D \subset S$. Если же вектор $x \in S$, то в силу открытости множества S по норме $\|\cdot\|_e$, существует число $\delta = \delta(x) > 0$, такое, что для любого вектора $z \in X$ вида $\|z - x\|_e < \delta$ выполнено $z \in S$. В частности, вектор

$$z = x + \frac{\delta}{2 + \|x\|_e} x = \left(1 + \frac{\delta}{2 + \|x\|_e}\right) x \in S.$$

Следовательно,

$$\mu_S(x) \leqslant \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2+\|x\|_e}} < 1,$$

что означает вложение $x \in D$. Таким образом, справедливо вложение $S \subset D$, что вместе с доказанным выше вложением $D \subset S$ означает равенство $S = D$. Итак, искомой нормой $\|\cdot\|$ в пространстве X является функция Минковского $\mu_S(\cdot)$ множества S. □

Лемма 3.1.21. (Ф. Рисс, о почти перпендикуляре) *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ — его собственное замкнутое подпространство (т. е. $L \neq X$). Тогда для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует единичный вектор $z_\varepsilon \in X$ (т. е. $\|z_\varepsilon\| = 1$), такой, что выполнено неравенство*

$$\rho(z_\varepsilon, L) = \inf_{x \in L} \|z_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. По условию существует вектор

$$x_0 \in X \backslash L.$$

В силу замкнутости L получаем неравенство

$$\rho(x_0, L) > 0.$$

По определению точной нижней грани, для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует вектор $y_\varepsilon \in L$, такой, что справедливо неравенство

$$\|x_0 - y_\varepsilon\| < \frac{\rho(x_0, L)}{1 - \varepsilon}.$$

Определим единичный вектор

$$z_\varepsilon = \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|},$$

для которого и получаем требуемое неравенство:

$$\rho(z_\varepsilon, L) = \inf_{y\in L} \|z_\varepsilon - y\| = \\ = \frac{\inf\limits_{y\in L} \big\|x_0 - y_\varepsilon - \|x_0 - y_\varepsilon\|\, y\big\|}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} = \\ = \frac{\rho(x_0, L)}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} > 1 - \varepsilon.$$

Лемма доказана. ■

О п р е д е л е н и е 3.1.22. *Пусть L и M линейные подпространства в некотором линейном пространстве. Сумма подпространств L и M называется прямой, если их пересечение тривиально, т. е.*

$$L \cap M = \{0\}.$$

Прямую сумму подпространств L и M будем обозначать $L \oplus M$.

З а м е ч а н и е 3.1.23. Очевидно, что сумма двух линейных подпространств некоторого линейного пространства является линейным подпространством в этом линейном пространстве. □

П р и м е р 3.1.24. Построим линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ и его замкнутое собственное подпространство L, такое, что для любого единичного вектора $z \in X$ выполнено строгое неравенство

$$\rho(z, L) < 1.$$

Рассмотрим в произвольном ненулевом линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ линейную ненулевую непрерывную функцию

$$f\colon X \to \mathbb{C}.$$

В силу непрерывности f, существует $\delta > 0$, такое, что для любого $x \in B_\delta(0)$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant 1.$$

Тогда для любого вектора $x \in B_1(0)$ получаем неравенство

$$|f(x)| = \frac{|f(\delta x)|}{\delta} \leqslant \frac{1}{\delta}.$$

Определим величину

$$d(f) = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leqslant \tfrac{1}{\delta}.$$

Предположим, что для любого единичного вектора $x \in X$ выполнено строгое неравенство

$$|f(x)| < d(f)$$

(т. е. верхняя грань в определении $d(f)$ не достигается). Тогда замкнутое подпространство

$$L = \operatorname{Ker} f = \{\ x \in X \quad \big| \quad f(x) = 0\ \}$$

(это ядро линейной непрерывной комплекснозначной функции f) является искомым. Докажем это. Прежде всего заметим, что для любого вектора $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$ (такой вектор существует в силу нетривиальности функции f) выполнено равенство

$$X = \operatorname{Lin}\{x_0\} \oplus \operatorname{Ker} f.$$

Действительно, для любого вектора $x \in X$ существует скаляр $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$, такой, что

$$y = x - \alpha x_0 \in \operatorname{Ker} f, \quad \text{т. е.} \quad x = \alpha x_0 + y \in \operatorname{Lin}\{x_0\} + \operatorname{Ker} f.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$X = \operatorname{Lin}\{x_0\} + \operatorname{Ker} f.$$

Покажем, что эта сумма подпространств прямая, т. е.

$$\operatorname{Lin}\{x_0\} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

Действительно, если вектор

$$z \in \operatorname{Lin}\{x_0\} \cap \operatorname{Ker} f,$$

то $f(z) = 0$, и существует $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $z = \alpha x_0$. Следовательно,

$$0 = f(z) = \alpha f(x_0).$$

Так как $f(x_0) \neq 0$, то $\alpha = 0$ и $z = 0$, что и требовалось. Таким образом, для любого $x \in X$ существуют единственные скаляр α и вектор $y \in \operatorname{Ker} f$, такие, что $x = \alpha x_0 + y$. Отсюда находим

$$d(f) = \sup_{x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{y \in \operatorname{Ker} f \\ \alpha \neq 0}} \frac{|\alpha|\,|f(x_0)|}{\|\alpha x_0 + y\|} =$$

$$= \sup_{y \in \operatorname{Ker} f} \frac{|f(x_0)|}{\|x_0 + y\|} = \frac{|f(x_0)|}{\rho(x_0, \operatorname{Ker} f)}.$$

Таким образом, для любого $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$ выполнено равенство

$$\rho(x_0, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x_0)|}{d(f)}.$$

Если же вектор $y \in \operatorname{Ker} f$, то

$$\rho(y, \operatorname{Ker} f) = 0 = \frac{|f(y)|}{d(f)}.$$

Таким образом, для любого единичного вектора z получаем

$$\rho(z, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(z)|}{d(f)} < 1,$$

что и требовалось.

Осталось привести пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ и нетривиальной линейной непрерывной функции f на X, у которой в определении $d(f)$ не достигается верхняя грань. Рассмотрим линейное пространство

$$c_0 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad \lim_{k\to\infty} x(k) = 0 \right\},$$

состоящее из всех бесконечно малых числовых последовательностей, норма в котором имеет вид

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|.$$

Рассмотрим линейную функцию $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$ следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x(k)}{2^k} \qquad \forall\, x \in c_0.$$

Функция f является непрерывной, так как для любых $x, y \in c_0$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k) - y(k)|}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x - y\|_\infty}{2^k} = \|x - y\|_\infty.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$|f(x)| \leqslant \|x\|_\infty \quad \forall\, x \in c_0 \quad \Rightarrow \quad d(f) \leqslant 1.$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим последовательность $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} (-1)^k, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Тогда $\|x_n\|_\infty = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$|f(x_n)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant d(f).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство $1 \leqslant d(f)$. Следовательно, справедливо равенство

$$d(f) = 1.$$

Покажем, что для любого $x \in c_0$, такого, что $\|x\|_\infty = 1$, выполнено строгое неравенство

$$|f(x)| < d(f).$$

Действительно, для любого $x \in c_0$ существует номер N, такой, что для любого $k > N$ выполнено

$$|x(k)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}} < 1,$$

что и требовалось. Таким образом, для замкнутого подпространства $L = \operatorname{Ker} f \subset c_0$ и для любого $z \in c_0$ вида $\|z\|_\infty = 1$ выполнено строгое неравенство

$$\rho(z, \operatorname{Ker} f) < 1.$$

Приведём другой аналогичный пример. Рассмотрим линейное пространство

$$C[0,2] = \left\{ x\colon [0,2] \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad x \text{ — непрерывная функция } \right\},$$

норма в котором имеет вид

$$\|x\|_c = \max_{t \in [0,2]} |x(t)|.$$

Рассмотрим линейную функцию $f\colon C[0,1] \to \mathbb{C}$ следующего вида:

$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt - \int\limits_1^2 x(t)\,dt \qquad \forall\, x \in C[0,2].$$

Функция f является непрерывной, так как для любых $x, y \in C[0,2]$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\|x-y\|_c.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$d(f) \leqslant 2.$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим для любого $n \in \mathbb{N}$ функцию $x_n \in C[0,2]$ вида

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1-\frac{1}{n}, \\ n(1-t), & 1-\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1+\frac{1}{n}, \\ -1, & 1+\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Тогда $\|x_n\|_c = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и справедливы неравенства

$$d(f) \geqslant |f(x_n)| \geqslant 2 - \frac{4}{n} \to 2 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, получаем равенство

$$d(f) = 2.$$

Покажем, что для любого $x \in C[0,2]$, такого, что $\|x\|_c = 1$, выполнено строгое неравенство

$$|f(x)| < 2 = d(f).$$

Действительно, для любого $x \in C[0,2]$ существует число $\delta(x) \in (0,1)$, такое, что для всех чисел $t \in \big[1-\delta(x), 1+\delta(x)\big]$ выполнено неравенство

$$|x(t) - x(1)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда для любого $x \in C[0,2]$ вида $\|x\|_c = 1$ получаем следующие неравенства:

$$|f(x)| \leqslant \left| \int\limits_0^{1-\delta(x)} x(t)\,dt \right| + \left| \int\limits_{1+\delta(x)}^{2} x(t)\,dt \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{1-\delta(x)}^{1} x(t)\,dt - \int\limits_1^{1+\delta(x)} x(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{1-\delta(x)} \big|x(t)\big|\,dt + \int\limits_{1+\delta(x)}^{2} \big|x(t)\big|\,dt +$$

$$+ \left| \int\limits_{1-\delta(x)}^{1} \Big(x(t) - x(1)\Big)\,dt - \int\limits_1^{1+\delta(x)} \Big(x(t) - x(1)\Big)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\big(1 - \delta(x)\big) + \int\limits_{1-\delta(x)}^{1} \Big|x(t) - x(1)\Big|\,dt + \int\limits_1^{1+\delta(x)} \Big|x(t) - x(1)\Big|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\big(1 - \delta(x)\big) + \tfrac{\delta(x)}{2} + \tfrac{\delta(x)}{2} = 2 - \delta(x) < 2,$$

что и требовалось. Таким образом, для замкнутого подпространства $L = \operatorname{Ker} f \subset C[0,2]$ и для любого $z \in C[0,2]$ вида $\|z\|_c = 1$ выполнено строгое неравенство $\rho(z, \operatorname{Ker} f) < 1$. ▲

Теорема 3.1.25. (Ф. Рисс) *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — бесконечномерное линейное нормированное пространство. Тогда единичная сфера*

$$S = \left\{ \; x \in X \quad \Big| \quad \|x\| = 1 \; \right\}$$

не является компактным множеством.

Доказательство. Выберем произвольно вектор $z_1 \in S$. Так как X бесконечномерно, то его одномерное подпространство

$$L_1 = \operatorname{Lin}\{z_1\} \neq X.$$

По следствию 3.1.19, конечномерное подпространство L_1 является полным, а значит, замкнутым. Следовательно, по лемме 3.1.21 существует вектор $z_2 \in S$, такой, что

$$\|z_2 - z_1\| \geqslant \rho(z_2, L_1) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Далее, рассуждая по индукции, предположим, что для номера $n \geqslant 2$ построены векторы $z_1, \dots z_n \in S$, такие, что

$$\|z_m - z_s\| \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad m \neq s, \quad m, s \in \overline{1, n}.$$

Так как X бесконечномерно, то его конечномерное подпространство

$$L_n = \mathrm{Lin}\{z_1, \dots, z_n\} \neq X.$$

По следствию 3.1.19, конечномерное подпространство L_n является полным, а значит, замкнутым. Следовательно, по лемме 3.1.21 существует вектор $z_{n+1} \in S$, такой, что

$$\|z_{n+1} - z_m\| \geqslant \rho(z_{n+1}, L_n) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \forall\, m \in \overline{1, n}.$$

Таким образом, по индукции построена последовательность

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S,$$

любая подпоследовательность которой не фундаментальна, и, значит, является расходящейся. Таким образом, сфера S не является секвенциальным компактом, и по теореме 2.2.3 не является компактом в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. ■

Определение 3.1.26. *Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством.*

Утверждение 3.1.27. *Линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ является банаховым тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд из X сходится в X, т. е. если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$$

существует вектор $y \in X$, такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - y \right\| = 0.$$

Доказательство. Пусть пространство $(X, \|\cdot\|)$ банахово. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $L(\varepsilon)$, такой, что для всех $N > L(\varepsilon)$ и $M \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} \|x_n\| < \varepsilon.$$

Тогда последовательность частичных сумм

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

является фундаментальной в X, так как для любых $N > L(\varepsilon)$ и $M \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\|S_{N+M} - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+M} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+M} \|x_n\| < \varepsilon.$$

В силу полноты пространства $(X, \|\cdot\|)$ существует вектор $y \in X$, такой, что

$$\|S_N - y\| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y.$$

Обратно, пусть любой абсолютно сходящийся ряд из X сходится в X. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Тогда существует строго возрастающая последовательность номеров $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, такая, что для любого $k \geqslant n_m$ выполнено неравенство

$$\|z_k - z_{n_m}\| \leqslant 2^{-m}.$$

Следовательно, для любого номера m справедливо неравенство

$$\|z_{n_{m+1}} - z_{n_m}\| \leqslant 2^{-m}.$$

Определим последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, что

$$x_1 = z_{n_1}, \quad \text{а} \quad x_{n_{m+1}} = z_{n_{m+1}} - z_{n_m} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|x_{n_m}\| \leqslant \|z_{n_1}\| + 1 < +\infty,$$

то по условию существует вектор $y \in X$, такой, что

$$\left\| \sum_{m=1}^{M} x_{n_m} - y \right\| = \|z_{n_{M+1}} - y\| \to 0 \quad \text{при} \quad M \to \infty.$$

Следовательно, фундаментальная последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся в X к вектору y подпоследовательность. Отсюда сразу следует, что и сама последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к вектору y. Действительно, по неравенству треугольника получаем

$$\|z_n - y\| \leqslant \|z_n - z_{n_m}\| + \|z_{n_m} - y\| \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

В силу фундаментальности последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ справедливо равенство

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|z_n - z_{n_m}\| = 0.$$

По построению,

$$\lim_{m\to\infty} \|z_{n_m} - y\| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - y\| \leqslant \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|z_n - z_{n_m}\| + \lim_{m\to\infty} \|z_{n_m} - y\| = 0,$$

что и требовалось. ■

3.2. Гильбертово пространство

Определение 3.2.1. *Пусть X — комплексное линейное пространство. Скалярным произведением в X называется отображение*

$$(\cdot,\cdot)\colon X \times X \to \mathbb{C},$$

удовлетворяющее свойствам

1) *для любого* $x \in X$ *число* $(x, x) \in \mathbb{R}$ *и выполнено неравенство* $(x, x) \geqslant 0$;

2) *равенство* $(x, x) = 0$ *равносильно* $x = 0$;

3) *для любых* $x, y \in X$ *выполнено равенство* $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

4) *для любых* $x, y, z \in X$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *выполнено равенство* $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

Определение 3.2.2. *Линейное пространство с фиксированным в нём скалярным произведением называется евклидовым.*

Утверждение 3.2.3. *Пусть* X — *евклидово пространство. Тогда величина*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \qquad x \in X,$$

удовлетворяет определению нормы в X.

Доказательство. Ясно, что $\|x\| \geqslant 0$ для любого $x \in X$, а равенство $\|x\| = 0$ равносильно $(x, x) = 0$, что в свою очередь равносильно $x = 0$ по определению 3.2.1 скалярного произведения. Далее для любого $x \in X$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha}(x, x)} = |\alpha| \, \|x\|.$$

Осталось доказать неравенство треугольника. Прежде всего заметим, что для любых векторов $x, y \in X$ справедливо неравенство Коши—Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Действительно, для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$0 \leqslant (x - ty, x - ty) = \|x\|^2 - 2t \operatorname{Re}(x, y) + t^2 \|y\|^2.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\big(\operatorname{Re}(x, y)\big)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad \big|\operatorname{Re}(x, y)\big| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Если выписать экспоненциальнцую форму комплексного числа

$$(x, y) = |(x, y)| e^{i\varphi},$$

то получаем

$$|(x, y)| = \big(x, e^{i\varphi} y\big) = \operatorname{Re}\big(x, e^{i\varphi} y\big) \leqslant \|x\| \, \big\|e^{i\varphi} y\big\| = \|x\| \, \|y\|,$$

т. е. неравенство Коши—Буняковского. Теперь для любых $x, y \in X$ получаем неравенство треугольника

$$\|x+y\| = \sqrt{\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|,$$

что и требовалось. ■

Определение 3.2.4. *Пусть X — евклидово пространство. Функцию*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \qquad x \in X,$$

будем называть нормой в X, порождённой скалярным произведением. По умолчанию везде далее будем считать, что любое евклидово пространство является линейным нормированным пространством с нормой, порождённой скалярным произведением.

Замечание 3.2.5 (равенство параллелограммов)**.** Пусть X — евклидово пространство. Тогда для любых векторов $x, y \in X$ справедливо равенство параллелограммов:

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Действительно, имеем

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\operatorname{Re}(x,y),$$

откуда сразу получаем равенство параллелограммов. □

Определение 3.2.6. *Евклидово пространство, полное относительно нормы, порождённой скалярным произведением, будем называть гильбертовым пространством.*

Пример 3.2.7. Рассмотрим линейное нормированное пространство

$$\ell_2 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\;\middle|\;\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < +\infty \right\},$$

норма в котором задана следующим образом:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2} \qquad \forall\, x \in \ell_2.$$

Определим в пространстве ℓ_2 скалярное произведение

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)} \qquad \forall\, x, y \in \ell_2.$$

Для любых $x, y \in \ell_2$ имеем при каждом $k \in \mathbb{N}$ неравенство

$$|x(k)\overline{y(k)}| = |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \frac{|x(k)|^2 + |y(k)|^2}{2}.$$

Следовательно, по признаку сравнения ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)\overline{y(k)}|$$

сходится для любых $x, y \in \ell_2$, т. е. величина (x, y) существует и, очевидно, удовлетворяет свойствам 1—4 определения 3.2.1. При этом также выполнено равенство $(x, x) = \|x\|_2$. Таким образом, пространство $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ является евклидовым. Покажем, что оно является полным. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено

$$\|x_n - x_m\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|x_n(k) - x_m(k)| \leqslant \|x_n - x_m\|_2,$$

то получаем, что числовая последовательность $\{x_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$. Следовательно, в силу полноты $\mathbb{C}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ существует числовой предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n(k) = z(k) \in \mathbb{C}.$$

Так как для любого $M \in \mathbb{N}$ и произвольных $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - x_m(k)|^2} \leqslant \|x_n - x_m\|_2 \leqslant \varepsilon,$$

то, переходя к пределу по $m \to \infty$, получаем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - z(k)|^2} = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - x_m(k)|^2} \leqslant \varepsilon.$$

Переходя теперь к пределу по $M \to \infty$, находим

$$\|x_n - z\|_2 = \lim_{M\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - z(k)|^2} \leqslant \varepsilon$$

при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$. Отсюда, в частности, имеем неравенство

$$\|z\|_2 = \lim_{M\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |z(k)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{M\to\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_{N(1)}(k) - z(k)|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_{N(1)}(k)|^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \|x_{N(1)}\|_2 < +\infty.$$

Следовательно, $z \in \ell_2$ и $\|x_n - z\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, доказана полнота пространства $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, т. е. оно является гильбертовым. ▲

Определение 3.2.8. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, множество $S \subset X$, вектор $x \in X$. Вектор $y \in S$ называется метрической проекцией вектора x на множество S, если справедливо равенство*

$$\|x - y\| = \rho(x, S) = \inf_{z\in S} \|x - z\|.$$

Теорема 3.2.9. (Ф. Рисс, о проекции) *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $S \subset \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое множество. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ существует единственный вектор $y \in S$, который является метрической проекцией вектора x на множество S.*

Доказательство. По определению расстояния от точки до множества имеем

$$\rho(x, S) = \inf_{z\in S} \|x - z\|.$$

Тогда существует минимизирующая последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \subset S$, т. е.

$$\rho(x,S) = \lim_{m\to\infty} \|x - z_m\|.$$

Покажем, что последовательность z_m является фундаментальной. Используя равенство параллелограммов, имеем

$$\|z_m - z_n\|^2 = \|(z_m - x) - (z_n - x)\|^2 = \\ = 2\|z_m - x\|^2 + 2\|z_n - x\|^2 - \|z_m + z_n - 2x\|^2.$$

В силу выпуклости множества S получаем вложение

$$\frac{z_m + z_n}{2} \in S.$$

Следовательно, имеем неравенство

$$\|z_m + z_n - 2x\|^2 = 4\left\|\frac{z_m + z_n}{2} - x\right\|^2 \geqslant 4\rho^2(x,S).$$

Тогда получаем

$$\|z_m - z_n\|^2 \leqslant 2\|z_m - x\|^2 + 2\|z_n - x\|^2 - 4\rho^2(x,S) \to 0 \quad \text{при} \quad m,n\to\infty.$$

Следовательно, фундаментальность последовательности z_m установлена. В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ существует вектор $y \in \mathcal{H}$, такой, что

$$\|z_m - y\| \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Так как множество S замкнуто, то выполнено вложение $y \in S$. При этом в силу неравенства треугольника имеем

$$\big|\|x - y\| - \|x - z_m\|\big| \leqslant \|y - z_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m,n\to\infty.$$

Поэтому

$$\|x - y\| = \lim_{m\to\infty} \|x - z_m\| = \rho(x,S),$$

т. е. $y \in S$ — метрическая проекция вектора x на множество S.

Покажем единственность метрической проекции вектора x на множество S. Предположим, что существуют два вектора $y, z \in S$ вида

$$\|x - y\| = \|x - z\| = \rho(x,S).$$

Тогда, применяя равенство параллелограммов, имеем

$$\|y - z\|^2 = \|(y - x) - (z - x)\|^2 = 2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 - \|y + z - 2x\|^2.$$

В силу выпуклости множества S выполнено вложение

$$\frac{y+z}{2} \in S.$$

Тогда имеем неравенство

$$\|y+z-2x\|^2 = 4\left\|\frac{y+z}{2} - x\right\|^2 \geqslant 4\rho^2(x, S).$$

Следовательно, получаем

$$\|y-z\|^2 \leqslant 2\|y-x\|^2 + 2\|z-x\|^2 - 4\rho^2(x, S) = 0,$$

т. е. $y = z$, что и требовалось. ∎

Пример 3.2.10. Приведём пример гильбертова пространства, его невыпуклого замкнутого ограниченного подмножества и вектора, не имеющего метрической проекции в этом множестве. Рассмотрим гильбертово пространство ℓ_2 из примера 3.2.7 и множество $M \subset \ell_2$, состоящее из всех векторов $e_n \in \ell_2$, где

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

для всех номеров n, k. Множество M ограничено, так как $\|e_n\|_2 = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Множество M замкнуто. Действительно, если $z \in$ $\in \ell_2$ является точкой прикосновения множества M, то существует последовательность натуральных чисел n_m, такая, что

$$\|e_{n_m} - z\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Если $n_m \neq n_k$, то $\|e_{n_m} - e_{n_k}\|_2 = \sqrt{2}$. Так как сходящаяся последовательность e_{n_m} является фундаментальной, то существует номер m_0, такой, что для всех $m \geqslant m_0$ выполнено $n_m = n_{m_0}$. Тогда $z =$ $= e_{n_{m_0}} \in M$, т. е. множество M является замкнутым. Очевидно, что множество M не выпукло. Рассмотрим вектор $x \in \ell_2$ вида

$$x(k) = -\frac{1}{k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого номера n получаем

$$\|x - e_n\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{2}{n}}.$$

Следовательно,

$$\rho(x, M) = \lim_{n\to\infty} \|x - e_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1} < \|x - e_m\|_2 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для данного вектора $x \in \ell_2$ не существует метрической проекции в замкнутом ограниченном невыпуклом множестве $M \subset \ell_2$. ▲

Определение 3.2.11. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $L \subset \mathcal{H}$ — подпространство. Ортогональным дополнением L называется множество*

$$L^\perp = \left\{ x \in \mathcal{H} \quad \middle| \quad (x, y) = 0 \quad \forall\, y \in L \right\}.$$

Замечание 3.2.12. Ортогональное дополнение подпространства $L \subset \mathcal{H}$ является замкнутым подпространством в $\mathcal{H}$. Действительно, для любых векторов $x, z \in L^\perp$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$(\alpha x + \beta z, y) = \alpha(x, y) + \beta(z, y) = 0 \qquad \forall\, y \in L.$$

Следовательно,

$$\alpha x + \beta z \in L^\perp,$$

т. е. множество $L^\perp$ является подпространством в $\mathcal{H}$.

Для любого $z \in \left[L^\perp\right]$ существует последовательность $x_m \in L^\perp$, такая, что

$$\|x_m - z\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда для любого $y \in L$, в силу неравенства Коши—Буняковского, получаем

$$|(z, y)| = |(z - x_m, y)| \leqslant \|z - x_m\| \, \|y\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, $(z, y) = 0$ для любого $y \in L$, т. е. $z \in L^\perp$. Таким образом, множество $L^\perp$ является замкнутым. □

Замечание 3.2.13. Для любого подпространства $L \subset \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$L^\perp = [L]^\perp.$$

Действительно, так как $L \subset [L]$, то очевидно вложение

$$L^\perp \supset [L]^\perp.$$

С другой стороны, рассмотрим любой вектор $z \in L^{\perp}$. Для любого вектора $x \in [L]$ существует последовательность $x_m \in L$, такая, что

$$\|x_m - x\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда, в силу неравенства Коши—Буняковского, получаем

$$|(z,x)| = |(z, x - x_m)| \leqslant \|z\| \, \|x - x_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, $z \in [L]^{\perp}$. Таким образом, доказано обратное вложение

$$L^{\perp} \subset [L]^{\perp}.$$

$\square$

Теорема 3.2.14. (Ф. Рисс, об ортогональн. дополнении) *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $L \subset \mathcal{H}$ — замкнутое подпространство. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{H} = L \oplus L^{\perp}.$$

Доказательство. Так как замкнутое подпространство L является выпуклым замкнутым множеством в $\mathcal{H}$, то по теореме 3.2.9 для любого $x \in \mathcal{H}$ существует метрическая проекция на L — единственный вектор $y \in L$, такой, что

$$\|x - y\| = \rho(x, L).$$

Покажем, что вектор $z = x - y \in L^{\perp}$. Для любого вектора $a \in L$ и любого нетривиального $t \in \mathbb{R}$ по определению метрической проекции выполнено неравенство

$$\|x - y\| \leqslant \|x - y - ta\|, \quad \text{так как} \quad y + ta \in L.$$

Следовательно,

$$\|x - y\|^2 \leqslant \|x - y - ta\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2\|a\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}(x - y, a).$$

Тогда при $t > 0$ получаем

$$\mathrm{Re}(x - y, a) \leqslant \frac{t}{2}\|a\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0,$$

а при $t < 0$ получаем

$$\mathrm{Re}(x - y, a) \geqslant \frac{t}{2}\|a\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -0.$$

Таким образом,
$$\mathrm{Re}(x-y,a)=0.$$
Аналогично,
$$\|x-y\|\leqslant\|x-y-ita\|,\quad \text{так как}\quad y+ita\in L.$$
Следовательно,
$$\|x-y\|^2\leqslant\|x-y-ita\|^2=\|x-y\|^2+t^2\|a\|^2-2t\,\mathrm{Im}(x-y,a).$$
Тогда при $t>0$ получаем
$$\mathrm{Im}(x-y,a)\leqslant\frac{t}{2}\|a\|^2\to 0\quad\text{при}\quad t\to+0,$$
а при $t<0$ получаем
$$\mathrm{Im}(x-y,a)\geqslant\frac{t}{2}\|a\|^2\to 0\quad\text{при}\quad t\to-0.$$
Таким образом,
$$\mathrm{Im}(x-y,a)=0.$$
Следовательно,
$$(x-y,a)=0\qquad\forall\,a\in\mathcal{H},$$
т. е. справедливо вложение
$$x-y=z\in L^{\perp}.$$
Таким образом, доказано равенство
$$\mathcal{H}=L+L^{\perp}.$$
Покажем, что сумма подпространств L и $L^{\perp}$ прямая, т. е.
$$L\cap L^{\perp}=\{0\}.$$
Действительно, если вектор $x\in L\cap L^{\perp}$, то получаем $(x,x)=0$, что означает равенство $x=0$. ■

Следствие 3.2.15. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $L\subset\mathcal{H}$ — подпространство. Тогда справедливо равенство*
$$\left(L^{\perp}\right)^{\perp}=[L]\,.$$

Доказательство. Для любого $x \in L$ и любого $y \in L^{\perp}$ выполнено равенство $(x, y) = 0$. Следовательно,

$$x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp},$$

т. е. справедливо вложение

$$L \subset \left(L^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Так как множество $\left(L^{\perp}\right)^{\perp}$ замкнуто, то получаем вложение

$$[L] \subset \left(L^{\perp}\right)^{\perp}.$$

По теореме 3.2.14 имеем равенство $\mathcal{H} = [L] \oplus [L]^{\perp}$. В силу замечания 3.2.13 выполнено $[L]^{\perp} = L^{\perp}$. Тогда для любого вектора $z \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$ существуют единственные векторы $x \in [L]$ и $y \in L^{\perp}$, такие, что $z = x + y$. Но тогда получаем равенства

$$0 = (z, y) = (x, y) + (y, y) = (y, y), \quad \text{так как} \quad (x, y) = 0.$$

Следовательно, $y = 0$, и $z = x \in [L]$. Таким образом, доказано обратное вложение

$$\left(L^{\perp}\right)^{\perp} \subset [L].$$

■

3.3. Полные системы и базис

Определение 3.3.1. *Пусть X — комплексное линейное пространство, множество $E \subset X$. Линейной оболочкой множества E называется совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций элементов множества E и обозначается $\operatorname{Lin} E$. Таким образом,*

$$\operatorname{Lin} E = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \; \begin{array}{l} \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C} \\ x_1, \ldots, x_N \in E \end{array} \right\}.$$

Определение 3.3.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Будем говорить, что множество $E \subset X$ образует полную систему, если его линейная оболочка всюду плотна в X, т. е.*

$$[\operatorname{Lin} E] = X.$$

Пример 3.3.3. Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[0,1]$, состоящее из всех непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|x\|_c = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

Рассмотрим счётное множество $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty} \subset C[0,1]$, где

$$e_0(t) = 1, \quad e_n(t) = t^n \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, множество $\operatorname{Lin} E$ представляет собой все многочлены, определённые на отрезке $[0,1]$. По теореме Вейерштрасса любая функция $x \in C[0,1]$ с любой точностью может быть равномерно на отрезке $[0,1]$ приближена подходящим многочленом, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $P_\varepsilon \in \operatorname{Lin} E$, такой, что

$$\|x - P_\varepsilon\|_c < \varepsilon.$$

Таким образом, множество $\operatorname{Lin} E$ является всюду плотным в $C[0,1]$, и поэтому множество E образует в $C[0,1]$ счётную полную систему. ▲

Утверждение 3.3.4. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Счётное множество $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ образует в X полную систему тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \rho\big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}\big) = 0.$$

Доказательство. Полнота системы E по определению 3.3.2 означает, что для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $z = z(x,\varepsilon) \in$ $\in \operatorname{Lin} E$, такое, что выполнено неравенство

$$\|x - z\| < \varepsilon.$$

По определению 3.3.1 вложение $z \in \operatorname{Lin} E$ означает, что существует $N = N(z) \in \mathbb{N}$, такое, что выполнено вложение

$$z \in \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}.$$

Так как для всех $n \geqslant N$ справедливо вложение

$$\operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\} \subset \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\},$$

то получаем

$$\rho\big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}\big) \leqslant \rho\big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}\big) \leqslant \|x - z\| < \varepsilon,$$

что означает соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}\right) = 0.$$

Обратно, если выполнено последнее предельное соотношение, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что справедливо неравенство

$$\rho\left(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Тогда по определению расстояния от точки до множества существует

$$z \in \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\} \subset \operatorname{Lin} E,$$

такое, что выполнено неравенство

$$\|x - z\| \leqslant \rho\left(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}\right) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|x - z\| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{для подходящего} \quad z \in \operatorname{Lin} E,$$

т. е. множество $\operatorname{Lin} E$ является всюду плотным в X, а система E является полной. ■

С л е д с т в и е 3.3.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Пусть счётная система*

$$E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

является полной в X. Тогда другая счётная система

$$G = \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

является полной в X тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(e_m, \operatorname{Lin}\{g_1, \ldots, g_n\}\right) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость сразу следует из утверждения 3.3.4. Покажем достаточность. В силу полноты системы E для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент

$$z = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \in \operatorname{Lin} E,$$

такой, что

$$\|x - z\| \leqslant \varepsilon.$$

По условию для любого $k \in \overline{1, N}$ существует элемент $h_k \in \operatorname{Lin} G$, такой, что выполнено неравенство

$$\|e_k - h_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N} |\alpha_k|}.$$

Определив элемент

$$w = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k h_k \in \operatorname{Lin} G,$$

получаем следующие оценки:

$$\|x - w\| \leqslant \|x - z\| + \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| \, \|e_k - h_k\| \leqslant 2\varepsilon,$$

т. е. множество $\operatorname{Lin} G$ всюду плотно в X, а система G является полной в X. ■

Задача 3.3.6. Рассмотрим евклидово пространство $CL_2[0, 1]$, состоящее из всех непрерывных функций $x\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 |x(t)|^2 \, dt}.$$

Определим функции

$$e_0(t) = 1, \quad e_n(t) = t^n \quad \forall\, t \in [0, 1] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ состоит из целых неотрицательных чисел и является строго возрастающей. Доказать, что система $S = \{e_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $CL_2[0, 1]$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Р е ш е н и е. Так как система $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $C[0,1]$ (см. пример 3.3.3), а для любой функции $x \in \in C[0,1]$ справедливо неравенство

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_c,$$

то система E является полной и в пространстве $CL_2[0,1]$. Тогда в силу следствия 3.3.5 требуется доказать, что соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\}\right) = 0$$

для любого $m \in \mathbb{N}$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Как известно, в произвольном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ квадрат расстояния от точки $x \in \mathcal{E}$ до линейной оболочки конечного набора линейно независимых векторов $y_1, \ldots, y_k \in \mathcal{E}$ вычисляется по формуле

$$\rho^2\left(x, \mathrm{Lin}\{y_1, \ldots, y_k\}\right) = \frac{\det\Gamma(x, y_1, \ldots, y_k)}{\det\Gamma(y_1, \ldots, y_k)},$$

где $\Gamma(y_1, \ldots, y_k)$ — матрица Грама системы векторов $y_1, \ldots, y_k$.

В евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$ имеем

$$\Gamma(e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_0+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_0+n_k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n_k+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_k+n_k+1} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(e_m, e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+m+1} & \frac{1}{m+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{m+n_k+1} \\ \frac{1}{m+n_0+1} & \frac{1}{n_0+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_0+n_k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m+n_k+1} & \frac{1}{n_k+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_k+n_k+1} \end{pmatrix}.$$

Полученные матрицы Грама являются частным случаем матрицы Коши, имеющей вид

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0+b_0} & \cdots & \frac{1}{a_0+b_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_k+b_0} & \cdots & \frac{1}{a_k+b_k} \end{pmatrix}$$

для произвольных положительных чисел $a_0, \ldots, a_k$ и $b_0, \ldots, b_k$. Очевидно, что детерминант матрицы K имеет вид

$$\det K = \frac{P(a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_k)}{\prod\limits_{i,j=0}^{k} (a_i + b_j)},$$

где P — многочлен степени $(k+1)^2 - (k+1) = (k+1)k$. Так как при $a_i = a_j$ совпадают i-я и j-я строки матрицы K, а при $b_i = b_j$ совпадают i-й и j-й столбцы матрицы K, то в этих случаях $\det K = 0$. Следовательно, многочлен P имеет вид

$$P(a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_k) = Q_k \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k} \big((a_i - a_j)(b_i - b_j)\big).$$

Так как степень многочлена

$$\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k} \big((a_i - a_j)(b_i - b_j)\big)$$

переменных $a_0, \ldots a_k$ и $b_0, \ldots, b_k$ как раз равна $(k+1)k$, т. е. совпадает со степенью многочлена P, то Q_k — константа, не зависящая от аргументов $a_0, \ldots, a_k$ и $b_0, \ldots, b_k$. Индукцией по $k \in \mathbb{N}$ можно показать, что $Q_k = 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Используя полученный вид детерминанта матрицы Коши, получаем

$$\det \Gamma(e_m, e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}) = \det \Gamma(e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}) \left(\frac{1}{2m+1} \prod_{i=0}^{k} \frac{m - n_i}{m + n_i + 1} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\rho\left(e_m, \operatorname{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\}\right) = \frac{1}{2m+1} \prod_{i=0}^{k} \frac{|m - n_i|}{m + n_i + 1} =$$
$$= \frac{|m - n_0|}{(2m+1)(m + n_0 + 1)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\left|1 - \frac{m}{n_i}\right|}{1 + \frac{m+1}{n_i}}.$$

Поэтому если для любого целого числа $k \geqslant 0$ выполнено неравенство $m \neq n_k$, то имеем неравенство

$$\rho\left(e_m, \operatorname{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\}\right) > 0,$$

а соотношение

$$\rho\left(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

равносильно

$$\ln\rho\left(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\}\right) \to -\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Получаем

$$\ln\rho\left(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\}\right) =$$
$$= \ln\frac{|m-n_0|}{(2m+1)(m+n_0+1)} + \sum_{i=1}^{k}\left(\ln\left|1-\frac{m}{n_i}\right| - \ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right)\right).$$

Так как $n_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, то

$$\ln\left|1-\frac{m}{n_i}\right| - \ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right) < 0$$

при всех достаточно больших значениях i, а

$$\ln\left|1-\frac{m}{n_i}\right| - \ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right) \sim -\frac{2m+1}{n_i} \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Следовательно, по признаку сравнения сходимости знакопостоянного числового ряда, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\ln\left|1-\frac{m}{n_i}\right| - \ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right)\right)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}.$$

Таким образом, требуемое соотношение

$$\ln\rho\left(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\}\right) \to -\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

равносильно расходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i},$$

т. е. выполнению соотношения

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = +\infty,$$

что и требовалось. ▲

З а д а ч а 3.3.7. Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[0,1]$, состоящее из всех непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|.$$

Определим функции

$$e_0(t) = 1, \quad e_n(t) = t^n \quad \forall\, t \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ состоит из целых неотрицательных чисел, является строго возрастающей, и $n_0 = 0$. Доказать, что система

$$S = \{e_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$$

является полной в пространстве $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Р е ш е н и е. Если система S полна в пространстве $C[0,1]$, то в силу неравенства $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_c$ для всех $x \in C[0,1]$ получаем полноту системы S и в пространстве $CL_2[0,1]$. Следовательно, в силу результата задачи 3.3.6 получаем требуемое соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Теперь предположим, что выполнено это последнее равенство. Тогда по признаку сравнения получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k - 1} = +\infty.$$

Следовательно, система $G = \{e_{n_k - 1}\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве $CL_2[0,1]$. Так как по теореме Вейерштрасса система всех степеней $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$

полна в пространстве $C[0,1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_\varepsilon \in \operatorname{Lin} E$, такой, что справедливо неравенство

$$\|x - P_\varepsilon\|_c \leqslant \varepsilon.$$

Далее, в силу полноты системы G в пространстве $CL_2[0,1]$ существует многочлен $Q_\varepsilon \in \operatorname{Lin} G$, такой, что выполнено неравенство

$$\|P'_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Определим многочлен

$$R_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(0) + \int_0^t Q_\varepsilon(\tau)\, d\tau, \quad \text{где} \quad t \in [0,1].$$

Тогда справедливо вложение $R_\varepsilon \in \operatorname{Lin} S$, а в силу равенства

$$P_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(0) + \int_0^t P'_\varepsilon(\tau)\, d\tau$$

получаем соотношения

$$\|P_\varepsilon - R_\varepsilon\|_c = \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \big(P'_\varepsilon(\tau) - Q_\varepsilon(\tau)\big)\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left|P'_\varepsilon(\tau) - Q_\varepsilon(\tau)\right|\, d\tau \leqslant \left\|P'_\varepsilon - Q_\varepsilon\right\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, в силу неравенства треугольника получаем оценку

$$\|x - R_\varepsilon\|_c \leqslant \|x - P_\varepsilon\|_c + \|P_\varepsilon - R_\varepsilon\|_c \leqslant 2\varepsilon,$$

т. е. система S полна в пространстве $C[0,1]$, что и требовалось. ▲

Определение 3.3.8. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Счётная система $F = \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется базисом в X, если для любого $x \in X$ существует единственная последовательность скаляров $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^\infty$, такая, что справедливо соотношение*

$$\lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^N \alpha_n(x) f_n \right\| = 0.$$

Это соотношение будем по определению записывать в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) f_n.$$

П р и м е р 3.3.9. Рассмотрим пространство $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, определённое в примере 3.2.7. Определим счётную систему $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$ вида

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases} \qquad \forall\, k, n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что система E образует базис в ℓ_2. Действительно, для любого $x \in \ell_2$ справедливо соотношение

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x(n) e_n \right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)|^2} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, можно определить значение

$$\alpha_n(x) = x(n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, если некоторая последовательность скаляров $\{\beta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \beta_n(x) e_n \right\|_2 = 0,$$

то для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ получаем

$$\big| x(m) - \beta_m(x) \big| \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \beta_n(x) e_n \right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, получаем

$$\beta_m(x) = x(m) = \alpha_m(x) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, доказано, что для любого $x \in \ell_2$ существует единственная последовательность скаляров

$$\alpha_n(x) = x(n), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

такая, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x) e_n \right\|_2 = 0,$$

что и требовалось. ▲

Замечание 3.3.10. Пусть в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ существует базис $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Тогда система F является полной в X. Действительно, для любого элемента $x \in X$ имеем

$$\rho\,(x, \operatorname{Lin} F) \leqslant \lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x) f_n \right\| = 0,$$

т. е. множество $\operatorname{Lin} F$ всюду плотно в X, что и требовалось. □

Пример 3.3.11. Рассмотрим систему степеней $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$e_0(t) = 1, \quad e_n(t) = t^n, \quad \forall\, t \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Система E является полной в пространствах $C[0,1]$ и $CL_2[0,1]$, однако она не является базисом в этих пространствах.

Действительно, предположив базисность системы E в пространстве $C[0,1]$, получим, что любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция раскладывается в равномерно сходящийся к ней на отрезке $[0,1]$ степенной ряд. Но тогда по теореме Абеля получаем бесконечную гладкость любой непрерывной функции на интервале $(0,1)$, что, очевидно, неверно.

Теперь предположим, что система E является базисом в евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$. Тогда для любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции x существует единственная последовательность скаляров $\{\alpha_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, такая, что

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n \right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Определим функцию

$$z(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [0,1].$$

Получаем

$$\left\| z - \sum_{n=0}^{N} \tfrac{\alpha_n(x)}{n+1}\, e_{n+1} \right\|_c = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t \left(x(\tau) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n(\tau) \right) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| x(\tau) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n(\tau) \right| d\tau \leqslant \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n \right\|_2 \to 0$$

при $N \to \infty$. Следовательно, функция z раскладывается в равномерно сходящийся к ней на отрезке $[0, 1]$ степенной ряд. Но тогда по теореме Абеля получаем бесконечную гладкость функции z на интервале $(0, 1)$, что неверно для случая недифференцируемой непрерывной функции x. ▲

Утверждение 3.3.12. *Пусть $\mathcal{E}$ — евклидово пространство, а система $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ состоит из нетривиальных попарно ортогональных векторов и является полной в $\mathcal{E}$. Тогда система F является базисом в $\mathcal{E}$, причём для любого $x \in \mathcal{E}$ справедливы равенства*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)} f_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \quad (\text{\textit{равенство Парсеваля}}).$$

Доказательство. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье произвольного вектора $x \in \mathcal{E}$ по ортогональной системе F для любого $N \in \mathbb{N}$ ближайшим элементом для x в подпространстве $\mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_N\}$ является его N-я сумма Фурье:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)} f_n,$$

т. е. справедливо равенство

$$\rho^2 \Big(x, \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_N\}\Big) = \|x - S_N(x)\|^2 =$$

$$= (x, x) - (x, S_N(x)) - (S_N(x), x) + (S_N(x), S_N(x)) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{\overline{(x, f_n)}(x, f_n)}{(f_n, f_n)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)\overline{(x, f_n)}}{(f_n, f_n)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)\overline{(x, f_n)}}{(f_n, f_n)} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)}\,.$$

Так как в силу полноты системы F имеем

$$\rho\big(x, \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_N\}\big) \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

то получаем соотношения

$$\|x - S_N(x)\| \to 0 \quad \text{и} \quad \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, доказаны требуемые равенства

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)} f_n \quad \text{и} \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} .$$

Предположим, что для последовательности скаляров $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) f_n.$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ обозначим

$$r_N(x) = x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x) f_n.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\|r_N(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, в силу ортогональности элементов системы F для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ получаем

$$(x, f_m) = \alpha_m(x)(f_m, f_m) + (r_N(x), f_m) \to \\ \to \alpha_m(x)(f_m, f_m) \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

так как

$$|(r_N(x), f_m)| \leqslant \|r_N(x)\| \, \|f_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Таким образом,

$$\alpha_m(x) = \frac{(x, f_m)}{(f_m, f_m)} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathcal{E}$ существует единственная последовательность скаляров

$$\alpha_n(x) = \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)}$$

(это коэффициенты Фурье вектора x по ортогональной системе F), для которой справедливо равенство

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) f_n.$$

Таким образом, доказана базисность системы F в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е 3.3.13. Пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ имеется счётная полная система $G = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящая из линейно независимых векторов. Подвергая векторы системы G процедуре ортогонализации Грама—Шмидта, получим счётную систему $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящую из нетривиальных попарно ортогональных векторов вида

$$f_1 = g_1, \quad f_2 = g_2 - \frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}\, f_1, \quad \ldots \quad f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_n, f_k)}{(f_k, f_k)}\, f_k, \quad \ldots$$

Так как по определению процедуры ортогонализации Грама—Шмидта для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы вложения

$$f_n \in \mathrm{Lin}\{g_1, \ldots, g_n\} \quad \text{и} \quad g_n \in \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_n\},$$

то получаем равенство

$$\mathrm{Lin}\{g_1, \ldots, g_n\} = \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_n\}.$$

Следовательно, в силу полноты системы G и утверждения 3.3.4 получаем полноту системы F. Но тогда, в силу утверждения 3.3.12, получаем базисность системы F в пространстве $\mathcal{E}$. $\square$

У т в е р ж д е н и е 3.3.14. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а система $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ состоит из нетривиальных попарно ортогональных векторов. Система F является базисом в пространстве $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда только тривиальный вектор ортогонален всем векторам системы F.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждения сразу следует из утверждения 3.3.12. Действительно, если вектор $x \in \mathcal{H}$ ортогонален всем векторам базисной системы F, т. е.

$$(x, f_n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то получаем

$$0 = \lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)}\, f_n \right\| = \lim_{N \to \infty} \|x\| = \|x\|,$$

т. е. x — нулевой вектор. Заметим, что при доказательстве необходимости мы не пользовались полнотой пространства $\mathcal{H}$.

Покажем достаточность. Для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ в силу минимального свойства его коэффициентов Фурье по ортогональной системе F имеем

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)} f_n \right\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} = \rho^2 \big(x, \operatorname{Lin}\{f_1, \ldots, f_N\}\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, для любого $N \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \leqslant \|x\|^2.$$

Тогда по теореме Вейерштрасса о пределе неубывающей ограниченной сверху числовой последовательности при $N \to \infty$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \leqslant \|x\|^2 \quad \text{(неравенство Бесселя)}.$$

Следовательно, последовательность

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)} f_n$$

частичных сумм ряда Фурье вектора x по системе F является фундаментальной в пространстве $\mathcal{H}$, так как для любых $N, M \in \mathbb{N}$ имеем

$$\big\| S_N(x) - S_{N+M}(x) \big\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ последовательность $S_N(x)$ сходится в $\mathcal{H}$ при $N \to \infty$ к некоторому вектору $z \in \mathcal{H}$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ выполнено равенство

$$(S_N(x), f_m) = (x, f_m),$$

то получаем

$$(x-z,f_m)=\lim_{N\to\infty}(x-S_N(x),f_m)=\lim_{N\to\infty}\big((x,f_m)-(x,f_m)\big)=0.$$

Следовательно, вектор $x-z$ ортогонален всем векторам системы F, а значит, по условию является нулевым. Таким образом, $x=z$ и

$$\rho\left(x,\mathrm{Lin}\{f_1,\ldots,f_N\}\right)=\big\|x-S_N(x)\big\|\to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty.$$

Следовательно, система F является полной в пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому по утверждению 3.3.12 получаем базисность системы F в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. ■

Утверждение 3.3.15. *Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изометрически изоморфно пространству ℓ_2.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, а $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{H}$ — его счётное всюду плотное подмножество. Определим строго возрастающую подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\left\{\, m\in\mathbb{N} \;\middle|\; g_m\neq 0 \,\right\}, \\ n_{k+1} &= \min\left\{\, m>n_k \;\middle|\; g_m\notin \mathrm{Lin}\{g_{n_1},\ldots,g_{n_k}\} \,\right\} \quad \forall\, k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Покажем, что система $G=\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящая из линейно независимых векторов, является полной в $\mathcal{H}$. Действительно, для любого $x\in\mathcal{H}$ и любого $\varepsilon>0$ существует номер m, такой, что

$$\|x-g_m\|\leqslant\varepsilon.$$

Так как для любого $n_k>m$ имеем вложение

$$g_m\in\mathrm{Lin}\{g_{n_1}\ldots,g_{n_k}\},$$

то получаем неравенства

$$\rho(x,\mathrm{Lin}\,G)\leqslant\rho\left(x,\mathrm{Lin}\{g_{n_1}\ldots,g_{n_k}\}\right)\leqslant\|x-g_m\|\leqslant\varepsilon.$$

Следовательно, множество $\mathrm{Lin}\,G$ является всюду плотным в $\mathcal{H}$, что и требовалось.

В силу замечания 3.3.13, подвергнув векторы системы G процедуре ортогонализации Грама—Шмидта, получим систему попарно ортогональных векторов $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая образует в пространстве $\mathcal{H}$ ортогональный базис. По утверждению 3.3.12 любой вектор $x \in \mathcal{H}$ представляется своим рядом Фурье по ортогональной системе F, а его коэффициенты Фурье

$$\varphi_n(x) = \frac{(x, f_n)}{\sqrt{(f_n, f_n)}}$$

образуют последовательность $\varphi(x) = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из пространства ℓ_2, т. е.

$$\varphi(x) \in \ell_2.$$

При этом согласно равенству Парсеваля

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_2.$$

Таким образом, определено линейное изометричное (и потому инъективное) отображение

$$\varphi\colon \mathcal{H} \to \ell_2.$$

Осталось показать, что отображение φ является сюръекцией, т. е.

$$\varphi(\mathcal{H}) = \ell_2.$$

Для любой последовательности $z = \{z(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ рассмотрим последовательность векторов пространства $\mathcal{H}$ вида

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{z(n)}{\sqrt{(f_n, f_n)}} f_n.$$

Последовательность $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве $\mathcal{H}$, так как для любых $N, M \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|S_N - S_{N+M}\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+M} |z(n)|^2 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |z(n)|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ существует вектор $x \in \mathcal{H}$, такой, что $\|x - S_N\| \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, справедливо равенство

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{\sqrt{(f_n, f_n)}} \, f_n \, .$$

Но тогда $\varphi_n(x) = z(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. $\varphi(x) = z$, что и требовалось.

Таким образом, отображение φ устанавливает изометрический изоморфизм пространств $\mathcal{H}$ и ℓ_2. ■

П р и м е р 3.3.16. Построим пример несепарабельного гильбертова пространства. Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ комплекснозначных функций, определённых на отрезке $[0, 1]$, принимающих не более чем счётное множество нетривиальных значений, которые образуют квадратически сходящийся числовой ряд. Таким образом, множество $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \left\{ x\colon [0,1] \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad \begin{array}{l} \exists \text{ не более чем счётное } T(x) \subset [0,1] : \\[2ex] \forall\, t \notin T(x) \text{ выполнено } x(t) = 0 \text{ и} \\[2ex] \sum\limits_{t \in T(x)} |x(t)|^2 < +\infty \end{array} \right\}.$$

Ясно, что множество $\mathcal{H}$ является линейным пространством относительно поточечных операций сложения и умножния на скаляр. Введём в $\mathcal{H}$ скалярное произведение:

$$(x, y) = \sum_{t \in T(x) \cup T(y)} x(t)\overline{y(t)} \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Указанный ряд сходится абсолютно, так как справедливо неравенство

$$\sum_{t \in T(x) \cup T(y)} |x(t)y(t)| \leqslant \sqrt{\sum_{t \in T(x)} |x(t)|^2} \sqrt{\sum_{t \in T(y)} |y(t)|^2} < +\infty.$$

Покажем, что линейное пространство $\mathcal{H}$ с нормой $\|\cdot\|$, порождённой введённым скалярным произведением, является полным. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}$ произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Определим не более чем счётное множество

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(x_n).$$

Для любого $t \in T$ и произвольных $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ имеем

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \sqrt{\sum_{\tau \in T} |x_n(\tau) - x_m(\tau)|^2} = \|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathbb{C}$ для любого $t \in T$. Если же $t \notin T$, то $x_n(t) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого $t \in [0,1]$ существует числовой предел

$$z(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t),$$

причём для любого $t \notin T$ получаем $z(t) = 0$. Следовательно, определена функция

$$z\colon [0,1] \to \mathbb{C},$$

для которой $T(z) = T$, т. е. функция $z \in \mathcal{H}$. Покажем, что последовательность x_n сходится в $\mathcal{H}$ к функции z. Пусть счётное множество

$$T = \{t_s\}_{s=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad t_s \neq t_r \quad \text{при} \quad s \neq r.$$

Тогда для любого $M \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant N(\varepsilon)$ получаем

$$\sqrt{\sum_{s=1}^{M} |x_n(t_s) - z(t_s)|^2} = \lim_{m \to \infty} \sqrt{\sum_{s=1}^{M} |x_n(t_s) - x_m(t_s)|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{m \to \infty} \|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|x_n - z\| = \lim_{M \to \infty} \sqrt{\sum_{s=1}^{M} |x_n(t_s) - z(t_s)|^2} \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось. Таким образом, линейное пространство $\mathcal{H}$ с введённым скалярным произведением является гильбертовым пространством. Покажем, что оно несепарабельно. Для любого $t \in [0,1]$ определим функцию $x_t \in \mathcal{H}$ вида

$$x_t(\tau) = \begin{cases} 1, & t = \tau, \\ 0, & t \neq \tau. \end{cases}$$

Таким образом, $T(x_t) = \{t\}$ — одноточечное множество. Рассмотрим множество

$$A_0 = \left\{ \ x_t \ \middle| \ t \in [0,1] \ \right\} \subset \mathcal{H}.$$

Ясно, что множество A_0 равномощно отрезку $[0,1]$ и поэтому является несчётным. Но для любых двух его различных элементов x_t и x_τ при $t \neq \tau$ получаем

$$\|x_t - x_\tau\| = \sqrt{2} = \varepsilon_0.$$

Следовательно, в силу утверждения 1.3.4 получаем несепарабельность построенного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. ▲

3.4. Линейные операторы

Определение 3.4.1. *Пусть X и Y — линейные пространства. Линейное отображение $A\colon X \to Y$ называется линейным оператором.*

Определение 3.4.2. *Пусть X и Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Ядром оператора A называется подпространство из X вида*

$$\operatorname{Ker} A = \left\{\, x \in X \;\middle|\; A(x) = 0 \,\right\}.$$

Образом, или множеством значений, оператора A называется подпространство из Y вида:

$$\operatorname{Im} A = \left\{\, A(x) \;\middle|\; x \in X \,\right\}.$$

Определение 3.4.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется ограниченным, если для любого ограниченного множества $S \subset X$ его образ $A(S)$ является ограниченным в Y.*

Утверждение 3.4.4. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A\colon X \to Y$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) оператор A является непрерывным в X;

2) оператор A является непрерывным в нуле;

3) оператор A является ограниченным;

4) существует $R > 0$, такое, что $A\left(B_1^X(0)\right) \subset B_R^Y(0)$.

Здесь

$$B_r^X(x) \;=\; \left\{\, z \in X \;\middle|\; \|z - x\|_X \leqslant r \,\right\}, \quad x \in X, \quad r \geqslant 0,$$

$$B_r^Y(y) \;=\; \left\{\, z \in Y \;\middle|\; \|z - y\|_Y \leqslant r \,\right\}, \quad y \in Y, \quad r \geqslant 0.$$

Доказательство. Очевидно, что из условия 1 следует условие 2. Если выполнено условие 2, то существует число $\delta > 0$, такое, что для любого $x \in X$ вида $\|x\|_X < \delta$ выполнено неравенство

$$\|A(x)\|_Y < 1.$$

Для любого ограниченного множества $S \subset X$ существует число $M > 0$, такое, что для любого вектора $x \in S$ выполнено неравенство

$$\|x\|_X \leqslant M.$$

Тогда для любого вектора $x \in S$ получаем неравенство

$$\left\|\frac{\delta\, x}{M+1}\right\|_X \leqslant \frac{\delta\, M}{M+1} < \delta.$$

Следовательно,

$$\left\|A\left(\frac{\delta\, x}{M+1}\right)\right\|_Y < 1,$$

что означает неравенство

$$\|A(x)\|_Y \leqslant \frac{M+1}{\delta}.$$

Поэтому множество $A(S)$ является ограниченным в Y. Далее, из условия 3, очевидно, следует условие 4. Пусть выполнено условие 4. Тогда для любого вектора $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ существует

$$\delta = \frac{\varepsilon}{R+1} > 0,$$

такое, что для любого вектора $y \in X$ вида $\|y - x\|_X < \delta$ справедливо неравенство

$$\left\|A\left(\frac{y-x}{\delta}\right)\right\|_Y \leqslant R, \quad \Rightarrow \quad \|A(y) - A(x)\|_Y \leqslant \frac{R\,\varepsilon}{R+1} < \varepsilon.$$

Следовательно, оператор A является непрерывным в произвольной точке $x \in X$, что и требовалось. ■

Определение 3.4.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Нормой линейного оператора $A\colon X \to Y$ называется величина*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A(x)\|_Y.$$

Замечание 3.4.6. В силу утверждения 3.4.4 неравенство

$$\|A\| < +\infty$$

равносильно ограниченности линейного оператора A. $\square$

Утверждение 3.4.7. *Пусть* $(X, \|\cdot\|_X)$ *и* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *— линейные нормированные пространства,* $A\colon X \to Y$ *— линейный оператор. Тогда справедливы равенства*

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y = \\ = \inf\left\{ L > 0 \quad \middle| \quad \|A(x)\|_Y \leqslant L\|x\|_X \ \ \forall\, x \in X \right\}.$$

Доказательство. Так как для любого $x \neq 0$ выполнено равенство

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = 1,$$

то получаем следующие оценки:

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y.$$

Далее находим

$$\sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y \leqslant \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \|A(x)\|_Y = \\ = \sup_{0<\|x\|_X\leqslant 1} \|x\|_X \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y.$$

Поэтому получаем равенство

$$\sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \|A(x)\|_Y.$$

Таким образом, доказаны соотношения

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Далее для любого $L > 0$, такого, что для всех $x \in X$ выполнено

$$\|A(x)\|_Y \leqslant L\|x\|_X,$$

получаем неравенство

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A(x)\|_Y \leqslant L.$$

Следовательно, выполнено соотношение

$$\|A\| \leqslant \inf \left\{ \, L > 0 \quad \middle| \quad \|A(x)\|_Y \leqslant L\|x\|_X \ \ \forall\, x \in X \, \right\}.$$

С другой стороны, для любого $x \neq 0$ получаем неравенство

$$\|A(x)\|_Y \leqslant \left(\frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right) \|x\|_X \leqslant \|A\| \, \|x\|_X.$$

Следовательно, выполнено обратное неравенство

$$\inf \left\{ \, L > 0 \quad \middle| \quad \|A(x)\|_Y \leqslant L\|x\|_X \ \ \forall\, x \in X \, \right\} \leqslant \|A\|.$$

Утверждение полностью доказано. ■

Задача 3.4.8. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Доказать следующие утверждения:

а) если $\dim X < +\infty$, то $\|A\| < +\infty$;

б) если $\dim \operatorname{Im} A < +\infty$, а $\operatorname{Ker} A$ замкнуто, то $\|A\| < +\infty$.

Решение. а) Пусть $\dim X = n$. Тогда в X существует конечный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Следовательно, для любого вектора $x \in X$ существует единственный набор скаляров $\{\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)\}$, такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k.$$

Заметим, что для каждого $k \in \overline{1, n}$ отображение

$$\alpha_k\colon X \to \mathbb{C}$$

является линейным. Определим функцию

$$\|x\|_e = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x)| \qquad \forall \quad x \in X.$$

Эта функция является нормой в линейном пространстве X. Действительно, $\|x\|_e \geqslant 0$, а равенство $\|x\|_e = 0$ равносильно $\alpha_k(x) = 0$ для каждого $k \in \overline{1,n}$, т. е. $x = 0$. Далее для любого вектора $x \in X$ и скаляра $t \in \mathbb{C}$ имеем равенство $\alpha_k(tx) = t\alpha_k(x)$ для каждого $k \in \overline{1,n}$. Следовательно,

$$\|tx\|_e = |t|\,\|x\|_e.$$

Наконец, для любых векторов $x, y \in X$ имеем равенство $\alpha_k(x+y) = \alpha_k(x) + \alpha_k(y)$ для каждого $k \in \overline{1,n}$. Следовательно, получаем

$$\|x+y\|_e = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x) + \alpha_k(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(|\alpha_k(x)| + |\alpha_k(y)|\big) = \|x\|_e + \|y\|_e,$$

т. е. справедливо неравенство треугольника. По теореме 3.1.18 об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве, нормы $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_e$ эквивалентны в X. Следовательно, существует число $C > 0$, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено

$$\|x\|_e \leqslant C\|x\|_X.$$

Определим число $M = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|A(e_k)\|_Y$. Тогда получаем

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \neq 0} \frac{\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k A(e_k) \right\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \neq 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k| \; \|A(e_k)\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \sup_{x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \neq 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, M}{\|x\|_X} =$$

$$= M \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_e}{\|x\|_X} \leqslant MC.$$

Таким образом, доказано неравенство $\|A\| \leqslant MC < +\infty$.

б) Пусть теперь линейный оператор A имеет замкнутое ядро и конечномерный образ. Пусть $\dim \operatorname{Im} A = m$. Тогда в $\operatorname{Im} A$ существует конечный базис

$$\{g_1, \ldots, g_m\}.$$

Следовательно, для любого $k \in \overline{1, m}$ существует вектор $e_k \in X$, такой, что

$$Ae_k = g_k.$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_k\} = X.$$

Действительно, для любого $x \in X$ имеем $A(x) \in \operatorname{Im} A$, т. е. существует единственный набор скаляров $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, такой, что справедливо равенство

$$A(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k g_k.$$

Определим вектор

$$u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \in \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\}.$$

Тогда выполнено равенство $A(x - u) = 0$, т. е. вектор

$$v = x - u \in \operatorname{Ker} A.$$

Следовательно, доказано равенство

$$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_k\} = X.$$

Покажем, что сумма подпространств прямая, т. е. справедливо равенство

$$\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\} = \{0\}.$$

Действительно, если вектор

$$z \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\},$$

то существуют скаляры $\beta_1, \ldots, \beta_m$, такие, что

$$z = \sum_{k=1}^{m} \beta_k e_k,$$

и выполнено равенство

$$A(z) = 0 = \sum_{k=1}^{m} \beta_k g_k.$$

Так как векторы $g_1, \ldots, g_m$ линейно независимы, то получаем равенства

$$\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0, \quad \Rightarrow \quad z = 0.$$

Определим число

$$M = \max_{k \in \overline{1,n}} \|g_k\|_Y.$$

Теперь имеем

$$\|A\| = \sup_{\substack{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| > 0, \ v \in \operatorname{Ker} A}} \frac{\left\| A\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k\right)\right\|_Y}{\left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k + v\right\|_X} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| > 0, \ v \in \operatorname{Ker} A}} \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| \, M}{\left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k + v\right\|_X}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на число

$$L = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| > 0,$$

и обозначим

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{L} \quad \forall\, k \in \overline{1, m}, \quad \text{и} \quad w = -\frac{v}{L} \quad \forall\, v \in \operatorname{Ker} A.$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1$, и справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant \frac{M}{\inf\limits_{\substack{\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1, \ w \in \operatorname{Ker} A}} \left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k e_k - w\right\|_X} =$$

$$= \frac{M}{\inf\limits_{\substack{\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1}} \rho\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k e_k, \operatorname{Ker} A\right)}.$$

Пусть $\{\beta_1(s),\, \ldots,\, \beta_m(s)\}_{s=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность для последней нижней грани, т. е.

$$\sum_{k=1}^{m} |\beta_k(s)| = 1 \qquad \forall\, s \in \mathbb{N},$$

и справедливо равенство

$$\inf_{\substack{\{\beta_1,\, \ldots,\, \beta_m\} \subset \mathbb{C},\\ \sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1}} \rho\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k e_k, \operatorname{Ker} A\right) = \lim_{s\to\infty} \rho\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k(s) e_k, \operatorname{Ker} A\right).$$

По теореме Больцано—Вейерштрасса, существует сходяшаяся подпоследовательность

$$\beta_k(s_r) \to \gamma_k \quad \text{при} \quad r \to \infty \qquad \forall\, k \in \overline{1, m}.$$

При этом, естественно, выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{m} |\gamma_k| = 1.$$

Тогда вектор

$$u = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k e_k = \lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \beta_k(s_r) e_k \in \operatorname{Lin}\{e_1,\, \ldots,\, e_m\} \quad \text{и} \quad u \neq 0.$$

Заметим, что функция $x \mapsto \rho(x, \operatorname{Ker} A)$ удовлетворяет условию Липшица с константой единица на всём пространстве X, т. е.

$$\Big|\rho(x, \operatorname{Ker} A) - \rho(z, \operatorname{Ker} A)\Big| \leqslant \|x - z\|_X \qquad \forall\, x, z \in X.$$

Действительно, для любых векторов $x, z \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют векторы $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in \operatorname{Ker} A$, такие, что

$$\|x - v_\varepsilon\|_X \leqslant \rho(x, \operatorname{Ker} A) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \|z - w_\varepsilon\|_X \leqslant \rho(z, \operatorname{Ker} A) + \varepsilon.$$

Следовательно, получаем

$$\rho(x, \operatorname{Ker} A) - \rho(z, \operatorname{Ker} A) \leqslant \|x - w_\varepsilon\|_X - \|z - w_\varepsilon\|_X + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \|x - z\|_X + \varepsilon,$$

$$\rho(z, \operatorname{Ker} A) - \rho(x, \operatorname{Ker} A) \leqslant \|z - v_\varepsilon\|_X - \|x - v_\varepsilon\|_X + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \|x - z\|_X + \varepsilon,$$

т. е. выполнено

$$\left|\rho(x, \operatorname{Ker} A) - \rho(z, \operatorname{Ker} A)\right| \leqslant \|x - z\|_X + \varepsilon \to \|x - z\|_X \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Следовательно, получаем

$$\lim_{s\to\infty} \rho\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k(s) e_k, \operatorname{Ker} A\right) =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \rho\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k(s_r) e_k, \operatorname{Ker} A\right) = \rho(u, \operatorname{Ker} A).$$

Так как $u \neq 0$ и $u \in \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\}$, то $u \notin \operatorname{Ker} A$. Так как ядро $\operatorname{Ker} A$ замкнуто, то справедливо неравенство

$$\rho(u, \operatorname{Ker} A) > 0.$$

Следовательно, получаем окончательное неравенство

$$\|A\| \leqslant \frac{M}{\rho(u, \operatorname{Ker} A)} < +\infty,$$

что и требовалось. ▲

Пример 3.4.9. Приведём пример линейного неограниченного оператора, определённого на бесконечномерном пространстве, имеющего бесконечномерный образ и замкнутое ядро. Рассмотрим линейное пространство X, состоящее из всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ комплекснозначных функций, имеющих нулевое значение в нуле. Норму в пространстве X определим так же, как в пространстве $C[0, 1]$, т. е.

$$\|x\|_c = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \qquad \forall\, x \in X.$$

Пусть пространство $Y = C[0, 1]$ с $\|\cdot\|_c$-нормой. Определим линейный оператор $A\colon X \to Y$ следующим образом:

$$(Ax)(t) = x'(t) \qquad \forall\, t \in [0, 1], \quad \forall\, x \in X.$$

Тогда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, так как для функции $x \in \operatorname{Ker} A$ имеем

$$x'(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0, 1], \quad \Rightarrow \quad x(t) = \text{const} = x(0) = 0.$$

Далее, $\operatorname{Im} A = Y$, так как для любой функции $y \in Y$ существует функция $x \in X$ вида

$$x(t) = \int\limits_0^t y(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

такая, что

$$(Ax)(t) = x'(t) = y(t) \qquad \forall\, t \in [0,1], \quad \Rightarrow \quad Ax = y.$$

Наконец, докажем, что $\|A\| = +\infty$. Действительно, для любого $n \in \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $x_n(t) = \sin(nt)$ из пространства X. Так как $\|x_n\|_c \leqslant 1$, то справедливы неравенства

$$\|A\| \geqslant \|Ax_n\|_c = \max_{t\in[0,1]} \bigl|n\cos(nt)\bigr| = n \to +\infty,$$

что и требовалось. ▲

Пример 3.4.10. Рассмотрим линейное нормированное пространство $CL_1[0,1]$, состоящее из всех непрерывных функций

$$x\colon [0,1] \to \mathbb{C},$$

норма в котором определяется соотношением

$$\|x\|_1 = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Рассмотрим линейный оператор $A\colon CL_1[0,1] \to CL_1[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_1[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x \in CL_1[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_1 = \int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau \right| dt \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t |x(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 |x(\tau)|\, d\tau \int\limits_\tau^1 dt = \int\limits_0^1 (1-\tau)|x(\tau)|\, d\tau \leqslant \|x\|_1.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant 1.$$

Далее для любого $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим функцию $x_\varepsilon \in CL_1[0,1]$ вида

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{\varepsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Получаем

$$\|Ax_\varepsilon\|_1 = \int_0^1 dt \int_0^t x_\varepsilon(\tau)\,d\tau = \int_0^1 (1-\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^\varepsilon (1-\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \geqslant \int_0^\varepsilon (1-\varepsilon)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau = (1-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|_1.$$

Следовательно,

$$1 \geqslant \|A\| \geqslant \frac{\|Ax_\varepsilon\|_1}{\|x_\varepsilon\|_1} \geqslant 1-\varepsilon \to 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0,$$

т. е. $\|A\| = 1$. Заметим, что в роли функции x_ε можно было рассмотреть любую непрерывную функцию с вещественными неотрицательными значениями, равную нулю на отрезке $[\varepsilon, 1]$ и принимающую положительные значения на промежутке $[0, \varepsilon)$.

Теперь рассмотрим тот же оператор в другом линейном нормированном пространстве, а именно в евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$. Имеем оператор $A\colon CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_2[0,1].$$

Вычислим норму оператора A в этом случае. Для любой функции $x \in CL_2[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left| \int_0^t x(\tau)\,d\tau \right|^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^t |x(\tau)|\,d\tau \right)^2 dt}\,.$$

Так как, в силу неравенства Коши—Буняковкого, для любого $t \in$ $\in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_0^t |x(\tau)|\,d\tau\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_0^t |x(\tau)|^2\,d\tau\right)\left(\int\limits_0^t d\tau\right) = \\ = t\left(\int\limits_0^t |x(\tau)|^2\,d\tau\right) \leqslant t\left(\|x\|_2\right)^2,$$

то получаем

$$\|Ax\|_2 \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 t\left(\|x\|_2\right)^2\,dt} = \frac{\|x\|_2}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оказывается, полученная оценка для нормы оператора A в рассматриваемом случае является неточной, т. е. на самом деле

$$\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Установим это, вычислив точное значение для $\|A\|$. Для этого рассмотрим специальный ортогональный базис в евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$, который образует счётная система $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций вида

$$e_n(t) = \cos\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right), \qquad t \in [0,1].$$

Заметим, что другая счётная система функций $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$f_n(t) = \sin\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right), \qquad t \in [0,1],$$

тоже образует в $CL_2[0,1]$ ортогональный базис, причём для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$Ae_n = \frac{f_n}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}.$$

При этом для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\|e_n\|_2 = \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пусть функция $x \in CL_2[0,1]$ имеет следующее разложение в ряд Фурье по системе E:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Этот ряд сходится к функции x в пространстве $CL_2[0,1]$, т. е. в среднем квадратическом. При этом, применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2}{(e_n, e_n)}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 2|\alpha_n|^2}.$$

Так как оператор A непрерывен в пространстве $CL_2[0,1]$ в силу полученной выше оценки для его нормы $\|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, то получаем, что

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)} f_n.$$

Последний ряд представляет собой разложение в ряд Фурье по системе F функции Ax и сходится к ней в пространстве $CL_2[0,1]$, т. е. в среднем квадратическом. При этом в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2}{\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)^2 (f_n, f_n)}} =$$
$$= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|\alpha_n|^2}{\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)^2}} \leqslant \frac{2}{\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 2|\alpha_n|^2} = \frac{2}{\pi} \|x\|_2.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant \frac{2}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее имеем неравенства

$$\frac{2}{\pi} \geqslant \|A\| \geqslant \frac{\|Ae_1\|_2}{\|e_1\|_2} = \frac{\left\|\frac{2}{\pi} f_1\right\|_2}{\|e_1\|_2} = \frac{2}{\pi},$$

т. е. получаем равенство $\|A\| = \frac{2}{\pi}$. ▲

Пример 3.4.11. Пусть функция $K\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ является непрерывной. Рассмотрим линейный оператор $A\colon C[0,1]\to C[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t\in[0,1], \quad \forall\, x\in C[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x\in C[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_c = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |K(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \leqslant \left(\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau\right)\|x\|_c.$$

Следовательно, для числа

$$L = \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau$$

справедливо неравенство

$$\|A\|\leqslant L.$$

Далее, в силу непрерывности на отрезке $[0,1]$ функции $t\mapsto \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau$, существует число $t_0\in[0,1]$, такое, что выполнено

$$L = \int_0^1 |K(t_0,\tau)|\,d\tau.$$

По теореме Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции многочленом, для любого $\varepsilon>0$ существует многочлен $P_\varepsilon\colon [0,1]\to\mathbb{C}$, такой, что

$$\bigl|K(t_0,\tau)-P_\varepsilon(\tau)\bigr|\leqslant\varepsilon \qquad \forall\,\tau\in[0,1].$$

Определим непрерывную функцию комплексного переменного $s_\varepsilon\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ вида

$$s_\varepsilon(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}}{|z|}, & |z|\geqslant\varepsilon,\\[2ex] \frac{\overline{z}}{\varepsilon}, & |z|\leqslant\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| \geqslant \varepsilon$ получаем равенство

$$s_\varepsilon(z)z = |z|,$$

а при $|z| \leqslant \varepsilon$ имеем соотношение

$$s_\varepsilon(z)z = \frac{|z|^2}{\varepsilon} \in [0, \varepsilon].$$

Рассмотрим функцию

$$x_\varepsilon(\tau) = s_\varepsilon\left(P_\varepsilon(\tau)\right) \qquad \forall\, \tau \in [0,1].$$

Ясно, что $x_\varepsilon \in C[0,1]$ как суперпозиция непрерывных функций. При этом справедливо неравенство

$$\|x_\varepsilon\|_c \leqslant 1,$$

так как $|s_\varepsilon(z)| \leqslant 1$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Получаем

$$\|A\| \geqslant \|Ax_\varepsilon\|_c \geqslant \left| \int\limits_0^1 K(t_0,\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right| - \int\limits_0^1 \Big|K(t_0,\tau) - P_\varepsilon(\tau)\Big| \, \Big|x_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right| - \varepsilon.$$

Оценим снизу число

$$\left| \int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right|.$$

Для этого определим множество

$$I_\varepsilon = \left\{\ \tau \in [0,1] \quad \Big| \quad |P_\varepsilon(\tau)| \leqslant \varepsilon\ \right\}.$$

Так как P_ε — многочлен, то множество I_ε, если не пусто, состоит из конечного набора промежутков отрезка $[0,1]$. Следовательно, по множествам I_ε и $[0,1]\backslash I_\varepsilon$ можно интегрировать по Риману любую непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию. Получаем

$$\left| \int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right| \geqslant \left| \int\limits_{[0,1]\backslash I_\varepsilon} P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right| - \int\limits_{I_\varepsilon} \Big|P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau.$$

Так как для любого $\tau \in [0,1]\backslash I_\varepsilon$ имеем равенство

$$P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau) = |P_\varepsilon(\tau)|,$$

а для любого $\tau \in I_\varepsilon$ имеем вложение

$$P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau) \in [0,\varepsilon],$$

то получаем

$$\left|\int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| \geqslant \int\limits_{[0,1]\backslash I_\varepsilon} \big|P_\varepsilon(\tau)\big|\; d\tau - \varepsilon =$$

$$= \int\limits_0^1 \big|P_\varepsilon(\tau)\big|\; d\tau - \int\limits_{I_\varepsilon} \big|P_\varepsilon(\tau)\big|\; d\tau - \varepsilon \geqslant \int\limits_0^1 \big|P_\varepsilon(\tau)\big|\; d\tau - 2\varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^1 \big|K(t_0,\tau)\big|\; d\tau - 3\varepsilon = L - 3\varepsilon.$$

Окончательно получаем неравенства

$$L \geqslant \|A\| \geqslant \|Ax_\varepsilon\|_c \geqslant L - 4\varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to +0$ следует равенство

$$\|A\| = L = \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau.$$

▲

П р и м е р 3.4.12. Пусть функция $K\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ является непрерывной. Рассмотрим линейный оператор

$$A\colon CL_1[0,1] \to CL_1[0,1]$$

вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_1[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x \in CL_1[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_1 = \int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 |x(\tau)|\,d\tau \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt \leqslant \left(\max_{\tau\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt \right) \|x\|_1.$$

Следовательно, для числа

$$L = \max_{\tau\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt$$

справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant L.$$

Из непрерывности функции K вытекает непрерывность функции $\tau \mapsto \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt$ на отрезке $[0,1]$. Следовательно, существует число $\tau_0 \in [0,1]$, такое, что

$$L = \int\limits_0^1 |K(t,\tau_0)|\,dt.$$

По теореме Кантора, непрерывная на компакте $[0,1]\times[0,1]$ функция K является равномерно непрерывной на нём. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $\tau \in [0,1]$ вида $|\tau - \tau_0| \leqslant \delta$ и для всех $t \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\bigl|K(t,\tau) - K(t,\tau_0)\bigr| \leqslant \varepsilon.$$

Определим промежуток

$$I_\varepsilon = \left\{ \ \tau \in [0,1] \quad \middle| \quad |\tau - \tau_0| < \delta(\varepsilon) \ \right\}.$$

Рассмотрим непрерывную функцию $x_\varepsilon\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, такую, что $x_\varepsilon(\tau) =$ $= 0$ при всех $\tau \in [0,1]\backslash I_\varepsilon$, а при всех $\tau \in I_\varepsilon$ выполнено неравенство $x_\varepsilon(\tau) > 0$. Тогда

$$\|x\|_1 = \int\limits_{I_\varepsilon} x_\varepsilon(\tau)\,d\tau > 0.$$

Получаем

$$\|Ax_\varepsilon\|_1 = \int\limits_0^1 \left| \int\limits_{I_\varepsilon} K(t,\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right| dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^1 \left| \int\limits_{I_\varepsilon} K(t,\tau_0)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right| dt - \int\limits_0^1 dt \int\limits_{I_\varepsilon} \Big|K(t,\tau) - K(t,\tau_0)\Big| \, |x_\varepsilon(\tau)|\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_0^1 |K(t,\tau_0)|\,dt \right) \left(\int\limits_{I_\varepsilon} x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \right) - \varepsilon \int\limits_{I_\varepsilon} |x_\varepsilon(\tau)|\,d\tau = \big(L-\varepsilon\big)\,\|x_\varepsilon\|_1.$$

Следовательно,

$$L \geqslant \|A\| \geqslant \frac{\|Ax_\varepsilon\|_1}{\|x_\varepsilon\|_1} \geqslant L - \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to +0$ получаем равенство

$$\|A\| = L = \max_{\tau\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt.$$

▲

Пример 3.4.13. Пусть функция $K\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ является непрерывной. Рассмотрим линейный оператор $A\colon CL_1[0,1] \to C[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_1[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x \in CL_1[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_c = \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_{t\in[0,1]} \max_{\tau\in[0,1]} |K(t,\tau)| \right) \int\limits_0^1 |x(\tau)|\,d\tau = \left(\max_{t,\tau\in[0,1]} |K(t,\tau)| \right) \|x\|_1.$$

Следовательно, для числа

$$L = \max_{t,\tau\in[0,1]} |K(t,\tau)|$$

справедливо неравенство
$$\|A\| \leqslant L.$$
В силу непрерывности функции K, существуют числа $t_0, \tau_0 \in [0,1]$, такие, что
$$L = |K(t_0, \tau_0)|,$$
а для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $\tau \in [0,1]$ вида $|\tau - \tau_0| \leqslant \delta$ справедливо неравенство
$$\bigl|K(t_0, \tau) - K(t_0, \tau_0)\bigr| \leqslant \varepsilon.$$
Определим промежуток
$$I_\varepsilon = \left\{ \ \tau \in [0,1] \quad \Big| \quad |\tau - \tau_0| < \delta(\varepsilon) \ \right\}.$$
Рассмотрим непрерывную функцию
$$x_\varepsilon \colon [0,1] \to \mathbb{R},$$
такую, что $x_\varepsilon(\tau) = 0$ при всех $\tau \in [0,1] \backslash I_\varepsilon$, а при всех $\tau \in I_\varepsilon$ выполнено неравенство $x_\varepsilon(\tau) > 0$. Тогда
$$\|x\|_1 = \int\limits_{I_\varepsilon} x_\varepsilon(\tau)\, d\tau > 0.$$
Получаем
$$\|Ax_\varepsilon\|_c \geqslant \left| \int\limits_0^1 K(t_0, \tau) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right| = \left| \int\limits_{I_\varepsilon} K(t_0, \tau) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right| \geqslant$$
$$\geqslant \left| \int\limits_{I_\varepsilon} K(t_0, \tau_0) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right| - \int\limits_{I_\varepsilon} \Bigl|K(t_0, \tau) - K(t_0, \tau_0)\Bigr|\, |x_\varepsilon(\tau)|\, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \bigl(|K(t_0, \tau_0)| - \varepsilon\bigr)\, \|x_\varepsilon\|_1.$$
Следовательно,
$$L \geqslant \|A\| \geqslant \frac{\|Ax_\varepsilon\|_1}{\|x_\varepsilon\|_1} \geqslant L - \varepsilon,$$
откуда при $\varepsilon \to +0$ получаем равенство
$$\|A\| = L = \max_{t, \tau \in [0,1]} |K(t, \tau)|.$$
▲

Определение 3.4.14. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, обозначим $\mathcal{L}(X, Y)$. Множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, обозначим $\mathcal{L}(X)$.*

Утверждение 3.4.15. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Тогда множество $\mathcal{L}(X, Y)$ с операторной нормой из определения 3.4.5 является линейным нормированным пространством.*

Доказательство. Так как по утверждению 3.4.4 ограниченность линейного оператора равносильна его непрерывности, а сумма линейных непрерывных операторов и умножение линейного непрерывного оператора на скаляр сохраняют непрерывность, то множество $\mathcal{L}(X, Y)$ является линейным пространством. Покажем, что операторная норма на $\mathcal{L}(X, Y)$ удовлетворяет определению 3.1.1 нормы. В силу замечания 3.4.6 для любого $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ выполнены неравенства

$$0 \leqslant \|A\| < +\infty.$$

Равенство $\|A\| = 0$ в силу утверждения 3.4.7 равносильно

$$\|A(x)\|_Y = 0 \qquad \forall\, x \in X,$$

т. е. $A = 0$ — нулевой оператор. Для любого оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и скаляра $t \in \mathbb{C}$ находим

$$\|tA\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|tA(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |t|\, \|A(x)\|_Y = \\ = |t| \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A(x)\|_Y = |t|\, \|A\|.$$

Наконец, для любых операторов $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ получаем неравенство треугольника

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A(x) + B(x)\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \big(\|A(x)\|_Y + \|B(x)\|_Y\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A(x)\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|B(x)\|_Y = \|A\| + \|B\|.$$

■

Теорема 3.4.16. *Пусть* $(X, \|\cdot\|_X)$ — *линейное нормированное пространство,* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — *полное линейное нормированное пространство. Тогда линейное нормированное пространство* $\mathcal{L}(X, Y)$ *является полным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность линейных операторов

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y).$$

Так как для любого вектора $x \in X$ и произвольных номеров n и m справедливо неравенство

$$\|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \leqslant \|A_n - A_m\| \, \|x\|_X,$$

то последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в полном пространстве $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Следовательно, для любого вектора $x \in$ $\in X$ существует вектор $A(x) \in Y$, такой, что

$$\|A_n(x) - A(x)\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, определён оператор $A\colon X \to Y$. Так как для любых векторов $x, y \in X$ и скаляров α и β выполнено соотношение

$$\|A_n(\alpha x + \beta y) - \alpha A(x) - \beta A(y)\|_Y \leqslant \\ \leqslant |\alpha| \, \|A_n(x) - A(x)\| + |\beta| \, \|A_n(y) - A(y)\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то получаем равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Следовательно, оператор A является линейным. Фундаментальная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$, т. е. существует число $R > 0$, такое, что для любого номера n выполнено неравенство

$$\|A_n\| \leqslant R.$$

Действительно, в силу фундаментальности последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует номер $N(1)$, такой, что для всех $n \geqslant N(1)$ выполнено неравенство

$$\|A_n - A_{N(1)}\| \leqslant 1,$$

которое влечёт неравенство

$$\|A_n\| \leqslant \|A_{N(1)}\| + 1.$$

Следовательно, число

$$R = \max\left\{\|A_1\|, \ldots, \|A_{N(1)}\|\right\} + 1$$

удовлетворяет условию

$$\|A_n\| \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого вектора $x \in X$ получаем соотношения

$$\|A(x)\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A_n(x)\|_Y \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|x\|_X \leqslant R\|x\|_X.$$

Следовательно, выполнено неравенство $\|A\| \leqslant R$, т. е. линейный оператор A является ограниченным. В силу фундаментальности последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех номеров $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\|A_n - A_m\| \leqslant \varepsilon$. Тогда для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\|_X \leqslant 1$ получаем неравенства

$$\|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \leqslant \|A_n - A_m\| \leqslant \varepsilon$$

при всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$. Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\|A_n(x) - A(x)\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, n \geqslant N(\varepsilon).$$

Следовательно, для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено соотношение

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, произвольная фундаментальная в $\mathcal{L}(X, Y)$ последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, т. е. пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является полным. ■

Пример 3.4.17. Приведём пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ и неполного линейного нормированного пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$, для которых пространство линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$ является неполным. В линейном пространстве

$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\;\middle|\;\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\}$$

введём две нормы

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \quad \text{и} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2}.$$

Тогда линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ полное, а пространство $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_2)$ — неполное. Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$z_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

является $\|\cdot\|_2$–фундаментальной и расходящейся в пространстве Y. Определим последовательность операторов $A_n \colon X \to Y$ вида

$$A_n(x) = x(1) z_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого номера n находим

$$\|A_n(x)\|_2 = |x(1)|\, \|z_n\|_2 \leqslant \|x\|_1\, \|z_n\|_2, \quad \text{т. е.} \quad \|A_n\| \leqslant \|z_n\|_2 \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}},$$

поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Следовательно, для любого номера n выполнено

$$A_n \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Аналогично для любых $n, m \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$\|A_{n+m} - A_n\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \Big(|x(1)|\, \|z_{n+m} - z_n\|_2 \Big) \leqslant \|z_{n+m} - z_n\|_2.$$

Отсюда получаем

$$\|A_{n+m} - A_n\| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^2}} < \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}} < \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ и при всех $m \in \mathbb{N}$. Итак, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Но для любого $x \in \ell_1$ вида $x(1) \neq 0$ последовательность

$$A_n(x) = x(1) z_n$$

является расходящейся в пространстве Y. Поэтому последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$. Действительно, если бы существовал оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, такой, что

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то для любого $x \in \ell_1$ было бы выполнено соотношение

$$\|A_n(x) - A(x)\|_2 \leqslant \|A_n - A\| \, \|x\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что неверно для любого $x \in \ell_1$ вида $x(1) \neq 0$. Таким образом, пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ неполное. ▲

Замечание 3.4.18. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — ненулевое линейное нормированное пространство, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — неполное линейное нормированное пространство. Тогда линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ тоже является неполным. Доказательство этого факта, основанное на применении теоремы Хана—Банаха, будет проведено позднее (см. следствие 5.1.7). □

Утверждение 3.4.19. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, причём линейное пространство X является конечномерным. Тогда любой линейный оператор $A\colon X \to Y$ является ограниченным, т. е. $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Доказательство. Пусть размерность линейного пространства X равна n, а система векторов $e_1, \ldots, e_n \in X$ образует базис в X. Тогда для любого вектора $x \in X$ существует единственный набор скаляров $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, такой, что справедливо равенство

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Введём в пространстве X норму вида

$$\|x\|_e = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

По теореме 3.1.18 эта норма эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|_X$ пространства X. Следовательно, существует положительное число L, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено неравенство

$$\|x\|_e \leqslant L\|x\|_X.$$

Определим число

$$M = \max\left\{\|A(e_1)\|_Y, \ldots, \|A(e_n)\|_Y\right\}.$$

Тогда для любого вектора $x \in X$ получаем

$$\|A(x)\|_Y \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,\|A(e_k)\|_Y \leqslant M\|x\|_e \leqslant ML\|x\|_X,$$

т. е. $\|A\| \leqslant ML$. Следовательно, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. ■

Определение 3.4.20. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Линейное отображение пространства X в поле скаляров $\mathbb{C}$ называется линейным функционалом. Линейное нормированное пространство ограниченных функционалов $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ называется пространством, сопряжённым к пространству X, и обозначается X^*.*

Пример 3.4.21. Приведём пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ и линейного неограниченного функционала $f\colon X \to \mathbb{C}$. Пусть пространство $X = CL_1[0,1]$ состоит из всех непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, норма в котором имеет вид

$$\|x\|_{L_1} = \int_0^1 |x(t)|\,dt.$$

Пусть линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ имеет вид $f(x) = x(0)$ для любой функции $x \in X$. Покажем, что $\|f\| = +\infty$, т. е. функционал f является неограниченным. Рассмотрим последовательность непрерывных функций вида

$$x_n(t) = \begin{cases} 2n^2\left(\frac{1}{n} - t\right), & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда получаем, что

$$\|x_n\|_{L_1} = 1, \quad \text{а} \quad f(x_n) = 2n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, получаем:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{L_1}=1} |f(x)| \geqslant |f(x_n)| = 2n \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ▲

Определение 3.4.22. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ называется поточечно ограниченной, если для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в пространстве Y, т. е.*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(x)\|_Y < +\infty \qquad \forall\, x \in X.$$

Теорема 3.4.23. (Банах, Штейнгауз) *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, причём пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ является полным. Пусть последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$является поточечно ограниченной. Тогда последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$, т. е.*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{-1}\left(B_1^Y(0)\right).$$

Здесь

$$A_n^{-1}\left(B_1^Y(0)\right) = \left\{\ x \in X \quad \middle| \quad \|A_n(x)\|_Y \leqslant 1\ \right\}$$

прообраз замкнутого единичного шара $B_1^Y(0) \subset Y$ для оператора A_n. Так как для любого номера n оператор A_n является непрерывным, то по утверждению 1.1.32 множество

$$A_n^{-1}\left(B_1^Y(0)\right)$$

является замкнутым в пространстве X. Следовательно, множество F является замкнутым в пространстве X как пересечение замкнутых множеств. Далее по условию для любого вектора $x \in X$ существует натуральное число $N(x)$, такое, что для любого номера n выполнено неравенство

$$\|A_n(x)\|_Y \leqslant N(x).$$

Это равносильно неравенству

$$\left\|A_n\left(\frac{x}{N(x)}\right)\right\|_Y \leqslant 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

т. е. справедливо вложение

$$\frac{x}{N(x)} \in F.$$

Таким образом, справедливы вложения

$$X \subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}} (NF) \subset X, \quad \Rightarrow \quad X = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} (NF).$$

Полное метрическое пространство X представлено в виде счётного объединения замкнутых множеств. Тогда по теореме 1.4.14 Бэра хотя бы одно из этих множеств должно иметь непустую внутренность. Поэтому существуют номер N_0, вектор $z_0 \in N_0F$ и положительное число r_0, такие, что выполнено вложение

$$B_{r_0}(z_0) \subset N_0F, \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{N_0}B_{r_0}(z_0) = B_{\frac{r_0}{N_0}}\left(\tfrac{z_0}{N_0}\right) \subset F.$$

Обозначим

$$\delta_0 = \frac{r_0}{N_0} \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{z_0}{N_0}.$$

Тогда для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\|_X = 1$ получаем

$$x_0 + \delta_0 x \in B_{\delta_0}(x_0) \subset F,$$

т. е. для любого номера n выполнено неравенство

$$\|A_n(x_0) + \delta_0 A_n(x)\|_Y \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\|A_n(x)\|_Y \leqslant \frac{1 + \|A_n(x_0)\|_Y}{\delta_0} \leqslant \frac{1 + N(x_0)}{\delta_0} = L_0.$$

Таким образом, для любого номера n получаем

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|A_n(x)\|_Y \leqslant L_0,$$

что и требовалось. ■

Пример 3.4.24. Покажем, что полнота пространства X в теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза существенна для ограниченности поточечно ограниченной последовательности линейных непрерывных операторов. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X, банахова пространства Y и поточечно ограниченной последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, которая является неограниченной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$, т. е. выполнено равенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty.$$

Пусть пространства $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_2)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ (см. пример 3.4.17), а оператор $A_n \colon X \to Y$ имеет вид

$$(A_n(x))(k) = \begin{cases} \frac{x(k)}{\sqrt{k}}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Тогда для любого $x \in \ell_1$ находим

$$\|A_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \leqslant \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \right) \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2} \leqslant \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \right) \|x\|_2.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|A_n\| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = L_n.$$

С другой стороны, для $x_n \in \ell_1$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

находим

$$\|A_n(x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = L_n \|x_n\|_2.$$

Следовательно, получаем

$$L_n \geqslant \|A_n\| \geqslant \frac{\|A_n(x_n)\|_1}{\|x_n\|_2} = L_n,$$

т. е. выполнено

$$\|A_n\| = L_n \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ является неограниченной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Тем не менее она является поточечно ограниченной, так как для любого $x \in \ell_1$ и любого номера n имеем

$$\|A_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x(k)| \leqslant \|x\|_1,$$

т. е. выполнено неравенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(x)\|_1 \leqslant \|x\|_1 < +\infty.$$

▲

Определение 3.4.25. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида $A_n \colon X \to Y$ называется поточечно сходящейся, если для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся в пространстве Y.*

Замечание 3.4.26. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, а последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является поточечно сходящейся. Тогда для любого вектора $x \in X$ существует вектор

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x) \in Y.$$

Таким образом, определено отображение $A \colon X \to Y$, которое является линейным оператором. Действительно, для любых векторов $x, y \in \in X$ и скаляров α и β находим

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \big(\alpha A_n(x) + \beta A_n(y)\big) = \\ = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} A_n(y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Указанный линейный оператор A будем называть поточечным пределом последовательности линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Теорема 3.4.27. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, причём $(X, \|\cdot\|_X)$ является полным. Пусть последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$*

является поточечно сходящейся. Тогда её поточечный предел A является линейным ограниченным оператором, т. е. выполнено вложение $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. При этом справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

Доказательство. По условию для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся в пространстве Y. Следовательно, она является ограниченной в пространстве Y. Тогда по теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Поэтому существует положительное число L, такое, что для любого номера n выполнено неравенство $\|A_n\| \leqslant L$. Тогда для любого вектора $x \in X$ и любого $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенства

$$\|A(x)\|_Y \leqslant \|A(x) - A_n(x)\|_Y + \|A_n(x)\|_Y \leqslant \|A(x) - A_n(x)\|_Y + L\|x\|_X.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|A(x)\| \leqslant L\|x\| \qquad \forall\, x \in X.$$

Следовательно, $\|A\| \leqslant L$, что означает вложение $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Далее для любого вектора $x \in X$ и любого номера n имеем неравенство

$$\|A(x)\|_Y \leqslant \|A(x) - A_n(x)\|_Y + \|A_n\|\,\|x\|_X,$$

переходя в котором к нижнему пределу по $n \to \infty$, получаем

$$\|A(x)\|_Y \leqslant \lim_{n\to\infty} \|A(x) - A_n(x)\|_Y + \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|x\|_X = \\ = \left(\varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|\right) \|x\|_X.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|,$$

что и требовалось. ■

Пример 3.4.28. Покажем, что полнота пространства X в теореме 3.4.27 существенна для ограниченности поточечного предела последовательности линейных непрерывных операторов. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X, банахова пространства Y и поточечно сходящейся к неограниченному линейному оператору A последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Для этого рассмотрим линейные нормированные пространства и последовательность непрерывных линейных операторов из примера 3.4.24. Определим линейный оператор $A\colon X \to Y$ вида

$$(A(x))(k) = \frac{x(k)}{\sqrt{k}}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \ell_1.$$

Тогда для любого $x \in \ell_1$ получаем

$$\|A(x) - A_n(x)\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, оператор A является поточечным пределом последовательности непрерывных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что оператор A является неограниченным, т. е.

$$\|A\| = +\infty.$$

Действительно, рассмотрим для любого номера n элемент $x_n \in \ell_1$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & 1 \leqslant k \leqslant n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Тогда получаем равенства

$$\|A(x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) \|x_n\|_2.$$

Следовательно, находим

$$\|A\| \geqslant \frac{\|A(x_n)\|_1}{\|x_n\|_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ▲

Определение 3.4.29. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является поточечно фундаментальной, если для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве Y.*

Определение 3.4.30. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Будем говорить, что пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является полным относительно поточечной сходимости, если для любой поточечно фундаментальной последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ существует поточечный предел $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Теорема 3.4.31. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — полные линейные нормированные пространства. Тогда пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является полным относительно поточечной сходимости.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную поточечно фундаментальную последовательность операторов

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y).$$

Тогда в силу полноты пространства Y для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся в пространстве Y. Следовательно, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является поточечно сходящейся к линейному оператору $A: X \to Y$. По теореме 3.4.27 имеет место вложение $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Следовательно, пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является полным относительно поточечной сходимости. ■

Пример 3.4.32. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X и банахова пространства Y, для которых пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ не является полным относительно поточечной сходимости. Для этого рассмотрим линейные нормированные пространства из примера 3.4.24. Как показано в примере 3.4.28, определённая в примере 3.4.24 последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является поточечно сходящейся к неограниченному оператору $A: X \to Y$. Следовательно, в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ существует поточечно фундаментальная последовательность операторов, не имеющая ограниченного поточечного предела. Таким образом, пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ не является полным относительно поточечной сходимости. ▲

Задача 3.4.33. Рассмотрим линейное нормированное пространство

$$CP[-\pi, \pi] = \left\{ x \in C[-\pi, \pi] \quad \middle| \quad x(-\pi) = x(\pi) \right\},$$

норма в котором такая же, как и в пространстве $C[-\pi, \pi]$, т. е.

$$\|x\|_c = \max_{t \in [-\pi, \pi]} |x(t)| \qquad \forall x \in CP[-\pi, \pi].$$

Доказать, что основная тригонометрическая система

$$S = \left\{ \tfrac{1}{2},\ \cos(nt),\ \sin(nt) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

является полной и не является базисом в пространстве $CP[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Для любой функции $x \in CP[-\pi, \pi]$ и числа $N \in \mathbb{N}$ определим её N-ю сумму Фурье:

$$\big(S_N(x)\big)(t) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n(x)\cos(nt) + b_n(x)\sin(nt)\big),$$

где коэффициенты Фурье функции x имеют вид

$$a_0(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\, d\tau, \quad a_n(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\cos(n\tau)\, d\tau,$$

$$b_n(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\sin(n\tau)\, d\tau.$$

Определим N-ю сумму Фейера $F_N(x)$ функции x как среднее арифметическое первых N сумм Фурье:

$$F_N(x) = \frac{S_1(x) + \ldots + S_N(x)}{N} \in \operatorname{Lin} S.$$

По теореме Фейера для любой функции $x \in CP[-\pi, \pi]$ справедливо соотношение

$$\|x - F_N(x)\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно,

$$\rho\big(x, \operatorname{Lin} S\big) \leqslant \lim_{N\to\infty} \|x - F_N(x)\|_c = 0,$$

т. е. множество $\operatorname{Lin} S$ является всюду плотным в $CP[-\pi, \pi]$. Таким образом, доказана полнота системы S в $CP[-\pi, \pi]$.

Предположим, рассуждая от противного, что система S является базисом в пространстве $CP[-\pi, \pi]$. Тогда для каждой функции $x \in$ $\in CP[-\pi, \pi]$ существует единственная последовательность скаляров

$$\big\{\alpha_0(x), \alpha_n(x), \beta_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty},$$

такая, что последовательность

$$\big(\sigma_N(x)\big)(t) = \frac{\alpha_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(\alpha_n(x)\cos(nt) + \beta_n(x)\sin(nt)\big), \quad N \in \mathbb{N},$$

сходится к функции x в пространстве $CP[-\pi,\pi]$ (то есть сходится равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$):

$$\left\|x-\sigma_N(x)\right\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty.$$

Получаем:

$$\pi\alpha_0(x)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\sigma_N(x)\big)(\tau)\,d\tau=\int\limits_{-\pi}^{\pi}x(\tau)\,d\tau=\pi a_0(x),$$

$$\pi\alpha_n(x)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\sigma_N(x)\big)(\tau)\cos(n\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}x(\tau)\cos(n\tau)\,d\tau=\pi a_n(x),$$

$$\pi\beta_n(x)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\sigma_N(x)\big)(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}x(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau=\pi b_n(x).$$

Таким образом, $\sigma_N(x)=S_N(x)$ для любого $N\in\mathbb{N}$. Следовательно, предположив базисность системы S в пространстве $CP[-\pi,\pi]$, получаем, что ряд Фурье любой функции из $CP[-\pi,\pi]$ сходится к ней равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. Как известно, для любой функции $x\in CP[-\pi,\pi]$ и любого номера N справедливо равенство

$$\big(S_N(x)\big)(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_N(\tau-t)x(\tau)\,d\tau \qquad \forall\, t\in[-\pi,\pi],$$

где

$$D_N(\tau)=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}} \quad \text{— ядро Дирихле.}$$

Таким образом, S_N является линейным оператором, действующим в линейном нормированном пространстве $CP[-\pi,\pi]$, причём

$$S_N(x)\to x \quad \text{при} \quad N\to\infty \qquad \forall\, x\in CP[-\pi,\pi].$$

Следовательно, последовательность линейных операторов $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ поточечно сходится к тождественному оператору.

Обозначим

$$\| \cdot \|_C \quad — \quad \text{операторную норму в пространстве } \mathcal{L}\left(C[-\pi,\pi]\right),$$

$$\| \cdot \|_{CP} \quad — \quad \text{операторную норму в пространстве } \mathcal{L}\left(CP[-\pi,\pi]\right).$$

Рассмотрим оператор S_N, действующий в пространстве $C[-\pi,\pi]$. Тогда, как показано в примере 3.4.11, справедливо равенство

$$\|S_N\|_C = \sup_{\substack{x\in C[-\pi,\pi] \\ \|x\|_c\leqslant 1}} \|S_N(x)\|_c = \max_{t\in[-\pi,\pi]} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|D_N(\tau-t)\right| d\tau =$$

$$= \max_{t\in[-\pi,\pi]} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-t}^{\pi-t} \left|D_N(\tau)\right| d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|D_N(\tau)\right| d\tau.$$

В силу вложения $CP[-\pi,\pi]\subset C[-\pi,\pi]$ справедливо неравенство

$$\|S_N\|_{CP} \leqslant \|S_N\|_C.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует функция $x_\varepsilon \in \in C[-\pi,\pi]$, такая, что $\|x_\varepsilon\|_c\leqslant 1$ и

$$\|S_N\|_C \leqslant \|S_N(x_\varepsilon)\|_c + \varepsilon.$$

Определим функцию $y_\varepsilon\in CP[-\pi,\pi]$ следующим образом:

$$y_\varepsilon(t) = \begin{cases} x(t), & \varepsilon-\pi\leqslant t\leqslant \pi-\varepsilon, \\ \frac{(\pi-t)}{\varepsilon}\, x(\pi-\varepsilon), & \pi-\varepsilon\leqslant t\leqslant\pi, \\ \frac{(\pi+t)}{\varepsilon}\, x(\varepsilon-\pi), & -\pi\leqslant t\leqslant \varepsilon-\pi. \end{cases}$$

Тогда $\|y_\varepsilon\|_c\leqslant 1$, и справедливо неравенство

$$\|S_N(x_\varepsilon)-S_N(y_\varepsilon)\|_c \leqslant \frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)}{\pi}\, 4\varepsilon < (2N+1)\varepsilon.$$

Следовательно, получаем

$$\|S_N\|_{CP}\leqslant \|S_N\|_C \leqslant \|S_N(x_\varepsilon)\|_c+\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \|S_N(y_\varepsilon)\|_c + (2N+2)\,\varepsilon \leqslant \|S_N\|_{CP} + (2N+2)\,\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем равенство

$$\|S_N\|_{CP} = \|S_N\|_C.$$

Так как пространство $CP[-\pi, \pi]$ является полным, то, по теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза, получаем, что

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|_{CP} < +\infty.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением находим

$$\pi\|S_N\|_{CP} = \pi\|S_N\|_C =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau\right|}{\sin\frac{\tau}{2}}\,d\tau \geqslant \int\limits_0^{\pi} \frac{2\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau\right|}{\tau}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} \frac{2|\sin\xi|}{\xi}\,d\xi \geqslant \int\limits_1^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} \frac{2\sin^2\xi}{\xi}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_1^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} \frac{1-\cos(2\xi)}{\xi}\,d\xi \sim \ln N \quad \text{при} \quad N\to\infty.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|_{CP} \geqslant \lim_{N\to\infty} \|S_N\|_{CP} = +\infty.$$

Получили противоречие. Таким образом, доказано, что система S не является базисом в пространстве $CP[-\pi, \pi]$. Отсюда, в частности, следует, что существует функция $x_0 \in CP[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой не сходится к ней равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. ■

Определение 3.4.34. *Пусть (X, τ_1) и (Y, τ_2) — топологические пространства. Отображение*

$$f\colon X \to Y$$

называется открытым, если для любого τ_1-открытого множества V его образ $f(V)$ является τ_2-открытым.

Утверждение 3.4.35. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор*

$$A\colon X \to Y$$

является открытым отображением тогда и только тогда, когда существует положительное число δ_0, такое, что

$$O^Y_{\delta_0}(0) \subset A\left(O^X_1(0)\right).$$

Доказательство. Докажем необходимость. Если линейный оператор A является открытым отображением, то образ открытого шара $O^X_1(0) \subset X$ под действием оператора A является открытым в пространстве Y множеством. Так как

$$0 = A(0) \in A\left(O^X_1(0)\right) \text{ — открытое множество,}$$

то существует $\delta_0 > 0$, такое, что

$$O^Y_{\delta_0}(0) \subset A\left(O^X_1(0)\right).$$

Докажем достаточность. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset X$ и вектор $y \in A(V)$. Тогда существует вектор $x \in V$, такой, что $y = A(x)$. В силу открытости множества V существует число $\varepsilon > 0$, такое, что

$$O^X_\varepsilon(x) = x + \varepsilon O^X_1(0) \subset V.$$

Следовательно, справедливо вложение

$$A(V) \supset A(x) + \varepsilon A\left(O^X_1(0)\right) \supset y + \varepsilon O^Y_{\delta_0}(0) = O^Y_{\varepsilon\delta_0}(y),$$

что означает открытость множества $A(V)$. ■

Теорема 3.4.36. (Банах, об открытом отображении) *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — полные линейные нормированные пространства, а линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является сюръективным (т. е. $A(X) = Y$). Тогда оператор A является открытым отображением.*

Доказательство. Так как справедливы равенства

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(O^X_n(0)\right) = X$$

и $A(X) = Y$, то получаем

$$Y = A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^X(0)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(nA\left(O_1^X(0)\right)\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right] \subset Y.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Таким образом, полное пространство Y представлено в виде счётного объединения замкнутых множеств. Тогда по теореме 1.4.14 Бэра одно из этих замкнутых множеств имеет непустую внутренность. Следовательно, существует номер n_0, положительное число δ_0 и вектор $u_0 \in Y$, такой, что выполнено вложение

$$O_{\delta_0}^Y(u_0) \subset n_0\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Пусть

$$r_0 = \frac{\delta_0}{n_0} \quad \text{и} \quad v_0 = \frac{u_0}{n_0},$$

тогда получаем

$$O_{r_0}^Y(v_0) \subset \left[A\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Отсюда следует, что

$$O_{r_0}^Y(-v_0) = -O_{r_0}^Y(v_0) \subset -\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right] = \\ = \left[A\left(-O_1^X(0)\right)\right] = \left[A\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Следовательно, в силу замечания 3.1.5 находим

$$O_{r_0}^Y(0) = \tfrac{1}{2}O_{r_0}^Y(v_0) + \tfrac{1}{2}O_{r_0}(-v_0) \subset \tfrac{1}{2}\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right] + \tfrac{1}{2}\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Так как по замечанию 3.1.7 выполнено равенство

$$\frac{1}{2}\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right] = \left[\frac{1}{2}A\left(O_1^X(0)\right)\right] = \left[A\left(O_{\frac{1}{2}}^X(0)\right)\right]$$

и справедливо вложение

$$\left[A\left(O_{\frac{1}{2}}^X(0)\right)\right] + \left[A\left(O_{\frac{1}{2}}^X(0)\right)\right] \subset \\ \subset \left[A\left(O_{\frac{1}{2}}^X(0)\right) + A\left(O_{\frac{1}{2}}^X(0)\right)\right] = \left[A\left(O_1^X(0)\right)\right],$$

то окончательно получаем вложение

$$O^Y_{r_0}(0) \subset \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right].$$

Следовательно, для любого положительного числа ε выполнено вложение

$$O^Y_{\varepsilon r_0}(0) \subset \left[A\left(O^X_\varepsilon(0)\right)\right].$$

Покажем, что выполнено вложение

$$\left[A\left(O^X_1(0)\right)\right] \subset A\left(O^X_3(0)\right).$$

Рассмотрим произвольный вектор

$$y_1 \in \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right].$$

Обозначим для любого номера n число $\varepsilon_n = 2^{1-n}$. Тогда выполнено вложение

$$y_1 \in \left[A\left(O^X_{\varepsilon_1}(0)\right)\right].$$

Предположим, рассуждая по индукции, что определён вектор

$$y_n \in \left[A\left(O^X_{\varepsilon_n}(0)\right)\right].$$

Тогда справедливо соотношение

$$\varnothing \neq \left(y_n - O^Y_{r_0\varepsilon_{n+1}}(0)\right) \cap A\left(O^X_{\varepsilon_n}(0)\right) \subset$$
$$\subset \left(y_n - \left[A\left(O^X_{\varepsilon_{n+1}}(0)\right)\right]\right) \cap A\left(O^X_{\varepsilon_n}(0)\right).$$

Следовательно, существуют векторы

$$y_{n+1} \in \left[A\left(O^X_{\varepsilon_{n+1}}(0)\right)\right] \quad \text{и} \quad x_n \in O^X_{\varepsilon_n}(0),$$

такие, что выполнено равенство

$$y_n - y_{n+1} = A(x_n).$$

Для любого номера n определим вектор

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Так как для любых номеров n и m выполнено неравенство

$$\|z_{n+m} - z_n\|_X \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \|x_k\|_X \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{1-k} = 2^{1-n},$$

то последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в полном пространстве X. Следовательно, существует вектор $z_0 \in X$, такой, что

$$\|z_n - z_0\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При этом выполнено неравенство

$$\|z_0\|_X \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2 < 3,$$

т. е. $z_0 \in O_3^X(0)$. Далее для любого номера n выполнено равенство

$$A(z_n) = \sum_{k=1}^{n} A(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \bigl(y_k - y_{k+1}\bigr) = y_1 - y_{n+1}.$$

Так как справедливо неравенство

$$\|y_n\|_Y \leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant \varepsilon_n} \|A(x)\|_Y \leqslant \|A\|\varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то получаем

$$A(z_0) = \lim_{n\to\infty} A(z_n) = y_1, \quad \Rightarrow \quad y_1 \in A\left(O_3^X(0)\right).$$

Таким образом, имеем соотношения

$$O_{r_0}^Y(0) \subset \left[A\left(O_1^X(0)\right)\right] \subset A\left(O_3^X(0)\right),$$

т. е. для числа $\delta_0 = \frac{r_0}{3}$ выполнено вложение

$$O_{\delta_0}^Y(0) \subset A\left(O_1^X(0)\right).$$

Следовательно, в силу утверждения 3.4.35 линейный оператор A является открытым. ■

Пример 3.4.37. Приведём пример полного линейного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, неполного линейного пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$

и линейного сюръективного оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, который не является открытым отображением. Рассмотрим те же линейные нормированные пространства, что и в примере 3.4.17, т. е.

$$(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_1), \quad (Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_2).$$

Пусть $A\colon X \to Y$ — тождественное отображение, т. е. $Ax = x$ для любого $x \in \ell_1$. Тогда, как показано в примере 3.1.12, для любого $x \in \ell_1$ выполнено неравенство

$$\|Ax\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} \leqslant \|x\|_{\ell_1},$$

т. е. $\|A\| \leqslant 1$, и даже $\|A\| = 1$, так как для элемента $e_1 \in \ell_1$ вида $e_1(1) = 1$ и $e_1(k) = 0$ для $k > 1$ получаем

$$1 \geqslant \|A\| \geqslant \|A(e_1)\|_2 = 1.$$

Таким образом, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Сюръективность тождественного оператора A очевидна. Покажем, что оператор A не является открытым отображением. Рассмотрим образ открытого единичного шара с центром в нуле из пространства X под действием оператора A. Это множество

$$O = \left\{ \, x \in \ell_1 \quad \middle| \quad \|x\|_1 < 1 \, \right\}.$$

Покажем, что множество O не является открытым в пространстве Y. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$y_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \leqslant k \leqslant n \\ \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Для любого элемента $x_0 \in O$ и любого положительного числа ε определим

$$x_{n,\varepsilon} = x_0 + \varepsilon y_n.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\|x_{n,\varepsilon} - x_0\|_2 < \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{6}} \quad \text{и} \quad \|x_{n,\varepsilon}\|_1 \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \|x_0\|_1 \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, для любого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \frac{\delta\sqrt{6}}{\pi}$, такое, что для любого номера n выполнено вложение

$$x_{n,\varepsilon} \in O_\delta^Y(x_0),$$

но при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|x_{n,\varepsilon}\|_1 > 1.$$

Следовательно, $x_{n,\varepsilon} \notin O$. Таким образом, ни одна точка множества O не является внутренней для O в пространстве Y. Таким образом, множество O не является открытым в пространстве Y, что и требовалось. ▲

3.5. Обратимость линейных операторов

Определение 3.5.1. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Отображение*

$$A^{-1}_{\text{пр.}}\colon \operatorname{Im} A \to X$$

называется правым обратным оператором для оператора A, если для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ выполнено равенство

$$A\left(A^{-1}_{\text{пр.}}(y)\right) = y.$$

Определение 3.5.2. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Отображение*

$$A^{-1}_{\text{лев.}}\colon \operatorname{Im} A \to X$$

называется левым обратным оператором для оператора A, если для любого вектора $x \in X$ выполнено равенство

$$A^{-1}_{\text{лев.}}\left(A(x)\right) = x.$$

Замечание 3.5.3. Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда правый обратный оператор для оператора A всегда существует, вообще говоря, не является единственным и может быть нелинейным. Действительно, по определению образа оператора A для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ существует вектор $x(y) \in X$, такой, что

$$A(x(y)) = y.$$

Следовательно, определив для любого $y \in \operatorname{Im} A$ значение,

$$A^{-1}_{\text{пр.}}(y) = x(y),$$

получим правый обратный оператор для оператора A. Покажем на примере возможную неединственность и нелинейность правого обратного оператора. Рассмотрим линейный оператор $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$A(x_1, x_2) = x_1.$$

Тогда $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}$, а два различных оператора $B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ вида

$$B(x_1) = (x_1, 0) \quad \text{и} \quad C(x_1) = (x_1, x_1^2)$$

являются правыми обратными для оператора A, при этом оператор C является нелинейным. $\square$

Замечание 3.5.4. Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда правый обратный оператор для оператора A единственен, если и только если для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный вектор $x(y) \in X$, такой, что $A(x(y)) = y$, т. е. если оператор A является взаимно однозначным отображением из пространства X на $\operatorname{Im} A$. Это очевидным образом следует из определения правого обратного оператора. При этом взаимная однозначность линейного оператора A равносильна тривиальности его ядра. Действительно, если вектор $x \in \operatorname{Ker} A$, то выполнены равенства $A(x) = 0 = A(0)$. Тогда в силу взаимной однозначности оператора A получаем равенство $x = 0$, т. е. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Обратно, если ядро оператора A тривиально, а для вектора $y \in \operatorname{Im} A$ имеются два вектора $x \in X$ и $z \in X$ вида $y = A(x) = A(z)$, то $A(x - z) = 0$, т. е. $x - z \in \operatorname{Ker} A = \{0\}$. Следовательно, выполнено равенство $x = z$, т. е. оператор A является взаимно однозначным. $\square$

Утверждение 3.5.5. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда левый обратный оператор для оператора A существует тогда и только тогда, когда ядро оператора A тривиально, т. е.*

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}.$$

При этом левый обратный оператор единственен и линеен.

Доказательство. Пусть оператор A имеет левый обратный оператор $A^{-1}_{\text{лев.}}$. Пусть вектор $x \in \operatorname{Ker} A$. Так как нулевой вектор также принадлежит ядру оператора A, то по определению левого обратного оператора получаем

$$x = A^{-1}_{\text{лев.}}(A(x)) = A^{-1}_{\text{лев.}}(0) = A^{-1}_{\text{лев.}}(A(0)) = 0,$$

т. е. $x = 0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} A = 0$. Обратно, пусть ядро оператора A тривиально. Тогда, как следует из замечания 3.5.4, оператор A является взаимно однозначным отображением пространства X на $\operatorname{Im} A$, т. е. для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный вектор $x(y) \in X$, такой, что

$$A(x(y)) = y.$$

Определим для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ значение

$$A^{-1}_{\text{лев.}}(y) = x(y).$$

Тогда для любого вектора $z \in X$ получаем

$$A^{-1}_{\text{лев.}}(A(z)) = x(A(z)) = z$$

в силу взаимной однозначности оператора A. Таким образом, определённый оператор $A^{-1}_{\text{лев.}}$ действительно является левым обратным для оператора A. Если при этом существует другой оператор $B\colon \operatorname{Im} A \to X$ вида

$$B(A(x)) = x \qquad \forall\, x \in X,$$

то для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ получаем

$$B(y) = B(A(x(y))) = x(y) = A^{-1}_{\text{лев.}}(y),$$

т. е. $B = A^{-1}_{\text{лев.}}$. Таким образом, левый обратный оператор единственен. Покажем линейность левого обратного оператора. Для любых векторов $u, v \in \operatorname{Im} A$ и любых скаляров α и β находим

$$\begin{aligned} A^{-1}_{\text{лев.}}(\alpha u + \beta v) &= A^{-1}_{\text{лев.}}\big(\alpha A(x(u)) + \beta A(x(v))\big) = \\ &= A^{-1}_{\text{лев.}}\big(A(\alpha x(u) + \beta x(v))\big) = \alpha x(u) + \beta x(v) = \\ &= \alpha\, A^{-1}_{\text{лев.}}(u) + \beta\, A^{-1}_{\text{лев.}}(v), \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Замечание 3.5.6. Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор с тривиальным ядром. Тогда в силу замечания 3.5.4 и утверждения 3.5.5 оператор A имеет единственный правый и левый обратный операторы, которые совпадают. При этом левый, а значит, и правый обратный оператор линейны. □

Определение 3.5.7. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Оператор*

$$A^{-1}\colon \operatorname{Im} A \to X$$

называется обратным для оператора A, если он является одновременно левым и правым обратным оператором.

Утверждение 3.5.8. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда обратный оператор для оператора A существует тогда и только тогда, когда ядро оператора A тривиально. При этом обратный оператор единственен и линеен.*

Доказательство. Сразу следует из утверждения 3.5.5 и замечаний 3.5.4, 3.5.6. ■

Определение 3.5.9. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется непрерывно обратимым, если он имеет непрерывный обратный оператор, т. е. существует оператор*

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X).$$

Утверждение 3.5.10. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Тогда линейный оператор $A\colon X \to \to Y$ является непрерывно обратимым тогда и только тогда, когда он является взаимно однозначным открытым отображением из пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ на пространство $(\operatorname{Im} A, \|\cdot\|_Y)$.*

Доказательство. В силу утверждения 3.5.8 существование линейного обратного оператора A^{-1} у линейного оператора A равносильно взаимной однозначности оператора A. В силу утверждения 1.1.32 непрерывность оператора A^{-1} равносильна тому, что для любого $\|\cdot\|_X$-открытого множества $V \subset X$ его прообраз

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}(V) \subset \operatorname{Im} A$$

под действием оператора A^{-1} является $\|\cdot\|_Y$-открытым в пространстве $\operatorname{Im} A$. Справедливо равенство

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}(V) = \left\{\ y \in \operatorname{Im} A \quad \middle| \quad A^{-1}(y) \in V\ \right\} =$$

$$= \left\{\ y \in \operatorname{Im} A \quad \middle| \quad y \in A(V)\ \right\} = A(V).$$

Следовательно,
$$\left(A^{-1}\right)^{-1}(V) = A(V).$$
Тогда открытость прообраза произвольного открытого множества $V \subset X$ под действием обратного оператора A^{-1} равносильна открытости его образа $A(V) \subset \operatorname{Im} A$ под действием оператора A. Последнее по определению 3.4.34 равносильно открытости отображения $A\colon X \to \to \operatorname{Im} A$, что и требовалось. ■

Определение 3.5.11. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to \to Y$ называется ограниченным снизу, если существует число $L > 0$, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено неравенство*
$$\|A(x)\|_Y \geqslant L\|x\|_X.$$

Утверждение 3.5.12. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to \to Y$ является непрерывно обратимым тогда и только тогда, когда он является ограниченным снизу.*

Доказательство. Пусть линейный оператор A является непрерывно обратимым, т. е. существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X)$. Следовательно, для любого вектора $x \in X$ получаем
$$\|x\|_X = \left\|A^{-1}(A(x))\right\|_X \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \, \|A(x)\|_Y,$$
т. е. число
$$L = \frac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$$
является искомым для ограниченности снизу оператора A.

Пусть линейный оператор A является ограниченным снизу, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено неравенство
$$\|A(x)\|_Y \geqslant L\|x\|_X.$$
Если вектор $x \in \operatorname{Ker} A$, то получаем
$$A(x) = 0 \quad \text{и} \quad 0 = \|A(x)\|_Y \geqslant L\|x\|_X.$$
Следовательно, $x = 0$, т. е. справедливо равенство $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Тогда, в силу утверждения 3.5.8, существует линейный обратный оператор
$$A^{-1}\colon \operatorname{Im} A \to X.$$

При этом в силу ограниченности снизу оператора A для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ получаем

$$\left\|A^{-1}(y)\right\|_X \leqslant \frac{\left\|A\left(A^{-1}(y)\right)\right\|_Y}{L} = \frac{\|y\|_Y}{L}.$$

Последнее неравенство означает, что

$$\left\|A^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{L},$$

т. е. справедливо вложение $A^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X)$, что и требовалось. ■

Утверждение 3.5.13. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейное нормированное пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является непрерывно обратимым. Тогда $\operatorname{Im} A$ является замкнутым подпространством в Y.*

Доказательство. В силу утверждения 3.5.12, оператор A является ограниченным снизу, т. е. существует число $L > 0$, такое, что

$$\|A(x)\|_Y \geqslant L\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Пусть вектор $y \in [\operatorname{Im} A]$. Тогда существует последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X,$$

такая, что выполнено соотношение

$$\|A(x_n) - y\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, получаем

$$\|x_n - x_m\|_X \leqslant \frac{1}{L}\|A(x_n) - A(x_m)\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Таким образом, последовательность x_n является фундаментальной в полном пространстве X. Поэтому существует вектор $z \in X$, такой, что

$$\|x_n - z\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как оператор A является непрерывным, то

$$\|A(x_n) - A(z)\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, получаем $\|A(z) - y\|_Y = 0$, т. е. $y = A(z)$, что означает вложение $y \in \operatorname{Im} A$. Таким образом, подпространство $\operatorname{Im} A$ является замкнутым. ■

Т е о р е м а 3.5.14. (Банах, об обратном операторе) *Пусть* $(X, \|\cdot\|_X)$ *и* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *— банаховы пространства, а линейный оператор* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Существует обратный оператор* $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A = 0$ *и* $\operatorname{Im} A = Y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если существует обратный оператор A^{-1}, определённый на всём пространстве Y, то по определению обратного оператора сразу получаем равенство $\operatorname{Im} A = Y$, а по утверждению 3.5.8 находим $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Пусть теперь у линейного ограниченного оператора A имеем равенства $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = Y$. Тогда по теореме 3.4.36 Банаха об открытом отображении оператор A является открытым отображением из пространства X на пространство Y. Следовательно, в силу утверждения 3.5.10 оператор A непрерывно обратим, т. е. существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, что и требовалось. ■

П р и м е р 3.5.15. Приведём пример полного линейного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, неполного линейного пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ и линейного сюръективного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ с тривиальным ядром, обратный оператор к которому не является непрерывным. Рассмотрим те же линейные нормированные пространства и тот же линейный оператор, что и в примере 3.4.37, т. е.

$$(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_1), \quad (Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_2),$$

$A\colon X \to Y$ — тождественный оператор. Очевидно, что

$$\operatorname{Ker} A = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A = \ell_1 = Y.$$

Следовательно, обратный оператор $A^{-1}\colon Y \to X$ существует и тоже является тождественным, т. е.

$$A^{-1}(y) = y \qquad \forall\, y \in \ell_1.$$

Как показано в примере 3.4.37, оператор A является непрерывным и не является открытым отображением. Следовательно, в силу утверждения 3.5.10 оператор A^{-1} не является непрерывным, т. е. $A^{-1} \notin \mathcal{L}(Y, X)$. ▲

З а д а ч а 3.5.16. Пусть X — линейное пространство, а $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ — две нормы в X. Пусть пространства $(X, \|\cdot\|_*)$ и $(X, \|\cdot\|_{**})$ являются полными, и существует число $L > 0$, такое, что

$$\|x\|_* \leqslant L\|x\|_{**} \qquad \forall\, x \in X.$$

Доказать, что нормы $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ эквивалентны в X.

Решение. Рассмотрим тождественный оператор

$$I\colon (X, \|\cdot\|_{**}) \to (X, \|\cdot\|_*)\,, \quad \text{т. е.} \quad I(x) = x \quad \forall\, x \in X.$$

Так как для любого $x \in X$ выполнено

$$\|I(x)\|_* = \|x\|_* \leqslant L\|x\|_{**},$$

то получаем неравенство $\|I\| \leqslant L$. Следовательно, тождественный оператор I является непрерывным. По определению оператора I очевидно, что выполнены равенства

$$\operatorname{Ker} I = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} I = X.$$

По теореме 3.5.14 Банаха об обратном операторе, оператор

$$I^{-1}\colon (X, \|\cdot\|_*) \to (X, \|\cdot\|_{**})$$

является непрерывным. Тогда получаем соотношения

$$\|I^{-1}(x)\|_{**} = \|x\|_{**} \leqslant \|I^{-1}\|\,\|x\|_* \qquad \forall\, x \in X.$$

Таким образом, существуют числа $L > 0$ и $C = \frac{1}{\|I^{-1}\|} > 0$, такие, что для всех $x \in X$ справедливы неравенства

$$C\|x\|_{**} \leqslant \|x\|_* \leqslant L\|x\|_{**},$$

т. е. нормы $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ эквивалентны в X. ▲

Глава 4

Мера и интеграл Лебега

4.1. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрение теории меры и интеграла Лебега проводится по книге [4, гл. 10].

Определение 4.1.1. *Семейство множеств $\mathcal{R}$ называется кольцом, если для любых множеств $A \in \mathcal{R}$ и $B \in \mathcal{R}$ выполнены вложения*

$$A \cup B \in \mathcal{R} \quad \text{и} \quad A \backslash B \in \mathcal{R}.$$

Кольцо $\mathcal{R}$ называется σ-кольцом, если дополнительно для любой последовательности множеств

$$\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$$

выполнено вложение

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}.$$

Замечание 4.1.2. Если $\mathcal{R}$ — кольцо, то $\varnothing \in \mathcal{R}$, так как для любого множества $A \in \mathcal{R}$ по определению 4.1.1 получаем

$$\varnothing = A \backslash A \in \mathcal{R}.$$

$\square$

Замечание 4.1.3. Если $\mathcal{R}$ — кольцо, а конечная совокупность множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M} \subset \mathcal{R}$, то справедливо вложение

$$\bigcup_{m=1}^{M} A_m \in \mathcal{R}.$$

Доказательство проведём индукцией по номеру M. Для $M = 1$ вложение очевидно. Если вложение выполнено для некоторого номера M, то для совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M+1} \subset \mathcal{R}$ получаем

$$B = \bigcup_{m=1}^{M} A_m \in \mathcal{R}$$

по предположению индукции и

$$\bigcup_{m=1}^{M+1} A_m = B \cup A_{M+1} \in \mathcal{R}$$

по определению 4.1.1 кольца $\mathcal{R}$. $\square$

З а м е ч а н и е 4.1.4. Если $\mathcal{R}$ — кольцо, множества $A, B \in \mathcal{R}$, то

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}.$$

Если $\mathcal{R}$ — σ-кольцо, а последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, то

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = A_1 \Bigg\backslash \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_m) \right) \in \mathcal{R}.$$

$\square$

О п р е д е л е н и е 4.1.5. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо. Функция*

$$\varphi \colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

называется конечно-аддитивной, если для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ вида $A \cap B = \varnothing$ справедливо равенство

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

Функция φ называется счётно-аддитивной, если для любой последовательности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, такой, что

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R},$$

а $A_m \cap A_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$, справедливо равенство

$$\varphi(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m).$$

З а м е ч а н и е 4.1.6. В определении 4.1.5 сумма ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m)$$

не зависит от порядка слагаемых в силу знакопостоянных (неотрицательных) значений функции φ. $\square$

Замечание 4.1.7. Если неотрицательная функция φ является конечно-аддитивной на кольце $\mathcal{R}$, то для любой конечной совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M} \subset \mathcal{R}$ вида $A_m \cap A_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$ выполнено равенство

$$\varphi\left(\bigcup_{m=1}^{M} A_m\right) = \sum_{m=1}^{M} \varphi(A_m).$$

Доказательство проведём индукцией по номеру M. Для $M = 1$ равенство очевидно. Если равенство выполнено для некоторого номера M, то для множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M+1} \subset \mathcal{R}$ вида $A_m \cap A_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$ получаем, что

$$B = \bigcup_{m=1}^{M} A_m \in \mathcal{R} \quad \text{по замечанию 4.1.3,}$$

$$\varphi(B) = \sum_{m=1}^{M} \varphi(A_m) \quad \text{по предположению индукции,}$$

и выполнено $B \cap A_{M+1} = \varnothing$. Следовательно,

$$\varphi\left(\bigcup_{m=1}^{M+1} A_m\right) = \varphi(B \cup A_{M+1}) = \varphi(B) + \varphi(A_{M+1}) = \sum_{m=1}^{M+1} \varphi(A_m),$$

что и требовалось. $\square$

Замечание 4.1.8. Если неотрицательная функция φ является счётно-аддитивной на кольце $\mathcal{R}$, то она является и конечно-аддитивной.

Действительно, если для любого множества $A \in \mathcal{R}$ выполнено $\varphi(A) = +\infty$, то утверждение очевидно. Пусть существует множество $A_0 \in \mathcal{R}$, такое, что

$$\varphi(A_0) < +\infty.$$

Определим последовательность множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ вида

$$A_1 = A_0, \quad A_m = \varnothing \quad \text{для} \quad m > 1.$$

Тогда

$$A_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad \text{и} \quad A_m \cap A_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k.$$

Следовательно, в силу счётной аддитивности φ получаем

$$\varphi(A_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m) = \varphi(A_0) + \sum_{m=2}^{\infty} \varphi(\varnothing).$$

Так как по условию $\varphi(A_0) < +\infty$, то

$$\sum_{m=2}^{\infty} \varphi(\varnothing) = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi(\varnothing) = 0.$$

Следовательно, для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$, таких, что $A \cap B = \varnothing$, рассмотрев последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ вида

$$A_1 = A, \quad A_2 = B, \quad A_m = \varnothing \quad \text{при} \quad m > 2,$$

получим

$$A \cup B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m, \quad A_m \cap A_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k,$$

откуда

$$\varphi(A \cup B) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m) = \varphi(A) + \varphi(B) + \sum_{m=3}^{\infty} \varphi(\varnothing) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

что и требовалось. □

Утверждение 4.1.9. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, а функция*

$$\varphi \colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

является конечно-аддитивной. Тогда

1) *для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ выполнено*

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B);$$

2) *для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ вида $A \subset B$ выполнено*

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(B);$$

3) *если существует множество $A_0 \in \mathcal{R}$ вида $\varphi(A_0) < +\infty$, то*

$$\varphi(\varnothing) = 0;$$

4) *для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ вида $A \subset B$ и $\varphi(A) < +\infty$ выполнено*

$$\varphi(B \backslash A) = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Доказательство. Так как для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ справедливо представление

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$$

в виде объединения трёх попарно непересекающихся элементов кольца $\mathcal{R}$, то по замечанию 4.1.7 получаем

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A \backslash B) + \varphi(B \backslash A) + \varphi(A \cap B).$$

Следовательно,

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \big(\varphi(A \backslash B) + \varphi(A \cap B)\big) + \Big(\varphi(B \backslash A) + \varphi(A \cap B)\Big).$$

Так как $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ и $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \varnothing$, то

$$\varphi(A \backslash B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A).$$

Так как $B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$ и $(B \backslash A) \cap (A \cap B) = \varnothing$, то

$$\varphi(B \backslash A) + \varphi(A \cap B) = \varphi(B).$$

Следовательно,

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

т. е. свойство 1 доказано.

Если $A, B \in \mathcal{R}$ и $A \subset B$, то $B = A \cup (B \backslash A)$ и $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$. Следовательно, получаем

$$\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B \backslash A) \geqslant \varphi(A),$$

т. е. свойство 2 доказано. Если при этом $\varphi(A) < +\infty$, то получаем

$$\varphi(B \backslash A) = \varphi(B) - \varphi(A),$$

т. е. свойство 4 доказано.

Так как $\varnothing \in \mathcal{R}$, то

$$\varphi(A) = \varphi(A \cup \varnothing) = \varphi(A) + \varphi(\varnothing).$$

Если существует множество $A_0 \in \mathcal{R}$ вида $\varphi(A_0) < +\infty$, то для $A = A_0$ получаем

$$\varphi(\varnothing) = \varphi(A_0) - \varphi(A_0) = 0,$$

т. е. свойство 3 доказано. ■

Следствие 4.1.10. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, а функция*

$$\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

является конечно-аддитивной. Тогда для любой конечной совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M} \subset \mathcal{R}$ справедливо неравенство

$$\varphi\left(\bigcup_{m=1}^{M} A_m\right) \leqslant \sum_{m=1}^{M} \varphi(A_m).$$

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по номеру M. Для $M = 1$ неравенство обращается в равенство. Если неравенство выполнено для некоторого номера M, то для совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M+1} \subset \mathcal{R}$ определим множество

$$B = \bigcup_{m=1}^{M} A_m \in \mathcal{R}$$

и по свойству 1 утверждения 4.1.9 и в силу предположения индукции получим

$$\varphi\left(\bigcup_{m=1}^{M+1} A_m\right) = \varphi(B \cup A_{M+1}) \leqslant \\ \leqslant \varphi(B \cup A_{M+1}) + \varphi(B \cap A_{M+1}) = \varphi(B) + \varphi(A_{M+1}) \leqslant \\ \leqslant \sum_{m=1}^{M} \varphi(A_m) + \varphi(A_{M+1}),$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.1.11. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, функция*

$$\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

является счётно-аддитивной. Тогда для любой неубывающей по вложению последовательности $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, т. е.

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots ,$$

для которой множество

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R},$$

справедливо равенство

$$\varphi(A) = \lim_{m\to\infty} \varphi(A_m).$$

Доказательство. Для любого номера m определим множество $B_m \in \mathcal{R}$ вида $B_1 = A_1$ и $B_m = A_m \backslash A_{m-1}$ для $m \geqslant 2$. Тогда $B_m \cap B_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$, и справедливы равенства

$$A_m = \bigcup_{k=1}^{m} B_k \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Следовательно, в силу счётной аддитивности функции φ получаем

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(B_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \varphi(B_k) = \lim_{m\to\infty} \varphi(A_m),$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.1.12. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, а функция*

$$\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

является счётно-аддитивной. Тогда для любой счётной совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, такой, что

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R},$$

справедливо неравенство

$$\varphi\,(A) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m).$$

Доказательство. Для любого номера m определим множество

$$B_m = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathcal{R}.$$

По следствию 4.1.10 имеем неравенство

$$\varphi(B_m) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \varphi(A_k).$$

Имеем также

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots \quad \text{и} \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A.$$

Следовательно, в силу утверждения 4.1.11 получаем

$$\varphi(A) = \lim_{m\to\infty} \varphi(B_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \varphi(A_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k),$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.1.13. *Пусть* $\mathcal{R}$ *— кольцо, функция*

$$\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

является счётно-аддитивной. Тогда для любой невозрастающей по вложению последовательности $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$*, то есть*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots\,,$$

для которой $\varphi(A_1) < +\infty$*, а множество*

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R},$$

справедливо равенство

$$\varphi(A) = \lim_{m\to\infty} \varphi(A_m).$$

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим множество

$$B_m = A_m \backslash A_{m+1} \in \mathcal{R}.$$

Тогда

$$A_m \backslash A = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

причём $B_k \cap B_s = \varnothing$ при любых $k \neq s$. Следовательно, в силу счётной аддитивности функции φ, получаем

$$\varphi(A_m \backslash A) = \sum_{k=m}^{\infty} \varphi(B_k) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Так как $\varphi(A) \leqslant \varphi(A_1) < +\infty$, то, в силу утверждения 4.1.9, имеем равенство

$$\varphi(A_m) - \varphi(A) = \varphi(A_m \backslash A) = \sum_{k=m}^{\infty} \varphi(B_k) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, для $m = 1$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(B_k) = \varphi(A_1) - \varphi(A) < +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \varphi(B_k) = 0 = \lim_{m\to\infty} \varphi(A_m) - \varphi(A),$$

что и требовалось. ■

Определение 4.1.14. *Для произвольных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, где $a_k \leqslant b_k$ при всех $k \in \overline{1, n}$, множество*

$$\varPi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall\, k \in \overline{1, n} \quad \begin{array}{l} a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \text{ или} \\ a_k \leqslant x_k < b_k, \text{ или} \\ a_k < x_k \leqslant b_k, \text{ или} \\ a_k < x_k < b_k \end{array} \right\}$$

назовём клеткой в $\mathbb{R}^n$. Множество в $\mathbb{R}^n$, представляющее собой конечное объединение клеток, назовём клеточным или элементарным. Совокупность всех клеточных множеств обозначим $\mathcal{E}$.

Утверждение 4.1.15. *Совокупность всех клеточных множеств $\mathcal{E}$ является кольцом в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Так как каждое клеточное множество является конечным объединением клеток, то конечное объединение клеточных множеств также представляет собой конечное объединение клеток, т. е. само является клеточным. Рассмотрим два клеточных множества A и B. Существуют клетки $\varPi_1, \ldots, \varPi_M$ и $\tilde{\varPi}_1, \ldots, \tilde{\varPi}_N$, такие, что

$$A = \bigcup_{m=1}^{M} \varPi_m \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{k=1}^{N} \tilde{\varPi}_k.$$

Тогда имеем равенство

$$A \cap B = \bigcup_{m=1}^{M} \bigcup_{k=1}^{N} \left(\varPi_m \cap \tilde{\varPi}_k \right).$$

Так как пересечение двух клеток является клеткой, то получаем, что $A \cap B \in \mathcal{E}$. Следовательно, пересечение двух клеточных множеств само является клеточным. Отсюда по индукции легко показать, что конечное пересечение клеточных множеств является клеточным. Так как теоретико-множественная разность двух клеток является клеточным множеством, то

$$A \backslash B = \bigcup_{m=1}^{M} \bigcap_{k=1}^{N} \left(\varPi_m \backslash \tilde{\varPi}_k \right)$$

является клеточным как конечное объединение и пересечение клеточных множеств. Следовательно, по определению 4.1.1 семейство $\mathcal{E}$ является кольцом. ■

Определение 4.1.16. *Разбиением клеточного множества A назовём конечную совокупность попарно непересекающихся клеток, объединение которых равно A.*

Замечание 4.1.17. Любое клеточное множество имеет разбиение, причём это разбиение неединственно. □

Определение 4.1.18. *Пусть $\varPi$ — клетка, отвечающая числам $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, где $a_k \leqslant b_k$ при всех $k \in \overline{1, n}$, в соответствии с определением 4.1.14. Мерой клетки $\varPi$ называется число*

$$\mu(\varPi) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Мерой клеточного множества A, имеющего разбиение $\{\varPi_m\}_{m=1}^{M}$, т. е.

$$A = \bigcup_{m=1}^{M} \varPi_m \quad \text{и} \quad \varPi_m \cap \varPi_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k,$$

называется число

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{M} \mu(\varPi_m).$$

Утверждение 4.1.19. *Определение меры клеточного множества не зависит от выбора его разбиения.*

Доказательство. Для произвольного множества $A \in \mathcal{E}$ рассмотрим два его разбиения

$$\left\{\Pi_m\right\}_{m=1}^{M} \quad \text{и} \quad \left\{\tilde{\Pi}_k\right\}_{k=1}^{N}.$$

Для любых $m \in \overline{1, M}$ и $k \in \overline{1, N}$ определим клетку

$$\hat{\Pi}_{m,k} = \Pi_m \cap \tilde{\Pi}_k.$$

Ясно, что совокупность клеток

$$\left\{\hat{\Pi}_{m,k}\right\}_{\substack{m=\overline{1,M}\\ k=\overline{1,N}}}$$

образует разбиение множества A. Для любого $m \in \overline{1, M}$ имеем

$$\Pi_m = \bigcup_{k=1}^{N} \hat{\Pi}_{m,k} \quad \text{и} \quad \mu\left(\Pi_m\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu\left(\hat{\Pi}_{m,k}\right),$$

также для любого $k \in \overline{1, K}$ имеем

$$\tilde{\Pi}_k = \bigcup_{m=1}^{M} \hat{\Pi}_{m,k} \quad \text{и} \quad \mu\left(\tilde{\Pi}_k\right) = \sum_{m=1}^{M} \mu\left(\hat{\Pi}_{m,k}\right).$$

Следовательно, получаем

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{M} \mu\left(\Pi_m\right) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \mu\left(\hat{\Pi}_{m,k}\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu\left(\tilde{\Pi}_k\right),$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.1.20. *Определённая мера $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ является конечно-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть

$$\mathcal{P} = \left\{\Pi_m\right\}_{m=1}^{M} \quad \text{— разбиение множества } A,$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left\{\tilde{\Pi}_k\right\}_{k=1}^{N} \quad \text{— разбиение множества } B.$$

Тогда в силу $A \cap B = \varnothing$ объединение этих разбиений $\mathcal{P} \cup \tilde{\mathcal{P}}$ является разбиением множества $A \cup B$. Следовательно, получаем равенство

$$\mu(A \cup B) = \sum_{m=1}^{M} \mu\left(\varPi_m\right) + \sum_{k=1}^{N} \mu\left(\tilde{\varPi}_k\right) = \mu(A) + \mu(B),$$

что и требовалось. ■

Определение 4.1.21. *Мера $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ называется регулярной, если для любого множества $A \in \mathcal{E}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F_\varepsilon \in \mathcal{E}$ и открытое множество $G_\varepsilon \in \mathcal{E}$, такие, что*

$$F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon \quad \text{и} \quad \mu(A \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \mu(G_\varepsilon \backslash A) < \varepsilon.$$

Замечание 4.1.22. Для конечно-аддитивной меры

$$\mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty),$$

принимающей только конечные неотрицательные значения, свойство регулярности в силу свойства 4 утверждения 4.1.9 эквивалентно для множеств $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ неравенствам

$$\mu(A) < \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon, \quad \mu(G_\varepsilon) < \mu(A) + \varepsilon.$$

□

Утверждение 4.1.23. *Определённая мера $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ является регулярной.*

Доказательство. Сначала проверим определение регулярности меры μ для произвольной клетки $\varPi$, отвечающей числам

$$a_1, \ldots, a_n \quad \text{и} \quad b_1, \ldots, b_n,$$

где $a_k \leqslant b_k$ при всех $k \in \overline{1, n}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для произвольного числа $\delta > 0$ определим открытую клетку

$$G(\delta) = \left\{\ x \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad a_k - \delta < x_k < b_k + \delta \quad \forall\, k \in \overline{1, n}\ \right\}.$$

Тогда справедливы вложение $\varPi \subset G(\delta)$ и соотношение

$$\mu(G(\delta)) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k + 2\delta) = \mu(\varPi) + O(\delta) < \mu(\varPi) + \varepsilon$$

при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon)$. Если $\mu(\Pi) = 0$, то для замкнутого множества $F = \varnothing \in \mathcal{R}$ получаем вложение $F \subset \Pi$ и неравенство

$$\mu(\Pi) < \mu(F) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Если же $\mu(\Pi) > 0$, то $a_k < b_k$ для всех $k \in \overline{1, n}$. Для любого положительного числа

$$\delta < \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{b_k - a_k}{2}$$

определим замкнутую клетку

$$F(\delta) = \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad a_k + \delta \leqslant x_k \leqslant b_k - \delta \quad \forall \, k \in \overline{1, n} \, \right\}.$$

Тогда справедливы вложение $F(\delta) \subset \Pi$ и соотношение

$$\mu(F(\delta)) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k - 2\delta) = \mu(\Pi) + O(\delta) > \mu(\Pi) - \varepsilon$$

при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon)$. Таким образом, доказана регулярность меры μ для произвольной клетки Π. Теперь рассмотрим произвольное множество $A \in \mathcal{E}$. Пусть конечная совокупность клеток $\{\Pi_m\}_{m=1}^{M}$ образует разбиение множества A, т. е.

$$A = \bigcup_{m=1}^{M} \Pi_m \quad \text{и} \quad \Pi_m \cap \Pi_k = \varnothing \quad \text{при} \quad m \neq k.$$

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. Как показано выше, для каждой клетки Π_m существует замкнутая клетка F_m и открытая клетка G_m, такие, что справедливы вложения

$$F_m \subset \Pi_m \subset G_m$$

и неравенства

$$\mu(\Pi_m) < \mu(F_m) + \frac{\varepsilon}{M}, \qquad \mu(G_m) < \mu(\Pi_m) + \frac{\varepsilon}{M}.$$

Определим клеточные множества

$$F = \bigcup_{m=1}^{M} F_m \quad \text{и} \quad G = \bigcup_{m=1}^{M} G_m.$$

Множество F является замкнутым как конечное объединение замкнутых множеств, а множество G является открытым как объединение открытых множеств. Так как при $m \neq k$ выполнено $\Pi_m \cap \Pi_k = \varnothing$, то и $F_m \cap F_k = \varnothing$. Следовательно,

$$\mu(F) = \sum_{m=1}^{M} \mu(F_m).$$

По построению справедливы вложения $F \subset A \subset G$. Наконец, применяя следствие 4.1.10, получаем

$$\mu(G) \leqslant \sum_{m=1}^{M} \mu(G_m) < \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon,$$

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m) < \sum_{m=1}^{M} \mu(F_m) + \varepsilon = \mu(F) + \varepsilon,$$

что и требовалось. ■

Всюду далее считаем, что нам задано некоторое кольцо $\mathcal{E}$ элементарных множеств, содержащее только ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$, в котором существует последовательность открытых множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, образующих покрытие $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

и задана регулярная конечно-аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$. Если нам понадобится конкретный вид кольца $\mathcal{E}$, как, например, введённое выше кольцо клеточных множеств, и явный вид функции μ, как, например, введённая выше мера клеточного множества, то это будет специально оговорено. Нашей целью является продолжение функции μ с кольца элементарных множеств $\mathcal{E}$ до счётно-аддитивной регулярной функции на некотором σ-кольце, содержащем кольцо $\mathcal{E}$. Приводимая ниже конструкция продолжения меры с кольца на содержащее его σ-кольцо называется лебеговым продолжением меры.

Определение 4.1.24. *Верхней мерой произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется величина*

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m),$$

где нижняя грань берётся по всевозможным счётным открытым покрытиям $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ множества E, т. е.

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

а множество $A_m \in \mathcal{E}$ открыто для любого номера m.

Ясно, что для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ для его верхней меры выполнено

$$\mu^*(E) \in [0, +\infty],$$

причём для множеств $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2),$$

так как всякое открытое покрытие элементарными множествами множества E_2 является и покрытием множества E_1.

Утверждение 4.1.25. *Для любого множества $A \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Доказательство. Так как функция μ является регулярной, то по определению 4.1.21 для данного множества $A \in \mathcal{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G \in \mathcal{E}$, такое, что

$$A \subset G \quad \text{и} \quad \mu(G) < \mu(A) + \varepsilon.$$

По определению 4.1.24 верхней меры множества A выполнено неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(G).$$

Получаем

$$\mu^*(A) < \mu(A) + \varepsilon,$$

и после предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ имеем неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A).$$

В силу регулярности функции μ для множества $A \in \mathcal{E}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \in \mathcal{E}$, такое, что

$$F \subset A \quad \text{и} \quad \mu(A) < \mu(F) + \varepsilon.$$

Рассмотрим произвольное счётное открытое покрытие

$$\mathcal{P} = \{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$$

множества A. Так как $F \subset A$, то $\mathcal{P}$ является открытым покрытием множества F. Так как множество F замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$ (напомним, что кольцо $\mathcal{E}$ содержит только ограниченные множества $\mathbb{R}^n$), то F является компактом в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, открытое покрытие $\mathcal{P}$ компакта F имеет конечное подпокрытие

$$\{A_{m_k}\}_{k=1}^N, \quad \text{т. е.} \quad F \subset \bigcup_{k=1}^N A_{m_k}.$$

По свойству полуаддитивности конечно-аддитивной функции μ (см. следствие 4.1.10) получаем

$$\mu(F) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=1}^N A_{m_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^N \mu(A_{m_k}) \leqslant \sum_{m=1}^\infty \mu(A_m).$$

Переходя в последнем неравенстве к точной нижней грани по всевозможным счётным покрытиям множества A открытыми элементарными множествами, получаем неравенство

$$\mu(F) \leqslant \mu^*(A).$$

Таким образом,

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon,$$

и после предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ имеем неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Следовательно, $\mu(A) = \mu^*(A)$, что и требовалось. ■

Утверждение 4.1.26. *Верхняя мера μ^* является полуаддитивной на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$, т. е. для любой последовательности множеств*

$$\{E_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$$

справедливо неравенство

$$\mu^*\left(\bigcup_{m=1}^\infty E_m\right) \leqslant \sum_{m=1}^\infty \mu^*(E_m).$$

Доказательство. Если существует номер m_0, такой, что

$$\mu^*(E_{m_0}) = +\infty,$$

то доказываемое неравенство очевидно. Предположим, что для любого номера m выполнено

$$\mu^*(E_m) < +\infty.$$

Тогда по определению верхней меры для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого номера m существует счётное покрытие множества E_m открытыми элементарными множествами $\{A_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$, такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{m,k}) \leqslant \mu^*(E_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Тогда открытые элементарные множества $\{A_{m,k}\}_{m,k=1}^{\infty}$ образуют покрытие множества $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Следовательно,

$$\mu^*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \leqslant \sum_{m,k=1}^{\infty} \mu(A_{m,k}) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) + \varepsilon,$$

откуда предельным переходом при $\varepsilon \to +0$ получаем требуемое неравенство. ■

Определение 4.1.27. *Симметрической разностью двух множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество*

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Замечание 4.1.28. Так как для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$A \backslash B = B^c \backslash A^c$$

(здесь $A^c = \mathbb{R}^n \backslash A$ — дополнение множества A), то

$$A \triangle B = A^c \triangle B^c.$$

□

Утверждение 4.1.29. *Симметрическая разность множеств из* $\mathbb{R}^n$ *обладает следующими свойствами:*

1) $A \triangle B = B \triangle A$ *и* $A \triangle A = \varnothing$ *для любых множеств* $A, B \subset \mathbb{R}^n$*;*

2) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$ *для любых множеств* $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$*;*

3) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ *для любых множеств* $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$*;*

4) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ *для любых множеств* $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$*;*

5) $(A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ *для любых множеств* $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$*.*

Доказательство. Свойство 1 сразу следует из определения 4.1.27. Свойство 2 следует из вложений

$$A \backslash B \subset (A \backslash C) \cup (C \backslash B) \quad \text{и} \quad B \backslash A \subset (B \backslash C) \cup (C \backslash A)\,, \quad \text{т. е.}$$

$$A \triangle B \subset (A \backslash C) \cup (C \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) = (A \triangle C) \cup (B \triangle C)\,.$$

Свойство 3 следует из вложений

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \backslash B_1) \cup (A_2 \backslash B_2)\,,$$

$$(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 \backslash A_1) \cup (B_2 \backslash A_2)\,, \quad \text{т. е.}$$

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset \\ \subset (A_1 \backslash B_1) \cup (A_2 \backslash B_2) \cup (B_1 \backslash A_1) \cup (B_2 \backslash A_2) = \\ = (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,.$$

Далее, используя доказанное свойство 3 и замечание 4.1.28, получаем

$$(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) = (A_1 \cap A_2)^c \triangle (B_1 \cap B_2)^c = \\ = (A_1^c \cup A_2^c) \triangle (B_1^c \cup B_2^c) \subset (A_1^c \triangle B_1^c) \cup (A_2^c \triangle B_2^c) = \\ = (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,,$$

т. е. свойство 4 доказано. Наконец, используя равенство $A \backslash B = A \cap B^c$ для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и доказанное свойство 4, получаем

$$(A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2) = (A_1 \cap A_2^c) \triangle (B_1 \cap B_2^c) \subset \\ \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2^c \triangle B_2^c) = (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,,$$

т. е. свойство 5 доказано. ■

Определение 4.1.30. *Расстоянием между двумя множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется величина*

$$d(A, B) = \mu^* (A \triangle B) .$$

Для последовательности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ и множества $B \subset \subset \mathbb{R}^n$ будем говорить, что $A_m \to B$ при $m \to \infty$, если $d(A_m, B) \to 0$ при $m \to \infty$.

Покажем, что введённая функция d обладает основными свойствами метрики на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 4.1.31. *Расстояние d обладает следующими свойствами:*

1) $d(A, B) = d(B, A)$ и $d(A, A) = 0$ для всех множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$;

2) $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(B, C)$ для всех множеств $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$;

3) $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$ для любых множеств $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$;

4) $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$ для любых множеств $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$;

5) $d(A_1 \backslash A_2, B_1 \backslash B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$ для любых множеств $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$;

6) если для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ хотя бы одно из чисел $\mu^*(A)$ или $\mu^*(B)$ конечно, то $\Big|\mu^*(A) - \mu^*(B)\Big| \leqslant d(A, B)$.

Доказательство. Свойство 1 сразу следует из первого свойства утверждения 4.1.29 и равенства $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$, которое следует из утверждения 4.1.25 и вложения $\varnothing \in \mathcal{E}$. Свойства 2—5 следуют из соответствующих свойств 2—5 утверждения 4.1.29 и полуаддитивности верхней меры (см. утверждение 4.1.26). Для доказательства свойства 6 рассмотрим произвольные множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, причём $\mu^*(B) < +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A)$. Тогда по свойству 2 (неравенство треугольника для расстояния d) получаем

$$\mu^*(A) = d(A, \varnothing) \leqslant d(A, B) + d(B, \varnothing) = d(A, B) + \mu^*(B).$$

Следовательно,

$$\Big|\mu^*(A) - \mu^*(B)\Big| = \mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant d(A, B),$$

что и требовалось. ■

З а м е ч а н и е 4.1.32. Расстояние d, вообще говоря, не удовлетворяет всем свойствам метрики на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$, так как оно может принимать значение $+\infty$ и быть равным нулю на паре разных множеств.

Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств, а μ — мера клеточного множества. Тогда

$$d(\mathbb{R}^n, \varnothing) = \mu^*(\mathbb{R}^n) = +\infty,$$

так как для любой клетки $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\mu^*\left(\mathbb{R}^n\right) \geqslant \mu^*(\Pi) = \mu(\Pi),$$

а число $\mu(\Pi)$ может быть сколь угодно велико.

Далее, если $E = \{x(m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ — счётное множество, то

$$\mu^*(E) = 0.$$

Действительно, для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого номера m рассмотрим открытую клетку

$$\Pi_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad |x_k - x_k(m)| < \frac{\sqrt[n]{2^{-m}\varepsilon}}{2} \quad \forall\, k \in \overline{1, n} \right\}.$$

Тогда для любого m получаем

$$x(m) \in \Pi_m \quad \text{и} \quad \mu(\Pi_m) = \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Следовательно,

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi_m \quad \text{и} \quad \mu^*(E) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\Pi_m) \leqslant \varepsilon,$$

т. е. при $\varepsilon \to +0$ получаем $\mu^*(E) = 0$. Тогда

$$d(E, \varnothing) = \mu^*(E) = 0, \quad \text{но} \quad E \neq \varnothing.$$

$\square$

О п р е д е л е н и е 4.1.33. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ будем называть конечно μ-измеримым, если существует последовательность элементарных множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, такая, что $A_m \to A$ при $m \to \infty$ (т. е. $d(A_m, A) \to 0$ по определению 4.1.30). Совокупность всех конечно μ-измеримых множеств обозначим $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Множество $E \subset \subset \mathbb{R}^n$ назовём μ-измеримым, если оно может быть представлено в виде счётного объединения конечно μ-измеримых множеств. Совокупность всех μ-измеримых множеств обозначим $\mathfrak{M}(\mu)$.*

З а м е ч а н и е 4.1.34. Ясно, что $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}_F(\mu)$, так как для любого $A \in \mathcal{E}$ можно взять для любого номера m множество $A_m = A$. Тогда по свойству 1 утверждения 4.1.31 получаем $d(A_m, A) = d(A, A) = 0$ для любого m, т. е. $A_m \to A$. Далее, если множество $B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ таковы, что $A_m \to B$, то числовая последовательность

$$\bigl\{\mu(A_m)\bigr\}_{m=1}^{\infty}$$

является сходящейся к $\mu^*(B)$. Действительно, по свойству 6 утверждения 4.1.31 получаем

$$\bigl|\mu^*(B) - \mu(A_m)\bigr| \leqslant d(A_m, B) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, $\mu^*(B) < +\infty$ и $\mu(A_m) \to \mu^*(B)$. □

Т е о р е м а 4.1.35. (Лебег) *Множество μ-измеримых множеств $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом, а функция $\mu^*\colon \mathfrak{M}(\mu) \to [0, +\infty]$ является счётно-аддитивной и регулярной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что множество $\mathfrak{M}_F(\mu)$ является кольцом, а функция $\mu^*\colon \mathfrak{M}_F(\mu) \to [0, +\infty)$ — конечно-аддитивной. Для этого рассмотрим два произвольных множества $A, B \in$ $\in \mathfrak{M}_F(\mu)$. По определению 4.1.33 существуют последовательности $A_m \in \mathcal{E}$ и $B_m \in \mathcal{E}$, такие, что $A_m \to A$ и $B_m \to B$ при $m \to \infty$. По замечанию 4.1.34 имеем

$$\mu(A_m) \to \mu^*(A) < +\infty \quad \text{и} \quad \mu(B_m) \to \mu^*(B) < +\infty.$$

По свойствам 3, 4, 5 утверждения 4.1.31 получаем

$$\begin{array}{rcccl} d(A_m \cup B_m, A \cup B) & \leqslant & d(A_m, A) + d(B_m, B) & \to & 0, \\ d(A_m \cap B_m, A \cap B) & \leqslant & d(A_m, A) + d(B_m, B) & \to & 0, \\ d(A_m \backslash B_m, A \backslash B) & \leqslant & d(A_m, A) + d(B_m, B) & \to & 0 \end{array}$$

при $m \to \infty$. Следовательно,

$$A_m \cup B_m \to A \cup B, \quad A_m \cap B_m \to A \cap B, \quad A_m \backslash B_m \to A \backslash B$$

при $m \to \infty$. Так как $\mathcal{E}$ — кольцо, то для любого m имеем

$$A_m \cup B_m \in \mathcal{E}, \quad A_m \cap B_m \in \mathcal{E}, \quad A_m \backslash B_m \in \mathcal{E}.$$

По определению 4.1.33 получаем

$$A \cup B \in \mathfrak{M}_F(\mu), \quad A \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu), \quad A \backslash B \in \mathfrak{M}_F(\mu),$$

т. е. $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо. По свойству 1 утверждения 4.1.9, для любого m имеем

$$\mu(A_m) + \mu(B_m) = \mu(A_m \cup B_m) + \mu(A_m \cap B_m).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то $\mu^*(A \cap B) = \mu^*(\varnothing) = 0$ и

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B),$$

т. е. функция μ^* является конечно-аддитивной на $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

Теперь покажем, что функция μ^* счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}(\mu)$. Рассмотрим произвольное множество $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда по определению 4.1.33 существует последовательность

$$\left\{\tilde{E}_m\right\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu),$$

такая, что

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{E}_m.$$

Представим множество E в виде счётного объединения попарно непересекающихся конечно μ-измеримых множеств. Для этого определим множество $E_1 = \tilde{E}_1 \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, а для $m > 1$ определим множество

$$E_m = \left(\bigcup_{k=1}^{m} \tilde{E}_k\right) \Bigg\backslash \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} \tilde{E}_k\right) \in \mathfrak{M}_F(\mu),$$

так как $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо. Тогда $E_m \cap E_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$ и

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

В силу утверждения 4.1.26 имеем неравенство

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m).$$

С другой стороны, для любого номера m справедливо вложение

$$E \supset \bigcup_{k=1}^{m} E_k.$$

Следовательно,

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(E_k)$$

в силу конечной аддитивности функции μ^* на кольце $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\mu^*(E) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\mu^*(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m).$$

Если предположить, что $\mu^*(E) < +\infty$, то числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

сходится к числу $\mu^*(E)$, и для множества

$$S_m = \bigcup_{k=1}^{m} E_k \in \mathfrak{M}_F(\mu)$$

получаем

$$d(E, S_m) = \mu^* \left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k \right) \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu^*(E_k) \to 0$$

при $m \to \infty$. Так как $S_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то по определению 4.1.33 существует множество $A_m \in \mathcal{E}$, такое, что

$$d(S_m, A_m) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Следовательно,

$$d(E, A_m) \leqslant d(E, S_m) + d(S_m, A_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, справедливо вложение $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Поэтому любое μ-измеримое множество с конечной верхней мерой является конечно μ-измеримым. Теперь рассмотрим произвольную последовательность попарно непересекающихся множеств $E_m \in \mathfrak{M}(\mu)$, таких, что множество

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Если существует номер m_0, такой, что $\mu^*(E_{m_0}) = +\infty$, то

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E_{m_0}) = +\infty, \quad \Rightarrow \quad \mu^*(E) = +\infty = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m),$$

Если же $\mu^*(E_m) < +\infty$ для любого номера m, то для любого m имеет место вложение

$$E_m \in \mathfrak{M}_F(\mu),$$

и требуемое равенство

$$\mu^*(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m)$$

уже установлено выше.

Теперь докажем, что множество $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом. Рассмотрим последовательность множеств

$$\{E_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(\mu).$$

Тогда для любого номера m существует последовательность множеств

$$\{A_{m,k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu),$$

такая, что выполнено равенство

$$E_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{m,k}.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{m,k} \in \mathfrak{M}(\mu)$$

как счётное объединение конечно μ-измеримых множеств. Пусть теперь два множества $A, B \in \mathfrak{M}(\mu)$. По определению 4.1.33 существуют $A_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $B_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, такие, что

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Тогда для любого номера m имеем

$$A_m \cap B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_m \cap B_k).$$

Так как $A_m \cap B_k \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то множество

$$A_m \cap B \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Так как $\mu^*(A_m \cap B) \leqslant \mu^*(A_m) < +\infty$, то множество

$$A_m \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$$

как μ-измеримое множество с конечной верхней мерой. Следовательно,

$$A_m \backslash B = A_m \backslash (A_m \cap B) \in \mathfrak{M}_F(\mu).$$

Но тогда

$$A \backslash B = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_m \backslash B) \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Таким образом, доказано, что множество $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом.

Докажем регулярность функции μ^* на σ-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ по определению 4.1.24 существует покрытие $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ открытыми элементарными множествами, такое, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Определим открытое множество

$$G = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \supset E.$$

Тогда по утверждению 4.1.26 имеем

$$\mu^*(G) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) < \mu^*(E) + \varepsilon,$$

то есть

$$\mu^*(G \backslash E) = \mu^*(G) - \mu^*(E) < \varepsilon.$$

Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ существует последовательность конечно μ-измеримых множеств E_m, таких, что

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого номера m существует открытое множество $G_m \supset E_m$, такое, что выполнено неравенство

$$\mu^*(G_m \backslash E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Определим открытое множество

$$G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \supset E.$$

Тогда

$$G \backslash E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} (G_m \backslash E_m),$$

поэтому получаем неравенство

$$\mu^*(G \backslash E) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(G_m \backslash E_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ справедливо вложение

$$E^c = \mathbb{R}^n \backslash E \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $S \supset E^c$, такое, что

$$\mu^*(S \backslash E^c) < \varepsilon.$$

Поэтому множество $F = S^c$ является замкнутым, и $F \subset E$. При этом справедливы равенства

$$E \backslash F = F^c \backslash E^c = S \backslash E^c.$$

Следовательно,
$$\mu^*(E\backslash F) < \varepsilon,$$
т. е. регулярность функции μ^* на $\mathfrak{M}(\mu)$ доказана. ■

Определение 4.1.36. *Любое множество σ-кольца $\mathfrak{M}(\mu)$ будем называть μ-измеримым по Лебегу, а значение функции μ^* на этом множестве будем называть его мерой Лебега. Функцию μ^* будем называть мерой Лебега.*

Замечание 4.1.37. Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ таково, что его верхняя мера $\mu^*(A) = 0$, то оно является конечно μ-измеримым, т. е. $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

Действительно, рассмотрим $A_m = \varnothing \in \mathcal{E}$ для любого номера m. Тогда
$$d(A, A_m) = d(A, \varnothing) = \mu^*(A) = 0 \quad \text{для любого } m,$$
т. е. получаем $A_m \to A$ при $m \to \infty$, что по определению 4.1.33 означает вложение
$$A \in \mathfrak{M}_F(\mu).$$
Множества с тривиальной верхней мерой будем называть множествами лебеговой меры нуль.

Любое подмножество множества лебеговой меры нуль само является μ-измеримым по Лебегу и имеет лебегову меру нуль. Действительно, если множество $B \subset A$, а $\mu^*(A) = 0$, то
$$0 \leqslant \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) = 0,$$
т. е. $\mu^*(B) = 0$, что и требовалось.

Все множества лебеговой меры нуль образуют σ-кольцо. Действительно, для любой последовательности
$$\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$$
множеств лебеговой меры нуль в силу утверждения 4.1.26 получаем неравенство
$$\mu^*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) = 0,$$
т. е. множество $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ имеет лебегову меру нуль.

Для любых двух множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ лебеговой меры нуль множество $A \backslash B$ также имеет лебегову меру нуль как подмножество множества A лебеговой меры нуль. σ-кольцо множеств лебеговой меры нуль обозначим $\mathfrak{M}_0(\mu)$. $\square$

О п р е д е л е н и е 4.1.38. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо. Счётно-аддитивная функция $\varphi: \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ называется полной, если для любого множества $A \in \mathcal{R}$ вида $\varphi(A) = 0$ и любого множества $B \subset A$ следует $B \in \mathcal{R}$.*

З а м е ч а н и е 4.1.39. В силу замечания 4.1.37 мера Лебега μ^* является полной на σ-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$. $\square$

З а м е ч а н и е 4.1.40. Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств, а μ — мера клеточного множества. Тогда любое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ является μ-измеримым по Лебегу.

Действительно, для любого элемента $x \in G$ существует число $\delta(x) > 0$, такое, что открытая клетка

$$\mathit{\Pi}_{\delta(x)}(x) = \left\{ \, z \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad |x_k - z_k| < \delta(x) \;\; \forall\, k \in \overline{1, n} \, \right\} \subset G.$$

Если $G = \mathbb{R}^n$, то получаем соотношение

$$G = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathit{\Pi}_m(0) \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Пусть $G \neq \mathbb{R}^n$. Определим счётное подмножество множества G — множество

$$S = \left\{ \, z \in G \quad \middle| \quad z_k \in \mathbb{Q} \quad \forall\, k \in \overline{1, n} \, \right\}.$$

Множество S не пусто, так как для любого $x \in G$ клетка $\mathit{\Pi}_{\delta(x)}(x)$ содержит векторы с рациональными координатами. Так как для любого $x \in G$ и любого числа $\varepsilon \in \big(0, \delta(x)\big)$ выполнено

$$S \cap \mathit{\Pi}_\varepsilon(x) \neq \varnothing,$$

то множество S всюду плотно в G. Для любого элемента $z \in S$ определим число

$$\gamma(z) = \sup \left\{ \, \varepsilon > 0 \quad \middle| \quad \mathit{\Pi}_\varepsilon(z) \subset G \, \right\}.$$

Тогда для любого $z \in S$ выполнено вложение

$$\mathit{\Pi}_{\gamma(z)}(z) \subset G$$

и справедливо равенство

$$G = \bigcup_{z \in S} \varPi_{\gamma(z)}(z).$$

Действительно, для любого $x \in G$ существует

$$z \in S \cap \varPi_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Следовательно, справедливы вложения

$$x \in \varPi_{\frac{\delta(x)}{2}}(z) \subset \varPi_{\delta(x)}(x) \subset G.$$

Тогда $\frac{\delta(x)}{2} \leqslant \gamma(z)$ и $x \in \varPi_{\gamma(z)}(z) \subset G$, что и требовалось. Таким образом, всякое открытое множество из $\mathbb{R}^n$ представимо в виде счётного объединения открытых клеток. Так как каждая клетка является конечно μ-измеримым множеством, то по определению 4.1.33 получаем μ-измеримость открытого множества. Так как любое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$ есть дополнение подходящего открытого множества, то оно также является μ-измеримым по Лебегу.

Обозначим через $\mathcal{B}$ наименьшее по вложению σ-кольцо, содержащее все открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Ясно, что множество $E \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда оно может быть получено применением к некоторой не более чем счётной совокупности открытых множеств не более чем счётного числа операций объединения, пересечения и взятия дополнения. Любое множество $E \in \mathcal{B}$ называется борелевским множеством. Все борелевские множества являются μ-измеримыми по Лебегу, т. е.

$$\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}(\mu).$$

В силу регулярности меры Лебега μ^* на $\mathfrak{M}(\mu)$ для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ и любого номера m существуют замкнутое множество F_m и открытое множество G_m, такие, что выполнены вложения

$$F_m \subset E \subset G_m$$

и неравенства

$$\mu^*(E \backslash F_m) < \frac{1}{m}, \quad \mu^*(G_m \backslash E) < \frac{1}{m}.$$

Определим множества

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m, \qquad B = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m.$$

Тогда $A, B \in \mathcal{B}$, т. е. множества A и B являются борелевскими, и справедливы следующие вложения

$$A \subset E \subset B.$$

При этом для любого номера m справедливы неравенства

$$\mu^*(B \backslash E) \leqslant \mu^*(G_m \backslash E) < \frac{1}{m}, \quad \mu^*(E \backslash A) \leqslant \mu^*(E \backslash F_m) < \frac{1}{m}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\mu^*(B \backslash E) = \mu^*(E \backslash A) = 0,$$

то есть

$$B \backslash E \in \mathfrak{M}_0(\mu) \quad \text{и} \quad E \backslash A \in \mathfrak{M}_0(\mu).$$

Так как справедливо равенство

$$E = A \cup (E \backslash A)\,,$$

то получаем, что всякое μ-измеримое по Лебегу множество представляет собой объединение борелевского множества и множества лебеговой меры нуль. □

Утверждение 4.1.41. *Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, μ — мера клеточного множества. Тогда для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$, вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и скаляра $t \neq 0$ выполнены*

$$x + tE \in \mathfrak{M}(\mu) \quad \text{и} \quad \mu^*(x + tE) = |t|^n \mu^*(E).$$

Доказательство. Для любого множества $A \in \mathcal{E}$ вложение

$$x + tA \in \mathcal{E}$$

и равенство

$$\mu(x + tA) = |t|^n \mu(A)$$

очевидны по определению клеточного множества и меры клеточного множества. Рассмотрим произвольное множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Открытые клеточные множества $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ образуют покрытие множества E, если и только если открытые клеточные множества

$$\{x + tA_m\}_{m=1}^{\infty}$$

образуют покрытие множества $x+tE$. Действительно, вложение

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

равносильно вложению

$$x+tE \subset x+t\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty}(x+tA_m).$$

Следовательно, справедливы равенства

$$\mu^*(x+tE) = \inf\sum_{m=1}^{\infty}\mu(x+tA_m) = \inf\sum_{m=1}^{\infty}|t|^n\mu(A_m) = \\ = |t|^n\inf\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m) = |t|^n\mu^*(E),$$

где нижняя грань берётся по всевозможным счётным покрытиям множества E открытыми клеточными множествами $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$. Осталось доказать, что для любого μ-измеримого множества E множество $x+tE$ также является μ-измеримым. Рассмотрим сначала произвольное множество $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда существует последовательность клеточных множеств $A_m \to E$ при $m\to\infty$. Так как для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$(x+tA)\backslash(x+tB) = x+t(A\backslash B),$$

то получаем

$$(x+tE)\triangle(x+tA_m) = \big(x+t(E\backslash A_m)\big)\cup\big(x+t(A_m\backslash E)\big) = \\ = x+t\left((E\backslash A_m)\cup(A_m\backslash E)\right) = x+t(E\triangle A_m).$$

Следовательно,

$$d(x+tE, x+tA_m) = \mu^*(x+t(E\triangle A_m)) = \\ = |t|^n\mu^*(E\triangle A_m) = |t|^n d(E, A_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Таким образом, $x+tA_m \to x+tE$ при $m\to\infty$, т. е. множество $x+tE$ является конечно μ-измеримым.

Теперь, взяв произвольное μ-измеримое множество E, находим последовательность конечно μ-измеримых множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$, такую, что

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Тогда получаем равенство

$$x + tE = x + t \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} (x + tE_m) .$$

Так как $x + tE_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ для любого номера m, то получаем вложение

$$x + tE \in \mathfrak{M}(\mu),$$

что и требовалось. ■

З а м е ч а н и е 4.1.42. Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств, μ — мера клеточного множества. Пусть $J(\mu)$ — кольцо множеств, измеримых по Жордану, μ_J — мера Жордана. Тогда любое множество $E \in J(\mu)$, т. е. измеримое по Жордану, является конечно μ-измеримым по Лебегу, т. е. $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, причём $\mu_J(E) = \mu^*(E)$.

Действительно, по определению измеримости множества по Жордану вложение $E \in J(\mu)$ означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют клеточные множества A_ε и B_ε, такие, что

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon \quad \text{и} \quad \mu(B_\varepsilon \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

При этом существует

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mu(A_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to +0} \mu(B_\varepsilon) = \mu_J(E).$$

Следовательно,

$$d(E, A_\varepsilon) = \mu^*(E \backslash A_\varepsilon) \leqslant \mu(B_\varepsilon \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Тогда получаем, что последовательность клеточных множеств

$$A_{\frac{1}{m}} \to E \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то есть выполнено

$$E \in \mathfrak{M}_F(\mu).$$

При этом

$$\mu^*(E) = \lim_{m \to \infty} \mu\left(A_{\frac{1}{m}}\right) = \mu_J(E),$$

что и требовалось.

Примером конечно μ-измеримого множества, не измеримого по Жордану, может служить множество E всех векторов из куба $[0, 1]^n$ с рациональными координатами. Это множество является счётным, и поэтому имеет лебегову меру нуль (см. замечание 4.1.32). Следовательно, оно является конечно μ-измеримым по Лебегу в силу замечания 4.1.37. Однако верхняя мера Жордана множества E равна единице, а нижняя — нулю. Следовательно, множество E не является измеримым по Жордану. $\square$

П р и м е р 4.1.43. Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, μ — мера клеточного множества. Приведём пример множества $E \subset \mathbb{R}^n$, не являющегося μ-измеримым по Лебегу. Рассмотрим клетку

$$\varPi = [0,1]^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad 0 \leqslant x_k \leqslant 1 \ \ \forall\, k \in \overline{1,n} \ \right\}.$$

Скажем, что элементы $x, y \in \varPi$ эквивалентны, если для любого $k \in \overline{1,n}$ выполнено вложение $x_k - y_k \in \mathbb{Q}$. Эквивалентные элементы x, y клетки $\varPi$ обозначим $x \sim y$. Введённое на $\varPi$ отношение эквивалентности удовлетворяет условиям:

1) $x \sim x$,
2) $x \sim y \iff y \sim x$,
3) $x \sim y$ и $y \sim z \implies x \sim z$

для всех $x, y, z \in \varPi$. Следовательно, клетку $\varPi$ можно разбить на классы эквивалентных элементов. Определим множество $E \subset \varPi$, выбрав по одному элементу каждого класса эквивалентности и поместив его в E. Предположим, что $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Пусть

$$R = \big([-1,1] \cap \mathbb{Q}\big)^n = \left\{ x \in \mathbb{Q}^n \quad \middle| \quad -1 \leqslant x_k \leqslant 1 \ \ \forall\, k \in \overline{1,n} \ \right\}.$$

Множество R счётно, поэтому пусть

$$R = \{r(m)\}_{m=1}^{\infty},$$

причём $r(m) \neq r(k)$ при $m \neq k$. Для любого номера m определим множество

$$E_m = r(m) + E.$$

Тогда по утверждению 4.1.41 имеем

$$E_m \in \mathfrak{M}(\mu) \quad \text{и} \quad \mu^*(E_m) = \mu^*(E).$$

Заметим, что для любых $m \neq k$ выполнено

$$E_m \cap E_k = \varnothing.$$

Действительно, если для $m \neq k$ существует

$$x \in E_m \cap E_k,$$

то существуют $y, z \in E$, такие, что

$$x = r(m) + y = r(k) + z.$$

Но тогда

$$y - z = r(k) - r(m) \in \mathbb{Q}^n, \quad \text{т. е.} \quad y \sim z.$$

Так как множество E содержит только один вектор из каждого класса эквивалентности, то $y = z$. Следовательно, $r(m) = r(k)$, что противоречит условию $m \neq k$. Определим множество

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Тогда по теореме 4.1.35 получаем $S \in \mathfrak{M}(\mu)$ и

$$\mu^*(S) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E).$$

Заметим, что $S \subset [-1, 2]^n$, откуда следует неравенство

$$\mu^*(S) \leqslant 3^n.$$

Следовательно, числовой ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E)$$

сходится, что возможно только при $\mu^*(E) = 0$. Поэтому

$$\mu^*(S) = 0.$$

Однако справедливо вложение

$$\mathit{\Pi} = [0, 1]^n \subset S.$$

Действительно, для любого вектора $x \in \mathit{\Pi}$ существует класс эквивалентных векторов $\mathcal{A}$ клетки $\mathit{\Pi}$, содержащий x. Тогда существует вектор $y \in \mathcal{A}$, такой, что $y \in E$. Следовательно,

$$x - y = r \in \mathbb{Q}^n,$$

причём

$$x_k - y_k = r_k \in [-1, 1] \qquad \forall\, k \in \overline{1, n}.$$

Поэтому $r \in R$, т. е. выполнено вложение $x = y + r \in S$. Но тогда получаем

$$0 = \mu^*(S) \geqslant \mu(\Pi) = 1 \quad \text{— противоречие.}$$

Таким образом, множество $E \notin \mathfrak{M}(\mu)$. ▲

Утверждение 4.1.44. *Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, μ — мера клеточного множества. Тогда для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ положительной меры Лебега (т. е. $\mu^*(E) > 0$) существует его неизмеримое подмножество $S \subset E$, $S \notin \mathfrak{M}(\mu)$.*

Доказательство. Для любого номера m рассмотрим множество

$$E_m = \left\{ \, x \in E \quad \middle| \quad |x_k| \leqslant m \;\; \forall\, k \in \overline{1,n} \, \right\} = E \cap [-m, m]^n.$$

Следовательно, $E_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $\mu^*(E_m) \leqslant (2m)^n$. Так как

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$$

и $\mu^*(E) > 0$, то существует номер m_0, такой, что $\mu^*(E_{m_0}) > 0$. Введём то же отношение эквивалентности между векторами $\mathbb{R}^n$, что и в примере 4.1.43, и разобьём множество E_{m_0} на классы эквивалентных векторов. Построим множество

$$S \subset E_{m_0} \subset E,$$

поместив в S по одному элементу из каждого класса. Предположим, что множество $S \in \mathfrak{M}(\mu)$. Рассмотрим счётное множество

$$R = \big([-2m_0, 2m_0] \cap \mathbb{Q}\big)^n = \{r(s)\}_{s=1}^{\infty},$$

где $r(s) \neq r(k)$ при $s \neq k$. Для любого номера s определим множество

$$S_s = r(s) + S.$$

Тогда по утверждению 4.1.41 получаем, что

$$S_s \in \mathfrak{M}(\mu) \quad \text{и} \quad \mu^*(S_s) = \mu^*(S).$$

Для любых $s \neq k$ выполнено

$$S_s \cap S_k = \varnothing.$$

Действительно, если при $s \neq k$ найдётся вектор

$$x \in S_s \cap S_k,$$

то существуют векторы $y, z \in S$, такие, что

$$x = r(s) + y = r(k) + z.$$

Следовательно,

$$y - z = r(k) - r(s) \in \mathbb{Q}^n, \quad \text{т. е.} \quad y \sim z.$$

Так как множество S содержит по одному элементу каждого класса эквивалентности, то получаем равенство $y = z$. Но тогда получаем равенство $r(s) = r(k)$, которое невозможно при $s \neq k$. Определим множество

$$A = \bigcup_{s=1}^{\infty} S_s \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Тогда

$$\mu^*(A) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^*(S_s) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^*(S).$$

Так как для любого номера s справедливо вложение

$$S_s \subset [-3m_0, 3m_0]^n,$$

то и

$$A \subset [-3m_0, 3m_0]^n.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant (6m_0)^n,$$

т. е. числовой ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu^*(S)$$

сходится. Это возможно только в случае $\mu^*(S) = 0$. Поэтому

$$\mu^*(A) = 0.$$

Однако справедливо вложение

$$E_{m_0} \subset A.$$

Действительно, по построению множества S, для любого вектора $x \in$ $\in E_{m_0}$ существует вектор $y \in S$, такой, что $x \sim y$. Тогда

$$x - y = r \in \mathbb{Q}^n,$$

причём

$$|r_k| \leqslant 2m_0 \qquad \forall\, k \in \overline{1, n}.$$

Следовательно, $r \in R$, поэтому $x = r + y \in r + S \subset A$. Но тогда

$$0 < \mu^*(E_{m_0}) \leqslant \mu^*(A) = 0 \quad \text{— противоречие.}$$

Таким образом, множество $S \notin \mathfrak{M}(\mu)$. ■

4.2. Измеримые функции

Определение 4.2.1. *Измеримым пространством будем называть тройку $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, где X — множество, $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо подмножеств из X, причём выполнено вложение $X \in \mathfrak{M}$, а функция*

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$$

полная и счётно-аддитивная, которую будем называть мерой. Любое множество $E \in \mathfrak{M}$ назовём измеримым, а величину $\mu(E)$ — мерой множества E.

Определение 4.2.2. *Пусть X — некоторое множество, функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Для любого элемента $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ определим множества*

$$\begin{aligned} L_<(f, a) &= \{\, x \in X \quad | \quad f(x) < a \,\}, \\ L_\leqslant(f, a) &= \{\, x \in X \quad | \quad f(x) \leqslant a \,\}, \\ L_>(f, a) &= \{\, x \in X \quad | \quad f(x) > a \,\}, \\ L_\geqslant(f, a) &= \{\, x \in X \quad | \quad f(x) \geqslant a \,\}. \end{aligned}$$

Введённые множества назовём лебеговыми множествами функции f.

Определение 4.2.3. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Функцию $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ будем называть измеримой, если для любого числа a лебегово множество $L_<(f, a)$ является измеримым, т. е. выполнено вложение*

$$L_<(f, a) \in \mathfrak{M}.$$

У т в е р ж д е н и е 4.2.4. *Пусть* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — *измеримое пространство, функция* $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*

1) *функция* f *является измеримой;*
2) *для любого числа* a *выполнено* $L_{\geqslant}(f, a) \in \mathfrak{M}$*;*
3) *для любого числа* a *выполнено* $L_{>}(f, a) \in \mathfrak{M}$*;*
4) *для любого числа* a *выполнено* $L_{\leqslant}(f, a) \in \mathfrak{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие 1. Для любого числа a по определению σ-кольца получаем

$$L_{\geqslant}(f, a) = X \backslash L_{<}(f, a) \in \mathfrak{M},$$

так как $X \in \mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 2. Если выполнено условие 2, то для любого числа a получаем

$$L_{>}(f, a) = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_{\geqslant}\left(f, a + \frac{1}{m}\right) \in \mathfrak{M}$$

как счётное объединение множеств σ-кольца $\mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 3. Если выполнено условие 3, то для любого числа a по определению σ-кольца получаем

$$L_{\leqslant}(f, a) = X \backslash L_{>}(f, a) \in \mathfrak{M},$$

так как $X \in \mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 4. Наконец, если выполнено условие 4, то для любого числа a получаем

$$L_{<}(f, a) = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_{\leqslant}\left(f, a - \frac{1}{m}\right) \in \mathfrak{M}$$

как счётное объединение множеств σ-кольца $\mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 1. ■

С л е д с т в и е 4.2.5. *Пусть* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — *измеримое пространство, функция* $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Тогда функция*

$$g(x) = -f(x) \qquad \forall\, x \in X$$

является измеримой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого числа a получаем

$$L_{<}(g, a) = L_{>}(f, -a) \in \mathfrak{M},$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.2.6. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Пусть задана последовательность*

$$f_m \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

измеримых для любого номера m функций. Пусть

$$g(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} f_m(x), \qquad \tilde{g}(x) = \inf_{m \in \mathbb{N}} f_m(x),$$

$$h(x) = \varlimsup_{m \to \infty} f_m(x), \quad \tilde{h}(x) = \varliminf_{m \to \infty} f_m(x)$$

для любого $x \in X$. Тогда функции

$$g, \tilde{g}, h, \tilde{h} \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

являются измеримыми.

Доказательство. Для любого числа a получаем

$$L_{\leqslant}(g, a) = \bigcap_{m=1}^{\infty} L_{\leqslant}(f_m, a) \in \mathfrak{M}$$

в силу замечания 4.1.4. Следовательно, в силу утверждения 4.2.4, функция g является измеримой. Так как

$$\tilde{g}(x) = -\sup_{m \in \mathbb{N}} \big(-f_m(x)\big) \qquad \forall\, x \in X,$$

то получаем измеримость функции $\tilde{g}$ в силу следствия 4.2.5. Для любого $x \in X$ по определению верхнего предела получаем

$$h(x) = \lim_{k \to \infty} \sup_{m \geqslant k} f_m(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{m \geqslant k} f_m(x).$$

Следовательно, по доказанному выше, функция h является измеримой. Наконец, так как

$$\tilde{h}(x) = -\varlimsup_{m \to \infty} \big(-f_m(x)\big) \qquad \forall\, x \in X,$$

то получаем измеримость функции $\tilde{h}$ в силу следствия 4.2.5. ■

Следствие 4.2.7. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Пусть последовательность*

$$f_m \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

измеримых для любого номера m функций такова, что для любого $x \in X$ существует предел

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = g(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Тогда функция $g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является измеримой.

Доказательство. Так как для любого $x \in X$ выполнено равенство

$$g(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \varlimsup_{m\to\infty} f_m(x) = \varliminf_{m\to\infty} f_m(x),$$

то измеримость g сразу следует из утверждения 4.2.6. ■

Утверждение 4.2.8. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, а множество $G \subset \mathbb{R}^2$ открыто. Пусть функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ измеримы, причём для любого $x \in X$ справедливо вложение*

$$\big(f(x), g(x)\big) \in G.$$

Пусть функция $F\colon G \to \mathbb{R}$ является непрерывной на G. Тогда функция

$$h(x) = F\left(f(x), g(x)\right) \qquad \forall\, x \in X$$

является измеримой.

Доказательство. Для любого $a \in \mathbb{R}$ рассмотрим прообраз открытого луча $(-\infty, a) \subset \mathbb{R}$ по действием функции F, т. е. множество

$$F^{-1}(-\infty, a) = \left\{ \ (u, v) \in G \quad \Big| \quad F(u, v) < a \ \right\}.$$

Так как функция F непрерывна на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$, то, в силу утверждения 1.1.32, множество $F^{-1}(-\infty, a)$ открыто в $\mathbb{R}^2$. Как показано в замечании 4.1.40, любое открытое в $\mathbb{R}^2$ множество представимо в виде счётного объединения открытых клеток. Следовательно, существует последовательность открытых клеток

$$\mathit{\Pi}_m = \left\{ \ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Big| \quad a_m < u < b_m, \ \ c_m < v < d_m \ \right\},$$

такая, что

$$F^{-1}(-\infty, a) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathit{\Pi}_m.$$

Тогда лебегово множество функции h имеет вид

$$L_<(h,a) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\ x \in X \ \mid\ (f(x), g(x)) \in \varPi_m\ \}.$$

Так как для любого номера m справедливо равенство

$$\{\ x \in X \ \mid\ (f(x), g(x)) \in \varPi_m\ \} =$$

$$= L_>(f, a_m) \cap L_<(f, b_m) \cap L_>(g, c_m) \cap L_<(g, d_m) \in \mathfrak{M},$$

то множество $L_<(h,a) \in \mathfrak{M}$ как счётное объединение измеримых множеств. Таким образом, функция h является измеримой. ■

Следствие 4.2.9. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, а функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ измеримы. Тогда функции $f+g$, $f-g$ и fg тоже являются измеримыми. Если $g \neq 0$ на X, то функция f/g является измеримой.*

Доказательство. Для доказательства измеримости функций $f+g$, $f-g$ и fg надо применить утверждение 4.2.8 соответственно для функций

$$F(u,v) = u+v, \quad F(u,v) = u-v \quad \text{и} \quad F(u,v) = uv$$

на множестве $G = \mathbb{R}^2$. Для доказательства измеримости функции f/g при условии $g \neq 0$ на X надо применить утверждение 4.2.8 для функции $F(u,v) = u/v$ на открытом множестве

$$G = \{\ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \mid \quad v \neq 0\ \}.$$

■

Пример 4.2.10. Покажем, что суперпозиция $f(g)$ измеримой функции f с непрерывной функцией g может не быть измеримой. Пусть $X = [0,1]$, $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств отрезка $[0,1]$, μ — мера Лебега. Пусть компакт $K \subset X$ — канторово множество (см. [4, гл. 2, п. 2.44, с. 51] или [1, гл. II, § 2, с. 63]). Тогда открытое множество

$$G = X \backslash K$$

представляет собой счётное объединение попарно непересекающихся интервалов I_m суммарной длины 1, т. е.

$$G = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m, \quad \mu(G) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(I_m) = 1.$$

Следовательно,
$$\mu(K) = 1 - \mu(G) = 0.$$
Обозначим через $\ell\colon [0,1] \to [0,1]$ канторову лестницу (см. [1, гл. VI, § 4, с. 341]), представляющую собой непрерывную на отрезке $[0,1]$ неубывающую функцию, такую, что $\ell(0) = 0$, $\ell(1) = 1$, и постоянную на каждом интервале I_m, т. е. для любого номера m существует число $c_m \in (0,1)$, такое, что $\ell(x) = c_m$ для любого $x \in I_m$. Рассмотрим функцию
$$h(x) = \frac{1}{2}\big(\ell(x) + x\big) \qquad \forall\, x \in [0,1].$$
Тогда функция h строго возрастает на отрезке $[0,1]$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Следовательно, существует обратная непрерывная строго возрастающая функция
$$h^{-1}\colon [0,1] \to [0,1].$$
Рассмотрим образ множества G под действием функции h. Имеем
$$h(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} h(I_m).$$
При этом в силу непрерывности и строгого возрастания функции h для любого номера m множество $h(I_m)$ является открытым интервалом и
$$h(I_m) \cap h(I_k) = \varnothing \quad \text{при} \quad m \neq k.$$
Следовательно,
$$\mu\big(h(G)\big) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu\big(h(I_m)\big) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(\frac{1}{2}(c_m + I_m)\right) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\mu(I_m) = \frac{1}{2}\,\mu(G) = \frac{1}{2}.$$
Тогда множество
$$h(K) = [0,1]\backslash h(G) \in \mathfrak{M} \quad \text{и} \quad \mu\big(h(K)\big) = 1 - \mu\big(h(G)\big) = \frac{1}{2}.$$
Поэтому, в силу утверждения 4.1.44, множество положительной меры $h(K)$ содержит неизмеримое по Лебегу подмножество S, т. е.
$$S \subset h(K) \quad \text{и} \quad S \notin \mathfrak{M}.$$

Но, в силу полноты меры Лебега (см. замечания 4.1.37 и 4.1.39), множество
$$E = h^{-1}(S) \subset K$$
является измеримым по Лебегу как подмножество канторова множества K меры нуль. Определим измеримую функцию $f\colon [0,1] \to [0,1]$ вида
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ \\ 1, & x \in [0,1] \backslash E. \end{cases}$$
Ясно, что функция f измерима, так как для любого числа a получаем
$$L_<(f,a) = \left\{ \begin{array}{ll} X, & a > 1, \\ \\ E, & 0 < a \leqslant 1, \\ \\ \varnothing, & a \leqslant 0 \end{array} \right\} \in \mathfrak{M}.$$
Пусть непрерывная функция $g = h^{-1}$. Тогда функция
$$f(g)\colon [0,1] \to [0,1]$$
является неизмеримой, так как её лебегово множество
$$L_< \big(f(g),1\big) = \left\{ \ x \in [0,1] \quad \middle| \quad h^{-1}(x) \in E \ \right\} =$$
$$= \left\{ \ x \in [0,1] \quad \middle| \quad x \in h(E) = S \ \right\} = S \notin \mathfrak{M},$$
т. е. неизмеримо. ▲

Определение 4.2.11. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ назовём эквивалентными, если они отличаются на множестве меры нуль, т. е.*
$$\mu \left\{ \ x \in X \ \middle| \ f(x) \neq g(x) \ \right\} = 0.$$
Эквивалентные измеримые функции f и g будем обозначать $f \sim g$.

Замечание 4.2.12. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, и заданы измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Тогда множество
$$E = \{ \ x \in X \ \mid \ f(x) \neq g(x) \ \} \in \mathfrak{M}.$$

Докажем это. Определим множество

$$X_0 = \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} -\infty < f(x) < +\infty \\ -\infty < g(x) < +\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} -m < f(x) < m \\ -m < g(x) < m \end{array} \right\} \in \mathfrak{M}.$$

Рассмотрим множества

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & \{\, x \in X_0 \mid f(x) - g(x) \neq 0 \,\}, \\ E_1 & = & \{\, x \in X \mid f(x) = -\infty,\;\; g(x) > -\infty \,\}, \\ E_2 & = & \{\, x \in X \mid f(x) = +\infty,\;\; g(x) < +\infty \,\}, \\ E_3 & = & \{\, x \in X \mid f(x) > -\infty,\;\; g(x) = -\infty \,\}, \\ E_4 & = & \{\, x \in X \mid f(x) < +\infty,\;\; g(x) = +\infty \,\}. \end{array}$$

Тогда справедливо равенство

$$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4.$$

Функции $f, g\colon X_0 \to \mathbb{R}$ являются измеримыми, так как для любого числа a имеем измеримость лебеговых множеств

$$\begin{array}{rcccl} \{\, x \in X_0 \mid f(x) < a \,\} & = & X_0 \cap L_<(f, a) & \in & \mathfrak{M}, \\ \{\, x \in X_0 \mid g(x) < a \,\} & = & X_0 \cap L_<(g, a) & \in & \mathfrak{M}. \end{array}$$

Следовательно, по следствию 4.2.9 получаем измеримость функции $(f - g)\colon X_0 \to \mathbb{R}$. Тогда множество

$$E_0 = \{\, x \in X_0 \mid f(x) - g(x) < 0 \,\} \cup \{\, x \in X_0 \mid f(x) - g(x) > 0 \,\} \in \mathfrak{M}.$$

Далее имеем соотношения

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_{<}(f,-m)\right] \cap \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_{>}(g,-m)\right] \in \mathfrak{M}, \\
E_2 &= \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_{>}(f,\quad m)\right] \cap \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_{<}(g,\quad m)\right] \in \mathfrak{M}, \\
E_3 &= \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_{>}(f,-m)\right] \cap \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_{<}(g,-m)\right] \in \mathfrak{M}, \\
E_4 &= \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_{<}(f,\quad m)\right] \cap \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_{>}(g,\quad m)\right] \in \mathfrak{M}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $E \in \mathfrak{M}$, что и требовалось. □

Замечание 4.2.13. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, функция $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ измерима. Тогда изменение функции f на множестве меры нуль даёт измеримую функцию, естественно, эквивалентную f.

Действительно, пусть множество $A \in \mathfrak{M}$ имеет меру нуль, а функция $g: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ такова, что

$$g(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in X \backslash A.$$

Тогда для любого числа a получаем

$$L_{<}(g, a) = \big(L_{<}(f, a) \backslash A\big) \cup \left\{\ x \in A \ \ \middle|\ \ g(x) < a\ \right\}.$$

В силу измеримости функции f имеем

$$L_{<}(f, a) \backslash A \in \mathfrak{M}.$$

В силу полноты меры μ, множество

$$\{\ x \in A \ \mid\ g(x) < a\ \} \in \mathfrak{M}$$

как подмножество множества A меры нуль. Следовательно, получаем $L_{<}(g, a) \in \mathfrak{M}$, т. е. функция g является измеримой. □

Утверждение 4.2.14. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Тогда справедливы следующие свойства:*

1) $f \sim f$ для любой измеримой функции $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;

2) $f \sim g$ равносильно $g \sim f$ для измеримых функций $f, g: X \to \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;

3) если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$ для измеримых функций $f, g, h: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 очевидным образом следуют из определения 4.2.11. Покажем свойство 3. Пусть измеримые функции f, g, h таковы, что $f \sim g$ и $g \sim h$. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \neq g(x) \right\}, \\ B &= \left\{ x \in X \;\middle|\; g(x) \neq h(x) \right\}, \\ C &= \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \neq h(x) \right\}. \end{aligned}$$

По условию $\mu(A) = \mu(B) = 0$. Если $x \in C$, то либо $f(x) \neq g(x)$, т. е. $x \in A$, либо $f(x) = g(x)$, и тогда $x \in B$. Следовательно,

$$C \subset A \cup B \quad \text{и} \quad \mu(C) \leqslant \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Таким образом, $f \sim h$, что и требовалось. ■

Определение 4.2.15. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Будем говорить, что некоторое свойство $\mathcal{P}$ выполнено почти всюду (п. в.) на X, если существует множество $A \in \mathfrak{M}$, такое, что $\mu(X \backslash A) = 0$, а свойство $\mathcal{P}$ выполнено для любого $x \in A$.*

Замечание 4.2.16. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, и заданы измеримые функции $f, g \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Тогда $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ п. в. на X. □

4.3. Интеграл Лебега

В этом параграфе рассматриваем измеримое пространство $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Определение 4.3.1. *Пусть $E \subset X$ — произвольное множество. Функция $\delta_E \colon X \to \mathbb{R}$ вида*

$$\delta_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \neq E \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

Определение 4.3.2. *Функция $s \colon X \to \mathbb{R}$ называется простой, если она принимает конечное множество значений.*

Замечание 4.3.3. Пусть $s\colon X \to \mathbb{R}$ — простая функция, а $c_1, \ldots, c_m$ — все её различные значения. Для каждого $k \in \overline{1,m}$ определим множество

$$E_k = \left\{\ x \in X \ \middle|\ s(x) = c_k\ \right\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$s(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{E_k}(x) \qquad \forall, x \in X.$$

□

Утверждение 4.3.4. *Пусть $c_1, \ldots, c_m$ — различные числа, а $E_1, \ldots, E_k$ — попарно непересекающиеся множества из X. Тогда простая функция*

$$s(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{E_k}(x), \qquad x \in X,$$

измерима тогда и только тогда, когда $E_k \in \mathfrak{M}$ для любого $k \in \overline{1,m}$.

Доказательство. Пусть простая функция s измерима. Тогда для любого номера $k \in \overline{1,m}$ получаем

$$E_k = L_{\leqslant}(s, c_k) \cap L_{\geqslant}(s, c_k) \in \mathfrak{M}$$

в силу утверждения 4.2.4. Обратно, пусть множество E_k измеримо при каждом $k \in \overline{1,m}$. Тогда характеристическая функция δ_{E_k} измерима, так как для любого числа a имеем соотношение

$$L_{<}(\delta_{E_k}, a) = \left\{ \begin{array}{cc} X, & a > 1, \\ \\ X \backslash E_k, & 0 < a \leqslant 1, \\ \\ \varnothing, & a \leqslant 0 \end{array} \right\} \in \mathfrak{M}.$$

Следовательно, функция s измерима по следствию 4.2.9 как сумма измеримых функций. ■

Определение 4.3.5. *Для функции $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ определим её положительную и отрицательную составляющие — соответственно функции*

$$f_+ = \max\{0, f\} \quad \text{и} \quad f_- = \max\{0, -f\},$$

так что $f = f_+ - f_-$.

Утверждение 4.3.6. *Пусть функция* $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *является измеримой. Тогда функции* f_+ *и* f_- *также являются измеримыми.*

Доказательство. Сразу следует из утверждения 4.2.6. ■

Утверждение 4.3.7. *Пусть функция* $f\colon X \to [0,+\infty]$ *измерима. Тогда существует монотонно возрастающая последовательность простых неотрицательных измеримых функций* $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, *поточечно сходящаяся к функции* f, *т. е. для любого* $x \in X$ *выполнены равенство*

$$\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x)$$

и неравенство

$$s_m(x) \leqslant s_\ell(x) \qquad \forall\, m \leqslant \ell.$$

Доказательство. Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1, m2^m}$ определим попарно непересекающиеся множества

$$E_{m,k} \;=\; \left\{\, x \in X \;\;\middle|\;\; \tfrac{k-1}{2^m} \leqslant f(x) < \tfrac{k}{2^m} \,\right\},$$

$$F_m \;=\; \left\{\, x \in X \;\;\middle|\;\; f(x) \geqslant m \,\right\}.$$

Так как функция f измерима, то по утверждению 4.2.4 множества $E_{m,k}$ и F_m измеримы. Тогда простая функция

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m}\delta_{E_{m,k}}(x) + m\delta_{F_m}(x)$$

измерима. Покажем, что

$$s_m(x) \leqslant s_{m+1}(x) \qquad \forall\, x \in X, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Действительно, пусть сначала $x \in E_{m,k}$ при некотором $k \in \overline{1, m2^m}$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{2k-2}{2^{m+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k}{2^{m+1}} \quad \text{и} \quad 2k \leqslant m2^{m+1}.$$

Если выполнено

$$\frac{2k-2}{2^{m+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k-1}{2^{m+1}},$$

т. е. $x \in E_{m+1,2k-1}$, то получаем

$$s_{m+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{m+1}} = s_m(x).$$

Если же выполнено

$$\frac{2k-1}{2^{m+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k}{2^{m+1}},$$

т. е. $x \in E_{m+1,2k}$, то получаем

$$s_{m+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{m+1}} > \frac{k-1}{2^m} = s_m(x).$$

Пусть $x \in F_m$, т. е. $f(x) \geqslant m$. Если выполнено $f(x) \geqslant m+1$, т. е. $x \in F_{m+1}$, то

$$s_{m+1}(x) = m+1 > s_m(x).$$

Если выполнено $m \leqslant f(x) < m+1$, то существует номер k вида

$$m2^{m+1} + 1 \leqslant k \leqslant (m+1)2^{m+1},$$

такой, что выполнены неравенства

$$\frac{k-1}{2^{m+1}} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^{m+1}},$$

т. е. $x \in E_{m+1,k}$. Тогда

$$s_{m+1}(x) = \frac{k-1}{2^{m+1}} \geqslant m = s_m(x).$$

Таким образом, при любом $x \in X$ и любых $m \leqslant \ell$ справедливо неравенство $s_m(x) \leqslant s_\ell(x)$.

Теперь покажем поточечную сходимость последовательности s_m к функции f. Если $f(x) < +\infty$, то существует номер $m(x)$, такой, что $f(x) < m(x)$. Следовательно, при всех $m > m(x)$ получаем

$$0 \leqslant f(x) - s_m(x) \leqslant \frac{1}{2^m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Если же $f(x) = +\infty$, то для любого номера m имеем $x \in F_m$ и

$$s_m(x) = m \to +\infty = f(x),$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.3.8. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является измеримой. Тогда существует последовательность простых измеримых функций $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, поточечно сходящаяся к функции f, т. е. для любого $x \in X$ выполнено равенство*

$$\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x).$$

Доказательство. Измеримую функцию f в силу замечания 4.3.5 представим в виде

$$f = f_+ - f_-,$$

где измеримые функции $f_+, f_-: X \to [0, +\infty]$. Тогда по утверждению 4.3.7 существуют последовательности измеримых простых функций $s_{m,+}$ и $s_{m,-}$, поточечно сходящиеся к f_+ и f_- соответственно. Следовательно, последовательность измеримых простых функций $s_m = s_{m,+} - s_{m,-}$ является поточечно сходящейся к функции f. ∎

Определение 4.3.9. *Пусть $c_1, \ldots, c_m$ — различные положительные числа, $E_1, \ldots, E_k$ — попарно непересекающиеся измеримые множества из X. Пусть*

$$s(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{E_k}(x)$$

простая измеримая неотрицательная функция. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ интегралом Лебега функции s по множеству E называется величина

$$I_E(s) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(E_k \cap E) \in [0, +\infty].$$

Определение 4.3.10. *Пусть функция $f: X \to [0, +\infty]$ является измеримой. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ интегралом Лебега функции f по множеству E называется величина*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \sup I_E(s),$$

где верхняя грань берётся по всем простым измеримым функциям s, таким, что $0 \leqslant s \leqslant f$. Ясно, что величина

$$\int\limits_E f\, d\mu \in [0, +\infty].$$

Замечание 4.3.11. Для неотрицательной простой измеримой функции s и измеримого множества $E \in \mathfrak{M}$ величина $I_E(s)$ не зависит от значений функции s на множестве $X \backslash E$. Поэтому для любой неотрицательной измеримой функции f значение её интеграла Лебега по множеству E равно точной верхней грани множества чисел $I_E(s)$ по всем неотрицательным простым измеримым функциям s, таким, что $s(x) \leqslant f(x)$ только для всех $x \in E$. $\square$

Утверждение 4.3.12. *Пусть s — простая неотрицательная измеримая функция. Тогда для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ справедливо равенство*

$$\int_E s\,d\mu = I_E(s).$$

Доказательство. Для любой простой измеримой функции $\tilde{s}$ вида $0 \leqslant \tilde{s} \leqslant s$ очевидно неравенство

$$I_E(\tilde{s}) \leqslant I_E(s).$$

Тогда получаем

$$I_E(s) \leqslant \int_E s\,d\mu = \sup_{0 \leqslant \tilde{s} \leqslant s} I_E(\tilde{s}) \leqslant I_E(s),$$

что и требовалось. $\blacksquare$

Определение 4.3.13. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является измеримой, множество $E \in \mathfrak{M}$. Если хотя бы один из интегралов*

$$\int_E f_+\,d\mu \quad \text{или} \quad \int_E f_-\,d\mu$$

конечен, то интегралом Лебега функции f по множеству E называется величина

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu.$$

Если величина $\int_E f\,d\mu$ конечна, т. е. конечны оба интеграла

$$\int_E f_+\,d\mu \quad \text{и} \quad \int_E f_-\,d\mu,$$

то функция f называется интегрируемой по Лебегу на множестве E. Совокупность всех измеримых функций, интегрируемых по Лебегу на множестве E, обозначим $\mathcal{L}(E)$.

Утверждение 4.3.14. *Пусть измеримые функции*

$$f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

эквивалентны на измеримом множестве E, т. е.

$$\mu\left\{\ x \in E\ \ \middle|\ \ f(x) \neq g(x)\ \right\} = 0.$$

Тогда

$$\exists \int\limits_E f\,d\mu \quad \Leftrightarrow \quad \exists \int\limits_E g\,d\mu.$$

Если указанные интегралы существуют, то они равны. В частности, $f \in \mathcal{L}(E)$ равносильно $g \in \mathcal{L}(E)$.

Доказательство. Эквивалентность функций f и g на множестве E влечёт $f_+ \sim g_+$ и $f_- \sim g_-$ на E. Следовательно, доказываемое утверждение будет установлено, если доказать равенство интегралов Лебега по множеству E двух неотрицательных измеримых эквивалентных на E функций f_+ и g_+. Пусть множество

$$E_0 = \left\{\ x \in E\ \ \middle|\ \ f_+(x) \neq g_+(x)\ \right\} \in \mathfrak{M}.$$

Тогда $\mu(E_0) = 0$. Так как для любого множества $S \in \mathfrak{M}$ справедливо равенство

$$\mu(S) = \mu(S \backslash E_0),$$

то для любой неотрицательной измеримой простой функции s справедливо равенство

$$I_E(s) = I_{E\backslash E_0}(s).$$

Следовательно,

$$\int\limits_E f_+\,d\mu = \sup_{0 \leqslant s \leqslant f_+} I_E(s) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant f_+} I_{E\backslash E_0}(s) =$$

$$= \sup_{0 \leqslant s \leqslant g_+} I_{E\backslash E_0}(s) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant g_+} I_E(s) = \int\limits_E g_+\,d\mu,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.3.15. *Пусть измеримая функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируема по Лебегу на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Тогда функция f почти всюду конечна на множестве E, т. е. выполнено равенство

$$\mu\left\{\, x\in E \quad\middle|\quad |f(x)| = +\infty \,\right\} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{\, x\in E \quad\middle|\quad |f(x)| = +\infty \,\right\}, \\ E_+ &= \left\{\, x\in E \quad\middle|\quad f(x) = +\infty \,\right\} \\ E_- &= \left\{\, x\in E \quad\middle|\quad f(x) = -\infty \,\right\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$E_0 = E_+ \cup E_-.$$

Предположим, рассуждая от противного, что $\mu(E_0) > 0$. Тогда либо $\mu(E_+) > 0$, либо $\mu(E_-) > 0$.

Сначала рассмотрим случай $\mu(E_+) > 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим неотрицательную измеримую простую функцию

$$s_m(x) = m\delta_{E_+}(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда для любого m справедливо неравенство

$$s_m(x) \leqslant f_+(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Следовательно, получаем неравенства

$$+\infty > \int\limits_E f_+\, d\mu \geqslant I_E(s_m) = m\mu(E_+) \to +\infty \quad \text{при } m \to \infty,$$

т. е. получили противоречие.

Теперь рассмотрим случай $\mu(E_-) > 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим неотрицательную измеримую простую функцию

$$s_m(x) = m\delta_{E_-}(x) \leqslant f_-(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда для любого m справедливо неравенство

$$s_m(x) \leqslant f_-(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Следовательно, получаем неравенства

$$+\infty > \int\limits_E f_-\, d\mu \geqslant I_E(s_m) = m\mu(E_-) \to +\infty \quad \text{при } m \to \infty,$$

т. е. получили противоречие. ■

Утверждение 4.3.16. *Пусть измеримая функции*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

ограничена на множестве $E \in \mathfrak{M}$, т. е. существуют числа a и b, такие, что выполнены неравенства

$$a \leqslant f(x) \leqslant b \qquad \forall\, x \in E.$$

Пусть $\mu(E) < +\infty$. Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$ и справедливы неравенства

$$a\mu(E) \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant b\mu(E).$$

Доказательство. Если $a \geqslant 0$, то $f(x) = f_+(x)$ для всех $x \in E$. Тогда для всех $x \in E$ имеем неравенства

$$0 \leqslant a\delta_E(x) \leqslant f_+(x) \leqslant b\delta_E(x).$$

Следовательно,

$$a\mu(E) = I_E(a\delta_E) \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant f_+} I_E(s) = \int\limits_E f_+\,d\mu =$$
$$= \int\limits_E f\,d\mu \leqslant I_E(b\delta_E) = b\mu(E).$$

Если $b \leqslant 0$, то $f(x) = -f_-(x)$ для всех $x \in E$. Тогда для всех $x \in E$ имеем неравенства

$$0 \leqslant -b\delta_E(x) \leqslant f_-(x) \leqslant -a\delta_E(x),$$

Следовательно,

$$-b\mu(E) = I_E(-b\delta_E) \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant f_-} I_E(s) = \int\limits_E f_-\,d\mu =$$
$$= -\int\limits_E f\,d\mu \leqslant I_E(-a\delta_E) = -a\mu(E).$$

Пусть теперь $a < 0$ и $b > 0$. Тогда для всех $x \in E$ имеем неравенства

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant b\delta_E(x) \quad \text{и} \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant -a\delta_E(x).$$

Следовательно,

$$\int\limits_E f_+\,d\mu \quad = \quad \sup_{0\leqslant s\leqslant f_+} I_E(s) \quad \leqslant \quad I_E(b\delta_E) \quad = \quad b\mu(E),$$

$$\int\limits_E f_-\,d\mu \quad = \quad \sup_{0\leqslant s\leqslant f_-} I_E(s) \quad \leqslant \quad I_E(-a\delta_E) \quad = \quad -a\mu(E).$$

Тогда получаем

$$a\mu(E) \leqslant \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu \leqslant b\mu(E).$$

■

Утверждение 4.3.17. *Пусть измеримые функции*

$$f, g\colon X \to [0, +\infty]$$

таковы, что $f \leqslant g$ на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu.$$

Доказательство. Для любой простой измеримой функции s вида $0 \leqslant s \leqslant f$ на множестве E получаем $0 \leqslant s \leqslant g$ на E. Следовательно,

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sup_{0\leqslant s\leqslant f} I_E(s) \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant g} I_E(g) = \int\limits_E g\,d\mu,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.3.18. *Пусть измеримые функции*

$$f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируемы на измеримом множестве E, причём

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall\, x \in E$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu.$$

Доказательство. Неравенство $f \leqslant g$ на E влечёт неравенства

$$f_+ \leqslant g_+ \quad \text{и} \quad f_- \geqslant g_- \quad \text{на} \quad E.$$

Тогда, в силу утверждения 4.3.17, получаем неравенства

$$\int\limits_E f_+ \, d\mu \leqslant \int\limits_E g_+ \, d\mu, \qquad \int\limits_E f_- \, d\mu \geqslant \int\limits_E g_- \, d\mu.$$

Следовательно,

$$\int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_E f_+ \, d\mu - \int\limits_E f_- \, d\mu \leqslant \int\limits_E g_+ \, d\mu - \int\limits_E g_- \, d\mu = \int\limits_E g \, d\mu,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.3.19. *Пусть измеримая функция* $f\colon X \to [0, +\infty]$. *Тогда для любых измеримых множеств* E_1 *и* E_2 *вида* $E_1 \subset E_2$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{E_1} f \, d\mu \leqslant \int\limits_{E_2} f \, d\mu.$$

Доказательство. Для любого измеримого множества E выполнено неравенство

$$\mu(E \cap E_1) \leqslant \mu(E \cap E_2).$$

Тогда для любой простой неотрицательной измеримой функции s имеем неравенство

$$I_{E_1}(s) \leqslant I_{E_2}(s).$$

Следовательно, получаем

$$\int\limits_{E_1} f \, d\mu = \sup_{0 \leqslant s \leqslant f} I_{E_1}(s) \leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant f} I_{E_2}(s) = \int\limits_{E_2} f \, d\mu,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.3.20. *Измеримая функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

является интегрируемой по Лебегу на измеримом множестве E тогда и только тогда, когда функция $|f| \in \mathcal{L}(E)$. При этом выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_E f\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f|\, d\mu.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}(E)$, т. е. по определению 4.3.13 имеем неравенства

$$\int\limits_E f_+\, d\mu < +\infty \quad \text{и} \quad \int\limits_E f_-\, d\mu < +\infty.$$

Определим следующие множества:

$$E_+ = \{\, x \in E \ \mid\ f(x) \geqslant 0 \,\}, \quad E_- = \left\{\, x \in E \ \mid\ f(x) \leqslant 0 \,\right\}.$$

Ясно, что

$$|f(x)| = f_+(x) \quad \text{при} \quad x \in E_+$$

$$|f(x)| = f_-(x) \quad \text{при} \quad x \in E_-.$$

Тогда для любой простой измеримой функции s вида $0 \leqslant s \leqslant |f|$ получаем

$$0 \leqslant s \leqslant f_+ \quad \text{на} \quad E_+,$$

$$0 \leqslant s \leqslant f_- \quad \text{на} \quad E_-.$$

Так как для любого измеримого множества $A \subset E$ в силу утверждения 4.1.10 выполнено неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cap E_+) + \mu(A \cap E_-),$$

то, используя утверждение 4.3.19, получаем

$$I_E(s) \leqslant I_{E_+}(s) + I_{E_-}(s) \leqslant \int\limits_{E+} f_+\, d\mu + \int\limits_{E_-} f_-\, d\mu \leqslant \int\limits_E f_+\, d\mu + \int\limits_E f_-\, d\mu.$$

Следовательно,

$$\int\limits_E |f|\, d\mu = \sup_{0 \leqslant s \leqslant |f|} I_E(s) \leqslant \int\limits_E f_+\, d\mu + \int\limits_E f_-\, d\mu < +\infty,$$

т. е. выполнено вложение $|f| \in \mathcal{L}(E)$.

Если справедливо вложение $|f| \in \mathcal{L}(E)$, то в силу неравенств

$$0 \leqslant f_+ \leqslant |f| \quad \text{и} \quad 0 \leqslant f_- \leqslant |f|$$

получаем

$$\int_E f_+\, d\mu \leqslant \int_E |f|\, d\mu < +\infty, \quad \int_E f_-\, d\mu \leqslant \int_E |f|\, d\mu < +\infty.$$

Таким образом, $f \in \mathcal{L}(E)$. Справедливы неравенства

$$\int_E f_+\, d\mu - \int_E f_-\, d\mu \quad \leqslant \quad \int_E f_+\, d\mu \quad \leqslant \quad \int_E |f|\, d\mu,$$

$$\int_E f_-\, d\mu - \int_E f_+\, d\mu \quad \leqslant \quad \int_E f_-\, d\mu \quad \leqslant \quad \int_E |f|\, d\mu.$$

Поэтому

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| = \left|\int_E f_+\, d\mu - \int_E f_-\, d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\, d\mu,$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.3.21. *Пусть измеримые функции*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{и} \quad g\colon X \to [0, +\infty]$$

таковы, что $g \in \mathcal{L}(E)$ и $|f| \leqslant g$ на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$ и выполнено неравенство

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \leqslant \int_E g\, d\mu.$$

Доказательство. Неравенство $|f| \leqslant g$ на E по утверждению 4.3.17 влечёт неравенство

$$\int_E |f|\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu < +\infty,$$

т. е. получаем $|f| \in \mathcal{L}(E)$. Следовательно, по утверждению 4.3.20 выполнены вложение $f \in \mathcal{L}(E)$ и неравенство

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu.$$

■

Утверждение 4.3.22. *Пусть измеримая функция*
$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
интегрируема на измеримом множестве E. Тогда для любого числа $c \neq 0$ выполнено $cf \in \mathcal{L}(E)$, причём
$$\int\limits_E cf\,d\mu = c\int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Пусть $c > 0$. Тогда
$$(cf)_+ = cf_+ \quad \text{и} \quad (cf)_- = cf_-.$$
Следовательно, выполнены соотношения
$$\int\limits_E (cf)_+\,d\mu = \sup_{0\leqslant s\leqslant cf_+} I_E(s) = \sup_{0\leqslant \frac{s}{c}\leqslant f_+} cI_E\left(\frac{s}{c}\right) = c\int\limits_E f_+\,d\mu,$$
$$\int\limits_E (cf)_-\,d\mu = \sup_{0\leqslant s\leqslant cf_-} I_E(s) = \sup_{0\leqslant \frac{s}{c}\leqslant f_-} cI_E\left(\frac{s}{c}\right) = c\int\limits_E f_-\,d\mu.$$
Тогда получаем
$$\int\limits_E (cf)\,d\mu = \int\limits_E (cf)_+\,d\mu - \int\limits_E (cf)_-\,d\mu =$$
$$= c\int\limits_E f_+\,d\mu - c\int\limits_E f_-\,d\mu = c\int\limits_E f\,d\mu.$$
Пусть $c < 0$. Тогда
$$(cf)_+ = (-c)f_- \quad \text{и} \quad (cf)_- = (-c)f_+.$$
Следовательно, выполнены соотношения
$$\int\limits_E (cf)_+\,d\mu = \sup_{0\leqslant s\leqslant (-c)f_-} I_E(s) =$$
$$= \sup_{0\leqslant \frac{s}{-c}\leqslant f_-} (-c)I_E\left(\frac{s}{-c}\right) = (-c)\int\limits_E f_-\,d\mu,$$

$$\int\limits_E (cf)_-\,d\mu = \sup_{0\leqslant s\leqslant(-c)f_+} I_E(s) =$$

$$= \sup_{0\leqslant \frac{s}{-c}\leqslant f_+} (-c)I_E\left(\frac{s}{-c}\right) = (-c)\int\limits_E f_+\,d\mu.$$

Тогда получаем

$$\int\limits_E (cf)\,d\mu = \int\limits_E (cf)_+\,d\mu - \int\limits_E (cf)_-\,d\mu =$$

$$= (-c)\int\limits_E f_-\,d\mu - (-c)\int\limits_E f_+\,d\mu = c\int\limits_E f\,d\mu.$$

■

Утверждение 4.3.23. *Пусть измеримое множество E имеет меру нуль. Тогда любая измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ интегрируема по Лебегу на E, причем*

$$\int\limits_E f\,d\mu = 0.$$

Доказательство. Так как $\mu(E) = 0$, то для любой простой измеримой функции s вида

$$0 \leqslant s \leqslant f_+ \quad \text{или} \quad 0 \leqslant s \leqslant f_-$$

по определению 4.3.9 выполнено равенство

$$I_E(s) = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_E f_+\,d\mu = \int\limits_E f_-\,d\mu = 0,$$

откуда сразу следует интегрируемость функции f на множестве E и равенство

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu = 0.$$

■

Утверждение 4.3.24. *Пусть измеримая функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E. Тогда для любого измеримого множества $A \subset E$ выполнено $f \in \mathcal{L}(A)$.

Доказательство. Для любой простой измеримой функции s вида

$$0 \leqslant s \leqslant f_+ \quad \text{или} \quad 0 \leqslant s \leqslant f_-$$

по определению 4.3.9 и в силу свойства 2 утверждения 4.1.9 выполнено неравенство

$$I_A(s) \leqslant I_E(s).$$

Следовательно, получаем неравенства

$$\int\limits_A f_+\, d\mu \leqslant \int\limits_E f_+\, d\mu \quad \text{и} \quad \int\limits_A f_-\, d\mu \leqslant \int\limits_E f_-\, d\mu.$$

Так как $f \in \mathcal{L}(E)$, то

$$\int\limits_E f_\pm\, d\mu < +\infty, \quad \Rightarrow \quad \int\limits_A f_\pm\, d\mu < +\infty.$$

Слеовательно, $f \in \mathcal{L}(A)$. ■

Теорема 4.3.25. (счётная аддитивность инт–ла Лебега) *Пусть функция $f\colon X \to [0,+\infty]$ измерима. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ определим величину*

$$\varphi(E) = \int\limits_E f\, d\mu.$$

Тогда функция $\varphi\colon \mathfrak{M} \to [0,+\infty]$ является счётно-аддитивной.

Доказательство. Пусть последовательность измеримых множеств

$$\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$$

такова, что

$$E_m \cap E_k = \varnothing \quad \text{для всех} \quad m \neq k,$$

а множество
$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$
Требуется доказать равенство
$$\varphi(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m).$$
Если функция f является характеристической функцией измеримого множества A, т. е. $f = \delta_A$, то $\varphi(E) = \mu(A \cap E)$. Поэтому в силу счётной аддитивности меры μ получаем требуемое равенство
$$\varphi(E) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (A \cap E_m)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A \cap E_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m).$$
Если f является простой неотрицательной функцией, то в силу определения 4.3.9 функция φ является конечной линейной комбинацией счётно-аддитивных функций с положительными коэффициентами, т. е. тоже является счётно-аддитивной. В общем случае для любой простой измеримой функции s вида $0 \leqslant s \leqslant f$ имеем
$$I_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} I_{E_m}(s) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m).$$
Следовательно, получаем неравенство
$$\varphi(E) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant f} I_E(s) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m).$$
Так как $E_m \subset E$ для любого номера m, то в силу утверждения 4.3.19 имеем неравенство
$$\varphi(E_m) = \int\limits_{E_m} f\, d\mu \leqslant \int\limits_{E} f\, d\mu = \varphi(E).$$
Следовательно, если существует номер m_0, такой, что $\varphi(E_{m_0}) = +\infty$, то получаем
$$\varphi(E) = +\infty = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m).$$

Поэтому далее считаем, что

$$\varphi(E_m) < +\infty \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ по определению 4.3.10 существует простая измеримая функция s вида $0 \leqslant s \leqslant f$, такая, что для всех $m \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство

$$I_{E_m}(s) \geqslant \int\limits_{E_m} f\, d\mu - \frac{\varepsilon}{N} = \varphi(E_m) - \frac{\varepsilon}{N}.$$

Следовательно, получаем

$$\varphi(E) \geqslant I_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} I_{E_m}(s) \geqslant \sum_{m=1}^{N} I_{E_m}(s) \geqslant \sum_{m=1}^{N} \varphi(E_m) - \varepsilon.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ и $N \to \infty$, получаем неравенство

$$\varphi(E) \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m),$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.3.26. *Пусть измеримая функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируема на измеримом множестве E. Тогда для любой последовательности измеримых множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ вида

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \quad \text{и} \quad E_m \cap E_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k$$

справедливо равенство

$$\int\limits_{E} f\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\, d\mu,$$

при этом последний ряд сходится абсолютно.

Доказательство. По теореме 4.3.25 получаем равенства

$$\int\limits_{E} f_+\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_+\, d\mu < +\infty, \qquad \int\limits_{E} f_-\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_-\, d\mu < +\infty.$$

Так как для любого m выполнено

$$\left|\int\limits_{E_m} f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_{E_m} f_+\,d\mu + \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu,$$

то числовой ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f\,d\mu$$

сходится абсолютно. Следовательно, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_{E_m} f_+\,d\mu - \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{E_m} f_+\,d\mu - \sum_{m=1}^{N}\int\limits_{E_m} f_-\,d\mu\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{E_m} f_+\,d\mu\right) - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{E_m} f_-\,d\mu\right) =$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f_+\,d\mu\right) - \left(\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f_-\,d\mu\right) = \int\limits_{E} f_+\,d\mu - \int\limits_{E} f_-\,d\mu = \int\limits_{E} f\,d\mu,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.3.27. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ измерима, множество $E \in \mathfrak{M}$. Пусть последовательность измеримых множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ вида*

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \quad \text{и} \quad E_m \cap E_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k,$$

такова, что $f \in \mathcal{L}(E_m)$ для любого m. Пусть числовой ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} |f|\,d\mu$$

сходится. Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$, причём выполнено равенство

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\,d\mu,$$

а последний ряд сходится абсолютно.

Доказательство. Так как $0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$, то для любого m получаем

$$\int\limits_{E_m} f_\pm\,d\mu \leqslant \int\limits_{E_m} |f|\,d\mu \quad \text{— член сходящегося ряда.}$$

Следовательно, по теореме 4.3.25 получаем

$$\int\limits_E f_\pm\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_\pm\,d\mu \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\,d\mu < +\infty.$$

Тогда по определению 4.3.13 получаем $f \in \mathcal{L}(E)$. При этом равенство

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\,d\mu$$

и абсолютная сходимость последнего ряда непосредственно следует из следствия 4.3.26. ■

Пример 4.3.28. Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств на $\mathbb{R}$, построенное на основе кольца клеточных подмножеств из $\mathbb{R}$. Предъявим пример множества $E \in \mathfrak{M}$, его представления в виде

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m, \quad \text{где} \quad E_m \in \mathfrak{M} \quad \text{и} \quad E_m \cap E_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k,$$

и измеримой функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, такой, что $f \in \mathcal{L}(E_m)$ для любого m, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\,d\mu$$

сходится, но $f \notin \mathcal{L}(E)$. Пусть множество $E = (0, 1]$, а множество

$$E_m = \left(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m-1}\right] \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$(0,1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \quad \text{и} \quad E_m \cap E_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k.$$

Функция $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} m, & \frac{1}{2m+1} < x \leqslant \frac{1}{2m}, \\[2ex] -m, & \frac{1}{2m} < x \leqslant \frac{1}{2m-1}. \end{cases}$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. На каждом множестве E_m функция f является простой, и

$$\int\limits_{E_m} f\,d\mu = m\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) - m\left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(2m+1)} - \frac{1}{2(2m-1)} = -\frac{1}{4m^2-1}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\,d\mu = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1}$$

является сходящимся. Однако по теореме 4.3.25 получаем равенства

$$\int\limits_{E} f_+\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_+\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2(2m+1)} = +\infty,$$

$$\int\limits_{E} f_-\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2(2m-1)} = +\infty,$$

т. е. $f \notin \mathcal{L}(E)$. ▲

Утверждение 4.3.29. (неравенство Чебышева) *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируема по Лебегу на E. Тогда для любого положительного числа c справедливо неравенство*

$$\mu \left\{ x \in E \quad \middle| \quad |f(x)| \geqslant c \right\} \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_E |f| \, d\mu.$$

Доказательство. Определим измеримые множества

$$A = \left\{ x \in E \;\middle|\; |f(x)| \geqslant c \right\}, \quad B = \left\{ x \in E \quad \middle| \quad |f(x)| < c \right\}.$$

Тогда имеем равенства $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = E$. Следовательно, по теореме 4.3.25 получаем

$$\int\limits_E |f| \, d\mu = \int\limits_A |f| \, d\mu + \int\limits_B |f| \, d\mu \geqslant \int\limits_A |f| \, d\mu \geqslant c\, \mu(A),$$

откуда сразу получаем

$$\mu(A) \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_E |f| \, d\mu,$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.3.30. *Пусть измеримая функция*

$$f\colon X \to [0, +\infty],$$

множество $E \in \mathfrak{M}$. Пусть

$$\int\limits_E f \, d\mu = 0.$$

Тогда $f(x) = 0$ для почти всех $x \in E$.

Доказательство. Определим множества

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in E \quad \middle| \quad f(x) > 0 \right\}, \\ A_m &= \left\{ x \in E \quad \middle| \quad f(x) \geqslant \tfrac{1}{m} \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Тогда выполнено равенство

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

По утверждению 4.3.29, для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$\mu(A_m) \leqslant m \int\limits_E f\, d\mu = 0.$$

Следовательно,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) = 0,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.3.31. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, измеримая функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируема по Лебегу на E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$, такое, что для любого измеримого множества $A \subset E$ вида $\mu(A) \leqslant \delta_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_A f\, d\mu \right| \leqslant \varepsilon.$$

Это свойство называется абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим измеримое множество

$$E_m = \left\{ \, x \in E \;\;\middle|\;\; m - 1 \leqslant |f(x)| < m \, \right\}.$$

Тогда при всех $m \neq k$ справедливо равенство

$$E_m \cap E_k = \varnothing,$$

и в силу утверждения 4.3.15 выполнено равенство

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \right) = 0.$$

В силу теоремы 4.3.25 и утверждения 4.3.23 получаем

$$\int\limits_E |f|\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\,d\mu.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое, что справедливо неравенство

$$\sum_{m=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\,d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Определим число

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon} > 0.$$

Тогда для любого измеримого множества $A \subset E$ вида $\mu(A) \leqslant \delta_\varepsilon$ получаем неравенства

$$\left|\int\limits_A f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_A |f|\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{A\cap E_m} |f|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{N_\varepsilon} \int\limits_{A\cap E_m} |f|\,d\mu + \sum_{m=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{N_\varepsilon} N_\varepsilon \mu(A\cap E_m) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant N_\varepsilon \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось. ■

Теорема 4.3.32. (Б. Леви, о монотонной сходимости) *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, а последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ измеримых функций $f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ такова, что*

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \qquad \forall\, x \in E.$$

Пусть функция $f\colon E \to [0, +\infty]$ определяется равенством

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m(x)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. В силу утверждения 4.3.17 получаем

$$0 \leqslant \int\limits_E f_1\, d\mu \leqslant \int\limits_E f_2\, d\mu \leqslant \ldots$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\, d\mu = \ell \in [0, +\infty].$$

Так как на множестве E выполнено $0 \leqslant f_m \leqslant f$ для любого m, то

$$\int\limits_E f_m\, d\mu \leqslant \int\limits_E f\, d\mu.$$

Следовательно,

$$\ell \leqslant \int\limits_E f\, d\mu.$$

Для любого числа $c \in (0,1)$ и любой простой измеримой функции s, такой, что $0 \leqslant s \leqslant f$ на E, определим последовательность измеримых множеств:

$$E_m = \left\{\ x \in E\ \ \middle|\ \ f_m(x) \geqslant cs(x)\ \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ является неубывающей при любом $x \in E$, то получаем вложения

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$$

Так как для любого $x \in E$ имеем

$$f_m(x) \to f(x) \quad \text{при} \quad m \to \infty, \quad f(x) \geqslant s(x) \geqslant cs(x),$$

то существует $m(x)$, что при всех $m > m(x)$ выполнено

$$f(x) \geqslant f_m(x) \geqslant cs(x), \quad \text{т. е.} \quad x \in E_m.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Тогда для любого номера m получаем

$$\int\limits_E f_m\,d\mu \geqslant \int\limits_{E_m} f_m\,d\mu \geqslant c\int\limits_{E_m} s\,d\mu.$$

По теореме 4.3.25 и утверждению 4.1.11 получаем, что

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{E_m} s\,d\mu = \int\limits_E s\,d\mu.$$

Следовательно,

$$\ell \geqslant c\int\limits_E s\,d\mu.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $c \to 1-0$, получаем

$$\ell \geqslant \int\limits_E s\,d\mu = I_E(s).$$

Тогда в силу произвольности простой функции s получаем

$$\ell \geqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant f} I_E(s) = \int\limits_E f\,d\mu,$$

что и требовалось. ■

Теорема 4.3.33. (линейность интеграла Лебега) *Пусть измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Лебегу на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Пусть функция $h = f+g$. Тогда $h \in \mathcal{L}(E)$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ на множестве E. Если f и g — простые функции, то по определению 4.3.9 сразу получаем требуемое равенство

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = I_E(f+g) = I_E(f) + I_E(g) = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

Для произвольных неотрицательных на E функций f и g, в силу утверждения 4.3.7, существуют неубывающие по m последовательности $\tilde{s}_m$ и $\hat{s}_m$ неотрицательных простых измеримых функций, таких, что для любого $x \in E$ выполнены равенства

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{s}_m(x) = f(x), \quad \lim_{m\to\infty} \hat{s}_m(x) = g(x).$$

Тогда последовательность $\tilde{s}_m + \hat{s}_m$ является неубывающей по m последовательностью простых неотрицательных измеримых функций, поточечно сходящейся на множестве E к функции $h = f + g$. Тогда по теореме 4.3.32 получаем равенства

$$\int\limits_E h\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \left(\int\limits_E (\tilde{s}_m + \hat{s}_m)\,d\mu \right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_E \tilde{s}_m\,d\mu + \lim_{m\to\infty} \int\limits_E \hat{s}_m\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$\int\limits_E h\,d\mu < +\infty,$$

т. е. получаем вложение $h \in \mathcal{L}(E)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $f \geqslant 0$ и $g \leqslant 0$ на множестве E. Определим два измеримых множества

$$A = \left\{ x \in E \quad \middle| \quad h(x) \geqslant 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in E \quad \middle| \quad h(x) < 0 \right\}.$$

Тогда $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = E$. На множестве A функции h, f и $(-g)$ являются неотрицательными и $f = h + (-g)$. Следовательно, как было показано в первом случае, справедливо равенство

$$\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_A h\,d\mu + \int\limits_A (-g)\,d\mu = \int\limits_A h\,d\mu - \int\limits_A g\,d\mu,$$

т. е.

$$\int\limits_A h\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_A g\,d\mu \quad \text{и} \quad h \in \mathcal{L}(A).$$

На множестве B функции $(-h)$, f и $(-g)$ являются неотрицательными и $(-g) = f + (-h)$. Следовательно, как было показано в первом случае, справедливо равенство

$$-\int\limits_B g\,d\mu = \int\limits_B (-g)\,d\mu = \int\limits_B f\,d\mu + \int\limits_B (-h)\,d\mu,$$

т. е.

$$\int\limits_B (-h)\,d\mu = -\int\limits_B f\,d\mu - \int\limits_B g\,d\mu \quad \text{и} \quad (-h) \in \mathcal{L}(B).$$

Тогда $h \in \mathcal{L}(B)$ и

$$\int\limits_B h\,d\mu = -\int\limits_B (-h)\,d\mu = \int\limits_B f\,d\mu + \int\limits_B g\,d\mu.$$

Следовательно, по утверждению 4.3.27 получаем вложение $h \in \mathcal{L}(E)$ и равенство

$$\int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_A h\,d\mu + \int\limits_B h\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

В общем случае, множество E представим в виде объединения четырёх попарно непересекающихся измеримых множеств E_k, $k \in \in \overline{1,4}$, на каждом из которых функции f и g сохраняют знак. Тогда, как было показано в первом и втором случаях, для каждого $k \in \overline{1,4}$ получаем вложение $h \in \mathcal{L}(E_k)$ и равенство

$$\int\limits_{E_k} h\,d\mu = \int\limits_{E_k} f\,d\mu + \int\limits_{E_k} g\,d\mu.$$

Таким образом, по утверждению 4.3.27 получаем вложение $h \in \mathcal{L}(E)$ и требуемое равенство

$$\int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

■

Следствие 4.3.34. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, а последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ измеримых функций*

$$f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

такова, что

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \dots \qquad \forall\, x \in E,$$

причём

$$f_m \in \mathcal{L}(E) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *определяется равенством*

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in E.$$

Пусть существует число M*, такое, что*

$$\int\limits_E f_m\, d\mu \leqslant M \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$*, и*

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m(x)\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu.$$

Доказательство. Для любого номера m определим измеримое множество

$$F_m = \left\{\ x \in E \ \ \middle| \ \ |f_m(x)| = +\infty\ \right\}.$$

В силу утверждения 4.3.15 $\mu(F_m) = 0$. Пусть

$$F_0 = E \Big\backslash \left\{\ x \in E \quad \middle| \quad \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)\ \right\}.$$

По условию $\mu(F_0) = 0$. Определим множество

$$E_0 = E \backslash \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} F_m \right).$$

Тогда

$$\mu(E \backslash E_0) = 0.$$

На множестве E_0 определим последовательность измеримых функций

$$g_m = f_m - f_1 \quad \text{и} \quad h = f - f_1.$$

По определению, на E_0 имеем

$$0 = g_1 \leqslant g_2 \leqslant g_3 \leqslant \dots\,,$$

причём

$$g_m(x) \to h(x) \qquad \forall\, x \in E_0.$$

Следовательно, по теореме 4.3.32 получаем

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_0} g_m\, d\mu = \int\limits_{E_0} h\, d\mu.$$

Так как по теореме 4.3.33 имеем

$$\int\limits_{E_0} g_m\, d\mu = \int\limits_{E_0} f_m\, d\mu - \int\limits_{E_0} f_1\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{E} f_m\, d\mu - \int\limits_{E} f_1\, d\mu \leqslant M - \int\limits_{E} f_1\, d\mu = M_0 \geqslant 0,$$

то получаем неравенство

$$\int\limits_{E_0} h\, d\mu \leqslant M_0 < +\infty.$$

Следовательно, справедливо вложение $h \in \mathcal{L}(E_0)$. Поэтому, по теореме 4.3.33, имеем на E_0 соотношение

$$f = h + f_1 \in \mathcal{L}(E_0),$$

а, в силу утверждения 4.3.14, получаем $f \in \mathcal{L}(E)$. Тогда

$$\int\limits_{E} f\, d\mu = \int\limits_{E_0} h\, d\mu + \int\limits_{E_0} f_1\, d\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\int\limits_{E_0} f_m\, d\mu - \int\limits_{E_0} f_1\, d\mu \right) + \int\limits_{E_0} f_1\, d\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_0} f_m\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E} f_m\, d\mu,$$

что и требовалось. ■

Теорема 4.3.35. (Фату) *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность измеримых функций $f_m\colon X \to [0,+\infty]$, измеримая функция $f\colon X \to [0,+\infty]$, причём*

$$f(x) = \varliminf_{m\to\infty} f_m(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu.$$

Доказательство. Определим для любого $m \in \mathbb{N}$ неотрицательную измеримую функцию

$$g_m(x) = \inf_{k\geqslant m} f_k(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \ldots \quad \text{и} \quad f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x).$$

Следовательно, по теореме 4.3.32, получаем

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E g_m\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Так как для любых $m \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ справедливо неравенство

$$g_m(x) \leqslant f_m(x),$$

то, в силу утверждения 4.3.17, для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$\int\limits_E g_m\,d\mu \leqslant \int\limits_E f_m\,d\mu.$$

Следовательно,

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E g_m\,d\mu = \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_E g_m\,d\mu \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu,$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.3.36. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность измеримых функций $f_m \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ такова, что*

$$f_m \in \mathcal{L}(E) \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N},$$

и для почти всех $x \in E$ существует

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Тогда, если существует положительное число M, такое, что для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\int\limits_E |f_m|\, d\mu \leqslant M,$$

то справедливы вложение $f \in \mathcal{L}(E)$ и неравенство

$$\int\limits_E |f|\, d\mu \leqslant M.$$

Доказательство. Определим измеримое множество

$$E_0 = \left\{ x \in E \quad \middle| \quad \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \right\}.$$

Тогда по условию $\mu(E \backslash E_0) = 0$ и

$$|f_m(x)| \to |f(x)| \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{для всех} \quad x \in E_0.$$

Следовательно, по теореме 4.3.35 Фату, получаем неравенства

$$\int\limits_{E_0} |f|\, d\mu \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_{E_0} |f_m|\, d\mu \leqslant M,$$

что означает $|f| \in \mathcal{L}(E_0)$. По утверждению 4.3.20 это равносильно вложению $f \in \mathcal{L}(E_0)$, а в силу утверждения 4.3.14 получаем вложение $f \in \mathcal{L}(E)$ и соотношение

$$\int\limits_E |f|\, d\mu = \int\limits_{E_0} |f|\, d\mu \leqslant M,$$

что и требовалось. ■

П р и м е р 4.3.37. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность $f_m \in \mathcal{L}(E)$ почти всюду на множестве E сходится к функции $f \in$ $\in \mathcal{L}(E)$. Пусть существует число $M > 0$, такое, что

$$\left| \int\limits_E f_m \, d\mu \right| \leqslant M \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

При этом может оказаться, что имеет место строгое неравенство

$$\left| \int\limits_E f \, d\mu \right| > M.$$

Рассмотрим на $E = [0,1]$ для любого $m \in \mathbb{N}$ простую функцию $f_m \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ вида

$$f_m(x) = \begin{cases} \quad 1, & x \in \left[\frac{1}{m}, 1\right], \\ 1 - m, & x \in \left[0, \frac{1}{m}\right). \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\int\limits_{[0,1]} f_m \, d\mu = \int\limits_{\left[\frac{1}{m},1\right]} d\mu - \int\limits_{\left[0,\frac{1}{m}\right)} (m-1) \, d\mu = 1 - \frac{1}{m} - (m-1)\frac{1}{m} = 0.$$

При $m \to \infty$ имеем

$$f_m(x) \to 1 = f(x) \qquad \forall\, x \in (0,1].$$

Ясно, что

$$\int\limits_{[0,1]} f \, d\mu = 1.$$

Следовательно, получаем

$$0 = \left| \int\limits_{[0,1]} f_m \, d\mu \right| < \frac{1}{2} = M < 1 = \left| \int\limits_{[0,1]} f \, d\mu \right|,$$

что и требовалось. ▲

Теорема 4.3.38. (Лебег, об ограниченной сходимости) *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, а последовательность измеримых функций*

$$f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

почти всюду на E сходится к функции f. Пусть существует измеримая функция $g\colon X \to [0, +\infty]$, такая, что $g \in \mathcal{L}(E)$, и для почти всех $x \in E$ и всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|f_m(x)| \leqslant g(x).$$

Тогда справедливы вложения $f_m \in \mathcal{L}(E)$ для всех m и $f \in \mathcal{L}(E)$, и существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu.$$

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$E_m = \left\{\ x \in E \ \middle|\ |f_m(x)| \leqslant g(x)\ \right\}.$$

По условию выполнено

$$\mu(E \backslash E_m) = 0.$$

В силу следствия 4.3.21 имеем $f_m \in \mathcal{L}(E_m)$, откуда, по утверждению 4.3.14, получаем $f_m \in \mathcal{L}(E)$. Определим множество

$$F = \left\{\ x \in E \ \middle|\ \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)\ \right\}.$$

По условию $\mu(E \backslash F) = 0$. Пусть множество

$$H = F \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \backslash E_m).$$

В силу неравенства

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \backslash E_m)\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \backslash E_m) = 0$$

получаем

$$\mu(F \backslash H) = 0.$$

Так как
$$E\backslash H \subset (E\backslash F) \cup (F\backslash H),$$
то
$$\mu(E\backslash H) = 0.$$
Для любого $x \in H$ имеем
$$|f_m(x)| \leqslant g(x) \quad \text{для всех} \quad m, \quad \text{и} \quad f_m(x) \to f(x) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$
Следовательно, справедливо неравенство
$$|f(x)| \leqslant g(x) \qquad \forall\, x \in H.$$
Тогда, по следствию 4.3.21, имеем $f \in \mathcal{L}(H)$, откуда по утверждению 4.3.14 получаем вложение $f \in \mathcal{L}(E)$. Определим множество
$$G = \left\{ \, x \in E \;\;\middle|\;\; g(x) = +\infty \, \right\}.$$
По утверждению 4.3.15 выполнено $\mu(G) = 0$. Определим множество
$$Z = H\backslash G.$$
Так как справедливо вложение
$$E\backslash Z \subset G \cup (E\backslash H),$$
то получаем
$$\mu(E\backslash Z) = 0.$$
На множестве Z все функции f_m, f и g конечны. Так как на Z имеем
$$g + f_m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad g + f_m \to g + f \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
то по теореме 4.3.35 Фату получаем неравенство
$$\int\limits_Z (g+f)\, d\mu \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z (g+f_m)\, d\mu = \int\limits_Z g\, d\mu + \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\, d\mu.$$
Следовательно, в силу теоремы 4.3.33 получаем неравенство
$$\int\limits_Z f\, d\mu \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\, d\mu.$$
Аналогично, так как на Z имеем
$$g - f_m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad g - f_m \to g - f \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то по теореме 4.3.35 Фату получаем неравенство

$$\int\limits_Z (g - f)\,d\mu \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z (g - f_m)\,d\mu = \int\limits_Z g\,d\mu - \varlimsup_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu.$$

Следовательно, в силу теоремы 4.3.33 получаем неравенство

$$\int\limits_Z f\,d\mu \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\int\limits_Z f\,d\mu \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu \geqslant \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu \geqslant \int\limits_Z f\,d\mu,$$

откуда следует существование предела

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu = \int\limits_Z f\,d\mu.$$

Так как $\mu(E\backslash Z) = 0$, то, в силу утверждения 4.3.14, получаем для любого m равенства

$$\int\limits_Z f_m\,d\mu = \int\limits_E f_m\,d\mu \quad \text{и} \quad \int\limits_Z f\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Следовательно, существует

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu,$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.3.39. (об “аквариуме”) *Пусть множество $E \in \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < +\infty$. Пусть последовательность измеримых функций*

$$f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

почти всюду на E сходится к функции f и почти всюду на E ограничена, т. е. существует число $M > 0$, такое, что для почти всех $x \in E$ и всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|f_m(x)| \leqslant M.$$

Тогда справедливы вложения

$$f_m \in \mathcal{L}(E) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad f \in \mathcal{L}(E),$$

и существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu.$$

Доказательство. Сразу следует из утверждения 4.3.16 и теоремы 4.3.38, если рассмотреть функцию $g(x) = M$, $x \in X$. ■

Пример 4.3.40. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, а последовательность

$$f_m \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируемых по Лебегу на E функций является сходящейся почти всюду на множестве E к функции $f \in \mathcal{L}(E)$. При этом может оказаться, что либо конечного предела

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\, d\mu$$

не существует, либо существует конечный предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\, d\mu \neq \int\limits_E f\, d\mu.$$

Например, рассмотрим на множестве $E = [0, 1]$ последовательность функций

$$f_m(x) = m^2 \delta_{[0,1/m]}(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $x \in (0, 1]$ выполнено соотношение

$$f_m(x) \to 0 = f(x) \quad \text{при} \quad m \to \infty, \quad \text{но} \quad \int\limits_{[0,1]} f_m\, d\mu = m \to +\infty.$$

А для последовательности функций

$$f_m(x) = m\delta_{[0,1/m]}(x), \quad m \in \mathbb{N},$$

также получаем

$$f_m(x) \to 0 = f(x) \quad \text{при} \quad m \to \infty \qquad \forall\, x \in (0, 1].$$

При этом для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{[0,1]} f_m \, d\mu = 1 \neq 0 = \int\limits_{[0,1]} f \, d\mu.$$

▲

Теорема 4.3.41. *Пусть $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное на кольце клеточных множеств. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является измеримым по Жордану, а функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ является интегрируемой по Риману на E. Тогда $f \in \in \mathcal{L}(E)$ и имеет место равенство интегралов Римана и Лебега функции f по множеству E, т. е.*

$$\int\limits_E f(x)\, dx = \int\limits_E f \, d\mu.$$

Доказательство. В силу замечания 4.1.42 всякое измеримое по Жордану множество из $\mathbb{R}^n$ является измеримым по Лебегу, а его меры Жордана и Лебега совпадают. Рассмотрим последовательность $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ вложенных измельчающихся разбиений множества E его измеримыми по Жордану подмножествами, т. е. для любого m имеем

$$T_m = \{E_{m,k}\}_{k=1}^{N_m},$$

где множество $E_{m,k}$ измеримо по Жордану для любого $k \in \overline{1 N_m}$ и справедливы соотношения:

$$E = \bigcup_{k=1}^{N_m} E_{m,k}, \quad E_{m,k} \cap E_{m,s} = \varnothing \quad \text{при} \quad k \neq s.$$

При этом $T_{m+1} \prec T_m$, т. е.

$$\forall\, k \in \overline{1, N_{m+1}} \quad \exists\, s \in \overline{1, N_m} \quad : \quad E_{m+1,k} \subset E_{m,s}.$$

Мелкость разбиения

$$|T_m| = \max_{1 \leqslant k \leqslant N_m} \operatorname{diam}(E_{m,k}) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1, N_m}$ определим числа

$$M_{m,k} = \sup_{x \in E_{m,k}} f(x) \quad \text{и} \quad L_{m,k} = \inf_{x \in E_{m,k}} f(x).$$

Рассмотрим измеримые функции

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{N_m} M_{m,k}\delta_{E_{m,k}}(x), \quad h_m(x) = \sum_{k=1}^{N_m} L_{m,k}\delta_{E_{m,k}}(x), \quad x \in E.$$

Тогда

$$\int\limits_E g_m\,d\mu = \sum_{k=1}^{N_m} M_{m,k}\mu_J(E_{m,k})$$

это верхняя сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению T_m,

$$\int\limits_E h_m\,d\mu = \sum_{k=1}^{N_m} L_{m,k}\mu_J(E_{m,k})$$

это нижняя сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению T_m. Следовательно, по определению интеграла Римана, имеем равенства

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_E g_m\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\int\limits_E h_m\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,dx.$$

С другой стороны, так как для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение вложенности $T_{m+1} \prec T_m$, то справедливы неравенства

$$g_{m+1}(x) \leqslant g_m(x) \quad \text{и} \quad h_{m+1}(x) \geqslant h_m(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

При этом, по определению функций g_m и h_m, для всех $x \in E$ также выполнены неравенства

$$g_m(x) \geqslant f(x) \geqslant h_m(x).$$

Это означает, что для любого $x \in E$ существуют пределы

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x) \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} h_m(x) = h(x),$$

удовлетворяющие неравенствам

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant h(x).$$

Тогда, по следствию 4.3.34, получаем, что функции $g, h \in \mathcal{L}(E)$, и выполнены равенства

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_E g_m\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu, \quad \lim_{m\to\infty}\int\limits_E h_m\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu.$$

Следовательно, имеем равенства

$$\int\limits_E g\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Тогда измеримая функция $(g-h)$ неотрицательна на E и

$$\int\limits_E (g-h)\,d\mu = 0.$$

Следовательно, по следствию 4.3.30 получаем

$$g(x) - h(x) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in E.$$

Но тогда $f(x) = g(x) = h(x)$ для почти всех $x \in E$. Следовательно, по замечанию 4.2.13 получаем, что функция f измерима на E и эквивалентна на E функциям g и h. Тогда по утверждению 4.3.14 получаем вложение $f \in \mathcal{L}(E)$ и равенство

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,dx,$$

что и требовалось. ■

П р и м е р 4.3.42. Примером функции, интегрируемой по Лебегу и не интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a,b]$, $a < b$, может служить функция Дирихле $\mathcal{D}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$\mathcal{D}(x) = \delta_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, а $\mathbb{I}$ — множество всех иррациональных чисел. Рассматриваем на вещественной оси семейство измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}(\mu)$, построенное с помощью кольца клеточных множеств из $\mathbb{R}$. Так как множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно, то оно представляет собой счётное объединение одноточечных множеств нулевой меры, и поэтому само имеет Лебегову меру нуль. Следовательно, функция Дирихле эквивалентна тождественно нулевой функции. Поэтому в силу утверждения 4.3.14 получаем следующее вложение $\mathcal{D} \in \mathcal{L}([a,b])$ и равенство

$$\int\limits_{[a,b]} \mathcal{D}\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} 0\,d\mu = 0.$$

Неинтегрируемость функции Дирихле по Риману на любом отрезке ненулевой длины известна из курса математического анализа (см., например, упражнение 7 из [4, гл. 6, с. 156]). ▲

Утверждение 4.3.43. *Пусть $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств на вещественной оси $\mathbb{R}$, построенное на кольце клеточных множеств. Пусть $a < b \leqslant +\infty$, функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ является интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a,c] \subset [a,b)$. Пусть несобственный интеграл Римана*

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)\,dx$$

сходится абсолютно, т. е. сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{c\to b-0} \int\limits_a^c |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Тогда $f \in \mathcal{L}\big([a,b)\big)$, причём справедливо равенство

$$I = \int\limits_{[a,b)} f\,d\mu.$$

Если же несобственный интеграл Римана I абсолютно расходится, т. е.

$$\lim_{c\to b-0} \int\limits_a^c |f(x)|\,dx = +\infty,$$

то выполняется $f \notin \mathcal{L}\big([a,b)\big)$.

Доказательство. По теореме 4.3.41 для любого числа c вида $a \leqslant c < b$ выполнено вложение $f \in \mathcal{L}\big([a,c]\big)$ и справедливы равенства

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_{[a,c]} f\,d\mu \quad \text{и} \quad \int\limits_a^c |f(x)|\,dx = \int\limits_{[a,c]} |f|\,d\mu.$$

Измеримость функции f на любом отрезке $[a,c] \subset [a,b)$ влечёт её измеримость на промежутке $[a,b)$. Действительно, пусть числовая последовательность $c_m \in [a,b)$ строго возрастает и сходится к b. Тогда справедливо равенство

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} [a, c_m] = [a, b).$$

Следовательно, для любого числа α получаем

$$L_<(f,\alpha) = \left\{ \, x \in [a,b) \quad \Big| \quad f(x) < \alpha \, \right\} =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \, x \in [a, c_m] \quad \Big| \quad f(x) < \alpha \, \right\} \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Тогда в силу счётной аддитивности интеграла Лебега (теорема 4.3.25) и утверждения 4.1.11 имеем равенства

$$\int\limits_{[a,b)} |f| \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} |f| \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_a^{c_m} |f(x)| \, dx = \int\limits_a^b |f(x)| \, dx.$$

Следовательно, если несобственный интеграл I сходится абсолютно, то получаем

$$\int\limits_{[a,b)} |f| \, d\mu = \int\limits_a^b |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Тогда справедливо вложение $|f| \in \mathcal{L}\big([a,b)\big)$, которое в силу утверждения 4.3.20 равносильно вложению $f \in \mathcal{L}\big([a,b)\big)$. При этом в силу теоремы 4.3.25 и утверждения 4.1.11 выполнены равенства

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_a^{c_m} f(x) \, dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} f \, d\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\int\limits_{[a,c_m]} f_+ \, d\mu - \int\limits_{[a,c_m]} f_- \, d\mu \right) =$$

$$= \left(\lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} f_+ \, d\mu \right) - \left(\lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} f_- \, d\mu \right) =$$

$$= \int\limits_{[a,b)} f_+ \, d\mu - \int\limits_{[a,b)} f_- \, d\mu = \int\limits_{[a,b)} f \, d\mu.$$

Если же несобственный интеграл I абсолютно расходится, то получаем

$$\int\limits_{[a,b)} |f| \, d\mu = \int\limits_a^b |f(x)| \, dx = +\infty.$$

Тогда справедливо соотношение $|f| \notin \mathcal{L}\big([a,b)\big)$, которое в силу утверждения 4.3.20 равносильно соотношению $f \notin \mathcal{L}\big([a,b)\big)$. ■

Определение 4.3.44. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$. Будем говорить, что последовательность измеримых функций $f_m \colon E \to \mathbb{R}$ сходится на E к измеримой функции $g \colon E \to \mathbb{R}$*

1) *почти всюду, если существует измеримое множество $E_0 \subset E$ меры нуль (т. е. $\mu(E_0) = 0$), такое, что выполнено*

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in E \backslash E_0;$$

2) *по мере, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено*

$$\lim_{m \to \infty} \mu \left\{ \ x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon \ \right\} = 0;$$

3) *в среднем, если*

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_E |f_m - g| \, d\mu = 0.$$

Сравнение этих трёх видов сходимости последовательности измеримых функций на измеримом множестве даёт следующее

Утверждение 4.3.45. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность функций $f_m \colon E \to \mathbb{R}$ и функция $g \colon E \to \mathbb{R}$ измеримы. Тогда*

1) *если $\mu(E) < +\infty$ и f_m сходится к g почти всюду, то f_m сходится к g по мере;*

2) *если f_m сходится к g в среднем, то f_m сходится к g по мере;*

3) если f_m сходится к g по мере, то существует подпоследовательность f_{m_k}, сходящаяся к g почти всюду.

Доказательство. 1) Пусть f_m сходится к g почти всюду. Тогда множество

$$E_0 = \left\{ \, x \in E \quad \middle| \quad f_m(x) \text{ не сходится к } g(x) \, \right\}$$

имеет меру нуль. Имеем

$$x \in E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \geqslant \ell \ : \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{m=\ell}^{\infty} \left\{ \, x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{k} \, \right\}.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$E_k = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{m=\ell}^{\infty} \left\{ \, x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{k} \, \right\}.$$

Тогда

$$E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \Rightarrow \quad \mu(E_k) \leqslant \mu(E_0) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\ell \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$S_{k,\ell} = \bigcup_{m=\ell}^{\infty} \left\{ \, x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{k} \, \right\}.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$E_k = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} S_{k,\ell} \quad \text{и} \quad S_{k,\ell} \supset S_{k,\ell+1} \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

Так как $\mu(S_{k,1}) \leqslant \mu(E) < +\infty$, то, в силу утверждения 4.1.13, получаем

$$\lim_{\ell \to \infty} \mu(S_{k,\ell}) = \mu(E_k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Теперь для любого $\varepsilon > 0$ выберем $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем вложения

$$\left\{\ x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\ \right\} \subset \\ \subset \left\{\ x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{k_\varepsilon}\ \right\} \subset S_{k_\varepsilon, m}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \mu \left\{\ x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\ \right\} \leqslant \lim_{m\to\infty} \mu(S_{k_\varepsilon, m}) = 0,$$

то есть f_m сходится к g по мере.

2) Пусть последовательность f_m сходится к g в среднем. Тогда, для любого $\varepsilon > 0$, применяя неравенство Чебышева (утверждение 4.3.29), получаем:

$$\mu \left\{\ x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\ \right\} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_E |f_m - g|\, d\mu \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то есть f_m сходится к g по мере.

3) Пусть f_m сходится к g по мере. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\ell(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $m \geqslant \ell(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\mu \left\{\ x \in E \quad \middle| \quad |f_m(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\ \right\} \leqslant \varepsilon.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_k = 2^{-k}$. Определим последовательность $m_k \in \mathbb{N}$ по формуле

$$m_1 = \ell(\varepsilon_1), \qquad m_{k+1} = \max\left\{\ \ell(\varepsilon_{k+1}),\, m_k + 1\ \right\} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $m_1 < m_2 < \ldots$, и выполнено

$$\mu \left\{\ x \in E \quad \middle| \quad |f_{m_k}(x) - g(x)| \geqslant 2^{-k}\ \right\} \leqslant 2^{-k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$A_k = \left\{\ x \in E \quad \middle| \quad |f_{m_k}(x) - g(x)| \geqslant 2^{-k}\ \right\},$$

так что $\mu(A_k) \leqslant 2^{-k}$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant 1.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{A_k}(x), \qquad x \in X.$$

Тогда $h\colon X \to [0, +\infty]$ является измеримой в силу следствия 4.2.7. По теореме 4.3.32 о монотонной сходимости Б. Леви, получаем:

$$\int_E h\,d\mu = \int_E \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \delta_{A_k}\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{m} \delta_{A_k}\,d\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_E \delta_{A_k}\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant 1.$$

Следовательно, в силу утверждения 4.3.15, функция $h(x)$ почти всюду конечна на E. Заметим, что конечность значения $h(x)$ для некоторого $x \in E$ означает, что этот x может содержаться лишь в конечном наборе множеств A_k. Следовательно, почти всюду конечность h на E означает, что существует измеримое множество $E_0 \subset E$ меры нуль, такое, что для каждого $x \in E \backslash E_0$ существует номер $N(x)$, такой, что

$$x \notin A_k \qquad \forall\, k > N(x).$$

Тогда

$$\forall\, x \in E \backslash E_0 \quad \exists\, N(x) \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > N(x) \quad |f_{m_k}(x) - g(x)| < 2^{-k},$$

то есть подпоследовательность f_{m_k} сходится к g почти всюду на множестве E. ■

З а м е ч а н и е 4.3.46. Сходимость почти всюду последовательности измеримых функций на множестве бесконечной меры вообще говоря не влечёт сходимость по мере. Действительно, на вещественной оси $\mathbb{R}$ рассмотрим σ-кольцо $\mathfrak{M}(\mu)$ измеримых по Лебегу множеств, построенное на кольце клеточных множеств. Рассмотрим множества

$$A_m = \{\, x \in \mathbb{R} \quad | \quad x > m \,\}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

и последовательность функций-индикаторов $f_m(x) = \delta_{A_m}(x)$. Очевидно, что для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$f_m(x) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то есть последовательность f_m сходится всюду на $\mathbb{R}$ к нулевой функции. Однако при любом $\varepsilon \in (0,1)$ имеем

$$\mu\left\{\, x \in \mathbb{R} \quad \Big| \quad f_m(x) \geqslant \varepsilon \,\right\} = \mu(A_m) = +\infty \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

то есть f_m не сходится к нулевой функции по мере. $\square$

Замечание 4.3.47. Сходимость по мере последовательности измеримых функций вообще говоря не влечёт сходимость в среднем и почти всюду. Действительно, на вещественной оси $\mathbb{R}$ рассмотрим σ-кольцо $\mathfrak{M}(\mu)$ измеримых по Лебегу множеств, построенное на кольце клеточных множеств. На отрезке $[0,1]$ для любого $N \in \mathbb{N}$ определим равномерное разбиение P_N точками

$$x_N(k) = \frac{k}{2^N}, \qquad k = \overline{0, 2^N}.$$

Обозначим интервал разбиения P_N как

$$A_{N,k} = \big(x_N(k-1), x_N(k)\big)\,, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2^N.$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1, 2^N}$ рассмотрим функцию

$$h_{N,k}(x) = 2^N \delta_{A_{N,k}}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Так как $\mu(A_{N,k}) = 2^{-N}$, то

$$\int\limits_{[0,1]} h_{N,k}\, d\mu = 1 \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, k \in \overline{1, 2^N}.$$

Определим последовательность функций $f_m\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ по формуле

$$f_m = h_{N,k} \quad \text{при} \quad m = 2^N + k - 2, \quad N \in \mathbb{N}, \quad k \in \overline{1, 2^N}.$$

Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ при $m = 2^N + k - 2$ и $k \in \overline{1, 2^N}$ выполнено

$$\left\{\, x \in [0,1] \quad \Big| \quad f_m(x) \geqslant \varepsilon \,\right\} \subset A_{N,k},$$

откуда следует неравенство

$$\mu\left\{\, x \in [0,1] \quad \Big| \quad f_m(x) \geqslant \varepsilon \,\right\} \leqslant 2^{-N}$$

Так как равенство $m = 2^N + k - 2$ для $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1, 2^N}$ влечёт неравенства

$$2^N \leqslant m + 1 < 2^{N+1},$$

то соотношение $m \to \infty$ равносильно $N \to \infty$. Следовательно,

$$\mu \left\{ x \in [0,1] \quad \middle| \quad f_m(x) \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant 2^{-N} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то есть, последовательность неотрицательных функций f_m сходится по мере к нулевой функции. Однако

$$\int\limits_{[0,1]} f_m \, d\mu = 1 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

то есть последовательность f_m не сходится к нулевой функции в среднем.

Теперь для любого $x \in (0,1)$ и для любого $M \in \mathbb{N}$ выберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^N > M$, и выберем $k \in \overline{1, 2^N}$, чтобы $x \in A_{N,k}$. Тогда

$$f_m(x) = 2^N > 1 \quad \text{для} \quad m = 2^N + k - 2 \geqslant M.$$

Следовательно, для любого $x \in (0,1)$ получаем $f_m(x) \not\to 0$ при $m \to \to \infty$, то есть последовательность f_m не сходится к нулевой функции почти всюду на $[0,1]$. $\square$

О п р е д е л е н и е 4.3.48. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$. Обозначим через $M(E)$ множество всех измеримых функций $f\colon E \to \mathbb{R}$. Две функции $f, g \in M(E)$ будем считать равными, если $f(x) = g(x)$ для почти всех $x \in E$.*

У т в е р ж д е н и е 4.3.49. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$ имеет конечную меру, то есть $\mu(E) < +\infty$. Тогда на множестве $M(E)$ существует метрика ρ, сходимость по которой последовательности в $M(E)$ равносильна сходимости по мере.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функцию $d\colon M(E) \to [0, +\infty)$ по формуле

$$d(f) = \int\limits_E \frac{|f|}{1 + |f|} \, d\mu, \qquad f \in M(E).$$

Очевидно, что $0 \leqslant d(f) \leqslant \mu(E) < +\infty$ для всех $f \in M(E)$. Равенство $d(f) = 0$ в силу следствия 4.3.30 равносильно

$$\frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in E,$$

то есть $f = 0$ почти всюду на E. Так как функция $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ неубывает при $t \geqslant 0$, то для любых $f, g \in M(E)$ и любого $x \in E$ имеем

$$\frac{|f(x)+g(x)|}{1+|f(x)+g(x)|} \leqslant \frac{|f(x)|+|g(x)|}{1+|f(x)|+|g(x)|} \leqslant \frac{|f(x)}{1+|f(x)|} + \frac{|g(x)|}{1+|g(x)|}.$$

Тогда получаем

$$d(f+g) \leqslant d(f) + d(g) \qquad \forall\, f, g \in M(E).$$

Определим метрику ρ на $M(E)$ по формуле

$$\rho(f, g) = d(f-g), \qquad f, g \in M(E).$$

Видим, что $\rho(f, g) = 0$ равносильно $f - g = 0$ почти всюду на E, то есть $f = g$ в $M(E)$. Также очевидно равенство

$$\rho(f, g) = d(f-g) = d(g-f) = \rho(g, f) \qquad \forall\, f, g \in M(E).$$

Наконец, для произвольных $f, g, h \in M(E)$ выполнено

$$\rho(f, g) = d\big((f-h)+(h-g)\big) \leqslant d(f-h) + d(h-g) = \rho(f, h) + \rho(g, h),$$

то есть получаем для ρ неравенство треугольника. Таким образом, ρ действительно является метрикой на множестве $M(E)$.

Покажем, что сходимость последовательности в $M(E)$ по метрике ρ равносильна сходимости по мере. Пусть некоторая последовательность $f_n \in M(E)$ сходится к $f \in M(E)$ по метрике ρ, то есть

$$\rho(f_n, f) = d(f_n - f) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$A_n(\varepsilon) = \left\{\, x \in E \;:\; |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon \,\right\}.$$

Так как для числа $t \geqslant 0$ следующие неравенства эквивалентны

$$t \geqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{1+t} \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

то получаем равенство

$$A_n(\varepsilon) = \left\{\, x \in E \;:\; \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1+|f_n(x) - f(x)|} \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \,\right\}.$$

Следовательно, в силу неравенства Чебышева (утверждение 4.3.29), получаем

$$\mu\big(A_n(\varepsilon)\big) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\, d(f_n - f) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то есть последовательность f_n сходится к функции f по мере.

Пусть теперь последовательность f_n сходится к f по мере, то есть для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\mu\big(A_n(\varepsilon)\big) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполнено

$$\mu\big(A_n(\varepsilon)\big) \leqslant \varepsilon.$$

При любом $n \geqslant N(\varepsilon)$ имеем

$$d(f_n - f) = \int\limits_{A_n(\varepsilon)} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu + \int\limits_{E \setminus A_n(\varepsilon)} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu.$$

Так как

$$\int\limits_{A_n(\varepsilon)} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \quad \leqslant \quad \int\limits_{A_n(\varepsilon)} d\mu = \mu\big(A_n(\varepsilon)\big) \leqslant \varepsilon,$$

$$\int\limits_{E \setminus A_n(\varepsilon)} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \quad \leqslant \quad \int\limits_{E \setminus A_n(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(E),$$

то получаем

$$d(f_n - f) \leqslant \varepsilon\big(1 + \mu(E)\big) \qquad \forall\, n \geqslant N(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\rho(f_n, f) \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, n \geqslant N\left(\tfrac{\varepsilon}{1+\mu(E)}\right).$$

Таким образом, последовательность f_n сходится к f по метрике ρ. ■

Замечание 4.3.50. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ всех подмножеств $M(E)$, замкнутых относительно сходимости почти всюду на E. То есть множество $S \subset M(E)$ принадлежит семейству $\mathcal{F}$ если и только если для любой последовательнсти $f_n \in S$, сходящейся почти всюду на E к функции $f \in M(E)$, выполнено вложение $f \in \mathcal{F}$. Рассмотрим теперь дополнения в $M(E)$ всевозможных множеств из $\mathcal{F}$, определив тем самым семейство

$$\tau_{\text{п.в.}} = \left\{ \, M(E) \backslash S \;\;\middle|\;\; S \in \mathcal{F} \, \right\}.$$

Определённое таким образом семейство τ образует в $M(E)$ топологию. Действительно, вложения $\varnothing \in \tau$ и $M(E) \in \tau_{\text{п.в.}}$ очевидны. Для любого подсемейства $P \subset \tau$ рассмотрим объединение всех множеств из P — множество

$$V = \bigcup_{U \in P} U.$$

Покажем, что $V \in \tau_{\text{п.в.}}$, что равносильно вложению в семейство $\mathcal{F}$ его дополнения — множества

$$S = M(E) \backslash V = \bigcap_{U \in P} M(E) \backslash U.$$

Пусть последовательность $f_n \in S$ сходится почти всюду на E к функции $f \in M(E)$. Тогда для любого $U \in P$ имеем

$$f_n \in M(E) \backslash U \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad f \in M(E) \backslash U,$$

то есть $f \in S$. Следовательно, $S \in \mathcal{F}$, что и требовалось.

Далее, для любого конечного набора множеств $U_1, \ldots, U_N$ из $\tau_{\text{п.в.}}$ покажем, что их пересечение

$$W = \bigcap_{k=1}^{N} U_k \in \tau_{\text{п.в.}}.$$

Это равносильно вложению в семейство $\mathcal{F}$ его дополнения — множества

$$S = M(E) \backslash W = \bigcup_{k=1}^{N} M(E) \backslash U_k.$$

Пусть последовательность $f_n \in S$ сходится почти всюду на E к функции $f \in M(E)$. Тогда существует номер $k \in \overline{1, N}$, такой, что в множестве $M(E) \backslash U_k$ содержится бесконечное количество элементов последовательности f_n. Следовательно, существует подпоследовательность $f_{n_s} \in U_k$ при всех $s \in \mathbb{N}$. Так как подпоследовательность f_{n_s} также сходится почти всюду на E к той же функции f, то для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$f_{n_s} \in M(E) \backslash U_k \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad f \in M(E) \backslash U_k,$$

то есть $f \in S$. Следовательно, $S \in \mathcal{F}$, что и требовалось.

Итак, $\tau_{\text{п.в.}}$ — топология в $M(E)$, порождённая определением сходимости почти всюду на E. Нетрудно увидеть, что сходимость последовательности $f_n \in M(E)$ почти всюду на E к функции $f \in M(E)$ влечёт сходимость f_n к f по топологии $\tau_{\text{п.в.}}$, то есть

$$f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f \quad \Rightarrow \quad f_n \overset{\tau}{\to} f.$$

Действительно, если бы это было не так, то нашлась бы окрестность $U(f) \in \tau$ функции f, такая, что бесконечное количество элементов последовательности f_n не принадлежит $U(f)$. Это означает, что найдётся подпоследовательность

$$f_{n_s} \in M(E) \backslash U(f) \in \mathcal{F}.$$

Так как подпоследовательность f_{n_s} также почти всюду на E сходится к f, то получаем вложение $f \in M(E) \backslash U(f)$, которое очевидно противоречит вложению $f \in U(f)$.

Пусть теперь $\mu(E) < +\infty$. В этом случае, как показано в утверждении 4.3.49, на множестве $M(E)$ определена метрика ρ, сходимость по которой последовательности из $M(E)$ равносильна сходимости по мере. Покажем, что имеет место равенство

$$\tau_{\text{п.в.}} = \tau_\rho.$$

Рассмотрим произвольное множество $U \in \tau_{\text{п.в.}}$. Тогда его дополнение $S = M(E) \backslash U \in \mathcal{F}$. Покажем, что множество S является ρ–замкнутым. Рассмотрим произвольную $f \in [S]_\rho$. Тогда существует последовательность $f_n \in S$, такая, что

$$\rho(f_n, f) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В силу утверждения 4.3.49, это равносильно сходимости f_n к f по мере. По пункту 3 утверждения 4.3.45, существует подпоследовательность f_{n_s}, сходящаяся к f почти всюду на E. Так как $f_{n_s} \in S \in \mathcal{F}$, то отсюда получаем вложение $f \in S$. Следоательно, S является ρ–замкнутым, что означает вложение

$$U = M(E) \backslash S \in \tau_\rho.$$

Таким образом доказано вложение $\tau_{\text{п.в.}} \subset \tau_\rho$.

Теперь рассмотрим произвольное множество $V \in \tau_\rho$. Тогда его дополнение $S = M(E) \backslash V$ является ρ–замкнутым. Покажем, что выполнено вложение $S \in \mathcal{F}$. Для этого рассмотрим последовательность

$f_n \in S$, сходящуюся почти всюду на E к функции $f \in M(E)$. По пункту 1 утверждения 4.3.45, последовательность f_n сходится к f и по мере, что равносильно сходимости последовательности f_n к f по метрике ρ в силу утверждения 4.3.49. Но тогда $f \in S$ в силу ρ–замкнутости S. Следовательно, $S \in \mathfrak{F}$, что означает вложение

$$U = M(E) \backslash S \in \tau_{\text{п.в.}}.$$

Таким образом доказано обратное вложение $\tau_\rho \subset \tau_{\text{п.в.}}$. $\square$

Замечание 4.3.51. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, и существует последовательность $f_n \in M(E)$, сходящаяся к некоторой функции $f \in M(E)$ по мере и не сходящаяся к ней почти всюду на E (см. пример 4.3.47). Тогда в $M(E)$ не существует топологии τ, сходимость по которой последовательности из $M(E)$ была бы равносильна сходимости почти всюду. Действительно, предположив противное, рассмотрим топологию τ в $M(E)$, такую, что для последовательности $h_n \in M(E)$ и функции $h \in M(E)$ выполнено

$$h_n \stackrel{\tau}{\to} h \quad \Leftrightarrow \quad h_n \stackrel{\text{п.в.}}{\to} h \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда, так как последовательность f_n не сходится к f почти всюду, то она не сходится к f и по топологии τ. Следовательно, существует окрестность $U(f) \in \tau$ функции f, такая, что бесконечно много элементов последовательности f_n не принадлежит $U(f)$. То есть можно выбрать подпоследовательность

$$f_{n_s} \notin U(f) \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность f_n сходится к f по мере, то её подпоследовательность f_{n_s} также является сходящейся по мере к f. Тогда, в силу пункта 3 утверждения 4.3.45, существует подпоследовательность $f_{n_{s_\ell}}$, сходящаяся к f почти всюду. Следовательно,

$$\exists\, L \in \mathbb{N} \quad \forall\, \ell > L \quad \hookrightarrow \quad f_{n_{s_\ell}} \in U(f).$$

Но, по построению подпоследовательности f_{n_s}, выполнено противоположное соотношение

$$f_{n_{s_\ell}} \notin U(f) \qquad \forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

Получили противоречие. $\square$

4.4. Пространство $\mathbb{L}_p$

Далее в этом параграфе рассматриваем измеримое пространство $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и множество $E \in \mathfrak{M}$.

Определение 4.4.1. *Для любого числа $p \geqslant 1$ множеством $\mathbb{L}_p(E)$ назовём совокупность классов эквивалентных на множестве E измеримых функций $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, таких, что*

$$|f|^p \in \mathcal{L}(E).$$

Замечание 4.4.2. Договоримся, что вложение $f \in \mathbb{L}_p(E)$ означает, что выбрана произвольная измеримая на E функция f вида $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$ из некоторого класса эквивалентных на множестве E измеримых функций, входящего во множество $\mathbb{L}_p(E)$. Функции, находящиеся в одном классе эквивалентности из $\mathbb{L}_p(E)$, будем называть равными.

Пусть функция g определена на измеримом множестве $G \subset E$ вида $\mu(E \backslash G) = 0$ (т. е. почти всюду на E), измерима и $|g|^p \in \mathcal{L}(G)$. Будем считать её элементом $\mathbb{L}_p(E)$ в следующем смысле: доопределим функцию g произвольным образом на множестве $E \backslash G$ нулевой меры. Получим в силу утверждения 4.2.13 измеримую на E функцию, принадлежащую в силу утверждения 4.3.23 и утверждения 4.3.27 множеству $\mathbb{L}_p(E)$. При этом при различных способах доопределения g на $E \backslash G$ получаются эквивалентные на E функции, т. е. это элементы одного класса эквивалентности из $\mathbb{L}_p(E)$. $\square$

Утверждение 4.4.3. *Множество $\mathbb{L}_p(E)$ является линейным пространством.*

Доказательство. Нулём в $\mathbb{L}_p(E)$ будем считать класс измеримых функций, эквивалентных на E нулевой функции. Для любой функции $f \in \mathbb{L}_p(E)$ и числа $\alpha \neq 0$ в силу утверждения 4.3.22 получаем

$$|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p \in \mathcal{L}(E),$$

т. е. $\alpha f \in \mathbb{L}_p(E)$. Вложение $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$ в силу утверждения 4.3.15 означает, что функция f почти всюду конечна на E. Следовательно, для почти всех $x \in E$ определено произведение $0f(x) = 0$. Таким образом, определённая почти всюду на E функция $0f$ эквивалентна на E нулевой функции, т. е. функция $0f$ равна нулю в $\mathbb{L}_p(E)$.

Пусть $f_1 \in \mathbb{L}_p(E)$ и $f_2 \in \mathbb{L}_p(E)$. Тогда существует множество $E_0 \subset E$, такое, что
$$\mu(E \backslash E_0) = 0,$$
а функции f_1 и f_2 конечны на E_0. Тогда на множестве E_0, т. е. почти всюду на E, определена измеримая функция $f = f_1 + f_2$. Покажем, что справедливо вложение

$$|f|^p \in \mathcal{L}(E),$$

которое в силу утверждения 4.3.14 равносильно вложению

$$|f|^p \in \mathcal{L}(E_0).$$

Так как выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \qquad \forall\, x \in E_0,$$

то, в силу утверждения 4.3.17, достаточно показать вложение

$$\big(|f_1| + |f_2|\big)^p \in \mathcal{L}(E_0).$$

Для всех $x \in E_0$ имеем:

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant 2 \max \left\{ \, |f_1(x)|, \, |f_2(x)| \, \right\}.$$

Следовательно,

$$\big(|f_1(x)| + |f_2(x)|\big)^p \leqslant 2^p \max \left\{ \, |f_1(x)|^p, \, |f_2(x)|^p \, \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left(|f_1(x)|^p + |f_2(x)|^p\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\int\limits_{E_0} \big(|f_1| + |f_2|\big)^p \, d\mu \leqslant 2^p \int\limits_{E_0} \left(|f_1|^p + |f_2|^p\right) \, d\mu =$$

$$= 2^p \left(\int\limits_{E} |f_1|^p \, d\mu + \int\limits_{E} |f_2|^p \, d\mu \right) < +\infty,$$

что и требовалось. ■

О п р е д е л е н и е 4.4.4. *Для любой функции $f \in \mathbb{L}_p(E)$ нормой f назовём число*

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_E |f|^p \, d\mu}.$$

У т в е р ж д е н и е 4.4.5. (неравенство Гёльдера) *Пусть число $p > 1$, а число $q = \frac{p}{p-1}$, то есть*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Пусть функция $f \in \mathbb{L}_p(E)$, а функция $g \in \mathbb{L}_q(E)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем следующее вспомогательное неравенство: для любых чисел $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ выполнено

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (*).$$

Если одно из чисел a или b нулевое, то неравенство очевидно. Пусть $a > 0$ и $b > 0$. В силу вогнутости функции $\ln(t)$ на луче $t > 0$, имеем неравенство

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} = \ln a + \ln b = \ln(ab).$$

Так как функция $\ln(t)$ строго возрастает при $t > 0$, то отсюда сразу получаем неравенство $(*)$.

Вернёмся к доказательству неравенства Гёльдера. Если $\|f\|_p = 0$ или $\|g\|_q = 0$, то функция fg равна нулю почти всюду на E. Тогда $\|fg\|_1 = 0$, и неравенство выполнено. Пусть $\|f\|_p > 0$ и $\|g\|_q > 0$ Определим неотрицательные функции

$$\phi = \frac{|f|}{\|f\|_p}, \qquad \psi = \frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

Тогда $\|\phi\|_p = 1$ и $\|\psi\|_q = 1$, а доказываемое неравенство равносильно

$$\int\limits_E \phi\,\psi\,d\mu \leqslant 1.$$

Так как функции ϕ^p и ψ^q интегрируемы по Лебегу на множестве E, то, в силу утверждения 4.3.15, они почти всюду конечны на E. Следовательно, для почти всех $x \in E$, значения $\phi(x)$ и $\psi(x)$ являются неотрицательными числами. Применяя неравенство $(*)$, для почти всех $x \in E$ получаем неравенство

$$\phi(x)\psi(x) \leqslant \frac{\phi^p(x)}{p} + \frac{\psi^q(x)}{q},$$

интегрируя которое по множеству E, получаем

$$\int\limits_E \phi\,\psi\,d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_E \phi^p\,d\mu + \frac{1}{q}\int\limits_E \psi^q\,d\mu = \frac{\|\phi\|_p^p}{p} + \frac{\|\psi\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что и требовалось. ∎

Утверждение 4.4.6. (неравенство Юнга) *Пусть функция $f\colon E \times E \to [0,+\infty]$ измерима, а функция $g\colon E \to [0,+\infty]$ имеет вид*

$$g(x) = \int\limits_E f(x,y)\,d\mu(y), \qquad x \in E.$$

Пусть $g \in \mathbb{L}_p(E)$, то есть

$$\int\limits_X g^p(x)\,d\mu(x) < +\infty.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|g\|_p \leqslant \int\limits_E \|f(\cdot,y)\|_p\,d\mu(y).$$

Доказательство. Если $\|g\|_p = 0$, то неравенство очевидно. Поэтому далее считаем, что

$$\|g\|_p > 0.$$

Если $p = 1$, то доказываемое неравенство является равенством:

$$\|g\|_1 = \int\limits_E \left(\int\limits_E f(x,y)\,d\mu(y)\right) d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_E \left(\int\limits_E f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\mu(y) = \int\limits_E \|f(\cdot,y)\|_1\,d\mu(y).$$

Поэтому далее считаем $p > 1$. Определим число $q > 1$ по формуле

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad \text{то есть} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Определим функцию $h\colon E \to [0, +\infty]$ по формуле

$$h(x) = g^{p-1}(x), \qquad x \in E.$$

Тогда

$$h^q(x) = g^p(x) = g(x)h(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

В частности,

$$\|h\|_q = \|g\|_p^{p/q} = \|g\|_p^{p-1} < +\infty,$$

то есть $h \in \mathbb{L}_q(E)$. Для любого $y \in E$ имеем

$$\int\limits_E f(x, y)h(x)\, d\mu(x) = \|f(\cdot, y)h(\cdot)\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot, y)\|_p \, \|h\|_q = \|f(\cdot, y)\|_p \, \|g\|_p^{p-1}.$$

Действительно, если

$$\|f(\cdot, y)\|_p < +\infty,$$

то это неравенство сразу следует из неравенства Гёльдера (утверждение 4.4.5). Если же имеет место

$$\|f(\cdot, y)\|_p = +\infty,$$

то в силу $\|g\|_p > 0$ это неравенство очевидно. Тогда, получаем:

$$\|g\|_p^p = \int\limits_E g^p(x)\, d\mu(x) = \int\limits_E g(x)h(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_E \left(\int\limits_E f(x, y)h(x)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \overset{\text{теорема Фубини}}{=}$$

$$= \int\limits_E \left(\int\limits_E f(x, y)h(x)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E \|f(\cdot, y)\|_p \, \|h\|_q \, d\mu(y) = \int\limits_E \|f(\cdot, y)\|_p \, \|g\|_p^{p-1}\, d\mu(y),$$

откуда делением на $\|g\|_p^{p-1}$ и следует доказываемое неравенство. ■

Утверждение 4.4.7. (неравенство Минковского) *Для любого числа $p \geqslant 1$ и любых функций $f \in \mathbb{L}_p(E)$ и $g \in \mathbb{L}_p(E)$ справедливо неравенство*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказательство. Так как функции f и g почти всюду конечны на E, то

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \quad \text{для п. в. } x \in E.$$

Следовательно, при $p = 1$ сразу получаем неравенство:

$$\|f+g\|_1 = \int\limits_E |f+g|\, d\mu \leqslant \int\limits_E \big(|f| + |g|\big)\, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Пусть теперь $p > 1$, и число $q = \frac{p}{p-1}$. Заметим, что

$$\int\limits_E |f+g|^{(p-1)q}\, d\mu = \int\limits_E |f+g|^p\, d\mu < +\infty,$$

так как $f+g \in \mathbb{L}_p(E)$ в силу утверждения 4.4.3. Поэтому справедливо вложение

$$|f+g|^{p-1} \in \mathbb{L}_q(E).$$

Тогда, применяя неравенство Гёльдера (утверждение 4.4.5), получаем

$$\|f+g\|_p^p = \int\limits_E |f+g|^p\, d\mu = \int\limits_E |f+g|^{p-1}\, |f+g|\, d\mu =$$

$$= \int\limits_E |f+g|^{p-1}\, |f|\, d\mu + \int\limits_E |f+g|^{p-1}\, |g|\, d\mu \overset{\substack{\text{неравенство} \\ \text{Гёльдера}}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q \|f\|_p + \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q \|g\|_p =$$

$$= \|f+g\|_p^{p/q} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) = \|f+g\|_p^{p-1} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big).$$

Следовательно,

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.4.8. *Норма $\|\cdot\|_p$ в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$ удовлетворяет аксиомам нормы из определения 3.1.1 нормированного пространства.*

Доказательство. Ясно, что для любого $f \in \mathbb{L}_p(E)$ и числа α выполнены соотношения $\|f\|_p \geqslant 0$ и $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$. Неравенство треугольника (это неравенство Минковского)

$$\|f_1 + f_2\|_p \leqslant \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

для любых $f_1, f_2 \in \mathbb{L}_p(E)$ доказано в утверждении 4.4.7. Наконец, если для $f \in \mathbb{L}_p(E)$ выполнено

$$\|f\|_p = 0,$$

то, в силу утверждения 4.3.30, получаем

$$|f|^p = 0 \quad \text{почти всюду на } E.$$

Следовательно, $f = 0$ почти всюду на E, т. е. f является нулём в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$. ■

Теорема 4.4.9. *Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_p(E)$ является полным.*

Рассмотрим два способа доказательства этой теоремы. Первый способ «в лоб» для любой фундаментальной последовательности пространства $\mathbb{L}_p(E)$ предъявляет её предел в $\mathbb{L}_p(E)$. Второй способ использует критерий полноты линейного нормированного пространства — утверждение 3.1.27 о сходимости в нормированном пространстве любого абсолютно сходящегося ряда.

Доказательство. *Первый способ.* Рассмотрим произвольную фундаментальную в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$ последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим множество

$$E_m = \left\{\, x \in E \;\middle|\; |f_m(x)| = +\infty \,\right\}.$$

Тогда, в силу утверждения 4.3.15, имеем равенство $\mu(E_m) = 0$. Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) = 0.$$

Определим измеримое множество

$$E_0 = E \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Тогда $\mu(E \backslash E_0) = 0$. При этом для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|f_m(x)| < +\infty \qquad \forall\, x \in E_0.$$

По определению фундаментальности последовательности f_m в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$, имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \geqslant N(\varepsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_E |f_n - f_m|^p \, d\mu = \int\limits_{E_0} |f_n - f_m|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

В силу неравенства Чебышева (это утверждение 4.3.29), для всех $n, m \geqslant N(\varepsilon^{p+1})$ получаем

$$\mu \left\{ \, x \in E_0 \;\middle|\; |f_n(x) - f_{n+m}(x)| > \varepsilon \, \right\} =$$

$$= \mu \left\{ \, x \in E_0 \;\middle|\; |f_n(x) - f_{n+m}(x)|^p > \varepsilon^p \, \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{E_0} |f_n - f_m|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_k = 2^{-k}$. Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел следующего вида:

$$n_1 = N\left((\varepsilon_1)^{p+1}\right), \quad n_{k+1} = \max\left\{ \, N\left((\varepsilon_{k+1})^{p+1}\right), n_k + 1 \, \right\}.$$

Получаем подпоследовательность f_{n_k} последовательности f_m, для которой выполнено

$$\mu \left\{ \, x \in E_0 \;\middle|\; |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \varepsilon_k \, \right\} \leqslant \varepsilon_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$F_k = \left\{ \, x \in E_0 \;\middle|\; |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \varepsilon_k \, \right\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\mu F_k \leqslant \varepsilon_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Определим измеримую функцию $\psi\colon E_0 \to [0,+\infty]$ по формуле

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{F_k}(x), \qquad x \in E_0.$$

Тогда по теореме 4.3.32 Б. Леви о монотонной сходимости, имеем

$$\int\limits_{E_0} \psi\, d\mu = \int\limits_{E_0} \left(\lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \delta_{F_k} \right) d\mu = \lim_{M\to\infty} \int\limits_{E_0} \left(\sum_{k=1}^{M} \delta_{F_k} \right) d\mu =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \int\limits_{E_0} \delta_{F_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = 1.$$

Следовательно, $\psi \in \mathcal{L}(E_0)$. Тогда в силу утверждения 4.3.15 получаем, что

$$\psi(x) < +\infty \quad \text{для п. в. } x \in E_0.,$$

то есть существует измеримое множество $F_0 \subset E_0$ меры нуль, такое, что

$$\psi(x) < +\infty \qquad \forall\, x \in E_0 \backslash F_0.$$

Заметим, что неравенство $\psi(x) < +\infty$ равносильно тому, что этот x может принадлежать не более чем конечному набору множеств F_k при $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\forall\, x \in E_0 \backslash F_0 \quad \exists\, K(x) \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geqslant K(x) \quad \Rightarrow \quad x \notin F_k,$$

то есть для каждого $x \in E_0 \backslash F_0$ при всех $k \geqslant K(x)$ выполнено неравенство

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leqslant \varepsilon_k.$$

Тогда для любого $x \in E_0 \backslash F_0$, любых $k \geqslant K(x)$ и $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+s}}(x)| \leqslant \sum_{r=k}^{k+s-1} |f_{n_r}(x) - f_{n_{r+1}}(x)| \leqslant \sum_{r=k}^{k+s-1} \varepsilon_r < \sum_{r=k}^{\infty} \varepsilon_r = \varepsilon_{k-1}.$$

Так как $\varepsilon_{k-1} \to 0$ при $k \to \infty$, то отсюда следует, что для всех $x \in E_0 \backslash F_0$, то есть почти всюду на E, последовательность $f_{n_k}(x)$ является фундаментальной числовой последовательностью. Тогда в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности, существует числовой предел

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in E_0 \backslash F_0.$$

Доопределяя тривиально значения $f(x)$ при $x \in E \backslash (E_0 \backslash F_0)$ (то есть на множестве меры нуль), получаем измеримую функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$, к которой почти всюду на E сходится подпоследовательность f_{n_k}. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ и для почти всех $x \in E$ имеем предельное соотношение

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+s}}(x)|^p \to |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

и неравенство

$$\int\limits_E |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+s}}(x)|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon_k \qquad \forall\, s \in \mathbb{N},$$

то по теореме 4.3.35 Фату получаем

$$\int\limits_E |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно,

$$\|f_{n_k} - f\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Также отсюда для любого $k \in \mathbb{N}$ следует вложение $f - f_{n_k} \in \mathbb{L}_p(E)$, которое в свою очередь в силу утверждения 4.4.3 влечёт

$$f = f_{n_k} + (f - f_{n_k}) \in \mathbb{L}_p(E).$$

Наконец, вспоминаем о фундаментальности последовательности f_m в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём столь большое $k \in \mathbb{N}$, чтобы

$$n_k \geqslant N(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \|f_{n_k} - f\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для любого $m \geqslant N(\varepsilon)$, применяя неравенство Минковского (утверждение 4.4.7), получаем

$$\|f_m - f\|_p \leqslant \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|f_m - f\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

что и требовалось.

Второй способ. В силу утверждения 3.1.27 достаточно показать, что любой абсолютно сходящийся ряд из $\mathbb{L}_p(E)$ сходится в $\mathbb{L}_p(E)$. Рассмотрим последовательность

$$\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{L}_p(E),$$

такую, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_p = M < +\infty.$$

Требуется доказать, что существует элемент $g \in \mathbb{L}_p(E)$, такой, что выполнено соотношение

$$\left\| g - \sum_{m=1}^{N} f_m \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Для любого номера N определим неотрицательную измеримую функцию

$$S_N = \left(\sum_{m=1}^{N} |f_m| \right)^p \in \mathcal{L}(E).$$

Ясно, что для любого $x \in E$ и любого номера N выполнено неравенство

$$S_N(x) \leqslant S_{N+1}(x).$$

Следовательно, последовательность S_N является поточечно сходящейся на E к функции $F\colon E \to [0, +\infty]$, определяемой равенством

$$F(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(x) \in [0, +\infty] \qquad \forall\, x \in E.$$

При этом, в силу неравенства треугольника для нормы в $\mathbb{L}_p(E)$, для любого N получаем неравенство

$$\sqrt[p]{\int\limits_E S_N \, d\mu} = \left\| \sum_{m=1}^{N} |f_m| \right\|_p \leqslant \sum_{m=1}^{N} \|f_m\|_p \leqslant M.$$

Тогда, по теореме 4.3.32 Б. Леви , при $N \to \infty$ получаем соотношение

$$\int\limits_E S_N \, d\mu \to \int\limits_E F \, d\mu \leqslant M^p.$$

Следовательно, справедливо вложение

$$F \in \mathcal{L}(E),$$

которое, в силу утверждения 4.3.15, означает конечность почти всюду на множестве E значений функции F. Тогда для почти всех $x \in E$ ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |f_m(x)| = \sqrt[p]{F(x)} < +\infty.$$

Следовательно, для почти всех $x \in E$ числовой ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

сходится к некоторому числовому значению $g(x)$, причём

$$|g(x)| \leqslant \sqrt[p]{F(x)} < +\infty.$$

Определённая таким образом почти всюду на E измеримая функция g удовлетворяет для почти всех $x \in E$ неравенству

$$|g(x)|^p \leqslant F(x).$$

Так как $F \in \mathcal{L}(E)$, то в силу утверждения 4.3.21 получаем

$$|g|^p \in \mathcal{L}(E), \quad \text{т. е.} \quad g \in \mathbb{L}_p(E).$$

Для почти всех $x \in E$ имеем при $N \to \infty$ соотношение

$$\left| g(x) - \sum_{m=1}^{N} f_m(x) \right|^p \to 0$$

и для всех N неравенство

$$\left| g(x) - \sum_{m=1}^{N} f_m(x) \right|^p \leqslant \left(|g(x)| + \sum_{m=1}^{N} |f_m(x)| \right)^p \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sqrt[p]{F(x)} + \sqrt[p]{F(x)} \right)^p = 2^p F(x).$$

Следовательно, по теореме 4.3.38 Лебега об ограниченной сходимости, при $N \to \infty$ получаем

$$\left\| g - \sum_{m=1}^{N} f_m \right\|_p = \sqrt[p]{\int_E \left| g(x) - \sum_{m=1}^{N} f_m(x) \right|^p} \to 0,$$

что и требовалось. ■

Теорема 4.4.10. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу $\mathcal{E}$. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда множество*

$$CL_p(E) = \left\{ \ h\colon E \to \mathbb{R} \quad \Big| \quad |h|^p \in \mathcal{L}(E) \quad \text{и} \quad h \in C(E) \ \right\}$$

является всюду плотным в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$.

Доказательство. Для любого $f \in \mathbb{L}_p(E)$ в силу утверждения 4.3.7 существует последовательность простых измеримых на E функций s_m, такая, что на E выполнены неравенства

$$0 \leqslant (s_m)_+ \leqslant f_+, \quad 0 \leqslant (s_m)_- \leqslant f_-,$$

а при $m \to \infty$ справедливы соотношения

$$(s_m)_+ \to f_+, \quad (s_m)_- \to f_-.$$

Тогда на множестве E имеем неравенство

$$|s_m| = (s_m)_+ + (s_m)_- \leqslant f_+ + f_- = |f|.$$

Так как $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$, то по утверждению 4.3.15 функция f почти всюду конечна на E. Следовательно, почти всюду на E получаем соотношение

$$|f - s_m| \leqslant \big(f_+ - (s_m)_+\big) + \big(f_- - (s_m)_-\big) \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Отсюда почти всюду на E при $m \to \infty$ получаем

$$|f - s_m|^p \to 0.$$

Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ на E имеем также неравенство

$$|f - s_m|^p \leqslant \Big(|f| + |s_m|\Big)^p \leqslant 2^p |f|^p \in \mathcal{L}(E),$$

то, по теореме 4.3.38, при $m \to \infty$ получаем соотношение

$$\|f - s_m\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_E |f - s_m|^p \, d\mu} \to 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что справедливо неравенство

$$\|f - s_{m(\varepsilon)}\|_p \leqslant \varepsilon.$$

По замечанию 4.3.3, для простой измеримой функции $s_{m(\varepsilon)}$ существуют различные числа $\{c_k\}_{k=1}^N$ и попарно непересекающиеся измеримые множества $\{E_k\}_{k=1}^N$, такие, что

$$E = \bigcup_{k=1}^N E_k,$$

а для любого $x \in E$ выполнено

$$s_{m(\varepsilon)}(x) = \sum_{k=1}^N c_k \delta_{E_k}(x).$$

В силу регулярности меры Лебега (см. теорему 4.1.35), для любого $\delta > 0$ и любого $k \in \overline{1, N}$ существуют замкнутое множество $F_k \subset \mathbb{R}^n$ и открытое множество $G_k \subset \mathbb{R}^n$, такие, что выполнены вложения

$$F_k \subset E_k \subset G_k$$

и неравенства

$$\mu(G_k \backslash E_k) \leqslant \delta \quad \text{и} \quad \mu(E_k \backslash F_k) \leqslant \delta.$$

Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определим функцию расстояния от любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ до множества A следующим образом:

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ получаем неравенство

$$\rho(x, A) \leqslant \inf_{a \in A} \big(|y - a| + |x - y|\big) = \rho(y, A) + |x - y|.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\big|\rho(x, A) - \rho(y, A)\big| \leqslant |x - y|.$$

Таким образом, функция $x \mapsto \rho(x, A)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}^n$ условию Липшица с константой единица и, в частности, является непрерывной на $\mathbb{R}^n$.

Для любого $k \in \overline{1, N}$ определим функцию $h_k \colon E \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$h_k(x) = \frac{\rho(x, G_k^c)}{\rho(x, G_k^c) + \rho(x, F_k)}, \quad x \in E.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant h_k(x) \leqslant 1 \qquad \forall\, x \in E,$$

$$h_k(x) = 1 \qquad \forall\, x \in F_k,$$

$$h_k(x) = 0 \qquad \forall\, x \notin G_k.$$

Так как множества G_k^c и F_k являются замкнутыми и непересекающимися (в силу $F_k \subset G_k$), то для любого $x \in E$ знаменатель

$$\rho(x, G_k^c) + \rho(x, F_k) > 0.$$

Тогда, в силу показанной выше непрерывности функции расстояния от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, получаем, что функция h_k непрерывна на E. Определим непрерывную на множестве E функцию

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k h_k(x), \qquad x \in E.$$

Тогда для любого $k \in \overline{1, N}$ и любого $x \in F_k$ выполнено равенство

$$h(x) = c_k = s_{m(\varepsilon)}(x).$$

Тогда, выбрав

$$\delta = \frac{\varepsilon^p}{\sum\limits_{m=1}^{N} |2c_k|^p + 1},$$

в силу теоремы 4.3.25, получаем соотношения

$$\int\limits_E |h - s_{m(\varepsilon)}|^p \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E_k} |h - s_{m(\varepsilon)}|^p \, d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E_k \setminus F_k} |c_k|^p |h_k - 1|^p \, d\mu \leqslant \sum_{m=1}^{N} |2c_k|^p \mu(E_k \setminus F_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=1}^{N} |2c_k|^p \right) \delta \leqslant \varepsilon^p.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\|h - s_{m(\varepsilon)}\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, справедливо вложение

$$h \in \mathbb{L}_p(E) \quad \Rightarrow \quad h \in CL_p(E),$$

и неравенство

$$\|f - h\|_p \leqslant 2\varepsilon,$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.4.11. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу $\mathcal{E}$. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ имеет положительную меру. Тогда линейное нормированное пространство $CL_p(E)$ неполно, а его пополнением является пространство $\mathbb{L}_p(E)$.*

Доказательство. Так как по теореме 4.4.9 пространство $\mathbb{L}_p(E)$ полное, а его подпространство $CL_p(E)$ по теореме 4.4.10 всюду плотно в нём, то неполнота пространства $CL_p(E)$ следует из непустоты «зазора»

$$\mathbb{L}_p(E) \backslash CL_p(E).$$

Покажем, что существует элемент

$$f \in \mathbb{L}_p(E) \backslash CL_p(E),$$

т. е. предъявим измеримую на E функцию f, такую, что $|f|^p$ интегрируема по Лебегу на E, а в классе эквивалентных ей измеримых на E функций нет функции, непрерывной на множестве E.

В силу регулярности меры Лебега (см. теорему 4.1.35) и положительности меры множества E, существует замкнутое множество $F \subset E$ положительной меры. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим компакт

$$F_m = F \cap B_m(0).$$

Так как

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = F,$$

то неравенство $\mu(F) > 0$ влечёт существование номера m_0, такого, что $\mu(F_{m_0}) > 0$.

Покажем, что существует точка $x_0 \in F_{m_0}$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\mu(F_{m_0} \cap B_\varepsilon(x_0)) > 0.$$

Предположим противное. Тогда для любого $x \in F_{m_0}$ существует число $\varepsilon(x) > 0$, такое, что множество $F_{m_0} \cap B_{\varepsilon(x)}(x)$ имеет нулевую меру. Следовательно, его подмножество

$$F_{m_0} \cap O_{\varepsilon(x)}(x)$$

тоже является множеством меры нуль. Таким образом, получили открытое прокрытие

$$\mathcal{P} = \{\ O_{\varepsilon(x)}(x) \mid x \in F_{m_0}\ \}$$

компакта F_{m_0}, которое, в силу компактности F_{m_0}, имеет конечное подпокрытие

$$\{\ O_{\varepsilon(x_k)}(x_k)\ \}_{k=1}^{K}$$

для подходящих точек $x_1, \ldots, x_K \in F_{m_0}$. Но тогда получаем:

$$F_{m_0} \subset \bigcup_{k=1}^{K} O_{\varepsilon(x_k)}(x_k), \quad \Rightarrow \quad F_{m_0} = \bigcup_{k=1}^{K} \left(F_{m_0} \cap O_{\varepsilon(x_k)}(x_k)\right).$$

Следовательно, множество положительной меры F_{m_0} представлено в виде конечного объединения множеств нулевой меры, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие доказывает существование искомой точки

$$x_0 \in F_{m_0}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество

$$S_\varepsilon = F_{m_0} \cap B_\varepsilon(x_0).$$

По построению имеем:

$$0 < \mu(S_\varepsilon) \leqslant \mu(B_\varepsilon(x_0)) \sim \varepsilon^n \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Ясно, что при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ выполнено вложение

$$S_{\varepsilon_1} \supset S_{\varepsilon_2}.$$

Поэтому существует строго убывающая бесконечно малая последовательность положительных чисел ε_k, такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$0 < \mu(S_{\varepsilon_{k+1}}) \leqslant \tfrac{1}{2}\,\mu(S_{\varepsilon_k})$$

и

$$\mu(S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}}) = \mu(S_{\varepsilon_k}) - \mu(S_{\varepsilon_{k+1}}) \geqslant \tfrac{1}{2}\,\mu(S_{\varepsilon_k}) > 0.$$

Следовательно, для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}} \neq \varnothing.$$

Определим, наконец, функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E \backslash S_{\varepsilon_1} \quad \text{или} \quad x = x_0 \\ (-1)^k, & x \in S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Измеримость функции f следует из измеримости множеств S_{ε_k} для любого $k \in \mathbb{N}$. Далее получаем:

$$\int\limits_E |f|^p = \mu(S_{\varepsilon_1}) \leqslant \mu(B_{\varepsilon_1}(x_0)) < +\infty,$$

поэтому $f \in \mathbb{L}_p(E)$. Пусть теперь измеримая на E функция g эквивалентна f. Следовательно, в силу положительности меры множества $S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}}$, выполнено равенство

$$g(x) = (-1)^k \quad \text{для почти всех } x \in S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}}.$$

Поэтому

$$\exists\, x_k \in S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}} \quad : \quad g(x_k) = (-1)^k.$$

Так как

$$|x_k - x_0| \leqslant \varepsilon_k \to +0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

а $g(x_k) = (-1)^k$ не имеет предела при $k \to \infty$, то получаем, что функция g разрывна в точке x_0. Таким образом, в классе измеримых на E функций, эквивалентных функции f, отсутствует непрерывная на E функция. Поэтому, справедливо вложение $f \in \mathbb{L}_p(E) \backslash CL_p(E)$, что и требовалось показать для доказательства неполноты пространства $CL_p(E)$.

Наконец, так как неполное пространство $CL_p(E)$ всюду плотно в полном пространстве $\mathbb{L}_p(E)$, то отсюда немедленно получаем, что пополнением $CL_p(E)$ является $\mathbb{L}_p(E)$. ■

Следствие 4.4.12. *Пусть $X = \mathbb{R}$, а $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}$, построенное по кольцу клеточных множеств из $\mathbb{R}$. Пусть числа a и b таковы, что $a < b$. Тогда пространство $\mathbb{L}_p[a, b]$ является сепарабельным.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что для отрезка $[a, b]$ справедливо равенство $C[a, b] = CL_p[a, b]$. Действительно, на отрезке $[a, b]$ любая непрерывная функция g ограничена, поэтому функция $|g|^p$ тоже ограничена и непрерывна на $[a, b]$, и, следовательно, $|g|^p \in \mathcal{L}[a, b]$. Рассмотрим множество P — совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами. Очевидно, что множество P счётно и содержится в пространстве $\mathbb{L}_p[a, b]$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathbb{L}_p[a, b]$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. По теореме 4.4.10 существует функция $h \in C[a, b]$, такая, что выполнено неравенство $\|f - h\|_p < \varepsilon$. Далее, по теореме Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции многочленом, существует многочлен с вещественными коэффициентами вида

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k x^k \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

такой, что

$$\max_{x \in [a,b]} |h(x) - \varphi(x)| = \|h - \varphi\|_c < \varepsilon.$$

Пусть числа

$$M_0 = 1 \quad \text{и} \quad M_k = \max_{x \in [a,b]} |x|^k \quad \text{для любого} \quad k \in \overline{1, N}.$$

Определим положительное число

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=0}^{N} M_k}.$$

Для любого $k \in \overline{0, N}$ существует рациональное число r_k, такое, что

$$|r_k - a_k| < \delta.$$

Рассмотрим многочлен с рациональными коэффициентами вида

$$\psi(x) = r_0 + \sum_{k=1}^{N} r_k x^k \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Тогда получаем:

$$\|\varphi - \psi\|_c \leqslant \sum_{k=0}^{N} |a_k - r_k| M_k < \delta \sum_{k=0}^{N} M_k = \varepsilon.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\|h-\psi\|_c \leqslant \|h-\varphi\|_c + \|\varphi-\psi\|_c < 2\varepsilon.$$

Имеем оценки:

$$\|f-\psi\|_p \leqslant \|f-h\|_p + \|h-\psi\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \|f-h\|_p + \|h-\psi\|_c \sqrt[p]{b-a} < \varepsilon\left(1+2\sqrt[p]{b-a}\right).$$

Следовательно, счётное множество P является всюду плотным в пространстве $\mathbb{L}_p[a,b]$, т. е. сепарабельность $\mathbb{L}_p[a,b]$ доказана. ■

Следствие 4.4.13. *Пусть $X=\mathbb{R}$, а $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}$, построенное по кольцу клеточных множеств из $\mathbb{R}$. Тогда пространство $\mathbb{L}_p(\mathbb{R})$ является сепарабельным.*

Доказательство. Для произвольного $n\in\mathbb{N}$ пространство $\mathbb{L}_p[-n,n]$ сепарабельно в силу следствия 4.4.12. Пусть множество $P_n\subset\mathbb{L}_p[-n,n]$ — счётное и всюду плотное в $\mathbb{L}_p[-n,n]$. Определим множество S_n, которое состоит из всех функций, полученных продолжением функций множества P_n нулём за пределы отрезка $[-n,n]$, то есть

$$h\in S_n \quad\Leftrightarrow\quad h\delta_{[-n,n]}\in P_n \quad \text{и} \quad h\delta_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]}=0.$$

Тогда очевидно вложение $S_n\subset\mathbb{L}_p(\mathbb{R})$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, множество

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\subset\mathbb{L}_p(\mathbb{R}),$$

и S является счётным как счётное объединение счётных множеств. Покажем, что S всюду плотно в $\mathbb{L}_p(\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольную функцию $f\in\mathbb{L}_p(\mathbb{R})$ и число $\varepsilon>0$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[-n,n]}|f|^p\,d\mu=\int\limits_{\mathbb{R}}|f|^p\,d\mu,$$

то существует $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]}|f|^p\,d\mu<\varepsilon^p.$$

Так как множество P_{n_ε} всюду плотно в пространстве $\mathbb{L}_p[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$, то существует функция $g \in P_{n_\varepsilon}$, такая, что

$$\int\limits_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |f - g|^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

Определим функцию $h \in S_{n_\varepsilon}$, продолжив функцию g нулём за пределы отрезка $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$, то есть

$$h\delta_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} = g \quad \text{и} \quad h\delta_{\mathbb{R}\setminus[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} = 0.$$

Тогда, в силу очевидного равенства

$$|f - h| = |f - h|\delta_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} + |f|\delta_{\mathbb{R}\setminus[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]},$$

применяя неравенство Минковского в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R})$, получаем

$$\|f - h\|_p \leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |f - g|^p \, d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |f|^p \, d\mu} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Следовательно, счётное множество S является всюду плотным в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R})$, т. е. сепарабельность $\mathbb{L}_p(\mathbb{R})$ доказана. ■

Следствие 4.4.14. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу клеточных множеств из $\mathbb{R}^n$. Пусть*

$$C_\phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ \; h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \middle| \quad h \text{ — непрерывна и финитна на } \mathbb{R}^n \; \right\}.$$

Тогда $C_\phi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ и всюду плотно в $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для любого $R > 0$ обозначим для краткости

$$B_R = \left\{ \; x \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad |x| \leqslant R \; \right\}$$

замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле. Для любой функции $h \in C_\phi(\mathbb{R}^n)$ существует $R > 0$, такое, что

$$h(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R.$$

Непрерывная в шаре B_R функция h ограничена в этом шаре по теореме Вейерштрасса:

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in B_R \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Тогда получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h|^p \, d\mu = \int\limits_{B_R} |h|^p \, d\mu \leqslant M^p \mu\left(B_R\right) < +\infty.$$

Следовательно, $h \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, доказано вложение

$$C_\phi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n).$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Так как

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{B_R} |f|^p \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует $R_\varepsilon > 0$, такое, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_\varepsilon}} |f|^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

Так как очевидно вложение $f \in \mathbb{L}_p\left(B_{R\varepsilon}\right)$, то, по теореме 4.4.10, существует функция $g \in C\left(B_{R\varepsilon}\right) = CL_p\left(B_{R\varepsilon}\right)$, такая, что

$$\int\limits_{B_{R_\varepsilon}} |f - g|^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

Непрерывная в шаре B_{R_ε} функция g ограничена в этом шаре по теореме Вейерштрасса:

$$\exists\, M_\varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in B_{R_\varepsilon} \quad |g(x)| \leqslant M_\varepsilon.$$

Выберем число r так, чтобы

$$0 < r < R_\varepsilon \quad \text{и} \quad \mu\left(B_{R_\varepsilon} \setminus B_{R_\varepsilon - r}\right) < \left(\frac{\varepsilon}{M_\varepsilon}\right)^p.$$

Для любого $R > 0$ определим две специальные функции

$$\omega_R(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|-R}\right), & |x| < R, \\ 0, & |x| \geqslant R, \end{cases}$$

$$\psi_R(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant R, \\ \exp\left(\frac{1}{R-|x|}\right), & |x| > R. \end{cases}$$

Очевидно, что выполнены вложения $\omega_R \in C_\phi(\mathbb{R}^n)$ и $\psi_R \in C(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим функцию—срезку

$$\eta(x) = \frac{\omega_{R_\varepsilon}(x)}{\omega_{R_\varepsilon}(x) + \psi_{R_\varepsilon - r}(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $\omega_{R_\varepsilon}(x) + \psi_{R_\varepsilon - r}(x) > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, то $\eta \in C(\mathbb{R}^n)$, а в силу финитности ω_{R_ε}, получаем вложение $\eta \in C_\phi(\mathbb{R}^n)$. Также имеем

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R_\varepsilon - r, \\ 0, & |x| \geqslant R_\varepsilon, \end{cases}$$

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad R_\varepsilon - r \leqslant |x| \leqslant R_\varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \begin{cases} \eta(x)g(x), & |x| \leqslant R_\varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant R_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда справедливо вложение $h \in C_\phi(\mathbb{R}^n)$, и выполнено неравенство

$$\int\limits_{B_{R_\varepsilon}} |g-h|^p \, d\mu = \int\limits_{B_{R_\varepsilon} \setminus B_{R_\varepsilon - r}} (1-\eta)^p |g|^p \, d\mu \leqslant M_\varepsilon^p \mu\left(B_{R_\varepsilon} \setminus B_{R_\varepsilon - r}\right) < \varepsilon^p.$$

Следовательно, применяя неравенство Минковского для $\mathbb{L}_p\left(B_{R_\varepsilon}\right)$, получаем

$$\sqrt[p]{\int\limits_{B_{R_\varepsilon}} |f-h|^p \, d\mu} \leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{B_{R_\varepsilon}} |f-g|^p \, d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{B_{R_\varepsilon}} |g-h|^p \, d\mu} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Тогда, используя равенство

$$|f-h| = |f-h| \, \delta_{B_{R_\varepsilon}} + |f| \, \delta_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_\varepsilon}},$$

и применяя неравенство Минковского для $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$, окончательно находим, что

$$\|f-h\|_p \leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{B_{R_\varepsilon}} |f-h|^p \, d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_\varepsilon}} |f|^p \, d\mu} < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

■

Утверждение 4.4.15. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу клеточных множеств из $\mathbb{R}^n$. Для любого $a \in \mathbb{R}^n$ рассматривается отображение*

$$T_a\colon \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$$

вида

$$(T_a f)(x) = f(x+a) \quad \text{для п. в. } x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n).$$

Тогда

$$\lim_{a\to 0} \|T_a f - f\|_p = 0 \qquad \forall\, f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ и число $\varepsilon > 0$. В силу следствия 4.4.14, существует финитная непрерывная функция $g \in C_\phi(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Для $R > 0$ обозначим для краткости $B_R = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad |x| \leqslant R \,\right\}$. В силу финитности g, существует $R > 0$, такое, что

$$g(x) = 0 \qquad \forall\, x \notin B_R.$$

Финитная непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция g является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}^n$ (это простое следствие теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на компакте функции). Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r(\varepsilon) \in (0,1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, a \in B_{r(\varepsilon)} \quad |g(x+a) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда, применяя неравенства Минковского в $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$, для любого $a \in \mathbb{R}^n$ вида $|a| \leqslant r\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{\mu(B_{R+1})}}\right)$, находим

$$\|T_a f - f\|_p \leqslant \|T_a(f-g)\|_p + \|g - f\|_p + \|T_a g - g\|_p =$$

$$= 2\|f - g\|_p + \|T_a g - g\|_p <$$

$$< 2\varepsilon + \sqrt[p]{\int\limits_{B_{R+1}} |T_a g - g|^p \, d\mu} \leqslant 2\varepsilon + \sqrt[p]{\int\limits_{B_{R+1}} \frac{\varepsilon^p}{\mu(B_{R+1})} \, d\mu} = 3\varepsilon,$$

что и требовалось. ■

Следствие 4.4.16. (теорема Римана об осцилляции) *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу клеточных множеств из $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой функции $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^n)$ выполнено*

$$\lim_{|y|\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin(x,y)\,d\mu(x) = 0.$$

Здесь $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ — скалярное произведение $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для любого нетривиального $y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin(x,y)\,d\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin\big((x,y)-\pi\big)\;d\mu(x) =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin\Big(x - \tfrac{\pi y}{|y|^2}, y\Big)\;d\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\Big(x + \tfrac{\pi y}{|y|^2}\Big)\sin(x,y)\,d\mu(x).$$

Следовательно, получаем

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin(x,y)\,d\mu(x)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin(x,y)\,d\mu(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\Big(x + \tfrac{\pi y}{|y|^2}\Big)\sin(x,y)\,d\mu(x)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(f(x) - f\Big(x + \tfrac{\pi y}{|y|^2}\Big)\Big)\sin(x,y)\,d\mu(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big|f(x) - f\Big(x + \tfrac{\pi y}{|y|^2}\Big)\Big|\;d\mu(x) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty$$

в силу утверждения 4.4.15. ■

Утверждение 4.4.17. *Пусть $\mu(E) < +\infty$, числа p и q таковы, что $1 \leqslant p \leqslant q$. Тогда*

$$\mathbb{L}_q(E) \subset \mathbb{L}_p(E).$$

Доказательство. Для любого $f \in \mathbb{L}_q(E)$ определим измеримые множества

$$A = \left\{ x \in E \;\middle|\; |f(x)| \geqslant 1 \right\}, \quad B = \left\{ x \in E \;\middle|\; |f(x)| < 1 \right\}.$$

Тогда $A \cup B = E$ и $A \cap B = \varnothing$. Для любого $x \in A$ имеем неравенство $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$, а для любого $x \in B$ имеем $|f(x)|^p \leqslant 1$. Следовательно, в силу теоремы 4.3.25 и утверждения 4.3.17 получаем соотношения

$$\int\limits_E |f|^p \, d\mu = \int\limits_A |f|^p \, d\mu + \int\limits_B |f|^p \, d\mu \leqslant \int\limits_A |f|^q \, d\mu + \int\limits_B 1 \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_A |f|^q \, d\mu + \int\limits_B |f|^q \, d\mu + \int\limits_A 1 \, d\mu + \int\limits_B 1 \, d\mu =$$

$$= \int\limits_E |f|^q \, d\mu + \mu(E) < +\infty.$$

Это означает, что $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$, т. е. $f \in \mathbb{L}_p(E)$, что и требовалось. ■

Утверждение 4.4.18. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу $\mathcal{E}$. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ имеет конечную положительную меру. Пусть $1 \leqslant p < q$. Тогда линейное нормированное пространство $(\mathbb{L}_q(E), \|\cdot\|_p)$ неполно, а его пополнением является пространство $\mathbb{L}_p(E)$.*

Доказательство. В силу утверждения 4.4.17 справедливо вложение $\mathbb{L}_q(E) \subset \mathbb{L}_p(E)$. Поэтому множество $\mathbb{L}_q(E)$ является подпространством в $\mathbb{L}_p(E)$. Так как по теореме 4.4.9 пространство $\mathbb{L}_p(E)$ полное, то нам достаточно показать, что $\mathbb{L}_q(E)$ является $\|\cdot\|_p$ — всюду плотным в $\mathbb{L}_p(E)$, и справедливо неравенство $\mathbb{L}_p(E) \backslash \mathbb{L}_q(E) \neq \varnothing$.

Сначала докажем $\|\cdot\|_p$ — всюду плотность множества $\mathbb{L}_q(E)$ в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$. Зафиксируем произвольный элемент $f \in \mathbb{L}_p(E)$ и число $\varepsilon > 0$. В силу утверждения 4.3.7 и следствия 4.3.8, существует последовательность простых измеримых функций s_k, поточечно сходящаяся на множестве E к функции f, причём $|s_k| \leqslant |f|$ на E. Тогда $s_k \in \mathbb{L}_p(E)$, так как

$$\int\limits_E |s_k|^p \, d\mu \leqslant \int\limits_E |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

В силу утверждения 4.3.15, функция f может принимать бесконечные значения только на множестве меры нуль. Следовательно, почти всюду на E при $k \to \infty$ имеем $|s_k - f|^p \to 0$. Поскольку справедливы оценки

$$|s_k - f|^p \leqslant \Big(|s_k| + |f|\Big)^p \leqslant 2^p |f|^p \in \mathcal{L}(E),$$

то по теореме 4.3.38 Лебега об ограниченной сходимости получаем:

$$\|s_k - f\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_E |s_k - f|^p \, d\mu} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, существует номер k_ε, такой, что справедливо неравенство

$$\|s_{k_\varepsilon} - f\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Так как множество значений простой функции конечно, то величина

$$M_\varepsilon = \max_{x \in E} \left| s_{k_\varepsilon(x)} \right| < +\infty.$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\int\limits_E |s_{k_\varepsilon}|^q \; d\mu \leqslant M_\varepsilon^q \mu(E) < +\infty,$$

т. е. получаем $|s_{k_\varepsilon}|^q \in \mathcal{L}(E)$. Таким образом, справедливо вложение $s_{k_\varepsilon} \in \mathbb{L}_q(E)$. Тем самым $\|\cdot\|_p$ — всюду плотность множества $\mathbb{L}_q(E)$ в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$ доказана.

Теперь докажем неполноту пространства $(\mathbb{L}_q(E), \|\cdot\|_p)$. В силу полноты пространства $\mathbb{L}_p(E)$ и только что доказанной $\|\cdot\|_p$ — всюду плотности множества $\mathbb{L}_q(E)$ в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$, достаточно установить неравенство $\mathbb{L}_p(E) \backslash \mathbb{L}_q(E) \neq \varnothing$. Требуется указать элемент $f \in \mathbb{L}_p(E)$, в классе эквивалентности которого нет ни одного элемента множества $\mathbb{L}_q(E)$. Так же, как в доказательстве следствия 4.4.11, укажем точку $x_0 \in E$, такую, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\mu(E \cap B_\varepsilon(x_0)) > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество $S_\varepsilon = E \cap B_\varepsilon(x_0)$. По построению имеем:

$$0 < \mu(S_\varepsilon) \leqslant \mu(B_\varepsilon(x_0)) \sim \varepsilon^n \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Так как при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ выполнено вложение $S_{\varepsilon_1} \supset S_{\varepsilon_2}$, то существует строго убывающая бесконечно малая последовательность положительных чисел ε_k, такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $0 < \mu(S_{\varepsilon_{k+1}}) \leqslant \frac{1}{2}\,\mu(S_{\varepsilon_k})$ и

$$\mu(S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}}) = \mu(S_{\varepsilon_k}) - \mu(S_{\varepsilon_{k+1}}) \geqslant \frac{1}{2}\,\mu(S_{\varepsilon_k}) > 0.$$

Обозначим для любого номера k множество

$$M_k = S_{\varepsilon_k} \backslash S_{\varepsilon_{k+1}}.$$

Пусть $\mu_k = \mu(M_k)$. Тогда справедливы неравенства:

$$0 < \mu_k \leqslant \mu(S_{\varepsilon_k}) \leqslant 2^{1-k}\mu(S_{\varepsilon_1}) \leqslant 2^{1-k}\mu(E).$$

Построим на множестве E измеримую функцию f:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E \backslash S_{\varepsilon_1}, \\ \mu_k^{-1/q}, & x \in M_k. \end{cases}$$

Тогда получаем:

$$\int\limits_E |f|^q \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{M_k} |f|^q \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-1}\mu(M_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty,$$

т. е. выполнено соотношение $f \notin \mathbb{L}_q(E)$, и

$$\int\limits_E |f|^p \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{M_k} |f|^p \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-p/q}\mu(M_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{\frac{q-p}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(2\mu(E)\Big)^{\frac{q-p}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{p-q}{q}}\right)^k = \frac{\Big(2\mu(E)\Big)^{\frac{q-p}{q}}}{2^{\frac{q-p}{q}} - 1},$$

т. е. выполнено соотношение $f \in \mathbb{L}_p(E)$. Следовательно, мы показали, что существует функция $f \in \mathbb{L}_p(E) \backslash \mathbb{L}_q(E)$. Таким образом, справедливо неравенство $\mathbb{L}_p(E) \backslash \mathbb{L}_q(E) \neq \varnothing$. Утверждение доказано. ■

Теорема 4.4.19. (Рисс, Колмогоров) *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу $\mathcal{E}$, число $p \geqslant 1$. Тогда множество $S \subset \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ является вполне ограниченным в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$, если и только если выполнены следующие три условия:*

1) $\exists\, M > 0 \quad \forall\, f \in S \quad \|f\|_p \leqslant M,$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, R_\varepsilon > 0 \quad \forall\, f \in S \quad \sqrt[p]{\int\limits_{|x|>R_\varepsilon} |f(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant \varepsilon,$

3) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r_\varepsilon > 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n : |y| \leqslant r_\varepsilon \quad \forall\, f \in S$

$$\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. а) Необходимость. Для любого $R > 0$ обозначим для краткости

$$B_R = \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad |x| \leqslant R \, \right\}.$$

Пусть множество $S \subset \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ является вполне ограниченным в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε–сеть для множества S в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$, то есть существуют функции

$$\{ \, h_1, \ldots, h_N \, \} \subset \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n),$$

такие, что

$$\forall\, f \in S \quad \exists\, k \in \overline{1, N} \quad \|f - h_k\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Рассматривая положительное число

$$M_\varepsilon = \max\{ \, \|h_1\|_p, \ldots, \|h_N\|_p \, \} + \varepsilon,$$

получаем, что

$$\|f\|_p \leqslant M_\varepsilon \qquad \forall\, f \in S.$$

Следовательно, например, для $M = M_1$ доказано свойство 1.

Докажем свойство 2. Так как

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |h_k|^p \, d\mu = 0 \qquad \forall\, k \in \overline{1, N},$$

то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, k \in \overline{1, N} \quad \exists\, R_{\varepsilon,k} > 0 \quad \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_{\varepsilon,k}}} |h_k|^p \, d\mu} \leqslant \varepsilon.$$

Выбирая значение

$$R_\varepsilon = \max\{\, R_{\varepsilon,1}, \dots, R_{\varepsilon,N} \,\},$$

получаем для любого $k \in \overline{1,N}$ неравенства

$$\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_\varepsilon}} |h_k|^p \, d\mu} \leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_{\varepsilon,k}}} |h_k|^p \, d\mu} \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для любой функции $f \in S$ находим функцию h_k, такую, что

$$\| f - h_k \|_p \leqslant \varepsilon,$$

и, применяя неравенство Минковского, получаем:

$$\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_\varepsilon}} |f(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_\varepsilon}} |f(x) - h_k(x)|^p \, d\mu(x)} + \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_\varepsilon}} |h_k(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant$$

$$\leqslant \| f - h_k \|_p + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно, доказано свойство 2.

Докажем свойство 3. В силу утверждения 4.4.15,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, k \in \overline{1,N} \quad \exists\, r_{\varepsilon,k} > 0 \quad \forall\, y \in B_{r_{\varepsilon,k}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_k(x+y) - h_k(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant \varepsilon.$$

Выбирая значение

$$r_\varepsilon = \min\{\, r_{\varepsilon,1}, \dots, r_{\varepsilon,N} \,\},$$

получаем для любого $k \in \overline{1,N}$ и любого $y \in B_{r_\varepsilon}$ неравенство

$$\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_k(x+y) - h_k(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для любой функции $f \in S$ находим функцию h_k, такую, что

$$\|f - h_k\|_p \leqslant \varepsilon,$$

и для любого $y \in B_{r_\varepsilon}$, применяя неравенство Минковского, получаем:

$$\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f - h_k\|_p + \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_k(x+y) - h_k(x)|^p \, d\mu(x)} \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, доказано свойство 3.

Достаточность. Пусть множество $S \subset \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет свойствам 1,2,3. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем числа $r \in \in (0, r_\varepsilon)$ и $R > R_\varepsilon + r_\varepsilon$. Рассмотрим пространство $C\left(B_R\right)$, состоящее из всевозможных непрерывных на B_R вещественных функций, норма в котором имеет вид

$$\|g\|_c = \max_{x \in B_R} |g(x)|, \qquad g \in C\left(B_R\right).$$

Мы построим множество

$$G \subset C\left(B_R\right),$$

вполне ограниченное в пространстве $C\left(B_R\right)$, такое, что

$$\forall\, f \in S \quad \exists\, g \in G \quad \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |f - g|^p \, d\mu} \leqslant \varepsilon.$$

Если такое множество G существует, то отсюда легко доказать вполне ограниченность множества S в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Действительно, для числа

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{\mu(B_R)}}$$

рассмотрим конечную γ–сеть множества M в пространстве $C\left(B_R\right)$, состоящую из функций

$$\left\{\, g_1, \ldots, g_N \,\right\} \subset C\left(B_R\right).$$

Это означает, что

$$\forall\, g \in G \quad \exists\, k \in \overline{1,N} \quad \|g - g_k\|_c \leqslant \gamma \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |g - g_k|^p \, d\mu} \leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} \frac{\varepsilon^p}{\mu(B_R)} \, d\mu} = \varepsilon.$$

Для любого $k \in \overline{1,N}$ определим функцию $h_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по формуле

$$h_k(x) = \begin{cases} g_k(x), & x \in B_R, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R. \end{cases}$$

Тогде $h_k \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$, так как

$$\|h_k\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_k|^p \, d\mu} = \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |g_k|^p \, d\mu} \leqslant \|g_k\|_c \sqrt[p]{\mu(B_R)} < +\infty.$$

Конечное множество

$$\left\{\, h_1, \ldots, h_N \,\right\} \subset \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n).$$

является 3ε–сетью множества S в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Действительно, для любой функции $f \in S$ имеем функцию $g \in G$, такую, что

$$\sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |f - g|^p \, d\mu} \leqslant \varepsilon$$

Для этой функции $g \in G$ существует $k \in \overline{1,N}$, такой, что

$$\|g - g_k\|_c \leqslant \gamma.$$

Следовательно, используя очевидное равенство

$$|f - h_k| = |f - g_k|\delta_{B_R} + |f|\delta_{\mathbb{R}^n \setminus B_R},$$

и, применяя неравенство Минковского в пространствах $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{L}_p(B_R)$, находим

$$\|f - h_k\|_p \leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |f - g_k|^p \, d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |f|^p \, d\mu} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |f-g|^p\,d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |g-g_k|^p\,d\mu} + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

что и требовалось.

Итак, займёмся построением заявленного множества $G \subset C\left(B_R\right)$. Рассмотрим специальную функцию

$$\omega(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{|x|^2}{|x|^2-r^2}\right), & |x| < r, \\ 0, & |x| \geqslant r. \end{cases}$$

Очевидно, что функция ω бесконечно дифференцируема, финитна, имеет носитель B_r, неотрицательна на $\mathbb{R}^n$, причём

$$\|\omega\|_1 = \int\limits_{B_r} \omega\,d\mu > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \frac{\omega(x)}{\|\omega\|_1}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда функция ψ также бесконечно дифференцируема, финитна, имеет носитель B_r, неотрицательна на $\mathbb{R}^n$, причём

$$\int\limits_{B_r} \psi\,d\mu = 1.$$

Так как $0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$0 \leqslant \psi(x) \leqslant \frac{1}{\|\omega\|_1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим

$$\ell = \max_{x \in B_r} |\nabla\psi(x)|.$$

Тогда, по следствию формулы конечных приращений Лагранжа, имеем

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \ell|x-y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Для любой функции $f \in S$ определим функцию

$$g_f(x) = \int\limits_{B_r} \psi(y) f(x-y)\, d\mu(y), \qquad x \in B_R.$$

Интеграл в определении функции $g_f(x)$ конечен для любого $x \in B_R$. Действительно, в силу утверждения 4.4.17, имеем вложение

$$\mathbb{L}_p(B_{R+r}) \subset \mathbb{L}_1(B_{R+r}).$$

Следовательно, для функции $f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ и любого $x \in B_R$ получаем

$$|g_f(x)| \leqslant \int\limits_{B_r} \frac{|f(x-y)|}{\|\omega\|_1}\, d\mu(y) \leqslant \int\limits_{B_{R+r}} \frac{|f(z)|}{\|\omega\|_1}\, d\mu(z) < +\infty.$$

Так как $\psi(y) = 0$ при $|y| \geqslant r$, то для любого $x \in B_R$ очевидны равенства

$$g_f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y) f(x-y)\, d\mu(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x-z) f(z)\, d\mu(z) =$$

$$= \int\limits_{B_{R+r}} \psi(x-z) f(z)\, d\mu(z).$$

Тогда для любых $x, y \in B_R$ получаем:

$$|g_f(x) - g_f(y)| \leqslant \int\limits_{B_{R+r}} |\psi(x-z) - \psi(y-z)|\, |f(z)|\, d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_{R+r}} \ell |x-y|\, |f(z)|\, d\mu(z).$$

Следовательно, функция g_f липшицева на B_R с константой

$$L_f = \int\limits_{B_{R+r}} \ell\, |f(z)|\, d\mu(z),$$

то есть имеем вложение

$$g_f \in C\left(B_R\right).$$

Теперь определяем множество

$$G = \left\{ \, g_f \quad \middle| \quad f \in S \, \right\} \subset C\left(B_R\right).$$

Множество G является ограниченным в пространстве $C\left(B_R\right)$. Действительно, для любой $f \in S$ воспользуемся ранее полученной оценкой

$$|g_f(x)| \leqslant \int\limits_{B_{R+r}} \frac{|f|}{\|\omega\|_1}\, d\mu \quad \forall\, x \in B_R \quad \Rightarrow \quad \|g_f\|_c \leqslant \int\limits_{B_{R+r}} \frac{|f|}{\|\omega\|_1}\, d\mu.$$

Если $p = 1$, то имеем

$$\int\limits_{B_{R+r}} \frac{|f|}{\|\omega\|_1}\, d\mu \leqslant \frac{\|f\|_1}{\|\omega\|_1} \leqslant \frac{M}{\|\omega\|_1},$$

то есть

$$\|g\|_c \leqslant \frac{M}{\|\omega\|_1} \qquad \forall\, g \in G.$$

Если же $p > 1$, то, определив $q = \frac{p}{p-1}$, в силу неравенства Гёльдера для $\mathbb{L}_p(B_{R+r})$, имеем

$$\int\limits_{B_{R+r}} \frac{|f|}{\|\omega\|_1}\, d\mu \leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{B_{R+r}} |f|^p\, d\mu}\, \frac{\sqrt[q]{\mu(B_{R+r})}}{\|\omega\|_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_p\, \sqrt[q]{\mu(B_{R+r})}}{\|\omega\|_1} \leqslant \frac{M\, \sqrt[q]{\mu(B_{R+r})}}{\|\omega\|_1},$$

то есть

$$\|g\|_c \leqslant \frac{M\, \sqrt[q]{\mu(B_{R+r})}}{\|\omega\|_1} \qquad \forall\, g \in G.$$

Покажем, что множество G равностепенно непрерывно. Для этого достаточно доказать, что все функции множества G липшицевы на B_R с одной и той же константой Липшица. Как нам уже известно, для любой функции $f \in S$ соответствующая ей функция $g_f \in G$ липшицева на B_R с константой

$$L_f = \int\limits_{B_{R+r}} \ell\, |f(z)|\, d\mu.$$

Если $p = 1$, то имеем

$$L_f \leqslant \ell\, \|f\|_1 \leqslant \ell M.$$

Если же $p > 1$, то, определив $q = \frac{p}{p-1}$, в силу неравенства Гёльдера для $\mathbb{L}_p(B_{R+r})$, имеем

$$L_f \leqslant \ell \sqrt[p]{\int\limits_{B_{R+r}} |f|^p \, d\mu} \sqrt[q]{\mu(B_{R+r})} \leqslant \ell \, \|f\|_p \sqrt[q]{\mu(B_{R+r})} \leqslant \ell M \sqrt[q]{\mu(B_{R+r})}.$$

Следовательно число

$$L = \begin{cases} \ell M, & p = 1, \\ \ell M \sqrt[q]{\mu(B_{R+r})}, & p > 1, \end{cases}$$

является общей константой Липшица всех функций множества G:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant L|x - y| \quad \forall \, x, y \in B_R, \quad \forall \, g \in G.$$

Отсюда немедленно следует равностепенная непрерывность множества G:

$$\forall \, \gamma > 0 \quad \exists \, \eta = \frac{\gamma}{L} \quad \forall \, g \in G \quad \forall \, x, y \in B_R \quad : \quad |x - y| \leqslant \eta \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |g(x) - g(y)| \leqslant L|x - y| \leqslant L\eta = \gamma.$$

Следовательно, по теореме 2.2.14 Арцела—Асколи, наше множество G вполне ограничено в пространстве $C(B_R)$. Для завершения доказательства нам осталось доказать неравенство

$$\sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |f - g_f|^p \, d\mu} \leqslant \varepsilon \qquad \forall \, f \in S.$$

Итак, зафиксируем произвольную функцию $f \in S$. Если $p = 1$, то имеем

$$\int\limits_{B_R} |f(x) - g_f(x)| \, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{B_R} \Bigg| f\,(x) \underbrace{\int\limits_{B_r} \psi(y) \, d\mu(y)}_{=1} - \underbrace{\int\limits_{B_r} \psi(y) f(x - y) \, d\mu(y)}_{=g_f(x)} \Bigg| \, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_R} d\mu(x) \int\limits_{B_r} d\mu(y) \, \psi(y) |f(x) - f(x - y)| \overset{\text{теорема Фубини}}{=}$$

$$= \int\limits_{B_r} d\mu(y)\,\psi(y) \int\limits_{B_R} d\mu(x)\,|f(x) - f(x-y)| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\int\limits_{B_r} d\mu(y)\,\psi(y)}_{=1} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\mu(x)\,|f(x) - f(x-y)|}_{\leqslant\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Если же $p > 1$, то получаем

$$\sqrt[p]{\int\limits_{B_R} |f(x) - g_f(x)|^p \, d\mu(x)} =$$

$$= \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} d\mu(x) \left| f(x) \int\limits_{B_r} \psi(y)\, d\mu(y) - \int\limits_{B_r} \psi(y) f(x-y)\, d\mu(y) \right|^p} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} d\mu(x) \left(\int\limits_{B_r} d\mu(y)\,\psi(y)\,|f(x) - f(x-y)| \right)^p} \overset{\substack{\text{утверждение 4.4.6} \\ \text{(неравенство Юнга)}}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int\limits_{B_r} d\mu(y) \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} d\mu(x) \, \big(\psi(y)|f(x) - f(x-y)|\big)^p} =$$

$$= \int\limits_{B_r} d\mu(y)\,\psi(y) \sqrt[p]{\int\limits_{B_R} d\mu(x)\,|f(x) - f(x-y)|^p} \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\int\limits_{B_r} \psi(y)\, d\mu(y)}_{=1} \underbrace{\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\mu(x)\,\|f(x) - f(x-y)|^p}}_{\leqslant\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано, что и завершает доказательство теоремы. ■

Замечание 4.4.20. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу $\mathcal{E}$. Пусть множесво $E \in \mathfrak{M}(\mu)$, число $p \geqslant 1$, множество $S \subset \mathbb{L}_p(E)$. Сформулируем критерий вполне ограниченности множества S в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$, обобщив на эту ситуацию теорему 4.4.19. Определим линейную изометрию

$$F\colon \mathbb{L}_p(E) \to \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$$

по формуле

$$(Ff)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash E, \end{cases} \qquad \forall\, f \in \mathbb{L}_p(E).$$

Тогда вполне ограниченность множества S в $\mathbb{L}_p(E)$ очевидно равносильна вполне ограниченности множества $F(S)$ в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$, то есть выполнению трёх условий теоремы 4.4.19 для множества $F(S)$. Таким образом, множество S вполне ограничено в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$ если и только если выполнены следующие три условия:

1) $\exists\, M > 0 \quad \forall\, f \in S \quad \sqrt[p]{\int\limits_E |f|^p \, d\mu} \leqslant M,$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, R_\varepsilon > 0 \quad \forall\, f \in S \quad \sqrt[p]{\int\limits_{E \backslash B_{R_\varepsilon}} |f|^p \, d\mu} \leqslant \varepsilon,$

3) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r_\varepsilon > 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n : |y| \leqslant r_\varepsilon \quad \forall\, f \in S$

$$\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|(Ff)(x+y) - (Ff)(x)\big|^p \, d\mu(x)} \leqslant \varepsilon.$$

Если множество E ограничено, то есть

$$\exists\, R_0 > 0 \quad : \quad E \subset B_{R_0},$$

то условие 2 автоматически выполняется при выборе $R_\varepsilon = R_0$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому в случае ограниченного множества E вполне ограниченность множества S в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$ равносильна выполнению условий 1 и 3. $\square$

П р и м е р 4.4.21. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$ множество

$$S = \left\{ f \in C[0,1] \cap C^1[0,1] \ : \ |f(x)| \leqslant 1, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall\, x \in (0,1) \right\}.$$

Исследуем множество S на вполне ограниченность в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$. Так как множество $E=[0,1]$ ограничено в $\mathbb{R}$, то для множества S требуется проверить условия 1 и 3 замечания 4.4.20. Условие 1, очевидно, выполнено, так как

$$\int\limits_{[0,1]} |f|\,d\mu \leqslant 1 \qquad \forall\, f\in S.$$

Проверим условие 3. Для любого $y\in(0,1)$ и произвольной функции $f\in S$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|(Ff)(x+y)-(Ff)(x)\big|\;d\mu(x) = \int\limits_{[-y,0]} |f(x+y)|\,d\mu(x)+$$

$$+\int\limits_{(0,1-y)} |f(x+y)-f(x)|\,d\mu(x) + \int\limits_{[1-y,1]} |f(x)|\,d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2y + \int\limits_{(0,1-y)} |f(x+y)-f(x)|\,d\mu(x).$$

По формуле конечных приращений Лагранжа, имеем:

$\forall\, x\in(0,1-y) \quad \exists\,\xi\in(x,x+y) \quad :$

$$|f(x+y)-f(x)| = |f'(\xi)|y \leqslant \frac{y}{\sqrt{\xi}} \leqslant \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Следовательно, получаем

$$\int\limits_{(0,1-y)} |f(x+y)-f(x)|\,d\mu(x) \leqslant \int\limits_{[0,1-y]} \frac{y}{\sqrt{x}}\,d\mu(x) = 2y\sqrt{1-y} < 2y.$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|(Ff)(x+y)-(Ff)(x)\big|\;d\mu(x) \leqslant 4y.$$

Для любого $y\in(-1,0)$ и произвольной функции $f\in S$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|(Ff)(x+y)-(Ff)(x)\big|\;d\mu(x) = \int\limits_{[0,-y]} |f(x)|\,d\mu(x)+$$

$$+ \int\limits_{(-y,1)} |f(x+y) - f(x)|\, d\mu(x) + \int\limits_{[1,1-y]} |f(x+y)|\, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2y + \int\limits_{(-y,1)} |f(x+y) - f(x)|\, d\mu(x).$$

По формуле конечных приращений Лагранжа, имеем:

$\forall\, x \in (-y, 1) \quad \exists\, \xi \in (x+y, x) \quad :$

$$|f(x+y) - f(x)| = |f'(\xi)|\, |y| \leqslant \frac{y}{\sqrt{\xi}} \leqslant \frac{y}{\sqrt{x+y}}.$$

Следовательно, получаем

$$\int\limits_{(-y,1)} |f(x+y) - f(x)|\, d\mu(x) \leqslant \int\limits_{(-y,1)} \frac{|y|}{\sqrt{x+y}}\, d\mu(x) \leqslant 2|y|\sqrt{1+y} < 2|y|.$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|(Ff)(x+y) - (Ff)(x)\big|\, d\mu(x) \leqslant 4|y|.$$

Окончательно получаем, что

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r_\varepsilon = \dfrac{\min\{\varepsilon, 1\}}{4} \quad \forall\, y \in [-r_\varepsilon, r_\varepsilon] \quad \forall\, f \in S$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|(Ff)(x+y) - (Ff)(x)\big|\, d\mu(x) \leqslant 4|y| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, свойство 3 для множества S выполняется. Тем самым доказано, что множество S является вполне ограниченным в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$. ▲

Пример 4.4.22. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$ множество

$$S = \{\ f \in C[0,1]\ :\ |f(x)| \leqslant 1 \quad \forall\, x \in (0,1)\ \}.$$

Покажем, что множество S не является вполне ограниченным в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \sin(\pi n x), \qquad x \in [0,1], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно вложение $f_n \in S$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Справедливо равенство

$$\int\limits_{[0,1]} f_n(x) f_m(x)\, d\mu(x) = 0 \qquad \forall\, n \neq m.$$

Тогда для любых $n \neq m$ находим

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int\limits_{[0,1]} |f_n - f_m|\, d\mu = 2 \int\limits_{[0,1]} \underbrace{\frac{|f_n - f_m|}{2}}_{\leqslant 1}\, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant 2 \int\limits_{[0,1]} \frac{|f_n - f_m|^2}{4} = \frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_{[0,1]} f_n^2\, d\mu}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_{[0,1]} f_m^2\, d\mu}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\int\limits_{[0,1]} f_n\, f_m\, d\mu}_{=0} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, в силу утверждения 2.2.7, множество S не является вполне ограниченным. Заметим, что на последовательности $f_n \in S$ как раз нарушается условие 3 критерия вполне ограниченности множества в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|(Ff_n)\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - (Ff_n)(x)\right|\, d\mu(x) = \int\limits_{[-1/n,0]} \left|f_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right)\right| d\mu(x) +$$

$$+ \int\limits_{(0,1-1/n)} \left|f_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - f_n(x)\right| d\mu(x) + \int\limits_{[1-1/n,1]} |f_n(x)|\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{-1/n}^{0} |\sin(\pi n x)|\, dx + 2 \int\limits_{0}^{1-1/n} |\sin(\pi n x)|\, dx + \int\limits_{1-1/n}^{1} |\sin(\pi n x)|\, dx$$

$$= 2 \int\limits_0^1 |\sin(\pi n x)|\, dx \geqslant 2 \int\limits_0^1 \sin^2(\pi n x)\, dx = 1.$$

Таким образом,

$$\exists\, \varepsilon = 1 \quad \forall\, r > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, \tfrac{1}{n} < r \quad \exists\, y_n = \tfrac{1}{n} \in (0, r)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|(Ff_n)(x + y_n) - (Ff_n)(x)\right|\, d\mu(x) \geqslant 1 = \varepsilon,$$

то есть выполнено отрицание условия 3 критерия вполне ограниченности множества S в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$. ▲

Определение 4.4.23. *Множеством* $\mathbb{L}_\infty(E)$ *назовём совокупность классов эквивалентных на множестве* E *измеримых функций* $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *ограниченных почти всюду на* E.

Замечание 4.4.24. Договоримся, что вложение $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ означает, что выбрана произвольная измеримая ограниченная почти всюду на E функция f из некоторого класса эквивалентных на множестве E измеримых функций, входящего в множество $\mathbb{L}_\infty(E)$. Функции, находящиеся в одном классе эквивалентности из $\mathbb{L}_\infty(E)$, будем называть равными.

Пусть функция g определена на измеримом множестве $G \subset E$ вида $\mu(E\backslash G) = 0$ (т. е. почти всюду на E), измерима и является ограниченной почти всюду на G. Будем считать её элементом $\mathbb{L}_\infty(E)$ в следующем смысле: доопределим функцию g произвольным образом на множестве $E\backslash G$ нулевой меры, получим в силу утверждения 4.2.13 измеримую ограниченную почти всюду на E функцию, принадлежащую $\mathbb{L}_\infty(E)$. При этом при различных способах доопределения g на $E\backslash G$ получаются эквивалентные на E функции, т. е. это элементы одного класса эквивалентности из $\mathbb{L}_\infty(E)$. □

Утверждение 4.4.25. *Множество* $\mathbb{L}_\infty(E)$ *является линейным пространством.*

Доказательство. Нулём в $\mathbb{L}_\infty(E)$ будем считать класс измеримых функций, эквивалентных на E нулевой функции. Для любого $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ существует число $M > 0$, такое, что для почти всех $x \in E$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Тогда для любого числа α почти всюду на E определена измеримая функция αf, ограниченная числом $|\alpha|M$. Следовательно, выполнено вложение

$$\alpha f \in \mathbb{L}_\infty(E).$$

Пусть $f_1 \in \mathbb{L}_\infty(E)$ и $f_2 \in \mathbb{L}_\infty(E)$. Тогда существуют числа $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, такие, что для почти всех $x \in E$ выполнены неравенства

$$|f_1(x)| \leqslant M_1 \quad \text{и} \quad |f_2(x)| \leqslant M_2.$$

Следовательно, почти всюду на E определена измеримая функция $f = f_1 + f_2$, причём для почти всех $x \in E$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant M_1 + M_2.$$

Таким образом, выполнено вложение $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$. ■

Определение 4.4.26. *Пусть измеримая функция*

$$f \colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

ограничена почти всюду на E. Существенной верхней гранью функции f на E называется величина

$$\operatorname*{ess\,sup}_E f = \inf \left\{ \, M \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leqslant M \text{ для п. в. } x \in E \, \right\}.$$

Определение 4.4.27. *Для любого $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ нормой f назовём число*

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|.$$

Утверждение 4.4.28. *Норма $\|\cdot\|_\infty$ в пространстве $\mathbb{L}_\infty(E)$ удовлетворяет аксиомам нормы из определения 3.1.1 нормированного пространства.*

Доказательство. Так как любая функция $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ ограничена почти всюду на E, т. е. существует число $M > 0$, такое, что

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{для почти всех } x \in E,$$

то получаем

$$0 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant M.$$

Далее для любого числа $\alpha \neq 0$ имеем соотношения

$$\|\alpha f\|_\infty = \inf \left\{ \, M \geqslant 0 \;\middle|\; |\alpha f(x)| \leqslant M \text{ для п. в. } x \in E \, \right\} =$$

$$= |\alpha| \inf \left\{ \, \frac{M}{|\alpha|} \geqslant 0 \;\middle|\; |f(x)| \leqslant \frac{M}{|\alpha|} \text{ для п. в. } x \in E \, \right\} = |\alpha| \, \|f\|_\infty.$$

Равенство $\|0f\|_\infty = 0 = 0\|f\|_\infty$ очевидно. Для любых $f_1, f_2 \in \mathbb{L}_\infty(E)$ имеем

$$\|f_1 + f_2\|_\infty = \inf \left\{ \, M \geqslant 0 \;\middle|\; |f_1(x) + f_2(x)| \leqslant M \text{ для п. в. } x \in E \, \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf \left\{ \ M \geqslant 0 \ \ \middle| \ \ |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant M \ \ \text{для п. в.} \ \ x \in E \ \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf \left\{ \ M_1 + M_2 \ \ \middle| \ \ |f_1(x)| \leqslant M_1, \ \ |f_2(x)| \leqslant M_2 \ \ \text{для п. в.} \ \ x \in E \ \right\} =$$

$$= \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty.$$

■

Теорема 4.4.29. *Линейное нормированное пространство* $\mathbb{L}_\infty(E)$ *является полным.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность

$$\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{L}_\infty(E).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $m, k \geqslant N(\varepsilon)$ имеем неравенство

$$\|f_m - f_k\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует множество $E_m \subset E$ меры нуль, такое, что функция f_m ограничена на $E \backslash E_m$. Тогда множество

$$E_0 = \bigcup_{m=1}^\infty E_m$$

имеет меру нуль, и каждая функция f_m ограничена на множестве $E \backslash E_0$. При этом для всех $m, k \geqslant N(\varepsilon)$ получаем

$$\sup_{x \in E \backslash E_0} |f_m(x) - f_k(x)| = \|f_m - f_k\|_\infty < \varepsilon.$$

Это означает, что существует функция $f \colon E \backslash E_0 \to \mathbb{R}$, такая, что

$$f_m \rightrightarrows f \quad \text{на} \quad E \backslash E_0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда, в силу утверждения 4.2.7, функция f измерима на $E \backslash E_0$, причём для любого $x \in E \backslash E_0$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leqslant |f_{N(1)}(x)| + 1.$$

Так как функция $f_{N(1)}$ ограничена на множестве $E\backslash E_0$, то f также является ограниченной на $E\backslash E_0$. Следовательно, выполнено вложение $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$, и

$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x\in E\backslash E_0} |f_m(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.4.30. *Пусть $0 < \mu(E) < +\infty$. Тогда для любых функции $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ и числа $p \geqslant 1$ выполнено вложение*

$$f \in \mathbb{L}_p(E),$$

и существует предел

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Доказательство. Так как для любого числа $p \geqslant 1$ функция $|f|^p$ ограничена почти всюду на E, то вложение $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$ следует из утверждения 4.3.16. Если $\|f\|_\infty = 0$, то $\|f\|_p = 0$ для любого $p \geqslant 1$. Поэтому далее считаем, что $\|f\|_\infty > 0$. Так как

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{для почти всех } x \in E,$$

то получаем неравенство

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty \sqrt[p]{\mu(E)}.$$

С другой стороны, для любого положительного числа $R < \|f\|_\infty$ существует измеримое множество

$$E_R \subset E$$

положительной меры, такое, что

$$|f(x)| \geqslant R \qquad \forall\, x \in E_R.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\|f\|_p \geqslant \sqrt[p]{\int\limits_{E_R} |f|^p \, d\mu} \geqslant R \sqrt[p]{\mu(E_R)}.$$

Так как при $p \to +\infty$ имеем соотношения

$$\sqrt[p]{\mu(E)} \to 1 \quad \text{и} \quad \sqrt[p]{\mu(E_R)} \to 1,$$

то получаем неравенства

$$R \leqslant \varliminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \leqslant \varlimsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty.$$

Тогда после предельного перехода при $R \to \|f\|_\infty - 0$ получаем равенства

$$\varliminf_{p \to +\infty} \|f\|_p = \varlimsup_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Это означает, что существует

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.4.31. *Система характеристических функций всех измеримых подмножеств множества E является полной в пространстве $\mathbb{L}_\infty(E)$.*

Доказательство. Обозначим через S совокупность характеристических функций всех измеримых подмножеств множества E. Тогда в силу утверждения 4.3.4 множество $\operatorname{Lin} S$ представляет собой совокупность всех простых измеримых на E функций. Требуется доказать, что множество $\operatorname{Lin} S$ всюду плотно в пространстве $\mathbb{L}_\infty(E)$, т. е. для любой функции $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует простая измеримая на E функция s, такая, что

$$\|f - s\|_\infty < \varepsilon.$$

Итак, зафиксируем произвольную функцию $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ и число $\varepsilon >$ > 0. Пусть положительное число

$$M = \|f\|_\infty + 1.$$

Тогда, по определению 4.4.26, существует множество $E_0 \subset E$ меры нуль, такое, что выполнено неравенство

$$|f(x)| < M \qquad \forall\, x \in E \backslash E_0.$$

Выберем натуральное число N вида

$$\frac{2M}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

и рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[-M, M]$ точками

$$a_k = -M + \frac{2M}{N}(k-1), \quad k \in \overline{1, N+1}.$$

Определим измеримые множества

$$E_k = \left\{ \; x \in E \backslash E_0 \quad \middle| \quad a_k \leqslant f(x) < a_{k+1} \; \right\}, \quad k \in \overline{1, N}.$$

Ясно, что

$$E_k \cap E_m = \varnothing \quad \text{при} \quad k \neq m \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{N} E_k = E \backslash E_0.$$

Определим простую измеримую функцию $s\colon E \to \mathbb{R}$ вида

$$s(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \delta_{E_k}(x), \quad x \in E.$$

Тогда для любого $x \in E \backslash E_0$ существует $k \in \overline{1, N}$ вида $x \in E_k$, и поэтому выполнены соотношения:

$$|f(x) - s(x)| = f(x) - a_k < a_{k+1} - a_k = \frac{2M}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как множество E_0 имеет меру нуль, то выполнено неравенство

$$|f(x) - s(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{п. в.} \quad x \in E,$$

откуда по определению 4.4.26 получаем

$$\|f - s\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Полнота системы характеристических функций всех измеримых подмножеств множества E в пространстве $\mathbb{L}_\infty(E)$ доказана. ■

4.5. Мера и интеграл Лебега—Стилтьеса

В этом параграфе $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}$, $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция.

Определение 4.5.1. *Мерой Стилтьеса на $\mathcal{E}$, соответствующей функции α, назовём функцию $\mu_\alpha\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, такую, что для любых чисел $a \leqslant b$ выполнены равенства*

$$\begin{aligned} \mu_\alpha[a,b] &= \alpha(b+0) - \alpha(a-0), \\ \mu_\alpha[a,b) &= \alpha(b-0) - \alpha(a-0), \\ \mu_\alpha(a,b] &= \alpha(b+0) - \alpha(a+0), \end{aligned}$$

а при $a < b$ выполнено равенство

$$\mu_\alpha(a,b) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0).$$

Для любого клеточного множества $A \in \mathcal{E}$ и любого его разбиения попарно непересекающимися промежутками $\{I_m\}_{m=1}^N$, т. е.

$$A = \bigcup_{m=1}^N I_m, \quad I_m \cap I_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \neq k,$$

выполнено равенство

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{m=1}^N \mu_\alpha(I_m).$$

Замечание 4.5.2. Определение меры Стилтьеса клеточного множества не зависит от выбора его разбиения попарно непересекающимися промежутками. Доказательство аналогично доказательству утверждения 4.1.19. $\square$

Утверждение 4.5.3. *Мера Стилтьеса $\mu_\alpha\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ является конечно-аддитивной и регулярной.*

Доказательство. Пусть множества $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A &= \{I_m\}_{m=1}^N \quad \text{— разбиение множества } A, \\ \mathcal{P}_B &= \{J_k\}_{k=1}^M \quad \text{— разбиение множества } B. \end{aligned}$$

Так как $A \cap B = \varnothing$, то получаем

$$I_m \cap J_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \in \overline{1, N} \quad \text{и} \quad k \in \overline{1, M}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B$ является разбиением множества $A \cup B$, поэтому справедливо равенство

$$\mu_\alpha(A \cup B) = \sum_{m=1}^{N} \mu_\alpha(I_m) + \sum_{k=1}^{M} \mu_\alpha(J_k) = \mu_\alpha(A) + \mu_\alpha(B).$$

Таким образом, конечная аддитивность меры μ_α доказана.

Покажем регулярность μ_α для любого промежутка. Пусть числа $a \leqslant b$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех $t \in (b, b + \delta)$ выполнено неравенство

$$\alpha(t) - \alpha(b + 0) \leqslant \varepsilon,$$

а при всех $t \in (a - \delta, a)$ выполнено неравенство

$$\alpha(a - 0) - \alpha(t) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, открытый промежуток $G = (a - \delta, b + \delta) \supset [a, b]$ и справедливо неравенство

$$\mu_\alpha(G) - \mu_\alpha[a, b] = \alpha(b + \delta - 0) - \alpha(b + 0) + \alpha(a - 0) - \alpha(a - \delta + 0) \leqslant 2\varepsilon.$$

Так как промежуток $[a, b]$ замкнут, то полагаем $F = [a, b]$. Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка $[a, b]$ доказана.

Если $a = b$, то $(a, b) = [a, b) = (a, b] = \varnothing$. Поэтому для проверки регулярности μ_α в этом случае полагаем $F = G = \varnothing$ — одновременно замкнутый и открытый промежуток.

Далее считаем, что $a < b$. Тогда для выбранного $\varepsilon > 0$ существует

$$\gamma = \gamma(\varepsilon) \in \left(0, \frac{b - a}{2}\right),$$

такое, что при всех $t \in (b - \gamma, b)$ выполнено неравенство

$$\alpha(b - 0) - \alpha(t) \leqslant \varepsilon,$$

а при всех $t \in (a, a + \gamma)$ выполнено неравенство

$$\alpha(t) - \alpha(a + 0) \leqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим промежуток $(a, b]$. Определим замкнутый промежуток $F = [a+\gamma, b] \subset (a, b]$ и открытый промежуток $G = (a, b+\delta) \supset (a, b]$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(G) - \mu_\alpha(a, b] &= \alpha(b+\delta-0) - \alpha(b+0) \leqslant \varepsilon,\\ \mu_\alpha(a, b] - \mu_\alpha(F) &= \alpha(a+\gamma-0) - \alpha(a+0) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка $(a, b]$ доказана.

Рассмотрим промежуток $[a, b)$. Определим замкнутый промежуток $F = [a, b-\gamma] \subset [a, b)$ и открытый промежуток $G = (a-\delta, b) \supset \supset [a, b)$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(G) - \mu_\alpha[a, b) &= \alpha(a-0) - \alpha(a-\delta+0) \leqslant \varepsilon,\\ \mu_\alpha[a, b) - \mu_\alpha(F) &= \alpha(b-0) - \alpha(b-\gamma+0) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка $[a, b)$ доказана.

Рассмотрим промежуток (a, b). Определим замкнутый промежуток $F = [a+\gamma, b-\gamma] \subset (a, b)$ и открытый промежуток $G = (a, b)$. Тогда справедливо неравенство

$$\mu_\alpha(a, b) - \mu_\alpha(F) = \alpha(b-0) - \alpha(b-\gamma+0) + \alpha(a+\gamma-0) - \alpha(a+0) \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка (a, b) доказана.

Таким образом, доказана регулярность меры μ_α для любого промежутка. Далее доказательство регулярности меры μ_α для произвольного клеточного множества проводится совершенно аналогично соответствующему доказательству из утверждения 4.1.23. ■

Определение 4.5.4. *σ-кольцо μ_α-измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}(\mu_\alpha)$ называется σ-кольцом множеств, измеримых по Лебегу—Стилтьесу, а верхняя мера Лебега μ_α^* на $\mathfrak{M}(\mu_\alpha)$ называется мерой Лебега—Стилтьеса.*

Замечание 4.5.5. Если функция $\alpha_0(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то мера μ_{α_0} на кольце $\mathcal{E}$ является обычной мерой μ клеточного множества, значение которой на любом промежутке равно длине этого промежутка. Тогда $\mathfrak{M}(\mu_{\alpha_0}) = \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu_{\alpha_0}^* = \mu^*$. □

Определение 4.5.6. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha)$, функция $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является μ_α-измеримой. Интегралы Лебега*

$$I_+ = \int\limits_E f_+ \, d\mu_\alpha \quad \text{и} \quad I_- = \int\limits_E f_- \, d\mu_\alpha$$

называются интегралами Лебега—Стилтьеса неотрицательных на E от μ_α-измеримых функций f_+ и f_- соответственно. Если величины I_+ и I_- конечны, то функция f называется интегрируемой по Лебегу—Стилтьесу на множестве E, а её интеграл Лебега—Стилтьеса равен

$$\int\limits_E f \, d\mu_\alpha = I_+ - I_-.$$

Множество интегрируемых по Лебегу—Стилтьесу на множестве E функций обозначим $\mathcal{L}_\alpha(E)$.

Известно, что неубывающая на $\mathbb{R}$ функция α имеет не более счётного числа разрывов первого рода. Пусть $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — все разрывы функции α, причём $x_m \neq x_k$ при всех $m \neq k$. Для определённости будем считать, что функция α является непрерывной слева на $\mathbb{R}$, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\alpha(x - 0) = \alpha(x).$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ определим скачок функции α в точке разрыва x_m:

$$\lambda_m = \alpha(x_m + 0) - \alpha(x_m) > 0.$$

Выберем точку $x_0 \neq x_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и определим число

$$c_0 = \alpha(x_0).$$

Тогда для любого $x > x_0$ имеем неравенство

$$\sum_{m\,:\, x_0 < x_m < x} \lambda_m \leqslant \alpha(x) - \alpha(x_0),$$

и для любого $x < x_0$ имеем неравенство

$$\sum_{m\,:\, x \leqslant x_m < x_0} \lambda_m \leqslant \alpha(x_0) - \alpha(x).$$

Определим две функции

$$\beta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad \gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 4.5.7. *Пусть заданы последовательности положительных чисел $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$, различных чисел $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, число x_0, не равное x_m при $m \in \mathbb{N}$, и число c_0. Пусть для любого числового промежутка I выполнено неравенство*

$$\sum_{m\,:\,x_m \in I} \lambda_m < +\infty.$$

Пусть

$$J_+ = \left\{\, m \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_0 < x_m \,\right\}, \qquad J_- = \left\{\, m \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_0 > x_m \,\right\}.$$

Тогда неубывающую функцию $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называть функцией скачков, если для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\alpha(x) = c_0 + \sum_{m \in J_+} \lambda_m \beta(x - x_m) + \sum_{m \in J_-} (-\lambda_m)\gamma(x_m - x).$$

Пусть α — функция скачков. Тогда её значение $\alpha(x)$ для любого $x > x_0$ определяется равенством

$$\alpha(x) = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0 < x_m < x} \lambda_m,$$

а для любого $x < x_0$ — равенством

$$\alpha(x) = c_0 - \sum_{m\,:\,x \leqslant x_m < x_0} \lambda_m.$$

Для любого $x > x_0$ получаем

$$\alpha(x - 0) = c_0 + \lim_{\delta \to +0} \sum_{m\,:\,x_0 < x_m < x - \delta} \lambda_m = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0 < x_m < x} \lambda_m = \alpha(x),$$

для любого $x < x_0$ получаем

$$\alpha(x - 0) = c_0 - \lim_{\delta \to +0} \sum_{m\,:\,x - \delta \leqslant x_m < x_0} \lambda_m = c_0 - \sum_{m\,:\,x \leqslant x_m < x_0} \lambda_m = \alpha(x),$$

а для $x = x_0$ получаем

$$\alpha(x_0 - 0) = c_0 - \lim_{\delta \to +0} \sum_{m\,:\,x_0 - \delta \leqslant x_m < x_0} \lambda_m =$$

$$= c_0 - \sum_{m\,:\,x_0 \leqslant x_m < x_0} \lambda_m = c_0 = \alpha(x_0),$$

т. е. функция скачков α является непрерывной слева на $\mathbb{R}$. Далее для любого $x \geqslant x_0$ вида $x \neq x_s$ при всех $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$\alpha(x+0) = c_0 + \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_0<x_m<x+\delta} \lambda_m = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0<x_m\leqslant x} \lambda_m = \alpha(x),$$

а для $x = x_s > x_0$ находим

$$\alpha(x_s+0) = c_0 + \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_0<x_m<x_s+\delta} \lambda_m = \\ = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0<x_m\leqslant x_s} \lambda_m = \alpha(x_s) + \lambda_s.$$

Аналогично для любого $x < x_0$ вида $x \neq x_s$ при всех $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$\alpha(x+0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x+\delta\leqslant x_m<x_0} \lambda_m = c_0 - \sum_{m\,:\,x<x_m<x_0} \lambda_m = \alpha(x),$$

а для $x = x_s < x_0$ находим

$$\alpha(x_s+0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_s+\delta\leqslant x_m<x_0} \lambda_m = \\ = c_0 - \sum_{m\,:\,x_s<x_m<x_0} \lambda_m = \alpha(x_s) + \lambda_s.$$

Таким образом, функция α непрерывна справа в любой точке $x \neq x_s$ при всех s, а в каждой точке x_s она имеет разрыв справа со скачком, равным λ_s.

Утверждение 4.5.8. *Пусть α — неубывающая функция скачков. Тогда любое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является μ_α-измеримым, и справедливо равенство*

$$\mu_\alpha^*(E) = \sum_{m\,:\,x_m\in E} \lambda_m.$$

Вложение $f \in \mathcal{L}_\alpha(E)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m\,:\,x_m\in E} |f(x_m)|\lambda_m < +\infty,$$

при этом интеграл Лебега—Стилтьеса от функции f по множеству E равен

$$\int\limits_E f\,d\mu_\alpha = \sum_{m\,:\,x_m\in E} f(x_m)\lambda_m.$$

Доказательство. Для любых чисел $a \leqslant b$ имеем равенства

$$\mu_\alpha[a,b] = \alpha(b+0) - \alpha(a) = \sum_{m\,:\,a\leqslant x_m\leqslant b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m\in[a,b]}} \lambda_m,$$

$$\mu_\alpha[a,b) = \alpha(b) - \alpha(a) = \sum_{m\,:\,a\leqslant x_m< b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m\in[a,b)}} \lambda_m,$$

$$\mu_\alpha(a,b] = \alpha(b+0) - \alpha(a+0) = \sum_{m\,:\,a< x_m\leqslant b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m\in(a,b]}} \lambda_m,$$

$$\mu_\alpha(a,b) = \alpha(b) - \alpha(a+0) = \sum_{m\,:\,a< x_m< b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m\in(a,b)}} \lambda_m.$$

Таким образом, для любого числового промежутка I справедливо равенство

$$\mu_\alpha(I) = \sum_{m\,:\,x_m\in I} \lambda_m < +\infty.$$

Тогда для любого клеточного множества $A \in \mathcal{E}$ получаем равенство

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{m\,:\,x_m\in A} \lambda_m < +\infty.$$

Так как для любого $A \in \mathcal{E}$ имеем вложение

$$A\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha),$$

то справедливо равенство

$$\mu_\alpha^*\left(A\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty\right) = \mu_\alpha^*(A) - \mu_\alpha^*\left(\bigcup_{m\,:\,x_m\in A} x_m\right) =$$

$$= \mu_\alpha^*(A) - \sum_{m\,:\,x_m\in A} \mu_\alpha(x_m) = \sum_{m\,:\,x_m\in A} \lambda_m - \sum_{m\,:\,x_m\in A} \lambda_m = 0.$$

Следовательно, для любого множества $A \in \mathcal{E}$ множество

$$A\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}_0(\mu_\alpha).$$

В силу соотношениий

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [k, k+1) \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha),$$

получаем равенство

$$\mu_\alpha^*(\mathbb{R}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_\alpha[k, k+1) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m = \sum_{m\,:\, x_m \in \mathbb{R}} \lambda_m \in (0, +\infty].$$

Так как

$$\mu_\alpha^* \left(\mathbb{R} \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_\alpha^* \Big([k, k+1) \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty\Big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0 = 0,$$

то получаем

$$\mathbb{R} \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}_0(\mu_\alpha).$$

Следовательно, для любого множества $E \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$E \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R} \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}_0(\mu_\alpha).$$

Тогда, в силу замечания 4.1.37, получаем вложение

$$E \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}_0(\mu_\alpha).$$

Так как множество

$$\bigcup_{m\,:\, x_m \in E} \{x_m\} \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha)$$

как не более чем счетное объединение одноточечных промежутков, то получаем соотношение

$$E = \big(E \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty\big) \cup \left(\bigcup_{m\,:\, x_m \in E} \{x_m\} \right) \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha).$$

Следовательно, любое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является μ_α-измеримым, и справедливо равенство

$$\mu_\alpha^*(E) = \sum_{m\,:\, x_m \in E} \lambda_m.$$

Тогда любая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является μ_α-измеримой. Так как множество $E \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty$ имеет нулевую меру Лебега—Стилтьеса, то, в силу утверждения 4.3.23 и теоремы 4.3.25, получаем равенства

$$\int\limits_E f_+\, d\mu_\alpha = \sum_{m\,:\, x_m \in E} \left(\int\limits_{\{x_m\}} f_+\, d\mu_\alpha \right) =$$

$$= \sum_{m\,:\, x_{m \in E}} f_+(x_m) \mu_\alpha(x_m) = \sum_{m\,:\, x_{m \in E}} f_+(x_m) \lambda_m,$$

$$\int\limits_E f_-\,d\mu_\alpha = \sum_{m\,:\,x_m\in E}\left(\int\limits_{\{x_m\}} f_-\,d\mu_\alpha\right) =$$

$$= \sum_{m\,:\,x_{m\in E}} f_-(x_m)\mu_\alpha(x_m) = \sum_{m\,:\,x_{m\in E}} f_-(x_m)\lambda_m.$$

Таким образом, $f\in\mathcal{L}_\alpha(E)$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sum_{m\,:\,x_m\in E} |f(x_m)|\lambda_m < +\infty,$$

при этом интеграл Лебега—Стилтьеса от функции f по множеству E равен

$$\int\limits_E f\,d\mu_\alpha = \sum_{m\,:\,x_m\in E} f(x_m)\lambda_m.$$

■

Пусть $\mu\colon\mathcal{E}\to[0,+\infty)$ обозначает обычную меру клеточного множества, значение которой на любом числовом промежутке равно длине этого промежутка. Далее нам понадобится следующее

Утверждение 4.5.9. *Пусть функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда её производная f' является μ–измеримой функцией на $[a,b]$. Если производная f' ограничена на отрезке $[a,b]$, то $f'\in\mathcal{L}(E)$ и справедлива формула Ньютона—Лейбница:*

$$\int\limits_{[a,b]} f'\,d\mu = f(b)-f(a).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g\colon[a,b+1]\to\mathbb{R}$ вида

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[a,b],\\ f(b)+f'(b)(x-b), & x\in[b,b+1].\end{cases}$$

Тогда функция g дифференцируема на отрезке $[a,b+1]$, причём для любого $x\in[a,b]$ справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{m\to\infty} m\left(g\left(x+\tfrac{1}{m}\right)-g(x)\right).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$h_m(x) = m\left(g\left(x + \frac{1}{m}\right) - g(x)\right),$$

где $x \in [a, b]$. Тогда при каждом $m \in \mathbb{N}$ в силу утверждения 4.2.8 и следствия 4.2.9 функция h_m является μ–измеримой. Так как для любого $x \in [a, b]$ имеем соотношение

$$h_m(x) \to f'(x) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то, в силу следствия 4.2.7, получаем μ-измеримость функции f' на $[a, b]$.

Предположим, что производная f' является ограниченной на отрезке $[a, b]$, т. е. существует число $M > 0$, такое, что для любого $x \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$|f'(x)| \leqslant M.$$

Тогда, в силу утверждения 4.3.16, получаем, что функции f' и $|f'|$ являются μ-интегрируемыми по Лебегу на отрезке $[a, b]$. Для любого $x \in [a, b]$ и любого $m \in \mathbb{N}$ по теореме Лагранжа существует число

$$\xi_m \in \left(x, x + \frac{1}{m}\right),$$

такое, что

$$h_m(x) = g'(\xi_m).$$

Так как

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x), \quad x \in [a, b], \\ g'(x) &= f'(b), \quad x \in [b, b + 1], \end{aligned}$$

то имеем неравенство

$$|g'(x)| \leqslant M \qquad \forall\, x \in [a, b + 1].$$

Но тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [a, b]$ получаем неравенство

$$|h_m(x)| \leqslant M.$$

Следовательно, по следствию 4.3.39 теоремы Лебега об ограниченной сходимости, получаем равенство

$$\int\limits_{[a,b]} f'\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,b]} h_m\, d\mu.$$

По теореме 4.3.41 для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем равенство

$$\int\limits_{[a,b]} h_m \, d\mu = \int\limits_a^b h_m(x) \, dx,$$

где в правой части стоит интеграл Римана от функции h_m по отрезку $[a, b]$. Тогда получаем

$$\int\limits_a^b h_m(x) \, dx = m \int\limits_{a+\frac{1}{m}}^{b+\frac{1}{m}} g(x) \, dx - m \int\limits_a^b g(x) \, dx =$$

$$= m \int\limits_b^{b+\frac{1}{m}} g(x) \, dx - m \int\limits_a^{a+\frac{1}{m}} g(x) \, dx.$$

По теореме о среднем для интеграла Римана по отрезку от непрерывной функции, для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют числа

$$y_m \in \left[a, a + \frac{1}{m}\right] \quad \text{и} \quad z_m \in \left[b, b + \frac{1}{m}\right],$$

такие, что справедливы равенства

$$m \int\limits_a^{a+\frac{1}{m}} g(x) \, dx = g(y_m), \qquad m \int\limits_b^{b+\frac{1}{m}} g(x) \, dx = g(z_m).$$

Тогда при $m \to \infty$ имеем

$$y_m \to a + 0 \quad \text{и} \quad z_m \to b + 0,$$

следовательно,

$$g(y_m) \to g(a) = f(a) \quad \text{и} \quad g(z_m) \to g(b) = f(b).$$

Отсюда получаем формулу Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_{[a,b]} f' \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \left(m \int\limits_b^{b+\frac{1}{m}} g(x) \, dx - m \int\limits_a^{a+\frac{1}{m}} g(x) \, dx \right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \big(g(z_m) - g(y_m) \big) = f(b) - f(a).$$

■

Утверждение 4.5.10. *Пусть функция $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является неубывающей и дифференцируемой на $\mathbb{R}$, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ существует производная $\alpha'(x) \geqslant 0$. Пусть функция α' ограничена на любом ограниченном множестве из $\mathbb{R}$. Тогда*

1) *Для любого ограниченного множества $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ выполнены вложение*
$$E \in \mathfrak{M}_F(\mu_\alpha),$$
и равенство
$$\mu_\alpha^*(E) = \int\limits_E \alpha'\, d\mu.$$

2) *Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ выполнены вложение*
$$E \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha),$$
и равенство
$$\mu_\alpha^*(E) = \int\limits_E \alpha'\, d\mu.$$

3) *Для любого ограниченного множества $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и функции $f \in \mathcal{L}(E)$ выполнены вложение*
$$f \in \mathcal{L}_\alpha(E)$$
и равенство
$$\int\limits_E f\, d\mu_\alpha = \int\limits_E f\alpha'\, d\mu.$$

Доказательство. 1) Прежде всего заметим, что для любого промежутка I с концами $a \leqslant b$ в силу утверждения 4.5.9 имеем
$$\mu_\alpha(I) = \alpha(b) - \alpha(a) = \int\limits_I \alpha'\, d\mu.$$

Тогда для любого множества $A \in \mathcal{E}$ получаем равенство
$$\mu_\alpha(A) = \int\limits_A \alpha'\, d\mu.$$

Рассмотрим теперь ограниченное множество $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда по определению 4.1.33 существует последовательность клеточных множеств

$$\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E},$$

такая, что

$$d(A_m, E) = \mu^*(A_m \triangle E) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Так как множество E ограничено, то существует отрезок $[a, b] \supset E$. Тогда для множества $B_m = A_m \cap [a, b] \in \mathcal{E}$ получаем

$$B_m \triangle E \subset A_m \triangle E.$$

Следовательно,

$$d(B_m, E) = \mu^*(B_m \triangle E) \leqslant \mu^*(A_m \triangle E) = d(A_m, E) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

В силу регулярности меры Лебега μ^* на $\mathfrak{M}(\mu)$ существует открытое множество

$$G_m \supset B_m \triangle E,$$

такое, что

$$\mu^* \big(G_m \backslash (B_m \triangle E)\big) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Так как выполнено вложение

$$B_m \triangle E \subset [a, b],$$

то для множества

$$H_m = G_m \cap [a, b] \supset (B_m \triangle E)$$

верно вложение

$$H_m \backslash (B_m \triangle E) \subset G_m \backslash (B_m \triangle E)$$

и неравенство

$$\mu^* \big(H_m \backslash (B_m \triangle E)\big) \leqslant \mu^* \big(G_m \backslash (B_m \triangle E)\big) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Открытое множество $G_m \subset \mathbb{R}$ можно представить в виде счётного объединения попарно непересекающихся открытых (быть может, пустых) интервалов $I_{m,k}$, $k \in \mathbb{N}$, т. е.

$$G_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{m,k}, \quad \text{где} \quad I_{m,k} \cap I_{m,s} = \varnothing \quad \text{при} \quad k \neq s.$$

Так как
$$I_{m,k} \cap [a,b] \in \mathcal{E} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$
то справедливо равенство
$$\mu_\alpha\big(I_{m,k} \cap [a,b]\big) = \int\limits_{I_{m,k}\cap[a,b]} \alpha'\, d\mu.$$
Тогда, в силу теоремы 4.3.25,
$$\mu_\alpha^*(H_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\alpha\big(I_{m,k} \cap [a,b]\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{I_{m,k}\cap[a,b]} \alpha'\, d\mu =$$
$$= \int\limits_{H_m} \alpha'\, d\mu \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} \alpha'(x)\right) \mu^*(H_m).$$
Так как
$$\mu^*(H_m) = \mu^*\big(H_m \backslash (B_m \triangle E)\big) + \mu^*(B_m \triangle E) \leqslant \frac{1}{m} + d(B_m, E) \to 0,$$
при $m \to \infty$, то справедливо соотношение
$$\mu_\alpha^*(H_m) \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} \alpha'(x)\right) \mu^*(H_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$
Отсюда находим, что
$$\mu_\alpha^*(B_m \triangle E) \leqslant \mu_\alpha^*(H_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$
Следовательно, получаем требуемое вложение
$$E \in \mathfrak{M}_F(\mu_\alpha)$$
и равенство
$$\mu_\alpha^*(E) = \lim_{m\to\infty} \mu_\alpha(B_m) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{B_m} \alpha'\, d\mu.$$
Так как при $m \to \infty$ выполнено соотношение
$$\left| \int\limits_{B_m} \alpha'\, d\mu - \int\limits_{E} \alpha'\, d\mu \right| = \left| \int\limits_{B_m\backslash E} \alpha'\, d\mu - \int\limits_{E\backslash B_m} \alpha'\, d\mu \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{B_m \triangle E} \alpha'\, d\mu \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} \alpha'(x)\right) \mu^*(B_m \triangle E) \to 0,$$

то окончательно находим

$$\mu_\alpha^*(E) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{B_m} \alpha' \, d\mu = \int\limits_E \alpha' \, d\mu.$$

2) Для произвольного множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ для любого целого m определим ограниченное множество

$$E_m = E \cap [m, m+1) \in \mathfrak{M}_F(\mu).$$

Так как выполнено равенство

$$E = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} E_m,$$

а для любого $m \in \mathbb{Z}$, как показано в 1), выполнено вложение

$$E_m \in \mathfrak{M}_F(\mu_\alpha),$$

то, по определению μ_α-измеримости, справедливо вложение

$$E \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha).$$

Поскольку $E_m \cap E_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$, то получаем равенства

$$\mu_\alpha^*(E) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_\alpha^*(E_m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{E_m} \alpha' \, d\mu = \int\limits_E \alpha' \, d\mu.$$

3) Так как по предположению неотрицательная функция α' ограничена на ограниченном множестве E, то справедливы неравенства

$$0 \leqslant M = \sup_{x\in E} \big(\alpha'(x)\big) < +\infty.$$

Тогда на множестве E получаем неравенство

$$|f\alpha'| \leqslant |f| M \in \mathcal{L}(E),$$

т. е., в силу утверждения 4.3.21, получаем вложение

$$f\alpha' \in \mathcal{L}(E).$$

Если функция f — простая, то существуют попарно непересекающиеся μ-измеримые множества $E_m \subset E$ и различные числа c_m для $m \in \overline{1, N}$, такие, что

$$E = \bigcup_{m=1}^{N} E_m, \quad \text{а} \quad f(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m \delta_{E_m}(x), \quad x \in E.$$

Следовательно, получаем

$$\int\limits_E f\,d\mu_\alpha = \sum_{m=1}^{N} c_m \mu_\alpha^*(E_m) = \sum_{m=1}^{N} c_m \int\limits_{E_m} \alpha'\,d\mu = \int\limits_E f\alpha'\,d\mu.$$

Теперь рассмотрим произвольную μ-измеримую функция $f \in \mathcal{L}(E)$. По утверждению 4.3.7, существует последовательность простых μ-измеримых функций $s_m\colon E \to \mathbb{R}$, таких, что

$$(s_m)_+(x) \uparrow f_+(x) \quad \text{и} \quad (s_m)_-(x) \uparrow f_-(x) \quad \forall\, x \in E \quad \text{при } m \to \infty.$$

Тогда для любого $x \in E$ при $m \to \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (s_m\alpha')_+(x) &= (s_m)_+(x)\alpha'(x) \uparrow f_+(x)\alpha'(x), \\ (s_m\alpha')_-(x) &= (s_m)_-(x)\alpha'(x) \uparrow f_-(x)\alpha'(x). \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 4.3.32, находим

$$\int\limits_E f_+\alpha'\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_+\alpha'\,d\mu, \quad \int\limits_E f_-\alpha'\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_-\alpha'\,d\mu,$$

$$\int\limits_E f_+\,d\mu_\alpha = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_+\,d\mu_\alpha, \qquad \int\limits_E f_-\,d\mu_\alpha = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_-\,d\mu_\alpha.$$

С другой стороны, справедливы равенства

$$\int\limits_E (s_m)_+\,d\mu_\alpha = \int\limits_E (s_m)_+\alpha'\,d\mu, \qquad \int\limits_E (s_m)_-\,d\mu_\alpha = \int\limits_E (s_m)_-\alpha'\,d\mu.$$

Тогда

$$\int\limits_E f_+\,d\mu_\alpha = \int\limits_E f_+\alpha'\,d\mu < +\infty, \qquad \int\limits_E f_-\,d\mu_\alpha = \int\limits_E f_-\alpha'\,d\mu < +\infty.$$

Таким образом, получаем вложение $f \in \mathcal{L}_\alpha(E)$ и равенство

$$\int\limits_E f\,d\mu_\alpha = \int\limits_E f_+\,d\mu_\alpha - \int\limits_E f_-\,d\mu_\alpha = \int\limits_E f_+\alpha'\,d\mu - \int\limits_E f_-\alpha'\,d\mu = \int\limits_E f\alpha'\,d\mu,$$

что и требовалось. ■

Теперь рассмотрим измеримое пространство $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, множество $E \in \mathfrak{M}$ конечной меры, и функцию $f \in \mathcal{L}(E)$. Для любого числа t рассмотрим множество Лебега функции f:

$$L_<(f,t) = \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) < t \right\} \in \mathfrak{M}.$$

Определим числовую функцию $\alpha \colon \mathbb{R} \to [0, \mu(E)]$ по формуле

$$\alpha(t) = \mu\left(L_<(f,t)\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Функция α, очевидно, является неубывающей, так как

$$\forall\, t, \tau \in \mathbb{R} \,:\, t \leqslant \tau \quad \Rightarrow \quad L_<(f,t) \subset L_<(f,\tau) \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) \leqslant \alpha(\tau).$$

Также функция α непрерывна слева. Действительно, зафиксируем произвольно $t \in \mathbb{R}$, и рассмотрим множества

$$E_n = L_<\left(f, t - 2^{-n}\right) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset L_<(f,t), \quad \text{и} \quad L_<(f,t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Следовательно, в силу утверждения 4.1.11 для счётно–аддитивной меры μ, получаем

$$\mu(E_n) \to \mu\left(L_<(f,t)\right) = \alpha(t) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad : \quad \alpha(t) - \varepsilon \leqslant \mu(E_N) \leqslant \alpha(t).$$

Отсюда для всех $\tau \in \left(t - 2^{-N}, t\right)$ получаем

$$E_N \subset L_<(f,\tau) \subset L_<(f,t), \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) - \varepsilon \leqslant \mu(E_N) \leqslant \alpha(\tau) \leqslant \alpha(t),$$

то есть

$$0 \leqslant \alpha(t) - \alpha(\tau) \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, \tau \in \left(t - 2^{-N}, t\right).$$

Таким образом, непрерывность слева неубывающей функции α доказана.

С помощью этой функции α определяем на числовой оси меру Лебега–Стилтьеса μ_α. При этом оказывается, что интеграл Лебега $\int\limits_E f\, d\mu$ можно представить как интеграл Лебега–Стилтьеса $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\, d\mu_\alpha(\lambda)$:

Утверждение 4.5.11. *Пусть* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — *измеримое пространство, множество* $E \in \mathfrak{M}$ *имеет конечную меру, т. е.* $\mu(E) < +\infty$, *функция* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Пусть неубывающая функция* $\alpha\colon \mathbb{R} \to [0, \mu(E)]$ *имеет вид*

$$\alpha(t) = \mu\left(L_<(f, t)\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

и μ_α — *мера Лебега–Стилтьеса на числовой оси, соответствующая функции* α. *Тогда*

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\,d\mu_\alpha(\lambda).$$

Доказательство. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$ определим множество

$$E_{n,m} = \left\{ x \in E \;\;\middle|\;\; \frac{m-1}{n} \leqslant f(x) < \frac{m}{n} \right\}.$$

Заметим, что

$$E_{n,m} = L_<(f, m/n) \backslash L_<(f, (m-1)/n) \in \mathfrak{M}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ и любых $m, \ell \in \mathbb{Z}$ вида $m \neq \ell$ имеем

$$E_{n,m} \cap E_{n,\ell} = \varnothing.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} E_{n,m} = E \setminus \left\{ x \in E \;\;\middle|\;\; |f(x)| = +\infty \right\}.$$

Обозначим

$$E_\infty = \left\{ x \in E \;\;\middle|\;\; |f(x)| = +\infty \right\}$$

В силу утверждения 4.3.15, имеем

$$\mu(E_\infty) = 0.$$

Рассмотрим измеримую функцию $\psi_n\colon E \to \mathbb{R}$ вида

$$\psi_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-1}{n} \delta_{E_{n,m}}(x) + \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{m}{n} \delta_{E_{n,m}}(x), \qquad x \in E,$$

то есть при $x \in E_{n,m}$ выполнено

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{m-1}{n}, & m \in \mathbb{N}, \\[2ex] \frac{m}{n}, & m \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}. \end{cases}$$

Следовательно, для всех $x \in E\backslash E_\infty$ получаем

$$|\psi_n(x)| \leqslant |f(x)| \quad \text{и} \quad |f(x) - \psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\psi_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in E\backslash E_\infty$, то есть почти всюду на E, и выполнено условие ограниченной сходимости

$$|\psi_n(x)| \leqslant |f(x)| \in \mathcal{L}(E) \quad \text{для п. в. } x \in E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда по теореме 4.3.38 Лебега об ограниченной сходимости получаем

$$\int\limits_E \psi_n \, d\mu \to \int\limits_E f \, d\mu \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, имеем

$$\int\limits_E (\psi_n)_+ \, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-1}{n} \mu(E_{n,m}), \quad \int\limits_E (\psi_n)_- \, d\mu = \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{(-m)}{n} \mu(E_{n,m}),$$

откуда получаем, что

$$\int\limits_E \psi_n \, d\mu = \int\limits_E (\psi_n)_+ - \int\limits_E (\psi_n)_- = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-1}{n} \mu(E_{n,m}) + \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{m}{n} \mu(E_{n,m}).$$

Далее, так как неубывающая функция α непрерывна слева, то имеем

$$\mu(E_{n,m}) = \mu\left(L_<(f, m/n)\backslash L_<(f, (m-1)/n)\right) =$$

$$= \mu\left(L_<(f, m/n)\right) - \mu\left(L_<(f, (m-1)/n)\right) =$$

$$= \alpha\left(m/n\right) - \alpha\left((m-1)/n\right) = \mu_\alpha\big([(m-1)/n, m/n)\big).$$

Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda)_+ \, d\mu_\alpha(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right)} \lambda \, d\mu_\alpha(\lambda),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda)_- \, d\mu_\alpha(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{0} \int\limits_{\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right)} (-\lambda) \, d\mu_\alpha(\lambda),$$

то получаем неравенства:

$$\int\limits_E (\psi_n)_+\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m-1}{n}\mu(E_{n,m}) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m-1}{n}\mu_\alpha\Big(\big[\tfrac{m-1}{n},\tfrac{m}{n}\big)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{\left[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right)}\lambda\,d\mu_\alpha(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}}(\lambda)_+\,d\mu_\alpha(\lambda) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{n}\mu_\alpha\Big(\big[\tfrac{m-1}{n},\tfrac{m}{n}\big)\Big) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m-1}{n}\mu(E_{n,m}) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mu(E_{n,m}) \leqslant \int\limits_E(\psi_n)_+\,d\mu + \frac{\mu(E)}{n},$$

$$\int\limits_E (\psi_n)_-\,d\mu = \sum_{m=-\infty}^{0}\frac{(-m)}{n}\mu(E_{n,m}) = \sum_{m=-\infty}^{0}\frac{(-m)}{n}\mu_\alpha\Big(\big[\tfrac{m-1}{n},\tfrac{m}{n}\big)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=-\infty}^{0}\int\limits_{\left[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right)}(-\lambda)\,d\mu_\alpha(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}}(\lambda)_-\,d\mu_\alpha(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=-\infty}^{0}\frac{1-m}{n}\mu_\alpha\Big(\big[\tfrac{m-1}{n},\tfrac{m}{n}\big)\Big) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0}\frac{(-m)}{n}\mu(E_{n,m}) + \sum_{m=-\infty}^{0}\frac{1}{n}\mu(E_{n,m}) \leqslant \int\limits_E(\psi_n)_-\,d\mu + \frac{\mu(E)}{n},$$

Таким образом, имеем оценки

$$\int\limits_E(\psi_n)_+\,d\mu \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}(\lambda)_+\,d\mu_\alpha(\lambda) \leqslant \int\limits_E(\psi_n)_+\,d\mu + \frac{\mu(E)}{n},$$

$$\int\limits_E(\psi_n)_-\,d\mu \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}(\lambda)_-\,d\mu_\alpha(\lambda) \leqslant \int\limits_E(\psi_n)_-\,d\mu + \frac{\mu(E)}{n}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_E(\psi_n)_+\,d\mu - \int\limits_E(\psi_n)_-\,d\mu - \frac{\mu(E)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda)_+ \, d\mu_\alpha(\lambda) - \int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda)_- \, d\mu_\alpha(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E (\psi_n)_+ \, d\mu - \int\limits_E (\psi_n)_- \, d\mu + \frac{\mu(E)}{n},$$

откуда следуют неравенства

$$\int\limits_E \psi_n \, d\mu - \frac{\mu(E)}{n} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_\alpha(\lambda) \leqslant \int\limits_E \psi_n \, d\mu + \frac{\mu(E)}{n}.$$

Перехоя в них к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int\limits_E f \, d\mu \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_\alpha(\lambda) \leqslant \int\limits_E f \, d\mu \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_\alpha(\lambda),$$

что и требовалось. ■

Глава 5

Сопряжённое пространство

5.1. Теорема Хана—Банаха

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — комплексное линейное нормированное пространство. Сопряжённое пространство $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ было введено в определении 3.4.20.

Определение 5.1.1. *Функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$ назовём вещественно-линейным, если для любых $x, y \in X$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \in \mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ — комплексно-линейный (или, просто, линейный) функционал, т. е. для любых $x, y \in X$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Тогда функционал $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, очевидно, является вещественно-линейным, причём для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re}\big(f(ix)\big) = u(x) - iu(ix).$$

С другой стороны, для любого вещественно-линейного функционала $w\colon X \to \mathbb{R}$ определим функционал

$$g(x) = w(x) - iw(ix), \quad x \in X.$$

Тогда для любых $x, y \in X$ имеем

$$g(x + y) = w(x) + w(y) - iw(ix) - iw(iy) = g(x) + g(y).$$

Для любого $x \in X$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$g\big((\alpha + i\beta)x\big) = \alpha w(x) + \beta w(ix) - i\alpha w(ix) + i\beta w(x) =$$

$$= (\alpha + i\beta)\big(w(x) - iw(ix)\big) = (\alpha + i\beta)g(x).$$

Следовательно, функционал $g\colon X \to \mathbb{C}$ является комплексно-линейным. Таким образом, всякий комплексный линейный функционал

$f\colon X \to \mathbb{C}$ является непрерывным, т. е. $f \in X^*$, тогда и только тогда, когда вещественно-линейный функционал $\operatorname{Re} f\colon X \to \mathbb{R}$ является непрерывным, а всякий непрерывный вещественно-линейный функционал $w\colon X \to \mathbb{R}$ является вещественной частью единственного непрерывного линейного функционала $g \in X^*$ вида

$$g(x) = w(x) - iw(ix) \qquad \forall\, x \in X.$$

Лемма 5.1.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — комплексные линейные пространства, причём пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банахово. Пусть $Z \subset X$ — подпространство, всюду плотное в X. Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Тогда существует единственный линейный оператор $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, такой, что $B(z) = A(z)$ для всех $z \in Z$. При этом выполнено равенство*

$$\|A\| = \|B\|.$$

Доказательство. Для любого $x \in X$ существует последовательность

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z,$$

такая, что

$$\|z_n - x\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда получаем

$$\|A(z_n) - A(z_m)\|_Y \leqslant \|A\|\, \|z_n - z_m\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

т. е. последовательность $\{A(z_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ является фундаментальной. В силу полноты пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ существует вектор $y \in \in Y$, такой, что

$$\|A(z_n) - y\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Заметим, что указанный вектор $y \in Y$ не зависит от выбора последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$, сходящейся к вектору $x \in X$. Действительно, если другая последовательность $\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ является сходящейся к x, то

$$\|A(\tilde{z}_n) - A(z_n)\|_Y \leqslant \|A\|\, \|\tilde{z}_n - z_n\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} A(\tilde{z}_n) = \lim_{n\to\infty} A(z_n) = y,$$

что и требовалось. Поэтому вектор $y = y(x)$ зависит только от вектора $x \in X$. Положим

$$B(x) = y(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда для любых векторов $\tilde{x}, \hat{x} \in X$, чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, последовательностей $\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ и $\{\hat{z}\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ вида

$$\tilde{z}_n \to \tilde{x} \quad \text{и} \quad \hat{z}_n \to \hat{x} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

получаем

$$B(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A(\alpha\tilde{z}_n + \beta\hat{z}_n) =$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} A(\tilde{z}_n) + \beta \lim_{n\to\infty} A(\hat{z}_n) = \alpha B(\tilde{x}) + \beta B(\hat{x}).$$

Следовательно, отображение $B\colon X \to Y$ является линейным оператором. Так как для любого $z \in Z$ стационарная последовательность $z_n = z$ для любого $n \in \mathbb{N}$ является сходящейся к z, то

$$B(z) = \lim_{n\to\infty} A(z_n) = A(z).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|A\| = \sup_{z\in Z\colon\, \|z\|_X = 1} \|A(z)\|_Y = \sup_{z\in Z\colon\, \|z\|_X = 1} \|B(z)\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in X\colon\, \|x\|_X = 1} \|B(x)\|_Y = \|B\|.$$

С другой стороны, для любого $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$, такая, что

$$\|z_n - x\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда $\|z_n\| \to 1$ при $n \to \infty$ и выполнено

$$\|B(x)\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A(z_n)\|_Y \leqslant \|A\| \lim_{n\to\infty} \|z_n\|_X = \|A\|.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\|B\| = \sup_{x\in X\colon\, \|x\|_X = 1} \|B(x)\|_Y \leqslant \|A\|.$$

Таким образом, доказано равенство $\|A\| = \|B\|$. Отсюда, в частности, следует вложение $B \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Покажем единственность построенного оператора B. Предположим, что некоторый оператор $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ таков, что $C(z) = A(z)$ для любого $z \in Z$. Тогда для любого $x \in X$ и любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ вида

$$z_n \to x \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

в силу непрерывности оператора C и определения оператора B, получаем

$$C(x) = \lim_{n\to\infty} C(z_n) = \lim_{n\to\infty} A(z_n) = B(x),$$

т. е. справедливо равенство $B = C$, что и требовалось. ■

Определение 5.1.3. *Пусть X — комплексное линейное пространство. Множество $L \subset X$ назовём вещественно-линейным подпространством в пространстве X, если*

$$x + y \in L \quad \text{и} \quad tx \in L \qquad \forall\, x, y \in L \quad \text{и} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 5.1.4. (Хан, Банах) *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированое пространство, $L \subset X$ — вещественно-линейное подпространство. Пусть функция $p\colon X \to \mathbb{R}$ положительно однородна (т. е. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для любых $x \in X$, $\lambda \geqslant 0$), полуаддитивна (т. е. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in X$) и ограничена на единичной сфере:*

$$M = \sup_{\|x\|=1} |p(x)| < +\infty.$$

Пусть вещественно-линейный функционал $u\colon L \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$u(x) \leqslant p(x) \qquad \forall\, x \in L.$$

Тогда существует вещественно-линейный функционал $v\colon X \to \mathbb{R}$, такой, что

$$v(x) = u(x) \qquad \forall\, x \in L,$$

$$-p(-x) \leqslant v(x) \leqslant p(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Доказательство. Доказательство проведём в предположении сепарабельности пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, т. е. когда в X существует счётное всюду плотное подмножество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Общий случай без предположения сепарабельности пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ можно найти, например, в [2, ч. I, гл. 3, с. 68–70].

Для любого вектора $x \in X$ определим его вещественную линейную оболочку

$$\mathrm{Lin}\{x\} = \{\, tx \mid t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Ясно, что $\mathrm{Lin}\{x\}$ — вещественно-линейное подпространство пространства X. Определим последовательность $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ вещественно-линейных подпространств пространства X следующим образом:

$$L_0 = L, \quad L_n = L_{n-1} + \mathrm{Lin}\{x_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что

$$L_{n-1} \subset L_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть функционал $u_0 = u\colon L_0 \to \mathbb{R}$. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $k \in \overline{0, n-1}$ определены функционалы $u_k\colon L_k \to \mathbb{R}$, такие, что для любого $k \in \overline{1, n-1}$ выполнено равенство

$$u_k(x) = u_{k-1}(x) \qquad \forall\, x \in L_{k-1},$$

а для любого $x \in L_k$ выполнено неравенство

$$u_k(x) \leqslant p(x).$$

Тогда

$$u_k(-x) = -u_k(x) \leqslant p(-x).$$

Следовательно, получаем

$$\|u_k\| = \sup_{x \in L_k\colon \|x\|_X = 1} |u_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in L_k\colon \|x\|_X = 1} \max\{p(x), p(-x)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in L_k\colon \|x\|_X = 1} |p(x)| \leqslant M,$$

т. е. функцинал u_k является непрерывным на подпространстве L_k. Если $x_n \in L_{n-1}$, то имеет место равенство $L_n = L_{n-1}$, тогда полагаем $u_n = u_{n-1}$. Пусть выполнено $x_n \notin L_{n-1}$. Тогда получаем

$$L_n = L_{n-1} \oplus \mathrm{Lin}\{x_n\} \neq L_{n-1},$$

а для любого вектора $x \in L_n$ существует единственный вектор $y = y(x) \in L_{n-1}$ и скаляр $t = t(x) \in \mathbb{R}$, такие, что

$$x = y + t x_n.$$

Определим вещественно-линейный функционал $u_n\colon L_n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$u_n(y + tx_n) = u_{n-1}(y) + ta \qquad \forall\, y \in L_{n-1} \quad \text{и} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Здесь число $a \in \mathbb{R}$ будет определено ниже. Ясно, что $u_n = u_{n-1}$ на подпространстве L_{n-1}. Мы хотим добиться выполнения неравенства

$$u_n(y + tx_n) \leqslant p(y + tx_n) \qquad \forall\, y \in L_{n-1} \quad \text{и} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

При $t = 0$ это неравенство является верным, так как по предположению индукции

$$u_n(y) = u_{n-1}(y) \leqslant p(y) \qquad \forall\, y \in L_{n-1}.$$

При $t > 0$ получаем

$$a \leqslant \frac{1}{t}\big(p(y + tx_n) - u_{n-1}(y)\big) = p\left(\frac{y}{t} + x_n\right) - u_{n-1}\left(\frac{y}{t}\right).$$

При $t < 0$ получаем

$$a \geqslant \frac{1}{t}\big(p(y + tx_n) - u_{n-1}(y)\big) = u_{n-1}\left(\frac{y}{|t|}\right) - p\left(\frac{y}{|t|} - x_n\right).$$

Заметим, что для любых векторов $y, z \in L_{n-1}$ выполнено

$$u_{n-1}(y) + u_{n-1}(z) = u_{n-1}(y + z) \leqslant p(y + z) \leqslant p(y + x_n) + p(z - x_n).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$u_{n-1}(z) - p(z - x_n) \leqslant p(y + x_n) - u_{n-1}(y) \qquad \forall\, y, z \in L_{n-1}.$$

Тогда получаем

$$-\infty < b_n = \sup_{z \in L_{n-1}} \big(u_{n-1}(z) - p(z - x_n)\big) \leqslant$$

$$\leqslant c_n = \inf_{y \in L_{n-1}} \big(p(y + x_n) - u_{n-1}(y)\big) < +\infty.$$

Следовательно, выбрав число $a \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам

$$b_n \leqslant a \leqslant c_n,$$

получаем требуемое неравенство

$$u_n(y + tx_n) \leqslant p(y + tx_n) \qquad \forall\, y \in L_{n-1} \quad \text{и} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Определим множество
$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n,$$
которое является вещественно-линейным подпространством в X. Действительно, для любых $x, y \in N$ существуют $m, n \in \mathbb{N}$, такие, что
$$x \in L_n, \quad y \in L_m.$$
Тогда для $k = \max\{n, m\}$ получаем
$$x, y \in L_k, \quad \Rightarrow \quad x + y \in L_k \subset N \quad \text{и} \quad tx \in L_k \subset N \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$
Определим вещественно-линейный функционал $w\colon N \to \mathbb{R}$ следующим образом:
$$w = u_n \quad \text{на} \quad L_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Так как $\|u_n\| \leqslant M$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\|w\| \leqslant M$, т. е. функционал w является непрерывным. Так как множество N содержит всюду плотное подмножество множества X, то само N является всюду плотным в X. Тогда в силу леммы 5.1.2 существует единственный непрерывный вещественно-линейный функционал $v\colon X \to \mathbb{R}$, такой, что $v = w$ на N и $\|v\| = \|w\|$. По построению,
$$v(x) = w(x) = u(x) \qquad \forall\, x \in L.$$
Докажем неравенство
$$-p(-x) \leqslant v(x) \leqslant p(x) \qquad \forall\, x \in X.$$
Прежде всего заметим, что если $y_m \to 0$ при $m \to \infty$, то
$$|p(y_m)| \leqslant \|y_m\| M \to 0.$$
Следовательно, если $z_m \to z$ при $m \to \infty$, то
$$\varlimsup_{m\to\infty} p(z_m) \leqslant p(z) + \lim_{m\to\infty} p(z_m - z) = p(z).$$
Так как для любого $x \in X$ существует последовательность $z_m \in N$, такая, что
$$z_m \to x \quad \text{и} \quad w(z_m) \to v(x) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
то, в силу неравенства $w(z_m) \leqslant p(z_m)$, получаем
$$v(x) = \lim_{m\to\infty} w(z_m) \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} p(z_m) \leqslant p(x).$$
Отсюда $v(-x) \leqslant p(-x)$, т. е. $v(x) \geqslant -p(-x)$, что и требовалось. ■

Следствие 5.1.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство, $L \subset X$ — подпространство. Пусть линейный функционал $f\colon L \to \mathbb{C}$ является непрерывным. Тогда существует непрерывный линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{C}$, такой, что*

$$g(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in L,$$

и справедливо равенство

$$\|g\| = \|f\|.$$

Доказательство. Определим функцию $p\colon X \to \mathbb{R}$ вида

$$p(x) = \|f\|\,\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда функция p является полуаддитивной, положительно однородной и

$$M = \sup_{\|x\|_X = 1} |p(x)| = \|f\| < +\infty.$$

Рассмотрим вещественно-линейный функционал $u\colon L \to \mathbb{R}$ вида

$$u(x) = \operatorname{Re} f(x) \qquad \forall\, x \in L.$$

Тогда

$$u(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|_X = p(x) \quad \text{при всех} \quad x \in X.$$

По теореме 5.1.4, существует вещественно-линейный функционал

$$v\colon X \to \mathbb{R},$$

такой, что

$$v(x) = u(x) \quad \forall\, x \in L,$$

а для всех $x \in X$ выполнены неравенства

$$-p(-x) \leqslant v(x) \leqslant p(x).$$

Это означает, что

$$|v(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \quad \text{при всех} \quad x \in X.$$

Вещественно-линейный функционал v порождает линейный функционал

$$g\colon X \to \mathbb{C}$$

вида
$$g(x) = v(x) - iv(ix) \qquad \forall\, x \in X.$$
Так как для любого $x \in L$ выполнено равенство
$$f(x) = u(x) - iu(ix),$$
то
$$g(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in L.$$
Далее, для любого $x \in X$ запишем комплексное число $g(x)$ в экспоненциальной форме
$$g(x) = |g(x)|e^{i\varphi(x)}, \quad \text{где} \quad \varphi(x) \in [0, 2\pi).$$
Тогда получаем соотношения
$$|g(x)| = g(x)e^{-i\varphi(x)} = g\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) =$$
$$= \operatorname{Re} g\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) = v\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant p\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) = \|f\|\,\|x\|_X.$$
Следовательно, справедливо неравенство
$$\|g\| \leqslant \|f\|.$$
С другой стороны, справедливо обратное неравенство
$$\|f\| = \sup_{x \in L\colon\ \|x\|_X \leqslant 1} |f(x)| =$$
$$= \sup_{x \in L\colon\ \|x\|_X \leqslant 1} |g(x)| \leqslant \sup_{x \in X\colon\ \|x\|_X \leqslant 1} |g(x)| = \|g\|.$$
Следовательно, $\|f\| = \|g\|$, что и требовалось. ■

Следствие 5.1.6. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $L \subset X$ — замкнутое подпространство, а вектор $x_0 \notin L$, то существует функционал $f \in X^*$, такой, что*
$$f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in L, \qquad f(x_0) = 1,$$

и выполнено равенство

$$\|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)};$$

2) *для любого* $x_0 \neq 0$ *существует функционал* $f \in X^*$*, такой, что*

$$\|f\| = 1 \quad \text{и} \quad f(x_0) = \|x_0\|_X;$$

3) *если для вектора* $x_0 \in X$ *и для любого функционала* $f \in X^*$ *выполнено* $f(x_0) = 0$*, то* $x_0 = 0$*;*

4) *для любого* $x \in X$ *выполнено равенство*

$$\|x\|_X = \sup_{f \in X^*\colon \|f\|=1} |f(x)|.$$

Доказательство. 1. На подпространстве

$$M = L \oplus \{\, \alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{C} \,\}$$

рассмотрим линейный функционал $h\colon M \to \mathbb{C}$ вида

$$h(y + \alpha x_0) = \alpha \quad \text{при всех} \quad y \in L, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Имеем равенство

$$\|h\| = \sup_{\substack{y \in L \\ \alpha \neq 0}} \frac{|\alpha|}{\|y + \alpha x_0\|_X} = \sup_{z \in L} \frac{1}{\|z + x_0\|_X} = \frac{1}{\inf\limits_{z \in L} \|z - x_0\|_X} = \frac{1}{\rho(x_0, L)}.$$

Следовательно, линейный функционал h является непрерывным на M. По следствию 5.1.5, существует функционал $f \in X^*$, такой, что

$$f(x) = h(x) \quad \text{при всех} \quad x \in M,$$

откуда, в частности, следуют равенства

$$f(y) = h(y) = 0 \quad \text{при всех} \quad y \in L \quad \text{и} \quad f(x_0) = h(x_0) = 1,$$

а также выполнено соотношение

$$\|f\| = \|h\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}.$$

2. Пусть $L = \{\,0\,\}$ — нулевое подпространство в X. Так как $x_0 \neq \neq 0$, то $x_0 \notin L$. Тогда, в силу 1, существует функционал $g \in X^*$, такой, что

$$g(x_0) = 1 \quad \text{и} \quad \|g\| = \frac{1}{\|x_0\|_X}.$$

Следовательно, функционал

$$f(x) = \|x_0\|_X g(x), \qquad \forall\, x \in X,$$

является искомым.

3. Если предположить, что $x_0 \neq 0$, то в силу 2 существует функционал $f \in X^*$, такой, что

$$f(x_0) = \|x_0\|_X \neq 0,$$

что противоречит условию $f(x_0) = 0$.

4. Если $x = 0$, то $f(x) = 0$ для любого $f \in X^*$ и доказываемое равенство очевидно. Если $x \neq 0$, то для любого $f \in X^*$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\, \|x\|_X.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\sup_{f \in X^*\colon \|f\|=1} |f(x)| \leqslant \|x\|.$$

Так как, в силу 2, существует функционал $g \in X^*$, такой, что $\|g\| = 1$, и для данного x выполнено равенство $g(x) = \|x\|$, то получаем

$$\|x\|_X = g(x) = |g(x)| \leqslant \sup_{f \in X^*\colon \|f\|=1} |f(x)| \leqslant \|x\|_X,$$

что и требовалось. ■

Следствие 5.1.7. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — нетривиальное линейное нормированное пространство, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — неполное линейное нормированное пространство. Тогда пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является неполным.*

Доказательство. В силу неполноты линейного нормированного пространства Y в нём существует фундаментальная расходящаяся последовательность $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$. По условию, существует нетривиальный вектор $x_0 \in X$. В силу пункта 2 следствия 5.1.6, существует $f \in X^*$, такой, что

$$\|f\| = 1 \quad \text{и} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим линейный оператор $A_m\colon X \to Y$ вида

$$A_m(x) = f(x) y_m \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда
$$\|A_m\| = \|f\| \, \|y_m\|_Y = \|y_m\|_Y < +\infty,$$
т. е. $A_m \in \mathcal{L}(X, Y)$, и
$$|A_m - A_n\| = \|y_m - y_n\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$
Следовательно, последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является фундаментальной. Предположим, что она является сходящейся в $\mathcal{L}(X, Y)$. Тогда существует линейный оператор $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, такой, что
$$\|A_m - B\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$
Следовательно, получаем
$$\left\| \frac{B(x_0)}{\|x_0\|_X} - y_m \right\|_Y \leqslant \frac{\big\| B(x_0) - \|x_0\|_X y_m \big\|_Y}{\|x_0\|} =$$
$$= \frac{\big\| B(x_0) - A_m(x_0) \big\|_Y}{\|x_0\|_X} \leqslant \big\| B - A_m \big\| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$
Таким образом, расходящаяся фундаментальная последовательность $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ оказывается сходящейся в пространстве Y к вектору
$$\frac{B(x_0)}{\|x_0\|_X},$$
т. е. получили противоречие. ■

Т е о р е м а 5.1.8. (об отделимости) *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство, $A, B \subset X$ — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если множество A открыто, то существуют нетривиальный функционал $f \in X^*$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$, такие, что
$$\operatorname{Re} f(a) < \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$
При этом говорят, что множества A и B строго отделимы;

2) если множество A компактно, а B — замкнуто, то существуют нетривиальный функционал $f \in X^*$ и числа $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, такие, что
$$\operatorname{Re} f(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$
При этом говорят, что множества A и B сильно отделимы.

Доказательство. 1. Зафиксируем векторы $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ и определим

$$x_0 = b_0 - a_0.$$

Так как $A \cap B = \varnothing$, то $x_0 \neq 0$. Определим множество

$$C = A - B + x_0,$$

оно открыто в силу открытости A, выпукло в силу выпуклости A и B, и содержит ноль. Следовательно, существует число $R > 0$, такое, что

$$B_R(0) \subset C.$$

Рассмотрим функцию Минковского множества C:

$$\mu_C(x) = \inf \left\{ t > 0 \quad \middle| \quad \frac{x}{t} \in C \right\} \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда для любого $x \in X$ выполнено неравенство

$$\mu_C(x) \leqslant \frac{\|x\|_X}{R}.$$

Для любого $x \in X$ и $\lambda > 0$ получаем

$$\mu_C(\lambda x) = \inf \left\{ t > 0 \quad \middle| \quad \frac{\lambda x}{t} \in C \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \lambda\tau > 0 \quad \middle| \quad \frac{x}{\tau} \in C \right\} = \lambda \mu_C(x).$$

Если же $\lambda = 0$, то очевидны следующие равенства:

$$\mu_C(0x) = \mu_C(0) = 0 = 0\mu_C(x).$$

Таким образом, доказана положительная однородность функции μ_C. Далее заметим, что для любого $x \in X$ и любого числа $t > \mu_C(x)$ выполнено вложение

$$\frac{x}{t} \in C.$$

Действительно, по определению нижней грани для любого $t > \mu_C(x)$ существует положительное $\tau_t < t$, такое, что

$$\frac{x}{\tau_t} \in C.$$

Так как множество C выпукло и содержит ноль, то

$$\frac{\tau_t}{t} C = \frac{\tau_t}{t} C + \left(1 - \frac{\tau_t}{t}\right) 0 \subset C.$$

Следовательно,
$$\frac{x}{t} = \frac{\tau_t}{t}\,\frac{x}{\tau_t} \in \frac{\tau_t}{t}C \subset C.$$
Тогда для любых векторов $x, y \in X$ и любых чисел $\alpha > \mu_C(x)$ и $\beta > \mu_C(y)$ получаем вложения
$$\frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{и} \quad \frac{y}{\beta} \in C.$$
В силу выпуклости множества C получаем
$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{\beta} \in C.$$
Следовательно,
$$\mu_C(x+y) \leqslant \alpha + \beta.$$
Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\alpha \to \mu_C(x) + 0$ и $\beta \to \mu_C(y) + 0$, получим свойство полуаддитивности
$$\mu_C(x+y) \leqslant \mu_C(x) + \mu_C(y).$$
Так как $0 \notin A - B$, то $x_0 \notin C$. Следовательно,
$$\mu_C(x_0) \geqslant 1.$$
На вещественно-линейном подпространстве
$$\mathrm{Lin}\{x_0\} = \{\ tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\ \}$$
определим вещественно-линейный функционал
$$u(tx_0) = t, \qquad \forall, t \in \mathbb{R}.$$
Если $t \geqslant 0$, то получаем
$$u(tx_0) = t \leqslant t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0).$$
Если же $t < 0$, то
$$u(tx_0) = t < 0 \leqslant \mu_C(tx_0).$$
Таким образом, для любого $x \in \mathrm{Lin}\{x_0\}$ выполнено неравенство
$$u(x) \leqslant \mu_C(x).$$

Следовательно, по теореме 5.1.4, существует вещественно-линейный функционал $v\colon X \to \mathbb{R}$, такой, что

$$v(x) = u(x) \qquad \forall\, x \in \mathrm{Lin}\{x_0\}, \quad \text{и} \quad v(x) \leqslant \mu_C(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$|v(x)| \leqslant \frac{\|x\|_X}{R} \qquad \forall\, x \in X,$$

т. е. функционал v является непрерывным. Так как множество C открыто, то для любого $x \in C$ имеем неравенство

$$\mu_C(x) < 1.$$

Так как $v(x_0) = u(x_0) = 1$, то для любых векторов $a \in A$, $b \in B$ получаем

$$v(a) - v(b) + 1 = v(a - b + x_0) \leqslant \mu_C(a - b + x_0) < 1.$$

Следовательно,

$$v(a) < v(b) \qquad \forall\, a \in A, \quad \forall, b \in B.$$

Таким образом, выпуклые множества $v(A)$ и $v(B)$ не пересекаются, а множество $v(A)$ является открытым в силу открытости множества A. Действительно, для любого $a \in A$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$a + tx_0 \in A \qquad \forall\, t \in (-\delta, \delta).$$

Так как $v(a + tx_0) = v(a) + t$, то получаем, что интервал

$$(v(a) - \delta, v(a) + \delta) \subset v(A).$$

Возьмём

$$\gamma = \sup v(A).$$

Тогда

$$v(a) < \gamma \leqslant v(b) \qquad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

Осталось рассмотреть функционал $f \in X^*$, такой, что $\mathrm{Re}\, f = v$, т. е.

$$f(x) = v(x) - iv(ix) \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда для всех $a \in A$ и $b \in B$ получаем требуемые неравенства

$$\mathrm{Re}\, f(a) < \gamma \leqslant \mathrm{Re}\, f(b).$$

2. В силу замкнутости множества B и равенства

$$A \cap B = \varnothing,$$

для любого $x \in A$ существует $\varepsilon(x) > 0$, такое, что

$$O_{2\varepsilon(x)}(x) \cap B = \varnothing.$$

Так как семейство открытых шаров

$$\left\{ O_{\varepsilon(x)}(x) \;\middle|\; x \in A \right\}$$

образует открытое покрытие компакта A, то существует конечное подпокрытие

$$\left\{O_{\varepsilon(x_n)}(x_n)\right\}_{n=1}^{N}.$$

Пусть

$$\delta = \min_{1 \leqslant n \leqslant N} \varepsilon(x_n).$$

Рассмотрим открытое выпуклое множество

$$A_0 = A + O_\delta(0).$$

Тогда для любого вектора $a \in A_0$ существует вектор $x \in A$, такой, что

$$a \in O_\delta(x).$$

Существует номер $n \in \overline{1, N}$, такой, что

$$x \in O_{\varepsilon(x_n)}(x_n).$$

Следовательно, получаем вложение

$$a \in O_{\delta+\varepsilon(x_n)}(x_n) \subset O_{2\varepsilon(x_n)}(x_n) \subset B^c.$$

Поэтому

$$A_0 \cap B = \varnothing.$$

Тогда, в силу пункта 1, существует функционал $f \in X^*$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\operatorname{Re} f(a) < \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall\, a \in A_0, \quad \forall\, b \in B.$$

В силу компактности множества A и непрерывности функционала f, получаем, что $\operatorname{Re} f(A)$ — компактное подмножество открытого множества $\operatorname{Re} f(A_0)$. Тогда

$$\max \operatorname{Re} f(A) < \gamma,$$

т. е. существуют числа γ_1 и γ_2 вида

$$\max \operatorname{Re} f(A) < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma.$$

Поэтому для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем неравенства

$$\operatorname{Re} f(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} f(b),$$

что и требовалось. ■

Пример 5.1.9. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство, $A, B \subset X$ — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Может оказаться, что множества A и B неотделимы, т. е. не существует нетривиального функционала $f \in X^*$, такого, что

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \text{при всех} \quad a \in A \quad \text{и} \quad b \in B.$$

Пусть $X = CL_1[0,1]$ — множество, состоящее из всех комплекснозначных непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, норма в котором определяется как

$$\|x\|_1 = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Рассмотрим множества

$$A = \left\{\ x \in CL_1[0,1] \ \middle|\ x(0) = 1\ \right\}, \qquad B = \{\ 0\ \}.$$

Тогда A, B — выпуклые непересекающиеся множества, причём A всюду плотно в $CL_1[0,1]$. Предположим, что существует нетривиальный функционал $f \in X^*$, такой, что

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(0) = 0 \qquad \forall\, a \in A.$$

Для любого $x \in CL_1[0,1]$ существуют последовательности $a_n \in A$ и $b_n \in A$, такие, что

$$\|x - a_n\|_1 \to 0 \quad \text{и} \quad \|x + b_n\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(a_n) \leqslant 0,$$

$$\Big(-\operatorname{Re} f(x) \Big) = \operatorname{Re} f(-x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(b_n) \leqslant 0.$$

Следовательно,
$$\operatorname{Re} f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in X.$$
Но тогда получаем равенство
$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = 0 \qquad \forall\, x \in X,$$
что противоречит нетривиальности функционала f. ▲

Утверждение 5.1.10. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство. Тогда линейное отображение $F\colon X \to X^{**}$ вида*
$$(Fx)(f) = f(x) \qquad \forall\, x \in X, \quad \forall\, f \in X^*$$
осуществляет изометрический изоморфизм из X на подпространство $\operatorname{Im} F \subset X^{**}$, т. е. F взаимно однозначно отображает X на $\operatorname{Im} F$, причём
$$\|Fx\| = \|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Доказательство. Если для векторов $x, y \in X$ выполнено равенство $Fx = Fy$, то для любого $f \in X^*$ получаем $f(x) = f(y)$. Следовательно,
$$f(x - y) = 0 \qquad \forall\, f \in X^*.$$
Тогда, в силу пункта 3 следствия 5.1.6, получаем
$$x - y = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = y.$$
Таким образом, доказана взаимная однозначность отображения F из X на $\operatorname{Im} F$. Далее для любого $x \in X$, в силу пункта 4 следствия 5.1.6, получаем
$$\|Fx\| = \sup_{f \in X^*\colon \|f\| = 1} |(Fx)(f)| = \sup_{f \in X^*\colon \|f\| = 1} |f(x)| = \|x\|_X,$$
что и требовалось. ■

Определение 5.1.11. *Комплексное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ называется рефлексивным, если*
$$\operatorname{Im} F = X^{**},$$
т. е. если F является изометрическим изоморфизмом из X на X^{**}.

Определение 5.1.12. *Линейные нормированные пространства* $(X, \|\cdot\|_X)$ *и* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *будем называть равными, если они изометрически изоморфны, т. е. существует линейное взаимно однозначное отображение* Φ *из* X *на* Y, *такое, что*

$$\|x\|_X = \|\Phi(x)\|_Y \qquad \forall\, x \in X.$$

В этом случае будем писать $X = Y$.

Если пространство X рефлексивно, то получаем равенство

$$X = X^{**},$$

которое реализует изометрический изоморфизм F.

5.2. Малые лебеговы пространства

Для любого числа $p \geqslant 1$ определим линейное нормированное пространство

$$\ell_p = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\;\middle|\;\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty \right\},$$

норма в котором определяется равенством

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p}, \qquad x \in \ell_p.$$

Рассмотрим непрерывную слева функцию скачков $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}\colon\, k<x} 1, & x > 1, \\ 0, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда вложение $x \in \ell_p$ равносильно тому, что функция x определена μ_α-почти всюду на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет вложению

$$|x|^p \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R}).$$

При этом выполнено равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\mu_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p.$$

Следовательно, получаем равенство

$$\ell_p = \mathbb{L}_p(\mathbb{R}, \mu_\alpha).$$

Поэтому, по теореме 4.4.9, пространство ℓ_p является полным.

Определим ещё линейное нормированное пространство

$$\ell_\infty = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < +\infty \right\},$$

норма в котором определяется равенством

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|, \qquad x \in \ell_\infty,$$

и два его подпространства

$$\begin{aligned} c &= \left\{ x \in \ell_\infty \quad \middle| \quad \exists \lim_{k\to\infty} x(k) = x(\infty) \in \mathbb{C} \right\}, \\ c_0 &= \left\{ x \in c \;\middle|\; x(\infty) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ясно, что вложение $x \in \ell_\infty$ равносильно тому, что функция x определена μ_α-почти всюду на $\mathbb{R}$ и является μ_α-почти всюду ограниченной на $\mathbb{R}$. При этом, очевидно, выполнено равенство

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|.$$

Следовательно, получаем равенство

$$\ell_\infty = \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}, \mu_\alpha).$$

Поэтому, по теореме 4.4.29, пространство ℓ_∞ является полным. Очевидно, что подпространства c и c_0 являются замкнутыми в пространстве ℓ_∞. Следовательно, линейные пространства c и c_0 с нормой $\|\cdot\|_\infty$ также являются полными.

Утверждение 5.2.1. *Для любого числа $p \geqslant 1$ в пространствах ℓ_p и в пространстве c_0 существует счётный базис $\{e_m\}_{m=1}^\infty$, где*

$$e_m(k) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. Для любого $x \in \ell_p$ получаем

$$\left\| x - \sum_{m=1}^{N} x(m) e_m \right\|_p = \sqrt[p]{\sum_{m=N+1}^{\infty} |x(m)|^p} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

а для любого $y \in c_0$ получаем

$$\left\| y - \sum_{m=1}^{N} y(m) e_m \right\|_\infty = \sup_{m>N} |y(m)| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Если же для $x \in \ell_p$ существует последовательность $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ вида

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m e_m,$$

то для любого $m \in \mathbb{N}$ и номера $N > m$ получаем

$$|x(m) - \gamma_m| \leqslant \left\| x - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m e_m \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

т. е.

$$x(m) = \gamma_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Если для $y \in c_0$ существует последовательность $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ вида

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m e_m,$$

то для любого $m \in \mathbb{N}$ и номера $N > m$ получаем

$$|y(m) - \gamma_m| \leqslant \left\| y - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m e_m \right\|_\infty \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

т. е.

$$y(m) = \gamma_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

■

Утверждение 5.2.2. *В пространстве c существует счётный базис $\{e_m\}_{m=0}^{\infty}$, где элемент $e_0 \in c$ имеет вид*

$$e_0(k) = 1 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Для любого $z \in c$ выполнено вложение

$$z - z(\infty)e_0 \in c_0.$$

Следовательно,

$$z - z(\infty)e_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \big(z(m) - z(\infty)\big)\, e_m.$$

Таким образом, получаем следующее разложение:

$$z = z(\infty)e_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \big(z(m) - z(\infty)\big)\, e_m.$$

Если же для $z \in c$ существует последовательность $\{\gamma_m\}_{m=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ вида

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m e_m,$$

то для любого $N \in \mathbb{N}$ получаем

$$|z(N+1) - \gamma_0| \leqslant \left\| z - \sum_{m=0}^{N} \gamma_m e_m \right\|_{\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Так как $z(N+1) \to z(\infty)$ при $N \to \infty$, то получаем равенство

$$\gamma_0 = z(\infty).$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ получаем

$$|z(m) - z(\infty) - \gamma_m| \leqslant \left\| z - \sum_{m=0}^{N} \gamma_m e_m \right\|_{\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

т. е. $\gamma_m = z(m) - z(\infty)$, что и требовалось. ■

Утверждение 5.2.3. *Справедливо равенство*

$$\ell_1^* = \ell_\infty.$$

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм $\varPhi$ из ℓ_1^* на ℓ_∞. Для любого $f \in \ell_1^*$ и $x \in \ell_1$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m).$$

Определим
$$z(m) = f(e_m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$
Тогда
$$|z(m)| \leqslant \|f\|\, \|e_m\|_1 = \|f\|.$$
Следовательно, выполнено неравенство
$$\|z\|_\infty \leqslant \|f\|, \quad \text{т. е.} \quad z \in \ell_\infty.$$
С другой стороны, справедливы неравенства
$$|f(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)|\, |z(m)| \leqslant \|z\|_\infty\, \|x\|_1.$$
Следовательно, выполнено неравенство
$$\|f\| \leqslant \|z\|_\infty,$$
т. е. доказано равенство
$$\|f\| = \|z\|_\infty.$$
Таким образом, определено линейное отображение $\varPhi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ вида
$$(\varPhi f)(m) = f(e_m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$
причём справедливо равенство
$$\|f\| = \|\varPhi f\|_\infty.$$
Если для двух функционалов $f, g \in \ell_1^*$ выполнено равенство
$$\varPhi f = \varPhi g,$$
то для любого $x \in \ell_1$ получаем
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) g(e_m) = g(x),$$
т. е. $f = g$. Осталось показать, что
$$\operatorname{Im} \varPhi = \ell_\infty.$$
Для любого $z \in \ell_\infty$ определим линейный функционал
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) z(m), \qquad \forall\, x \in \ell_1.$$

Тогда выполнено неравенство

$$\|f\| \leqslant \|z\|_\infty,$$

т. е. справедливо вложение $f \in \ell_1^*$, и

$$f(e_m) = z(m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, доказано равенство

$$\varPhi f = z,$$

что и требовалось. ∎

Утверждение 5.2.4. *При $1 < p < +\infty$ справедливо равенство*

$$\ell_p^* = \ell_q, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм $\varPhi$ из ℓ_p^* на ℓ_q. Для любого $f \in \ell_p^*$ и $x \in \ell_p$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $z(m) = f(e_m)$ и число

$$s_m = \begin{cases} \frac{\overline{z(m)}}{|z(m)|}, & z(m) \neq 0, \\ 0, & z(m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $x_N \in \ell_p$ вида

$$x_N(m) = \begin{cases} |z(m)|^{\frac{q}{p}} s_m, & m \in \overline{1,N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$x_N(m) z(m) = \begin{cases} |z(m)|^q, & m \in \overline{1,N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Следовательно, при каждом $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$|f(x_N)| = \sum_{m=1}^{N} |z(m)|^q \leqslant \|f\| \, \|x_N\|_p = \|f\| \left(\sum_{m=1}^{N} |z(m)|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

т. е. справедливо неравенство

$$\left(\sum_{m=1}^{N} |z(m)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

Тогда при $N \to \infty$ получаем

$$\|z\|_q \leqslant \|f\|, \quad \text{т. е.} \quad z \in \ell_q.$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера, для любого $x \in \ell_p$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)| \, |z(m)| \leqslant \|z\|_q \, \|x\|_p.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\|f\| \leqslant \|z\|_q,$$

т. е. доказано равенство $\|f\| = \|z\|_q$. Таким образом, определено линейное отображение

$$\varPhi\colon \ell_p^* \to \ell_q$$

вида

$$(\varPhi f)(m) = f(e_m) \qquad \forall \, m \in \mathbb{N},$$

причём справедливо равенство

$$\|f\| = \|\varPhi f\|_q.$$

Если для двух функционалов $f, g \in \ell_p^*$ выполнено равенство

$$\varPhi f = \varPhi g,$$

то для любого $x \in \ell_p$ получаем

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) g(e_m) = g(x),$$

т. е. $f = g$. Осталось показать, что $\operatorname{Im} \Phi = \ell_q$. Для любого $z \in \ell_q$ определим линейный функционал

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) z(m), \qquad \forall\, x \in \ell_p.$$

Тогда, в силу неравенства Гёльдера, выполнено неравенство

$$\|f\| \leqslant \|z\|_q,$$

т. е. справедливо вложение $f \in \ell_p^*$, и

$$f(e_m) = z(m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, доказано равенство $\Phi f = z$, что и требовалось. ■

Утверждение 5.2.5. *Справедливо равенство*

$$c_0^* = \ell_1.$$

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм Φ из c_0^* на ℓ_1. Для любого $f \in c_0^*$ и $x \in c_0$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $z(m) = f(e_m)$ и число

$$s_m = \begin{cases} \dfrac{\overline{z(m)}}{|z(m)|}, & z(m) \neq 0, \\[2ex] 0, & z(m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $x_N \in c_0$ вида

$$x_N(m) = \begin{cases} s_m, & m \in \overline{1, N}, \\[2ex] 0, & m > N. \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$x_N(m) z(m) = \begin{cases} |z(m)|, & m \in \overline{1, N}, \\[2ex] 0, & m > N. \end{cases}$$

Следовательно, при каждом $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$|f(x_N)| = \sum_{m=1}^{N} |z(m)| \leqslant \|f\| \, \|x_N\|_\infty \leqslant \|f\|.$$

Тогда при $N \to \infty$ получаем

$$\|z\|_1 \leqslant \|f\|, \quad \text{т. е.} \quad z \in \ell_1.$$

С другой стороны, для любого $x \in c_0$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)| \, |z(m)| \leqslant \|z\|_1 \, \|x\|_\infty.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\|f\| \leqslant \|z\|_1,$$

т. е. доказано равенство

$$\|f\| = \|z\|_1.$$

Таким образом, определено линейное отображение $\varPhi\colon c_0^* \to \ell_1$ вида

$$(\varPhi f)(m) = f(e_m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

причём справедливо равенство

$$\|f\| = \|\varPhi f\|_1.$$

Если для двух функционалов $f, g \in \ell_1^*$ выполнено равенство

$$\varPhi f = \varPhi g,$$

то для любого $x \in c_0$ получаем

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) g(e_m) = g(x),$$

т. е. $f = g$. Осталось показать, что

$$\operatorname{Im} \varPhi = \ell_1.$$

Для любого $z \in \ell_1$ определим линейный функционал

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) z(m), \qquad \forall\, x \in c_0.$$

Тогда выполнено неравенство

$$\|f\| \leqslant \|z\|_1,$$

т. е. справедливо вложение $f \in c_0^*$, и

$$f(e_m) = z(m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, доказано равенство

$$\varPhi f = z,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 5.2.6. *Справедливо равенство*

$$c^* = \ell_1.$$

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм $\varPhi$ из c^* на ℓ_1. Для любого $f \in c^*$ и $x \in c$ справедливо равенство

$$f(x) = x(\infty) f(e_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \big(x(m) - x(\infty)\big)\, f(e_m).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим число

$$s_m = \begin{cases} \frac{\overline{f(e_m)}}{|f(e_m)|}, & f(e_m) \neq 0, \\ 0, & f(e_m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $x_N \in c$ вида

$$x_N(m) = \begin{cases} s_m, & m \in \overline{1, N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$x_N(m) f(e_m) = \begin{cases} |f(e_m)|, & m \in \overline{1, N}, \\ 0, & m > N, \end{cases}$$

а $x_N(\infty) = 0$. Следовательно, при каждом $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$|f(x_N)| = \sum_{m=1}^{N} |f(e_m)| \leqslant \|f\| \, \|x_N\|_\infty \leqslant \|f\|.$$

Тогда при $N \to \infty$ получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} |f(e_m)| \leqslant \|f\|.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$f(x) = x(\infty) \left(f(e_0) - \sum_{m=1}^{\infty} f(e_m) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m).$$

Определим $z_f \in \ell_1$ вида

$$z_f(1) = f(e_0) - \sum_{m=1}^{\infty} f(e_m), \quad \text{а} \quad z_f(m) = f(e_{m-1}) \quad \text{при} \quad m \geqslant 2.$$

Тогда получаем

$$f(x) = x(\infty) z_f(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m) z_f(m+1).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим число

$$t_m = \begin{cases} \frac{\overline{z_f(m)}}{|z_f(m)|}, & z_f(m) \neq 0, \\ 0, & z_f(m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $y_N \in c$ вида

$$y_N(m) = \begin{cases} t_{m+1}, & m \in \overline{1, N}, \\ t_1, & m > N. \end{cases}$$

Тогда $y_N(\infty) = t_1$, т. е.

$$y_N(\infty) z_f(1) = |z_f(1)|,$$

а для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$y_N(m) z_f(m+1) = \begin{cases} |z_f(m+1)|, & m \in \overline{1, N}, \\ t_1 z_f(m+1), & m > N. \end{cases}$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$f(y_N) = |z_f(1)| + \sum_{m=1}^{N} |z_f(m+1)| + t_1 \sum_{m=N+1}^{\infty} z_f(m+1).$$

Так как $z_f \in \ell_1$, то

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} z_f(m+1) \to 0 \quad \text{и} \quad f(y_N) \to \|z_f\|_1 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Тогда в силу неравенства

$$|f(y_N)| \leqslant \|f\| \, \|y_N\|_\infty \leqslant \|f\|,$$

получаем

$$\lim_{N\to\infty} |f(y_N)| = \|z_f\|_1 \leqslant \|f\|.$$

С другой стороны, для любого $x \in c$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leqslant |x(\infty)| \, |z_f(1)| + \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)| \, |z_f(m+1)| \leqslant \|z_f\|_1 \, \|x\|_\infty.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\|f\| \leqslant \|z_f\|_1,$$

т. е. доказано равенство

$$\|f\| = \|z_f\|_1.$$

Таким образом, определено линейное отображение $\varPhi\colon c^* \to \ell_1$ вида $(\varPhi f)(m) = z_f(m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, причём

$$\|f\| = \|\varPhi f\|_1.$$

Если для двух функционалов $f, g \in \ell_1^*$ выполнено равенство

$$\varPhi f = \varPhi g,$$

т. е. $z_f = z_g$, то для любого $x \in c_0$ получаем

$$f(x) = x(\infty) z_f(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m) z_f(m+1) =$$

$$= x(\infty) z_g(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m) z_g(m+1) = g(x).$$

Таким образом, $f = g$. Осталось показать, что

$$\operatorname{Im} \varPhi = \ell_1.$$

Для любого $z \in \ell_1$ определим линейный функционал

$$f(x) = x(\infty)z(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z(m+1) \qquad \forall\, x \in c.$$

Тогда выполнено неравенство

$$\|f\| \leqslant \|z\|_1,$$

т. е. справедливо вложение $f \in c^*$. При этом

$$f(e_m) = z(m+1) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

а

$$f(e_0) = z(1) + \sum_{m=1}^{\infty} z(m+1) = z(1) + \sum_{m=1}^{\infty} f(e_m),$$

т. е.

$$z(1) = f(e_0) - \sum_{m=1}^{\infty} f(e_m).$$

Следовательно, доказано равенство

$$\varPhi f = z,$$

что и требовалось. ■

Далее мы покажем, что для любого числа $p > 1$ пространство ℓ_p является рефлексивным, а пространства ℓ_1, c_0 и c рефлексивными не являются. Из утверждения 5.2.4 сразу ясно, что для любого числа $p > 1$ выполнены равенства

$$\ell_p^{**} = \ell_q^* = \ell_p, \quad \text{где} \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Т. е. пространства ℓ_p^{**} и ℓ_p изометрически изоморфны. Но для обоснования рефлексивности пространства мало указать какой-то изометрический изоморфизм между ним и его вторым сопряжённым. По определению 5.1.11 рефлексивности линейного нормированного пространства, требуется доказать, что отображение F, введённое в утверждении 5.1.10, осуществляет этот изометрический изоморфизм. Из утверждений 5.2.5, 5.2.6 и 5.2.3 следует, что

$$c_0^{**} = \ell_1^* = \ell_\infty \quad \text{и} \quad c^{**} = \ell_1^* = \ell_\infty,$$

т. е. пространства c_0^{**} и c^{**} изометрически изоморфны пространству ℓ_∞. В силу несепарабельности пространства ℓ_∞ (см. пример 1.3.5) получаем, что изометрически изоморфные ему пространества c_0^{**} и c^{**} также несепарабельны. Так как пространства c_0 и c являются сепарабельными (поскольку в c_0 и c есть счётный базис в силу утверждения 5.2.1 и утверждения 5.2.2), то отсюда следует отсутствие изометрического изоморфизма между ними и несепарабельными c_0^{**} и c^{**} соответственно. То есть

$$c_0^{**} \neq c_0 \quad \text{и} \quad c^{**} \neq c.$$

Следовательно, пространства c_0 и c нерефлексивны. Далее мы напрямую покажем, что выполнено $\operatorname{Im} F \neq c_0^{**}$ для отображения $F\colon c_0 \to c_0^{**}$ и $\operatorname{Im} F \neq c^{**}$ для отображения $F\colon c \to c^{**}$.

Утверждение 5.2.7. *Пусть число $p > 1$. Тогда пространство ℓ_p рефлексифно.*

Доказательство. Пусть число $q = \frac{p}{p-1}$. В силу утверждения 5.2.4, имеем равенства

$$\ell_p^* = \ell_q \quad \text{и} \quad \ell_q^* = \ell_p.$$

Пусть

$$\Phi\colon \ell_p^* \to \ell_q \quad \text{и} \quad \Psi\colon \ell_q^* \to \ell_p$$

изометрические изоморфизмы, реализующие указанные равенства. Нам требуется для введённого в утверждении 5.1.10 отбражения $F\colon \ell_p \to \ell_p^{**}$ доказать равенство

$$\operatorname{Im} F = \ell_p^{**},$$

т. е. для любого функционала $H \in \ell_p^{**}$ требуется предъявить элемент $x \in \ell_p$, такой, что

$$H(f) = f(x) \qquad \forall\, f \in \ell_p^*.$$

Для любого $f \in \ell_p^*$ рассмотрим элемент

$$y = \Phi(f) \in \ell_q.$$

Тогда получаем равенство
$$H(f) = H\left(\mathit{\Phi}^{-1}(y)\right) = \left(H \circ \mathit{\Phi}^{-1}\right)(y).$$
Отображение
$$g = H \circ \mathit{\Phi}^{-1}\colon \ell_q \to \mathbb{C}$$
является линейным и непрерывным как суперпозиция линейных непрерывных отображений. Следовательно, справедливо вложение
$$g \in \ell_q^*.$$
Определив элемент
$$x = \mathit{\Psi}(g) = \mathit{\Psi}\left(H \circ \mathit{\Phi}^{-1}\right) \in \ell_p,$$
сразу получаем требуемое равенство:
$$H(f) = g(y) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)y(m) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\left(\mathit{\Phi}(f)\right)(m) = f(x).$$
Заметим, что отображение $F\colon \ell_p \to \ell_p^{**}$ имеет вид
$$Fx = \left(\mathit{\Psi}^{-1}(x)\right) \circ \mathit{\Phi} \qquad \forall\, x \in \ell_p.$$
■

У т в е р ж д е н и е 5.2.8. *Пространство c_0 нерефлексифно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждений 5.2.5 и 5.2.3 имеем равенства
$$c_0^* = \ell_1 \quad \text{и} \quad \ell_1^* = \ell_\infty.$$
Пусть
$$\mathit{\Phi}\colon c_0^* \to \ell_1 \quad \text{и} \quad \mathit{\Psi}\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$$
изометрические изоморфизмы, реализующие указанные равенства. Требуется для введённого в утверждении 5.1.10 отображения $F\colon c_0 \to$ $\to c_0^{**}$ доказать неравенство
$$\operatorname{Im} F \neq c_0^{**},$$
т. е. предъявить функционал $H \in c_0^{**} \setminus \operatorname{Im} F$.

Рассмотрим произвольный функционал $H \in c_0^{**}$. Определим отображение
$$g = H \circ \mathit{\Phi}^{-1}\colon \ell_1 \to \mathbb{C}.$$

Отображение g линейно и непрерывно как суперпозиция линейных и непрерывных отображений. Следовательно, $g \in \ell_1^*$. Определим элемент

$$z = \Psi(g) = \Psi\left(H \circ \Phi^{-1}\right) \in \ell_\infty.$$

Тогда для любого $f \in c_0^*$ получаем равенство:

$$H(f) = g\left(\Phi(f)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} z(m)\left(\Phi(f)\right)(m).$$

Обратно, любой элемент $z \in \ell_\infty$ порождает линейный функционал

$$H = \left(\Psi^{-1}(z)\right) \circ \Phi \in c_0^{**},$$

который в свою очередь определяет тот же элемент

$$z = \Psi\left(H \circ \Phi^{-1}\right) \in \ell_\infty.$$

Если же функционал $H \in \operatorname{Im} F$, т. е. для него существует единственный элемент $x \in c_0$ вида $H = Fx$, то для любого $f \in c_0^*$ получаем

$$H(f) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\left(\Phi(f)\right)(m) = \left(\Psi^{-1}(x)\right)\left(\Phi(f)\right).$$

Таким образом, выполнено равенство

$$H = \left(\Psi^{-1}(x)\right) \circ \Phi.$$

Следовательно, для любого элемента $z \in \ell_\infty \backslash c_0$ соответствующий ему функционал

$$H = \left(\Psi^{-1}(z)\right) \circ \Phi \in c_0^{**} \backslash \operatorname{Im} F,$$

что и требовалось. ■

У т в е р ж д е н и е 5.2.9. *Пространство c нерефлексифно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждений 5.2.6 и 5.2.3 имеем равенства

$$c^* = \ell_1 \quad \text{и} \quad \ell_1^* = \ell_\infty.$$

Пусть

$$\Phi\colon c^* \to \ell_1 \quad \text{и} \quad \Psi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$$

изометрические изоморфизмы, реализующие указанные равенства. Требуется для введённого в утверждении 5.1.10 отображения $F\colon c \to$ $\to c^{**}$ доказать неравенство

$$\operatorname{Im} F \neq c^{**},$$

т. е. предъявить функционал $H \in c^{**} \setminus \operatorname{Im} F$.

Рассмотрим произвольный функционал $H \in c^{**}$. Определим отображение

$$g = H \circ \varPhi^{-1}\colon \ell_1 \to \mathbb{C}.$$

Отображение g линейно и непрерывно как суперпозиция линейных и непрерывных отображений. Следовательно, $g \in \ell_1^*$. Определим элемент

$$z = \varPsi(g) = \varPsi\left(H \circ \varPhi^{-1}\right) \in \ell_\infty.$$

Тогда для любого $f \in c^*$ получаем равенство:

$$H(f) = g\left(\varPhi(f)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} z(m)\left(\varPhi(f)\right)(m).$$

Обратно, любой элемент $z \in \ell_\infty$ порождает линейный функционал

$$H = \left(\varPsi^{-1}(z)\right) \circ \varPhi \in c^{**},$$

который в свою очередь определяет тот же элемент

$$z = \varPsi\left(H \circ \varPhi^{-1}\right) \in \ell_\infty.$$

Если же функционал $H \in \operatorname{Im} F$, т. е. для него существует единственный элемент $x \in c$ вида $H = Fx$, то для любого $f \in c^*$ получаем

$$H(f) = f(x) = x(\infty)\left(\varPhi(f)\right)(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\left(\varPhi(f)\right)(m+1).$$

Определив элемент $y \in c$ вида

$$y(1) = x(\infty) \quad \text{и} \quad y(m+1) = x(m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

получим равенство

$$H(f) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} y(m)\left(\varPhi(f)\right)(m) = \left(\varPsi^{-1}(y)\right)\left(\varPhi(f)\right).$$

Таким образом, выполнено равенство

$$H = \big(\Psi^{-1}(y)\big) \circ \Phi.$$

Следовательно, для любого элемента $z \in \ell_\infty \setminus c$ соответствующий ему функционал

$$H = \big(\Psi^{-1}(z)\big) \circ \Phi \in c^{**} \setminus \operatorname{Im} F,$$

что и требовалось. ■

У т в е р ж д е н и е 5.2.10. *Пространство ℓ_1 нерефлексифно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения 5.2.3 имеем равенство

$$\ell_1^* = \ell_\infty.$$

Пусть

$$\Phi \colon \ell_1^* \to \ell_\infty$$

изометрический изоморфизм, реализующий указанное равенство. Требуется для введённого в утверждении 5.1.10 отображения $F \colon \ell_1 \to \ell_1^{**}$ доказать неравенство

$$\operatorname{Im} F \neq \ell_1^{**},$$

т. е. предъявить функционал $H \in \ell_1^{**} \setminus \operatorname{Im} F$.

Заметим, что для любого элемента $x \in \ell_1$ и любого функционала $f \in \ell_1^*$ справедливо равенство

$$(Fx)(f) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) \big(\Phi(f)\big)(m).$$

Для любого функционала $H \in \ell_1^{**}$ определим

$$g = H \circ \Phi^{-1} \in \ell_\infty^*.$$

Тогда для любого функционала $f \in \ell_1^*$, обозначив

$$y = \Phi(f) \in \ell_\infty,$$

получаем равенство $H(f) = g(y)$. Следовательно, функционал H попадёт в $\operatorname{Im} F$ тогда и только тогда, когда для функционала

$$g = H \circ \Phi^{-1} \in \ell_\infty^*$$

найдётся элемент $x \in \ell_1$, такой, что

$$g(y) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)y(m) \qquad \forall\, y \in \ell_\infty.$$

Предъявим функционал $g \in \ell_\infty^*$, для которого это равенство не выполняется, и тогда функционал

$$H = g \circ \Phi \in \ell_1^{**} \setminus \operatorname{Im} F.$$

Рассмотрим линейный функционал $g_0 \colon c \to \mathbb{C}$ вида

$$g(z) = z(\infty) \qquad \forall\, z \in c.$$

Очевидно, что $\|g_0\| = 1$, т. е. g_0 — непрерывный линейный функционал, определённый на подпространстве c пространства ℓ_∞. По следствию 5.1.5 теоремы Хана-Банаха, существует функционал $g \in \ell_\infty$, такой, что $g = g_0$ на подпространстве c, причём

$$\|g\| = \|g_0\| = 1.$$

Предположим,что для этого функционала g найдётся элемент $x \in \ell_1$, такой, что для всех $y \in \ell_\infty$ выполнено

$$g(y) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)y(m).$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем:

$$x(m) = g(e_m) = g_0(e_m) = e_m(\infty) = 0.$$

Следовательно, функционал g — нулевой, что противоречит равенству $\|g\| = 1$. Таким образом, функционал

$$H = g \circ \Phi \in \ell_1^{**}$$

не принадлежит $\operatorname{Im} F$, что и требовалось. ■

Нерефлексивность пространства ℓ_1 также вытекает из следующего важного утверждения.

Утверждение 5.2.11. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — линейное нормированное пространство, такое, что его сопряжённое пространство сепарабельно. Тогда пространство X тоже является сепарабельным.*

Доказательство. По условию в пространстве X^* существует счётное всюду плотное подмножество $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$. Без ограничения общности считаем, что

$$f_m \neq 0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда, по определению нормы линейного функционала, для любого $m \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_m \in X$, такой, что

$$\|x_m\|_X = 1 \quad \text{и} \quad |f_m(x_m)| > \frac{\|f_m\|}{2}.$$

Определим множество M как совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций векторов $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ с комплексными коэффициентами, имеющими рациональные компоненты. Тогда множество M счётно. Действительно, пусть $\mathbb{Q} = \{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ — все рациональные числа, каким-то образом занумерованные. Для любых $N, L \in \mathbb{N}$ определим множество

$$M_{N,L} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} (r_{m_k} + i r_{n_k}) x_k \;\; \middle| \;\; 1 \leqslant m_k, n_k \leqslant L \right\}.$$

Тогда множество $M_{N,L}$ конечно, и справедливо равенство

$$M = \bigcup_{N,L=1}^{\infty} M_{N,L}.$$

Следовательно, множество M является счётным как счётное объединение конечных множеств. Покажем, что множество M является всюду плотным в пространстве X, т. е. замыкание $[M] = X$. Предположим, что это не так, т. е. $[M] \neq X$. Очевидно, что замкнутое множество $[M]$ является подпространством в X. Тогда по пункту 1 следствия 5.1.6 существует ненулевой функционал $f \in X^*$, такой, что

$$f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in [M].$$

В частности,

$$f(x_m) = 0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\|f - f_{m(\varepsilon)}\| < \varepsilon.$$

Так как выполнены неравенства

$$\left\|f - f_{m(\varepsilon)}\right\| \geqslant \left|f(x_{m(\varepsilon)}) - f_{m(\varepsilon)}(x_{m(\varepsilon)})\right| = \left|f_{m(\varepsilon)}(x_{m(\varepsilon)})\right| > \frac{\|f_{m(\varepsilon)}\|}{2},$$

то получаем

$$\|f_{m(\varepsilon)}\| < 2\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \|f\| < 3\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает равенство $\|f\| = 0$, что противоречит нетривиальности функционала f. ■

Следствие 5.2.12. *Пространство ℓ_∞^* не равно ℓ_1, но содержит подпространство, изометрически изоморфное ℓ_1. В частности, пространство ℓ_1 не является рефлексивным.*

Доказательство. В утверждении 5.2.3 показано равенство

$$\ell_1^* = \ell_\infty.$$

Следовательно, выполнено равенство $\ell_\infty^* = \ell_1^{**}$. Тогда, в силу утверждения 5.1.10, пространство ℓ_∞^* содержит подпространство, изометрически изоморфное ℓ_1. Пространство ℓ_1 является сепарабельным, так как, по утверждению 5.2.1, имеет счётный базис. Если предположить равенство $\ell_1 = \ell_\infty^*$, то, в силу утверждения 5.2.11, получаем сепарабельность пространства ℓ_∞, что неверно. Действительно, рассмотрим множество $S \subset \ell_\infty$, такое, что вложение $x \in S$ равносильно $x(k) = 0$ или $x(k) = 1$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, причём для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $k > m$, такое, что $x(k) = 0$. Тогда функция $\alpha\colon S \to [0, 1)$ вида

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{2^k} \qquad \forall\, x \in S$$

является биекцией между множеством S и промежутком $[0, 1)$. Таким образом, множество S равномощно промежутку $[0, 1)$, т. е. является несчётным. При этом для любых векторов $x, y \in S$, $x \neq y$ имеет место равенство

$$\|x - y\|_\infty = 1.$$

Следовательно, в силу утверждения 1.3.4, пространство ℓ_∞ является несепарабельным. ■

5.3. Сопряжённое гильбертово пространство

Теорема 5.3.1. (Рисс, Фреше) *Пусть* $\mathcal{H}$ *— гильбертово пространство. Тогда для любого линейного функционала* $f \in \mathcal{H}^*$ *существует единственный вектор* $z(f) \in \mathcal{H}$*, такой, что*

$$f(x) = (x, z(f)) \qquad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

причём $\|f\| = \|z(f)\|$*. Отображение*

$$z \colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$$

является взаимно однозначным отображением пространства $\mathcal{H}^*$ *на* $\mathcal{H}$*, изометричным и сопряжённо-линейным, т. е.*

$$z(f+g) = z(f) + z(g) \quad \text{и} \quad z(\alpha f) = \overline{\alpha} z(f) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{H}^*, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Если функционал $f = 0$, то положим $z(0) = 0$. Рассмотрим произвольный нетривиальный функционал $f \in \mathcal{H}^*$. Тогда $\operatorname{Ker} f$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$, не совпадающее с $\mathcal{H}$. Так как по теореме 3.2.14 имеем

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} f \neq \mathcal{H},$$

то

$$(\operatorname{Ker} f)^{\perp} \neq 0.$$

Рассмотрим нетривиальный вектор

$$y \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}.$$

Тогда $f(y) \neq 0$, и для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ выполнено вложение

$$x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \operatorname{Ker} f.$$

Следовательно, получаем равенство

$$0 = \left(x - \frac{f(x)}{f(y)} y, y \right) = (x, y) - \frac{f(x)}{f(y)} (y, y),$$

т. е. справедливо соотношение

$$f(x) = \left(x, \frac{\overline{f(y)}}{(y, y)} y \right).$$

Определим вектор
$$z(f) = \frac{\overline{f(y)}}{(y,y)}y.$$
Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем равенство
$$f(x) = \bigl(x, z(f)\bigr).$$

Предположим, существует другой вектор $w \in \mathcal{H}$, такой, что
$$f(x) = (x, w) \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$
Тогда получаем равенство
$$\bigl(x, z(f) - w\bigr) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$
Следовательно, для вектора $x = z(f) - w \in \mathcal{H}$ получаем
$$\bigl(z(f) - w, z(f) - w\bigr) = 0,$$
т. е. $z(f) = w$. Таким образом, доказана единственность вектора $z(f)$.

В силу неравенства Коши—Буняковского получаем
$$|f(x)| \leqslant \|x\|\,\|z(f)\| \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$
Следовательно, $\|f\| \leqslant \|z(f)\|$. С другой стороны,
$$\|z(f)\| = \frac{\bigl(z(f), z(f)\bigr)}{\|z(f)\|} = \frac{f(z(f))}{\|z(f)\|} \leqslant \|f\|.$$
Таким образом, доказано равенство $\|f\| = \|z(f)\|$.

Для любых функционалов $f, g \in \mathcal{H}^*$ и любого $x \in \mathcal{H}$ имеем равенства
$$(f+g)(x) = \bigl(x, z(f+g)\bigr) = f(x) + g(x) =$$
$$= \bigl(x, z(f)\bigr) + \bigl(x, z(g)\bigr) = \bigl(x, z(f) + z(g)\bigr).$$
Следовательно, для любого $x \in \mathcal{H}$ получаем
$$\bigl(x, z(f+g) - z(f) - z(g)\bigr) = 0.$$
Тогда для вектора $x = z(f+g) - z(f) - z(g)$ получаем
$$\bigl(z(f+g) - z(f) - z(g), z(f+g) - z(f) - z(g)\bigr) = 0,$$

т. е. выполнено равенство $z(f+g) = z(f) + z(g)$.

Для любого $f \in \mathcal{H}^*$ и скаляра $\alpha \in \mathbb{C}$ для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\alpha f)(x) = \big(x, z(\alpha f)\big) = \alpha f(x) = \alpha \big(x, z(f)\big) = \big(x, \overline{\alpha} z(f)\big).$$

Следовательно, для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$\big(x, z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f)\big) = 0.$$

Тогда для вектора $x = z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f)$ получаем

$$\big(z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f), z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f)\big) = 0,$$

т. е. выполнено равенство $z(\alpha f) = \overline{\alpha} z(f)$.

Осталось показать, что множество значений отображения

$$z \colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$$

совпадает с $\mathcal{H}$, т. е. для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ существует линейный функционал $f \in \mathcal{H}^*$, такой, что $z(f) = y$. Для любого $y \in \mathcal{H}$ рассмотрим линейный функционал

$$f(x) = (x, y), \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Так как $|f(x)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, то $\|f\| \leqslant \|y\|$. Следовательно, $f \in \mathcal{H}^*$. Так как для функционала f существует единственный вектор $z(f) \in \mathcal{H}$ вида

$$f(x) = \big(x, z(f)\big) \qquad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

то получаем равенство $z(f) = y$, что и требовалось. ■

Следствие 5.3.2. *Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является рефлексивным.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**}$ вида

$$(Fx)(f) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}, \quad \forall\, f \in \mathcal{H}^*.$$

По определению 5.1.11 требуется доказать, что для любого функционала $\varPhi \in \mathcal{H}^{**}$ существует вектор $y \in \mathcal{H}$, такой, что

$$Fy = \varPhi.$$

Пусть $z \colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ — сопряжённо-линейное изометрическое взаимно однозначное отображение, определённое в теореме 5.3.1. Для любого функционала $\varPhi \in \mathcal{H}^{**}$ определим линейный функционал

$$f = \overline{\varPhi \circ z^{-1}}, \quad \text{т. е.} \quad f(x) = \overline{\varPhi\left(z^{-1}(x)\right)} \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Тогда имеем неравенство

$$|f(x)| \leqslant \|\varPhi\| \, \|z^{-1}(x)\| = \|\varPhi\| \, \|x\| \qquad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

т. е. $\|f\| \leqslant \|\varPhi\|$. Следовательно, справедливо вложение $f \in \mathcal{H}^*$. Определим вектор

$$y = z\,(f)\,.$$

Тогда для любого функционала $g \in \mathcal{H}^*$ получаем

$$(Fy)(g) = g(y) = \big(z\,(f)\,, z(g)\big) = \overline{f\,\big(z(g)\big)} = \varPhi\,\big(z^{-1}\,\big(z(g)\big)\big) = \varPhi(g),$$

т. е. $Fy = \varPhi$, что и требовалось. ■

Пример 5.3.3. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ полное пространство $\mathbb{L}_2(E)$, скалярное произведение в котором задано соотношением

$$(x, y) = \int\limits_E x\,\overline{y}\,d\mu \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{L}_2(E),$$

является гильбертовым пространством. Действительно, для любых $x, y \in \mathbb{L}_2(E)$ при каждом $t \in E$ имеем неравенство

$$|x(t)\overline{y(t)}| = |x(t)|\,|y(t)| \leqslant \frac{|x(t)|^2 + |y(t)|^2}{2}.$$

Так как функция $\frac{|x|^2+|y|^2}{2} \in \mathcal{L}(E)$, то, в силу утверждения 4.3.21, получаем

$$|x\overline{y}| \in \mathcal{L}(E),$$

т. е. величина (x, y) существует для любых $x, y \in \mathbb{L}_2(E)$ и, очевидно, удовлетворяет свойствам 1—4 определения 3.2.1 скалярного произведения. При этом выполнено равенство

$$(x, x) = \|x\|_2.$$

По теореме 5.3.1 Рисса—Фреше получаем, что любой линейный непрерывный функционал $f \in \big(\mathbb{L}_2(E)\big)^*$ порождается единственным элементом $z \in \mathbb{L}_2(E)$ по формуле

$$f(x) = \int\limits_E x\,\overline{z}\,d\mu \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2(E),$$

причём справедливо равенство $\|f\| = \|z\|_2$. ▲

5.4. Слабая топология

В этом параграфе будем рассматривать комплексное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$.

О п р е д е л е н и е 5.4.1. *Для любого вектора $x_0 \in X$, функционала $f \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ определим множество*

$$V(x_0, f, \varepsilon) = \left\{ \, x \in X \quad \middle| \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, \right\}.$$

Топология в множестве X, предбазой которой является семейство множеств

$$\sigma_w = \left\{ \, V(x_0, f, \varepsilon) \quad \middle| \quad x_0 \in X, \ f \in X^*, \ \varepsilon > 0 \, \right\},$$

называется слабой топологией в X и обозначается τ_w.

З а м е ч а н и е 5.4.2. Заметим, что семейство σ_w удовлетворяет условию утверждения 1.1.45, так как для любого $x \in X$ и любого $f \in X^*$ выполнено $x \in V(x, f, 1)$. Причём само множество X является элементом семейства σ_w, так как $X = V(0, 0, 1) \in \sigma_w$. Следовательно, семейство σ_w действительно является предбазой некоторой топологии в X, которая по определению 5.4.1 называется слабой. □

З а м е ч а н и е 5.4.3. По определению предбазы σ_w слабой топологии в пространстве $(X, \|\cdot\|)$ получаем, что любой функционал $f \in X^*$ будет непрерывным относительно слабой топологии τ_w. Действительно, для любых функционала $f \in X^*$, вектора $x_0 \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ существует слабая окрестность вектора x_0 вида

$$V(x_0, f, \varepsilon) \in \tau_w,$$

такая, что для любого $x \in V(x_0, f, \varepsilon)$ по определению 5.4.1 получаем

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, функционал $f \in X^*$ является слабо непрерывным на X. □

З а м е ч а н и е 5.4.4. Всегда слабая топология τ_w в X содержится в нормированной топологии τ_n, т. е. $\tau_w \subset \tau_n$. Достаточно доказать, что

$$\sigma_w \subset \tau_n.$$

Докажем это вложение. Для любого вектора $x_0 \in X$, функционала $f \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим произвольный вектор

$$z \in V(x_0, f, \varepsilon).$$

Определим положительное число

$$r = \varepsilon - |f(z) - f(x_0)|.$$

Тогда для любого вектора x вида

$$\|x - z\| < \frac{r}{\|f\| + 1}$$

получаем

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| \, \|x - z\| + |f(z) - f(x_0)| < r + |f(z) - f(x_0)| = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$x \in V(x_0, f, \varepsilon).$$

Таким образом, любая точка множества $V(x_0, f, \varepsilon)$ входит в него вместе с некоторым τ_n-открытым шаром, т. е. справедливо вложение

$$V(x_0, f, \varepsilon) \in \tau_n.$$

Следовательно, $\sigma_w \subset \tau_n$, что и требовалось.

Отсюда, в частности, легко следует, что всякий слабо непрерывный линейный функционал $f \colon X \to \mathbb{C}$ является непрерывным относительно нормированной топологии в X, т. е. $f \in X^*$. Действительно, если функционал f слабо непрерывен, то, по утверждению 1.1.32, для любого открытого в $\mathbb{C}$ множества G его прообраз

$$f^{-1}(G) = \{\, x \in X \mid f(x) \in G\}$$

является слабо открытым множеством в X. Поэтому он принадлежит и нормированной топологии пространства X. Следовательно, в силу того же утверждения 1.1.32, получаем вложение $f \in X^*$.

Пусть линейное пространство X бесконечномерно. Тогда слабая топология τ_w в X строго слабее нормированной топологии τ_n, т. е.

$$\tau_w \subsetneq \tau_n.$$

Увидим, что τ_n-открытый шар $O_1^X(0) \notin \tau_w$. Для этого докажем, что любая слабая окрестность нуля U_0 не содержится в шаре $O_1^X(0)$. Действительно, как показано в замечании 5.4.3, для любой слабой окрестности нуля U_0 существуют номер N, функционалы

$$\{f_k\}_{k=1}^N \subset X^*,$$

и число $\delta > 0$, такие, что

$$\bigcap_{k=1}^N V(0, f_k, \delta) \subset U_0.$$

Тогда

$$\bigcap_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k \subset \bigcap_{k=1}^N V(0, f_k, \delta), \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k \subset U_0.$$

Рассмотрим подпространство

$$\bigcap_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k.$$

Покажем, что существуют векторы $\{z_k\}_{k=1}^N \subset X$, такие, что справедливо равенство

$$\bigcap_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_N\} = X.$$

Докажем это равенство индукцией по N. Действительно, существует вектор $z_1 \in X$, такой, что

$$\operatorname{Ker} f_1 \oplus \operatorname{Lin}\{z_1\} = X.$$

Если $f_1 = 0$, то подойдёт $z_1 = 0$. Если же $f_1 \neq 0$, то существует $z_1 \in X$, такой, что

$$f(z_1) \neq 0.$$

Тогда для любого $x \in X$ получаем

$$x = y + \frac{f_1(x)}{f_1(z_1)} z_1,$$

где вектор

$$y = x - \frac{f_1(x)}{f_1(z_1)} z_1 \in \operatorname{Ker} f_1.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$X = \operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Lin}\{z_1\}.$$

Если же вектор $x \in \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Lin}\{z_1\}$, то

$$x = tz_1 \quad \text{и} \quad 0 = f(x) = tf(z_1), \quad \text{т. е.} \quad t = 0 \quad \text{и} \quad x = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Lin}\{z_1\} = \{0\},$$

т. е. сумма подпространств $\operatorname{Ker} f_1$ и $\operatorname{Lin}\{z_1\}$ прямая. Теперь, рассуждая по индукции, предположим, что

$$\bigcap_{k=1}^{N-1} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} = X.$$

Рассмотрим сужение функционала f_N на подпространство

$$L_N = \bigcap_{k=1}^{N-1} \operatorname{Ker} f_k.$$

Как показано выше в первом шаге индукции, существует вектор $z_N \in L_N$, такой, что справедливо равенство

$$\big(L_N \cap \operatorname{Ker} f_N\big) \oplus \operatorname{Lin}\{z_N\} = L_N.$$

Тогда получаем

$$X = L_N \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} =$$

$$= \big(L_N \cap \operatorname{Ker} f_N\big) \oplus \operatorname{Lin}\{z_N\} \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_N\},$$

что и требовалось. Так как по условию $\dim X = +\infty$, а

$$\dim \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_N\} \leqslant N,$$

то получаем, что

$$\dim \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k = +\infty.$$

Следовательно, бесконечномерное подпространство

$$\bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$$

заведомо является нетривиальным. Но тогда, для любого нетривиального вектора

$$x \in \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset U_0$$

получаем, что вектор

$$z = \frac{2x}{\|x\|} \in \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$$

удовлетворяет соотношениям:

$$\|z\| = 2 > 1, \quad \text{т. е.} \quad z \notin O_1^X(0), \quad \text{но} \quad z \in U_0.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$U_0 \not\subset O_1^X(0), \quad \text{т. е.} \quad O_1^X(0) \notin \tau_w.$$

$\square$

Определение 5.4.5. *Нормированную топологию τ_n в X будем называть сильной топологией.*

Замечание 5.4.6. Пусть пространство X конечномерно, а его размерность $\dim X = n$. Тогда слабая топология в X совпадает с его сильной нормированной топологией. Достаточно доказать, что существует слабая окрестность нуля U_0, которая содержится в $O_1^X(0)$. Предположим, что существование окрестности U_0 установлено. Для любого сильно открытого множества $G \subset X$ и любого вектора $x \in G$ существует число $r(x) > 0$, такое, что

$$O_{r(x)}^X(x) \subset G.$$

Тогда множество

$$V(x) = x + r(x)U_0$$

является слабой окрестностью точки x, причём

$$V(x) \subset x + r(x)O_1^X(0) = O_{r(x)}^X(x) \subset G.$$

Следовательно, справедливы вложения

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} V(x) \subset G.$$

Таким образом, выполнено равенство

$$G = \bigcup_{x \in G} V(x),$$

т. е. множество G является слабо открытым как объединение слабо открытых множеств. Так как в силу замечания 5.4.4 любое слабо открытое в X множество является сильно открытым, то получаем равенство сильной нормированной и слабой топологий в конечномерном пространстве X.

Осталось доказать существование слабой окрестности нуля

$$U_0 \subset O_1^X(0).$$

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — некоторый базис в пространстве X. Тогда для любого вектора $x \in X$ существуют единственные скаляры $\alpha_k(x)$, такие, что

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) e_k.$$

Ясно, что отображение $\alpha_k \colon X \to \mathbb{C}$ является линейным, а функция

$$\|x\|_e = \sum_{k=1}^n |\alpha_k(x)|, \quad x \in X,$$

есть норма в X. По теореме 3.1.18, нормы $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|_X$ эквивалентны. Следовательно, существуют числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, такие, что для всех $x \in X$ справедливы неравенства

$$C_1 \|x\|_X \leqslant \|x\|_e \leqslant C_2 \|x\|_X.$$

Тогда для любого номера $k \in \overline{1,n}$ и вектора $x \in X$ имеем неравенство

$$|\alpha_k(x)| \leqslant \|x\|_e \leqslant C_2 \|x\|_X.$$

Следовательно, $\|\alpha_k\| \leqslant C_2$, т. е. справедливо вложение

$$\alpha_k \in X^*.$$

Рассмотрим слабую окрестность нуля вида

$$U_0 = \bigcap_{k=1}^{n} V\left(0, \alpha_k, \frac{C_1}{n}\right).$$

Тогда вложение $x \in U_0$ равносильно выполнению неравенств

$$|\alpha_k(x)| < \frac{C_1}{n} \quad \text{для всех} \quad k \in \overline{1, n}.$$

Следовательно, если $x \in U_0$, то $\|x\|_e < C_1$ и выполнено неравенство

$$\|x\|_X \leqslant \frac{\|x\|_e}{C_1} < 1, \quad \text{т. е.} \quad x \in O_1^X(0).$$

Таким образом, справедливо вложение

$$U_0 \subset O_1^X(0),$$

что и требовалось. □

Утверждение 5.4.7. *Последовательность векторов*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

является слабо сходящейся к вектору $y \in X$, т. е.

$$x_n \overset{\tau_w}{\to} y \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ выполнено соотношение

$$f(x_n) \to f(y) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $x_n \overset{\tau_w}{\to} y$ при $n \to \infty$. По замечанию 5.4.3, любой функционал $f \in X^*$ является слабо непрерывным. Следовательно, в силу утверждения 1.1.34, функционал f является секвенциально непрерывным, т. е. получаем соотношение

$$f(x_n) \to f(y) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пусть теперь для любого функционала $f \in X^*$ выполнено соотношение

$$f(x_n) \to f(y) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим произвольную слабую окрестность $U(y)$ вектора y. По определению слабой топологии, существует $M \in \mathbb{N}$, существуют

$$\{z_m\}_{m=1}^M \subset X, \qquad \{f_m\}_{m=1}^M \subset X^*,$$

и положительные числа $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^M$, такие, что справедливо вложение

$$y \in \bigcap_{m=1}^M V(z_m, f_m, \varepsilon_m) \subset U(y).$$

Для любого $m \in \overline{1, M}$ имеем равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_m(x_n) = f_m(y)$$

и неравенство

$$|f_m(y) - f_m(z_m)| < \varepsilon_m.$$

Определим число

$$\varepsilon = \min_{m\in\overline{1,M}} \big(\varepsilon_m - |f_m(y) - f_m(z_m)|\big) > 0.$$

Существует номер N, такой, что для всех $n > N$ и всех $m \in \overline{1, M}$ выполнено неравенство

$$|f_m(x_n) - f_m(y)| < \varepsilon.$$

Тогда для любого $n > N$ получаем

$$|f_m(x_n) - f_m(z_m)| \leqslant |f_m(x_n) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(z_m)| <$$

$$< \varepsilon + |f_m(y) - f_m(z_m)| \leqslant \varepsilon_m \qquad \forall\, m \in \overline{1, M}.$$

Следовательно, для всех $n > N$ получаем вложение

$$x_n \in \bigcap_{m=1}^M V(z_m, f_m, \varepsilon_m) \subset U(y),$$

т. е. $x_n \overset{\tau_w}{\to} y$ при $n \to \infty$, что и требовалось. ■

Утверждение 5.4.8. *Предел слабо сходящейся в пространстве X последовательности единственен.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ является слабо сходящейся к векторам y и z. Тогда, по утверждению 5.4.7, для любого функционала $f \in X^*$ имеем равенства

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(z).$$

Следовательно,

$$f(y-z) = 0 \qquad \forall\, f \in X^*.$$

Тогда, по пункту 3 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха, получаем

$$y - z = 0, \quad \text{т. е.} \quad y = z,$$

что и требовалось. ■

Пример 5.4.9. Приведём пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. В гильбертовом пространстве $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ рассмотрим последовательность базисных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Так как для любых $m \neq n$ имеем

$$\|e_m - e_n\|_2 = \sqrt{2},$$

то данная последовательность не является $\|\cdot\|_2$–фундаментальной и, значит, не является сильно сходящейся в пространстве ℓ_2. По теореме 5.3.1 Рисса—Фреше, для любого функционала $f \in (\ell_2)^*$ существует единственный вектор $z \in \ell_2$, такой, что

$$f(x) = (x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{z(k)} \qquad \forall\, x \in \ell_2.$$

Тогда получаем

$$f(e_n) = (e_n, z) = \overline{z(n)} \to 0 = f(0) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$e_n \overset{\tau_w}{\to} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

▲

Утверждение 5.4.10. *Пусть последовательность*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

слабо сходится к вектору $x \in X$. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной по норме пространства X (сильно ограничена). При этом справедливо неравенство

$$\|x\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность линейных функционалов $\{\varPhi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^{**}$ вида

$$\varPhi_n(f) = f(x_n) \qquad \forall\, f \in X^*, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

В силу пункта 4 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха, имеем

$$\|\varPhi_n\| = \sup_{f\in X^*:\, \|f\|=1} |f(x_n)| = \|x_n\|.$$

По условию, для любого $f \in X^*$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \varPhi_n(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

По определению 3.4.20 сопряжённого пространства, имеем равенство $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$, а пространство $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ является полным по теореме 3.4.16 в силу полноты комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Следовательно, последовательность линейных непрерывных операторов

$$\varPhi_n \colon X^* \to \mathbb{C}$$

является поточечно сходящейся и, значит, поточечно ограниченной в $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$. Тогда, по теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза, она является ограниченной по норме пространства X^{**}, т. е.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varPhi_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty,$$

что и требовалось.

Для любого функционала $f \in X^*$ и номера n справедливо неравенство

$$|f(x_n)| \leqslant \|f\|\, \|x_n\|,$$

переходя в котором к нижнему пределу по $n \to \infty$, находим, что

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \varliminf_{n\to\infty} |f(x_n)| \leqslant \|f\| \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Следовательно, в силу пункта 4 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха, получаем

$$\|x\| = \sup_{f\in X^*\colon \|f\|=1} |f(x)| \leqslant \sup_{f\in X^*\colon \|f\|=1} \left(\|f\| \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|\right) = \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

■

З а м е ч а н и е 5.4.11. Как показано в замечании 5.4.4, в случае бесконечномерного пространства X его слабая топология строго слабее сильной нормированной топологии. Тем не менее, даже в этом случае может оказаться, что слабая и сильная сходимости последовательности будут равносильными. Пример такой ситуации даёт следующая

Т е о р е м а 5.4.12. (Шур) *В пространстве ℓ_1 всякая слабо сходящаяся последовательность является сильно сходящейся.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, рассуждая от противного, существует последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1,$$

слабо сходящаяся в ℓ_1 к вектору $x \in \ell_1$ и не сходящаяся к нему сильно, т. е. выполнено

$$\|x_n - x\|_1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим последовательность $y_n = x_n - x$. Тогда y_n слабо, но не сильно сходится в ℓ_1 к нулю. Так как в силу утверждения 5.4.10, числовая последовательность $\|y_n\|_1$ ограничена, и по предположению не сходится к нулю, то существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \|y_{n_k}\|_1 = c > 0.$$

Тогда существует номер k_0, такой, что для всех $k > k_0$ выполнено

$$y_{n_k} \neq 0.$$

Определим последовательность

$$z_m = \frac{y_{n_{m+k_0}}}{\|y_{n_{m+k_0}}\|_1} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Для любого функционала $f \in \ell_1^*$ получаем

$$\lim_{m\to\infty} f(z_m) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{f(y_{n_{m+k_0}})}{\|y_{n_{m+k_0}}\|_1} \right) = \frac{\lim\limits_{m\to\infty} f(y_{n_{m+k_0}})}{\lim\limits_{m\to\infty} \|y_{n_{m+k_0}}\|_1} = \frac{0}{c} = 0 = f(0),$$

т. е. последовательность z_m слабо сходится в ℓ_1 к нулю, и $\|z_m\|_1 = 1$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим линейный функционал $f_k\colon \ell_1 \to \mathbb{C}$ вида

$$f_k(x) = x(k) \qquad \forall\, x \in X.$$

Имеем равенство

$$\|f_k\| = \sup_{x\in\ell_1\colon \|x\|_1=1} |x(k)| = 1,$$

т. е. справедливо вложение $f_k \in \ell_1^*$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем соотношение

$$f_k(z_m) = z_m(k) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Пусть $m_1 = 1$ и $p_0 = 0$. Так как

$$\|z_{m_1}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |z_{m_1}(k)| = 1,$$

то существует номер p_1, такой, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{p_1} |z_{m_1}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Далее, рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого $j \in \mathbb{N}$ выбраны номера

$$1 = m_1 < m_2 < \ldots < m_j \quad \text{и} \quad 0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_j,$$

такие, что для любого номера $s \in \overline{1, j}$ выполнены неравенства

$$\sum_{k=1}^{p_{s-1}} |z_{m_s}(k)| < \frac{1}{4}, \qquad \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |z_{m_s}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Так как для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$z_m(k) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то существует номер $m_{j+1} > m_j$, такой, что

$$\sum_{k=1}^{p_j} |z_{m_{j+1}}(k)| < \frac{1}{4}.$$

Так как $\|z_{m_{j+1}}\|_1 = 1$, то получаем

$$\sum_{k=p_j+1}^{\infty} |z_{m_{j+1}}(k)| = 1 - \sum_{k=1}^{p_j} |z_{m_{j+1}}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Тогда существует номер $p_{j+1} > p_j$, такой, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} |z_{m_{j+1}}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Для любого комплексного числа w определим число

$$\sigma(w) = \begin{cases} \frac{\overline{w}}{|w|}, & w \neq 0, \\ \\ 0, & w = 0, \end{cases}$$

так что $w\sigma(w) = |w|$. Определим элемент $\eta \in \ell_\infty = \ell_1^*$ следующим образом:

$$\eta(k) = \sigma\left(z_{m_s}(k)\right), \quad \text{если} \quad p_{s-1} < k \leqslant p_s,$$

для любого $s \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|\eta\|_\infty \leqslant 1.$$

Рассмотрим функционал $f_0 \in \ell_1^*$, соответствующий построенному элементу $\eta \in \ell_\infty$, т. е.

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(k)x(k) \qquad \forall\, x \in \ell_1.$$

При этом $\|f_0\| = \|\eta\|_\infty \leqslant 1$. Получаем для любого $s \in \mathbb{N}$:

$$\left|f_0(z_{m_s})\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \eta(k) z_{m_s}(k)\right| \geqslant \left|\sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} \sigma\left(z_{m_s}(k)\right) z_{m_s}(k)\right| -$$

$$-\sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\eta(k)|\,|z_{m_s}(k)| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\eta(k)|\,|z_{m_s}(k)| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |z_{m_s}(k)| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |z_{m_s}(k)| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |z_{m_s}(k)| =$$

$$= 2 \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |z_{m_s}(k)| - \|z_{m_s}\|_1 > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Однако, по предположению, z_{m_s} слабо сходится к нулю при $s \to \infty$ в пространстве ℓ_1, т. е., в частности, выполняется соотношение

$$f_0(z_{m_s}) \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

которое противоречит доказанному неравенству

$$|f_0(z_{m_s})| > \frac{1}{2} \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

Полученное противоречие означает, что произвольная слабо сходящаяся в ℓ_1 последовательность является сильно сходящейся. ■

Задача 5.4.13. Пусть линейное пространство X бесконечномерно. Пусть

$$S = \left\{\, x \in X \;\;\middle|\;\; \|x\| = 1 \,\right\}$$

единичная сфера в пространстве X. Доказать, что слабое замыкание сферы S совпадает с единичным замкнутым шаром в X, т. е. справедливо равенство

$$[S]_{\tau_w} = B_1(0) = \left\{\, x \in X \;\;\middle|\;\; \|x\| \leqslant 1 \,\right\}.$$

Решение. Рассмотрим произвольный вектор $x_0 \notin B_1(0)$, т. е.

$$\|x_0\| > 1.$$

В силу пункта 2 следствия 5.1.6, существует функционал $f_0 \in X^*$, такой, что

$$\|f_0\| = 1 \quad \text{и} \quad f_0(x_0) = \|x_0\|.$$

Тогда для любого $x \in V(x_0, f_0, \|x_0\| - 1)$ получаем

$$\|x\| \geqslant |f_0(x)| \geqslant |f_0(x_0)| - |f_0(x) - f_0(x_0)| > \|x_0\| - \big(\|x_0\| - 1\big) = 1,$$

т. е. $x \notin B_1(0)$. Следовательно, справедливо соотношение

$$S \cap V(x_0, f_0, \|x_0\| - 1) = \varnothing,$$

что означает $x_0 \notin [S]_{\tau_w}$. Следовательно, имеет место вложение

$$[S]_{\tau_w} \subset B_1(0).$$

Теперь рассмотрим произвольный вектор $z_0 \in B_1(0)$, т. е.

$$\|z_0\| \leqslant 1,$$

и произвольную слабую окрестность $U(z_0)$ вектора z_0. Тогда существует номер N, векторы $\{z_k\}_{k=1}^N \subset X$, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^N \subset X^*$ и положительные числа $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^N$, такие, что справедливы вложения

$$z_0 \subset \bigcap_{k=1}^N V(z_k, f_k, \varepsilon_k) \subset U(z_0).$$

Тогда для любого вектора $x \in z_0 + \bigcap\limits_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k$ получаем для любого номера $k \in \overline{1, N}$ равенство

$$f_k(x) = f_k(z_0).$$

Поэтому

$$|f_k(x) - f_k(z_k)| = |f_k(z_0) - f_k(z_k)| < \varepsilon_k \qquad \forall\, k \in \overline{1, N}.$$

Следовательно, справедливо вложение

$$z_0 + \bigcap_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k \subset \bigcap_{k=1}^N V(z_k, f_k, \varepsilon_k) \subset U(z_0).$$

Как показано в замечании 5.4.4, в случае $\dim X = +\infty$ выполнено

$$\dim \bigcap_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k = +\infty.$$

Поэтому существует нетривиальный вектор $y \in \bigcap\limits_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ получаем вложения

$$ty \in \bigcap_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k \quad \text{и} \quad z_0 + ty \in U(z_0).$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \|z_0 + ty\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$, так как в силу неравенства треугольника для нормы, для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leqslant |t - \tau| \, \|y\|.$$

Так как

$$\varphi(0) = \|z_0\| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \varphi(t) \geqslant |t| \, \|y\| - \|z_0\| \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

то, по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, существует $t_0 \in \mathbb{R}$, такое, что

$$\varphi(t_0) = 1.$$

Следовательно, справедливо вложение

$$z_0 + t_0 y \in S.$$

Тогда получаем

$$S \cap U(z_0) \neq \varnothing, \quad \text{т. е.} \quad z_0 \in [S]_{\tau_w}.$$

Таким образом, доказано вложение

$$B_1(0) \subset [S]_{\tau_w},$$

что и требовалось. ▲

Теорема 5.4.14. (Мазур) *Пусть множество $A \subset X$ является выпуклым. Тогда множество A является слабо замкнутым тогда и только тогда, когда оно является сильно замкнутым.*

Доказательство. Пусть множество A слабо замкнуто. Тогда его дополнение $A^c = X \backslash A$ слабо открыто, т. е.

$$A^c \in \tau_w.$$

Так как, по замечанию 5.4.4, всякое слабо открытое множество в X является сильно открытым, то получаем, что

$$A^c \in \tau_n.$$

Следовательно, множество A сильно замкнуто. Заметим, что мы пока не использовали выпуклость множества A.

Пусть теперь множество A сильно замкнуто. Покажем, что его дополнение A^c слабо открыто. Рассмотрим произвольный элемент

$$x_0 \notin A.$$

Одноточечное множество $\{x_0\}$ является выпуклым компактом в пространстве $(X, \|\cdot\|)$, не пересекающимся с выпуклым и замкнутым в пространстве $(X, \|\cdot\|)$ множеством A. Следовательно, по теореме 5.1.8 об отделимости, существуют функционал $f_0 \in X^*$ и вещественные числа $\gamma_1 < \gamma_2$, такие, что для любого вектора $a \in A$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} f_0(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} f_0(a).$$

Пусть число

$$\varepsilon = \gamma_2 - \gamma_1 > 0.$$

Тогда для любого вектора $x \in V(x_0, f_0, \varepsilon)$ получаем

$$\operatorname{Re} f_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x_0) + \big(\operatorname{Re} f_0(x) - \operatorname{Re} f_0(x_0)\big) <$$

$$< \gamma_1 + |f_0(x) - f_0(x_0)| < \gamma_1 + \varepsilon = \gamma_2 < \operatorname{Re} f_0(a)$$

для любого вектора $a \in A$. Следовательно, множество $V(x_0, f_0, \varepsilon)$ строго отделено от множества A функционалом f_0. Это означает, что

$$V(x_0, f_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing, \quad \Rightarrow \quad V(x_0, f_0, \varepsilon) \subset A^c.$$

Таким образом, для любого вектора $x_0 \in A^c$ существует его слабая окрестность $V(x_0, f_0, \varepsilon)$, содержащаяся в A^c. Следовательно, множество A^c является слабо открытым, и соответственно A является слабо замкнутым в X. ■

Замечание 5.4.15. Выпуклость сильно замкнутого множества из X существенна для его слабой замкнутости. Например, как следует из результата задачи 5.4.13, невыпуклая единичная сфера S в любом бесконечномерном пространстве X не является слабо замкнутым множеством, хотя, конечно, является сильно замкнутым.□

Определение 5.4.16. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется слабо фундаментальной в X, если для любой слабой окрестности нуля $U(0)$ существует номер M, такой, что для всех $n, m \geqslant M$ выполнено вложение*

$$x_n - x_m \in U(0).$$

Утверждение 5.4.17. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X. Для любого функционала $f \in X^*$ и любого числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим слабую окрестность нуля вида $V(0, f, \varepsilon)$. Тогда, по определению 5.4.16, существует номер $M = M(f, \varepsilon)$, такой, что для всех номеров $n, m \geqslant M$ выполнено вложение

$$x_n - x_m \in V(0, f, \varepsilon),$$

которое равносильно неравенству

$$|f(x_n - x_m) - f(0)| = |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Это означает, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$.

Пусть теперь для любого функционала $f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$. Рассмотрим произвольную слабую окрестность нуля $U(0)$. Как показано в замечании 5.4.3, для слабой окрестности нуля $U(0)$ существует номер N, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^{N} \subset X^*$ и число $\delta > 0$, такие, что справедливо вложение

$$\bigcap_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta) \subset U(0).$$

Так как для любого $k \in \overline{1, N}$ последовательность $\{f_k(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$, то существует номер M_k, такой, что для всех $n, m \geqslant M_k$ выполнено неравенство

$$|f_k(x_n) - f_k(x_m)| < \delta,$$

которое равносильно вложению

$$x_n - x_m \in V(0, f_k, \delta).$$

Определим номер

$$M = \max_{k \in \overline{1, N}} M_k.$$

Тогда для всех $n, m \geqslant M$ получаем вложение

$$x_n - x_m \in \bigcap_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta) \subset U(0).$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X. ■

О п р е д е л е н и е 5.4.18. *Линейное нормированное пространство X называется слабо полным, если любая слабо фундаментальная последовательность из X является слабо сходящейся в X.*

У т в е р ж д е н и е 5.4.19. *Пусть линейное нормированное пространство X является слабо полным. Тогда оно является сильно полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную сильно фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $M = M(\varepsilon)$, такой, что для всех $n, m \geqslant M$ выполнено неравенство

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, для любого функционала $f \in X^*$ получаем

$$|f(x_n) - f(x_m)| \leqslant \|f\| \, \|x_n - x_m\| \leqslant \|f\| \, \varepsilon \qquad \forall \, n, m \geqslant M.$$

Таким образом, в силу утверждения 5.4.17 последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X. Тогда существует вектор $y \in X$, такой, что

$$x_n \xrightarrow{\tau_w} y \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, для любого функционала $f \in X^*$ и номеров $n, m \geqslant M$ получаем

$$|f(x_n - y)| \leqslant |f(x_n - x_m)| + |f(x_m) - f(y)| \leqslant \|f\| \, \varepsilon + |f(x_m) - f(y)|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и используя соотношение

$$|f(x_m) - f(y)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

получаем неравенства

$$|f(x_n - y)| \leqslant \|f\| \, \varepsilon \quad \forall n \geqslant M(\varepsilon), \quad \forall \, f \in X^*.$$

Следовательно, в силу пункта 4 следствия 5.1.6 получаем

$$\|x_n - y\| = \sup_{f \in X^* : \, \|f\| = 1} |f(x_n - y)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall \, n \geqslant M(\varepsilon),$$

т. е. x_n сильно сходится в X к вектору y при $n \to \infty$. Это означает, что пространство X является сильно полным. ■

Утверждение 5.4.20. *Пусть пространство X является рефлексивным. Тогда оно является слабо полным.*

Доказательство. Так как пространство X рефлексивно, то оно изометрически изоморфно пространству $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$, которое является полным относительно операторной нормы по теореме 3.4.16. Следовательно, пространство X тоже является сильно полным. Изометрический изоморфизм между пространствами X и X^{**} осуществляет отображение $F\colon X \to X^{**}$ вида

$$(Fx)(f) = f(x) \qquad \forall\, x \in X \quad \text{и} \quad f \in X^*.$$

Рассмотрим в пространстве X произвольную слабо фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда в силу утверждения 5.4.17 последовательность линейных операторов

$$\{Fx_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C}) = X^{**}$$

является поточечно фундаментальной в $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$. Так как линейные нормированные пространства $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ и $\mathbb{C}$ являются полными, то, по теореме 3.4.31, пространство $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{C}) = X^{**}$ является полным относительно поточечной сходимости. Следовательно, существует элемент

$$\varPhi \in X^{**},$$

такой, что для любого $f \in X^*$ выполнено соотношение

$$(Fx_n)(f) = f(x_n) \to \varPhi(f) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В силу рефлексивности пространства X, существует вектор $y \in X$, такой, что справедливо равенство

$$Fy = \varPhi.$$

Поэтому

$$\varPhi(f) = (Fy)(f) = f(y) \qquad \forall\, f \in X^*.$$

Следовательно, получаем соотношение

$$f(x_n) \to f(y) \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad \forall\, f \in X^*.$$

В силу утверждения 5.4.7, получаем, что

$$x_n \xrightarrow{\tau_w} y \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ■

П р и м е р 5.4.21. Приведём пример банахова нерефлексивного пространства, которое не является слабо полным. Рассмотрим банахово пространство c_0, описанное в параграфе 5.2. Как показано в утверждении 5.2.8, пространство c_0 нерефлексивно. Покажем, что c_0 не является слабо полным. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} (-1)^k, & k \leqslant n, \\ \\ 0, & k > n \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Для любого функционала $f \in c_0^*$ существует единственный элемент $z \in \ell_1$, такой, что для любого $x \in c_0$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z(k).$$

Тогда для любых номеров m, n вида $m > n$ получаем соотношения

$$|f(x_n) - f(x_m)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |z(k)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |z(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность x_n является слабо фундаментальной в c_0. Предположим, что она слабо сходится в c_0 к элементу $y \in c_0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функционал $f_k \in c_0^*$ вида

$$f_k(x) = x(k) \qquad \forall\, x \in c_0.$$

Получаем

$$f_k(x_n) = x_n(k) \to f_k(y) = y(k) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $n > k$ имеем

$$x_n(k) = (-1)^k,$$

то получаем равенство

$$y(k) = (-1)^k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Но тогда $y \notin c_0$, т. е. получили противоречие. Следовательно, слабо фундаментальная в c_0 последовательность x_n не является слабо сходящейся в c_0, что и требовалось. ▲

Утверждение 5.4.22. *Пусть множество $S \subset X^*$ образует в пространстве X^* полную систему. Тогда последовательность*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

является слабо сходящейся в X к вектору $y \in X$ тогда и только тогда, когда она является сильно ограниченной в X, т. е. существует число $R > 0$, такое, что

$$\|x_n\| \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и для любого функционала $f \in S$ справедливо соотношение

$$f(x_n) \to f(y) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Необходимость условий слабой сходимости последовательности сразу следует из утверждений 5.4.7 и 5.4.10. Покажем достаточность. Так как любой функционал $g \in \operatorname{Lin} S$ является конечной линейной комбинацией функционалов из множества S, то справедливо соотношение

$$g(x_n) \to g(y) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как множество $\operatorname{Lin} S$ является всюду плотным в X^* в силу полноты системы S, то для любого функционала $f \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ существует функционал $g \in \operatorname{Lin} S$, такой, что

$$\|f - g\| \leqslant \frac{\varepsilon}{R + \|y\|}.$$

Существует номер N, такой, что для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство

$$|g(x_n) - g(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $n \geqslant N$ получаем

$$|f(x_n) - f(y)| \leqslant |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(y)| + |g(y) - f(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \|f - g\| \big(\|x_n\| + \|y\|\big) + \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{R + \|y\|} \big(R + \|y\|\big) + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Таким образом, для любого функционала $f \in X^*$ справедливо соотношение

$$f(x_n) \to f(y) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

которое, в силу утверждения 5.4.7, и означает слабую сходимость последовательности x_n к вектору y. ■

Следствие 5.4.23. *Для любого числа $p > 1$ последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_p$ слабо сходится в ℓ_p к элементу $y \in \ell_p$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что*

$$\|x_n\|_p \leqslant R \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$x_n(k) \to y(k) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В силу утверждения 5.2.4 имеем равенство $\ell_p^* = \ell_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Изометрический изоморфизм

$$\varPhi \colon \ell_p^* \to \ell_q$$

имеет вид: для любого функционала $f \in \ell_p^*$ существует единственный элемент $\varPhi(f) = z \in \ell_q$, такой, что $\|f\| = \|z\|_q$, и для любого $x \in \ell_p$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z(k).$$

В пространстве ℓ_q существует счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, где

$$e_m(k) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим функционал

$$f_m = \varPhi^{-1}(e_m), \quad \text{т. е.} \quad f_m(x) = x(m) \qquad \forall\, x \in \ell_p.$$

Так как $\varPhi$ является изометрическим изоморфизмом между ℓ_p^* и ℓ_q, то система функционалов

$$S = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$$

образует базис в пространстве ℓ_p^*. Следовательно, система S является полной в ℓ_p^*. Тогда, в силу утверждения 5.4.22, получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_p$ слабо сходится в ℓ_p к элементу $y \in \ell_p$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что

$$\|x_n\|_p \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f_k(x_n) = x_n(k) \to f_k(y) = y(k) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ∎

Следствие 5.4.24. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ *слабо сходится в* c_0 *к элементу* $y \in c_0$ *тогда и только тогда, когда существует число* $R > 0$, *такое, что*

$$\|x_n\|_\infty \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$x_n(k) \to y(k) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В силу утверждения 5.2.5 $c_0^* = \ell_1$. Изометрический изоморфизм

$$\varPhi\colon c_0^* \to \ell_1$$

имеет вид: для любого функционала $f \in c_0^*$ существует единственный элемент $\varPhi(f) = z \in \ell_1$, такой, что $\|f\| = \|z\|_1$, и для любого элемента $x \in c_0$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z(k).$$

Используя счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве ℓ_1, для любого номера m определим функционал

$$f_m = \varPhi^{-1}(e_m), \quad \text{т. е.} \quad f_m(x) = x(m) \quad \forall\, x \in c_0.$$

Так как $\varPhi$ является изометрическим изоморфизмом между c_0^* и ℓ_1, то система функционалов

$$S = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$$

образует базис в пространстве c_0^*. Следовательно, система S является полной в c_0^*. Тогда в силу утверждения 5.4.22 получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ слабо сходится в c_0 к элементу $y \in c_0$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что

$$\|x_n\|_\infty \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f_k(x_n) = x_n(k) \to f_k(y) = y(k) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ■

Следствие 5.4.25. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c$ слабо сходится в c к элементу $y \in c$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что*

$$\|x_n\|_\infty \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$x_n(k) \to y(k), \quad x_n(\infty) \to y(\infty) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В силу утверждения 5.2.6 справедливо равенство $c^* = \ell_1$. Изометрический изоморфизм

$$\varPhi\colon c^* \to \ell_1$$

имеет вид: для любого функционала $f \in c^*$ существует единственный элемент $\varPhi(f) = z \in \ell_1$, такой, что $\|f\| = \|z\|_1$, и для любого элемента $x \in c$ справедливо равенство

$$f(x) = x(\infty)z(1) + \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z(k+1).$$

Используя счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве ℓ_1, для любого номера m определим функционал

$$f_m = \varPhi^{-1}(e_m), \quad \text{т. е.} \quad f_1(x) = x(\infty) \quad \text{и} \quad f_{m+1}(x) = x(m) \quad \forall\, x \in c.$$

Так как $\varPhi$ является изометрическим изоморфизмом между c^* и ℓ_1, то система функционалов

$$S = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$$

образует базис в пространстве c^*. Следовательно, система S является полной в c^*. Тогда в силу утверждения 5.4.22 получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c$ слабо сходится в c к элементу $y \in c$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что

$$\|x_n\|_\infty \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ справедливы соотношения

$$f_1(x_n) = x_n(\infty) \to f_1(y) = y(\infty),$$

$$f_{k+1}(x_n) = x_n(k) \to f_{k+1}(y) = y(k),$$

что и требовалось. ■

Пример 5.4.26. Покажем, что слабая топология в пространстве ℓ_2 неметризуема. Для этого предъявим множество $S \subset \ell_2$, первое слабое секвенциальное замыкание которого не совпадает со вторым. Так как в случае метрической топологии секвенциальное замыкание любого множества совпадает с его топологическим замыканием, то наличие в ℓ_2 такого множества S сразу приводит к неметризуемости слабой топологии в ℓ_2. Пример такого множества принадлежит фон Нейману (см. [2, ч. I, гл. 3, с. 100, упр. 9]). Рассмотрим в ℓ_2 счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|e_m\|_2 = 1 \quad \text{и} \quad e_m(k) = 0 \quad \text{при} \quad m > k,$$

то, по следствию 5.4.23, получаем, что e_m слабо сходится к нулю в ℓ_2 при $m \to \infty$. Определим множество

$$S = \left\{ \, e_m + me_n \quad \middle| \quad m, n \in \mathbb{N} \, \right\}.$$

Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$e_m + me_n \overset{\tau_w}{\to} e_m \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то получаем

$$e_m \in [S]_{\text{сл.секв.}}.$$

Следовательно, справедливо вложение

$$S \cup E \subset [S]_{\text{сл.секв.}}.$$

Теперь рассмотрим произвольный элемент $z \in [S]_{\text{сл.секв.}}$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел m_k и n_k, такие, что

$$e_{m_k} + m_k e_{n_k} \overset{\tau_w}{\to} z \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как справедливо неравенство

$$\|e_{m_k} + m_k e_{n_k}\|_2 \geqslant m_k - 1,$$

то, по следствию 5.4.23, получаем, что последовательность натуральных чисел m_k ограничена. Следовательно, она содержит стационарную подпоследовательность $m_{k_r} = m_0$. Далее, если последовательность n_{k_r} ограничена, то она содержит стационарную подпоследовательность $n_{k_{r_s}} = n_0$, и в этом случае получаем

$$z = e_{m_0} + m_0 e_{n_0} \in S.$$

Если же последовательность n_{k_r} неограничена, то она содержит бесконечно большую подпоследовательность

$$n_{k_{r_s}} \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Следовательно, получаем соотношения

$$e_{m_{k_{r_s}}} + m_{k_{r_s}} e_{n_{k_{r_s}}} = e_{m_0} + m_0 e_{n_{k_{r_s}}} \overset{\tau_w}{\to} e_{m_0} \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

т. е. $z = e_{m_0} \in E$. Таким образом, доказано вложение

$$[S]_{\text{сл.секв.}} \subset S \cup E,$$

т. е. справедливо равенство

$$[S]_{\text{сл.секв.}} = S \cup E.$$

Так как

$$e_m \overset{\tau_w}{\to} 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то имеет место вложение

$$0 \in [S \cup E]_{\text{сл.секв.}} = \left[[S]_{\text{сл.секв.}}\right]_{\text{сл.секв.}}.$$

Однако $0 \notin S \cup E = [S]_{\text{сл.секв.}}$. Таким образом, доказано неравенство

$$[S]_{\text{сл.секв.}} \neq \left[[S]_{\text{сл.секв.}}\right]_{\text{сл.секв.}},$$

что и требовалось. ▲

Замечание 5.4.27. Заметим, что если в линейном нормированном пространстве X существует слабо сходящаяся к нулю последовательность, содержашаяся в единичной сфере, то также, как и в примере 5.4.26, мы можем построить множество $S \subset X$, первое слабое секвенциальное замыкание которого не совпадает со вторым, и, тем самым, доказать неметризуемость слабой топологии в X. Итак, пусть последовательность $E = \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$ такова, что

$$\|x_m\| = 1 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad x_m \overset{\tau_w}{\to} 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Рассмотрим множество

$$S = \left\{\, x_m + m x_n \quad \middle| \quad m, n \in \mathbb{N} \,\right\}.$$

Так как x_n слабо сходится к нулю, то для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$x_m + m x_n \overset{\tau_w}{\to} x_m \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно,
$$[S]_{\text{сл.секв.}} \supset S \cup E.$$
Теперь рассмотрим произвольный $z \in [S]_{\text{сл.секв.}}$. Тогда существует последовательности натуральных чисел m_k и n_k, такие, что

$$x_{m_k} + m_k x_{n_k} \overset{\tau_w}{\to} z \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как, по утверждению 5.4.10, слабо сходящаяся последовательность ограничена, то,

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \|x_{m_k} + m_k x_{n_k}\| \leqslant M.$$

Тогда

$$M \geqslant \|x_{m_k} + m_k x_{n_k}\| \geqslant m_k - 1 \quad \Rightarrow \quad m_k \leqslant M + 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, у ограниченной последовательности натуральных чисел m_k существует стационарная подпоследовательность $m_{k_s} \equiv m_0$. Тогда, либо последовательность n_{k_s} ограничена, и тогда существует стационарная подпоследовательность $n_{k_{s_r}} \equiv n_0$, откуда немедленно получаем равенство

$$z = x_{m_0} + m_0 x_{n_0} \in S,$$

либо последовательность n_{k_s} неограничена, и тогда существует строго возрастающая подпоследовательность $n_{k_{s_r}}$, так что при $r \to \infty$ получаем
$$x_{n_{k_{s_r}}} \overset{\tau_w}{\to} 0, \quad \Rightarrow \quad z = x_{m_0} \in E.$$
Таким образом, доказано равенство

$$[S]_{\text{сл.секв.}} = S \cup E.$$

Но тогда выполнено
$$0 \notin [S]_{\text{сл.секв.}}.$$
Однако, так как $x_n \in E$ слабо сходится к нулю, то имеет место вложение
$$0 \in [S \cup E]_{\text{сл.секв.}} = [[S]_{\text{сл.секв.}}]_{\text{сл.секв.}}.$$
Следоватедьно,

$$[[S]_{\text{сл.секв.}}]_{\text{сл.секв.}} \neq [S]_{\text{сл.секв.}},$$

откуда следует неметризуемость слабой топологии в X. $\square$

Утверждение 5.4.28. *Пусть линейное нормированное пространство X бесконечномерно. Тогда слабая топология в нём неметризуема.*

Доказательство. Как показано в решении задачи 5.4.13, слабое топологическое замыкание единичной сферы

$$S = \left\{ x \in X \quad \middle| \quad \|x\| = 1 \right\}$$

равно единичному шару $B_1(0) \subset X$. В частности, ноль является слабой топологической точкой прикосновения единичной сферы. Если при этом ноль окажется слабой секвенциальной точкой прикосновения S, то, в силу замечания 5.4.27, получаем, что слабая топология в X неметризуема. Если же ноль не является слабой секвенциальной точкой прикосновения S, то получаем, что слабое топологическое замыкание S не совпадает с её слабым секвенциальным замыканием, откуда, в силу следствия 1.2.8, также следует неметризуемость слабой топологии в X. ∎

Утверждение 5.4.29. *Пусть сопряжённое пространство X^* является сепарабельным. Для любого $R > 0$ рассмотрим слабую топологию на шаре $B_R(0) \subset X$, т. е. семейство*

$$\tau_w(R) = \left\{ U \cap B_R(0) \quad \middle| \quad U \in \tau_w \right\}.$$

Тогда топологическое пространство $\big(B_R(0), \tau_w(R)\big)$ является метрическим пространством, т. е. топология $\tau_w(R)$ метризуема.

Доказательство. Так как сопряжённое пространство X^* сепарабельно, то на единичной сфере в пространстве X^* существует счётное всюду плотное множество

$$F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*,$$

т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем равенство $\|f_n\| = 1$, и для любого функционала $g \in X^*$ вида $\|g\| = 1$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $m = m(g, \varepsilon)$, такой, что

$$\|g - f_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Определим для любых векторов $x, y \in B_R(0)$ величину

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| f_n(x - y) \right|.$$

Покажем, что функция ρ является метрикой на шаре $B_R(0)$. Так как справедливо неравенство

$$|f_n(x-y)| \leqslant \|f_n\| \, \|x-y\| \leqslant 2R,$$

то

$$0 \leqslant \rho(x,y) \leqslant 2R \qquad \forall\, x, y \in B_R(0).$$

Далее, если $\rho(x,y) = 0$, то получаем $f_n(x-y) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольный ненулевой функционал $g \in X^*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\left\| \frac{g}{\|g\|} - f_m \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|g(x-y)| = \|g\| \left| \left(\frac{g}{\|g\|} - f_m \right)(x-y) \right| \leqslant \|g\| 2R\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Таким образом, для любого функционала $g \in X^*$ справедливо равенство $g(x-y) = 0$. Тогда, в силу пункта 3 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха, получаем

$$x - y = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = y.$$

Равенство $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ очевидно. Для любых $x, y, z \in B_R(0)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|f_n(x-y)| = |f_n(x-z) + f_n(z-y)| \leqslant |f_n(x-z)| + |f_n(z-y)|.$$

Следовательно, получаем

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y),$$

т. е. для функции ρ справедливо неравенство треугольника.

Пусть $\tau_\rho(R)$ — метрическая топология в $B_R(0)$, порождённая метрикой ρ. Покажем, что справедливо равенство

$$\tau_w(R) = \tau_\rho(R).$$

Заметим, что предбазу топологии $\tau_w(R)$ образует семейство

$$\sigma_w(R) = \left\{ \, V(x,f,\varepsilon) \cap B_R(0) \quad \middle| \quad x \in X, \;\; f \in X^*, \;\; \varepsilon > 0 \, \right\}.$$

Вложение $\tau_w(R) \subset \tau_\rho(R)$ следует из вложения $\sigma_w(R) \subset \tau_\rho(R)$. Докажем это последнее вложение. Зафиксируем произвольные вектор $x \in X$, функционал $f \in X^*$ и число $\varepsilon > 0$. Если $f = 0$, то имеем

$$V(x, f, \varepsilon) = X \quad \text{и} \quad V(x, f, \varepsilon) \cap B_R(0) = B_R(0) \in \tau_\rho(R),$$

т. е. в этом случае доказывать нечего. Поэтому пусть $f \neq 0$. Определим функционал $g = \frac{f}{\|f\|}$ и число $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|}$. Тогда получаем

$$V(x, f, \varepsilon) = V(x, g, \delta).$$

Рассмотрим произвольный вектор

$$y \in V(x, g, \delta) \cap B_R(0), \quad \text{т. е.} \quad |g(y - x)| < \delta \quad \text{и} \quad \|y\| \leqslant R.$$

Существует номер m, такой, что

$$\|g - f_m\| < \frac{\delta - |g(y - x)|}{4R}.$$

Пусть число

$$r = \frac{\delta - |g(y - x)|}{2^{m+1}} > 0.$$

Рассмотрим произвольный вектор $z \in B_R(0)$ вида $\rho(y, z) < r$. Тогда справедливо неравенство

$$|f_m(z - y)| < 2^m r = \frac{\delta - |g(y - x)|}{2}.$$

Следовательно, получаем

$$|g(z - x)| \leqslant |g(z - y)| + |g(y - x)| \leqslant$$
$$\leqslant \|(g - f_m)(z - y)| + |f_m(z - y)| + |g(y - x)| <$$

$$< \|g - f_m\| 2R + \frac{\delta + |g(y - x)|}{2} < \frac{\delta - |g(y - x)|}{2} + \frac{\delta + |g(y - x)|}{2} = \delta,$$

т. е. выполнено вложение

$$z \in V(x, g, \delta) \cap B_R(0) = V(x, f, \varepsilon) \cap B_R(0).$$

Следовательно, любой вектор y множества $V(x, f, \varepsilon) \cap B_R(0)$ является его ρ–внутренней точкой. Но тогда справедливо вложение

$$V(x, f, \varepsilon) \cap B_R(0) \in \tau_\rho(R),$$

что и требовалось.

Теперь докажем обратное вложение

$$\tau_\rho(R) \subset \tau_w(R).$$

Так как базой $\beta_\rho(R)$ метрической топологии $\tau_\rho(R)$ служат ρ-открытые шары вида

$$O_r^\rho(x) = \left\{ \, y \in B_R(0) \quad \middle| \quad \rho(x,y) < r \, \right\}, \quad x \in B_R(0), \quad r > 0,$$

то достаточно доказать вложение

$$\beta_\rho(R) \subset \tau_w(R).$$

Зафиксируем вектор $x \in B_R(0)$ и число $r > 0$. Рассмотрим произвольный вектор

$$y \in O_r^\rho(x), \quad \text{т. е.} \quad y \in B_R(0) \quad \text{и} \quad \rho(x,y) < r.$$

Существует номер N, такой, что

$$2^{-N} < \frac{r - \rho(x,y)}{4R}.$$

Пусть число $\delta = \frac{r-\rho(x,y)}{2} > 0$. Рассмотрим произвольный вектор

$$z \in \left(\bigcap_{n=1}^{N} V(y, f_n, \delta) \right) \cap B_R(0) = U(y) \in \tau_w(R).$$

Тогда получаем

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(y,z) + \rho(x,y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |f_n(y-z)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} 2R + \rho(x,y) <$$

$$< \delta + 2^{-N} 2R + \rho(x,y) < \frac{r-\rho(x,y)}{2} + \frac{r-\rho(x,y)}{2} + \rho(x,y) = r.$$

Следовательно, $z \in O_r^\rho(x)$, т. е. справедливо вложение $U(y) \subset O_r^\rho(x)$. Тогда

$$O_r^\rho(x) = \bigcup_{y \in O_r^\rho(x)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in O_r^\rho(x)} U(y) \subset O_r^\rho(x),$$

т. е. выполнено

$$O_r^\rho(x) = \bigcup_{y \in O_r^\rho(x)} U(y) \in \tau_w(R),$$

что и требовалось. ■

Следствие 5.4.30. *Пусть пространство X бесконечномерно, а пространство X^* сепарабельно. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, такая, что*

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad x_n \stackrel{\tau_w}{\to} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Иными словами, в пространстве X существует последовательность из единичной сферы, слабо сходящаяся к нулю.

Доказательство. Как показано в решении задачи 5.4.13, слабое замыкание единичной сферы

$$S = \left\{\, x \in X \quad \middle| \quad \|x\| = 1 \,\right\}$$

равно единичному шару $B_1(0)$, т. е.

$$[S]_{\tau_w} = B_1(0).$$

Так как $S \subset B_1(0)$, а слабая топология на шаре $B_1(0)$ метризуема в силу утверждения 5.4.29, то, согласно следствию 1.2.8, слабое замыкание сферы S совпадает с её слабым секвенциальным замыканием. Следовательно, для любого вектора $x \in B_1(0)$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, слабо сходящаяся к x, т. е.

$$x_n \stackrel{\tau_w}{\to} x \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В частности, это верно для $x = 0$. ■

Замечание 5.4.31. Заметим, что сепарабельность сопряжённого пространства X^* существенна для метризуемости слабой топологии в X на шарах. Действительно, для пространства ℓ_1 его сопряжённое $\ell_1^* = \ell_\infty$ несепарабельно. В силу теоремы 5.4.12 Шура, слабая и сильная сходимости последовательности в ℓ_1 эквивалентны. Следовательно, единичная сфера S в ℓ_1 является сильно и поэтому слабо секвенциально замкнутым множеством. Однако, в силу утверждения 5.4.13, сфера S не является топологически слабо замкнутым множеством в бесконечномерном пространстве ℓ_1. Поэтому, в силу следствия 1.2.8, получаем неметризуемость слабой топологии в ℓ_1 на единичном шаре. $\square$

З а м е ч а н и е 5.4.32. Пусть пространство X бесконечномерно, а пространство X^* сепарабельно. Пусть $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ — счётное всюду плотное на единичной сфере в пространстве X^* множество. Пусть

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left|f_n(x-y)\right| \qquad \forall\, x, y \in X$$

метрика в X, определённая в утверждении 5.4.29. Покажем, что в пространстве X существует последовательность, сходящаяся по метрике ρ к нулевому вектору и не являющаяся сходящейся слабо. Как показано в замечании 5.4.4, для любого номера n существует конечномерное подпространство $L_n \subset X$, такое, что

$$\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k \oplus L_n = X.$$

Так как пространство X бесконечномерно, то подпространство

$$\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k$$

нетривиально. Следовательно, существует вектор

$$x_n \in \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k,$$

такой, что $\|x_n\| = n$. Получили неограниченную по норме пространства X последовательность векторов x_n, которая поэтому не является слабо сходящейся в силу утверждения 5.4.10. Покажем, что

$$\rho(x_n, 0) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Действительно, так как по определению вектора x_n имеем $f_k(x_n) = 0$ для всех $k \in \overline{1,n}$, то получаем

$$\rho(x_n, 0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \left|f_k(x_n)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} n = \frac{n}{2^n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. Это замечание показывает, что сходимость по метрике ρ не равносильна слабой сходимости без условия ограниченности последовательности по норме пространства X. $\square$

5.5. Слабая* топология

В этом параграфе будем рассматривать комплексное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$. Обозначим τ_w^* и σ_w^* соответственно слабую топологию в X^* и её предбазу.

Определение 5.5.1. *Для любого вектора $x \in X$, функционала $f_0 \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ определим множество*

$$V^*(x, f_0, \varepsilon) = \left\{ f \in X^* \quad \middle| \quad |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Топология в множестве X^*, предбазой которой является семейство множеств

$$\sigma_{w^*} = \left\{ V^*(x, f_0, \varepsilon) \quad \middle| \quad x \in X,\ f_0 \in X^*,\ \varepsilon > 0 \right\},$$

называется слабой топологией в X^* и обозначается τ_{w^*}.*

Замечание 5.5.2. Заметим, что семейство σ_{w^*} удовлетворяет условию утверждения 1.1.45, так как для любого $x \in X$ и любого $f \in$ $\in X^*$ выполнено

$$f \in V^*(x, f, 1).$$

Причём само множество X^* является элементом семейства σ_{w^*}, так как

$$X^* = V(0, 0, 1) \in \sigma_{w^*}.$$

Следовательно, семейство σ_{w^*} действительно является предбазой некоторой топологии в X^*, которая по определению 5.5.1 называется слабой*. $\square$

Замечание 5.5.3. Пусть $F\colon X \to X^{**}$ — изометрический изоморфизм вида $(Fx)(f) = f(x)$ для всех $x \in X$ и $f \in X^*$, введённый в утверждении 5.1.10. Тогда для любых $x \in X$, $f_0 \in X^*$ и $\varepsilon > 0$ получаем

$$V^*(x, f_0, \varepsilon) = \left\{ f \in X^* \quad \middle| \quad |(Fx)(f) - (Fx)(f_0)| < \varepsilon \right\} =$$

$$= V(f_0, Fx, \varepsilon) \in \sigma_w^*,$$

т. е. справедливы вложения

$$\sigma_{w^*} \subset \sigma_w^* \quad \text{и} \quad \tau_{w^*} \subset \tau_w^*.$$

Если пространство X рефлексивно, т. е. по определению 5.1.11 выполнено равенство $\operatorname{Im} F = X^{**}$, то получаем равенства

$$\sigma_{w^*} = \sigma_w^* \quad \text{и} \quad \tau_{w^*} = \tau_w^*.$$

$\square$

З а м е ч а н и е 5.5.4. По определению предбазы σ_{w^*} слабой* топологии в пространстве X^* получаем, что любой функционал $\Phi \in \operatorname{Im} F \subset X^{**}$ будет непрерывным относительно слабой* топологии τ_{w^*}. Действительно, для любого функционала $\Phi \in \operatorname{Im} F$ существует вектор $x \in X$, такой, что

$$\Phi = Fx, \quad \text{т. е.} \quad \Phi(f) = f(x) \quad \forall\, f \in X^*.$$

Тогда, для любого функционала $f_0 \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ существует слабая* окрестность функционала f_0 вида

$$V^*(x, f_0, \varepsilon) \in \tau_{w^*},$$

такая, что для любого $f \in V^*(x, f_0, \varepsilon)$ по определению 5.5.1 получаем

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Phi(f) - \Phi(f_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, функционал $\Phi \in \operatorname{Im} F$ является слабо* непрерывным на X^*.

Верно и обратное утверждение, т. е. если линейный функционал $\Phi\colon X^* \to \mathbb{C}$ является слабо* непрерывным на X^*, то $\Phi \in \operatorname{Im} F$, т. е. справедливо равенство $\Phi = Fx \in X^{**}$ для подходящего $x \in X$. Действительно, если линейный функционал Φ является слабо* непрерывным в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ существует слабая* окрестность нуля $U_0 \in \tau_{w^*}$, такая, что для любого $f \in U_0$ выполнено неравенство

$$|\Phi(f)| < \varepsilon.$$

По определению слабой* топологии, существуют номер N и

$$\{x_k\}_{k=1}^N \subset X, \quad \{f_k\}_{k=1}^N \subset X^*, \quad \{\delta_k\}_{k=1}^N \subset (0, +\infty),$$

такие, что выполнены вложения

$$0 \in \bigcap_{k=1}^N V^*(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$

Тогда
$$|f_k(x_k)| < \delta_k \qquad \forall\, k \in \overline{1,N}.$$
Рассмотрим число
$$\delta = \min_{k \in \overline{1,N}} \bigl(\delta_k - |f_k(x_k)|\bigr) > 0.$$
Тогда для любого функцинала
$$f \in \bigcap_{k=1}^{N} V^*(x_k, 0, \delta)$$
получаем неравенства
$$|f(x_k) - f_k(x_k)| \leqslant |f(x_k)| + |f_k(x_k)| < \delta + |f_k(x_k)| \leqslant \delta_k \qquad \forall\, k \in \overline{1,N}.$$
Следовательно,
$$f \in \bigcap_{k=1}^{N} V^*(x_k, f_k, \delta_k),$$
т. е. справедливо вложение
$$\bigcap_{k=1}^{N} V^*(x_k, 0, \delta) \subset \bigcap_{k=1}^{N} V^*(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$
Это означает, что для любого функционала $f \in X^*$ вида
$$|f(x_k)| = |(Fx_k)(f)| < \delta \quad \text{при} \quad k \in \overline{1,N}$$
справедливо неравенство
$$|\varPhi(f)| < \varepsilon.$$
В частности, для любого функционала
$$f \in \bigcap_{k=1}^{N} \mathrm{Ker}(Fx_k)$$
и любого числа $t > 0$ получаем
$$|(tf)(x_k)| = |t(Fx_k)(f)| = 0 < \delta,$$
что означает
$$|\varPhi(tf)| < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad |\varPhi(f)| < \frac{\varepsilon}{t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Следовательно, $\Phi(f) = 0$, т. е. $f \in \operatorname{Ker} \Phi$. Таким образом, справедливо вложение

$$\bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker}(Fx_k) \subset \operatorname{Ker} \Phi.$$

Рассмотрим линейное отображение $\Psi\colon X^* \to \mathbb{C}^N$ вида

$$\Psi(f) = \big(f(x_1), \ldots, f(x_N)\big) \quad \forall\, f \in X^*.$$

Определим отображение $H\colon \operatorname{Im} \Psi \to \mathbb{C}$ вида

$$H\left(\Psi(f)\right) = \Phi(f) \qquad \forall\, f \in X^*.$$

Определение отображения H корректно, так как, если функционалы $f \in X^*$ и $g \in X^*$ порождают одну и ту же точку в линейном пространстве $\operatorname{Im} \Psi$, т. е. имеет место равенство $\Psi(f) = \Psi(g)$, то справедливо вложение

$$f - g \in \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker}(Fx_k) \subset \operatorname{Ker} \Phi.$$

Следовательно, $\Phi(f) = \Phi(g)$, т. е. выполнено равенство

$$H\left(\Psi(f)\right) = H\left(\Psi(g)\right).$$

Очевидно, что отображение H линейно, так как для любых функционалов $f, g \in X^*$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем равенства

$$H\left(\alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g)\right) = H\left(\Psi(\alpha f + \beta g)\right) = \Phi(\alpha f + \beta g) =$$

$$= \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g) = \alpha H\left(\Psi(f)\right) + \beta H\left(\Psi(g)\right).$$

В силу линейности отображения H, определённом на конечномерном линейном пространстве $\operatorname{Im} \Psi$, существуют скаляры

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^{N} \subset \mathbb{C},$$

такие, что для любого $f \in X^*$ справедливо равенство

$$H\left(\Psi(f)\right) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (Fx_k)(f) = \Phi(f),$$

т. е.

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (F x_k) = F \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k \right).$$

Таким образом, получаем вложение

$$\Phi \in \operatorname{Im} F \subset X^{**},$$

что и требовалось. $\square$

З а м е ч а н и е 5.5.5. Пусть пространство X нерефлексивно, т. е.

$$\operatorname{Im} F \neq X^{**}.$$

Тогда слабая* топология в X^* строго слабее слабой топологии в X^*. Действительно, существует функционал

$$\Phi \in X^{**} \setminus \operatorname{Im} F.$$

Тогда, в силу замечаний 5.5.4 и 5.4.3, функционал Φ не является слабо* непрерывным и является слабо непрерывным в X^*. Следовательно, используя замечание 5.5.3, получаем

$$\tau_{w^*} \subsetneq \tau_w^*.$$

$\square$

У т в е р ж д е н и е 5.5.6. *Последовательность функционалов*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$$

является слабо сходящейся к функционалу $g \in X^*$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $x \in X$ выполнено соотношение*

$$f_n(x) \to g(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$f_n \stackrel{\tau_{w^*}}{\to} g \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

По замечанию 5.5.4, для любого вектора $x \in X$ функционал $Fx \in$ $\in X^{**}$ является слабо* непрерывным. Следовательно, в силу утверждения 1.1.34 функционал Fx является секвенциально непрерывным, т. е. получаем соотношение

$$(Fx)(f_n) = f_n(x) \to (Fx)(g) = g(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пусть теперь для любого вектора $x \in X$ выполнено

$$f_n(x) \to g(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим произвольную слабую* окрестность $U(g)$ функционала g. По определению слабой* топологии, существует номер M и

$$\{z_m\}_{m=1}^M \subset X, \quad \{h_m\}_{m=1}^M \subset X^*, \quad \{\varepsilon_m\}_{m=1}^M,$$

такие, что справедливо вложение

$$g \in \bigcap_{m=1}^M V^*(z_m, h_m, \varepsilon_m) \subset U(g).$$

Для любого $m \in \overline{1, M}$ имеем соотношения

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_m) = g(z_m) \quad \text{и} \quad |g(z_m) - h_m(z_m)| < \varepsilon_m.$$

Определим число

$$\varepsilon = \min_{m\in\overline{1,M}} \big(\varepsilon_m - |g(z_m) - h_m(z_m)|\big) > 0.$$

Существует номер N, такой, что для всех $n > N$ и всех $m \in \overline{1, M}$ выполнено неравенство

$$|g(z_m) - f_n(z_m)| < \varepsilon.$$

Тогда для любого $n > N$ получаем

$$|f_n(z_m) - h_m(z_m)| \leqslant |f_n(z_m) - g(z_m)| + |g(z_m) - h_m(z_m)| <$$

$$< \varepsilon + |g(z_m) - h_m(z_m)| \leqslant \varepsilon_m \quad \forall\, m \in \overline{1, M}.$$

Следовательно, для всех $n > N$ получаем вложение

$$f_n \in \bigcap_{m=1}^M V^*(z_m, h_m, \varepsilon_m) \subset U(g),$$

т. е.

$$f_n \overset{\tau_{w^*}}{\to} g \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 5.5.7. *Предел слабо* сходящейся в пространстве X^* последовательности единственен.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ является слабо* сходящейся к функционалам $g \in X^*$ и $h \in X^*$. Тогда, по утверждению 5.5.6, для любого вектора $x \in X$ имеем равенство

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = h(x).$$

Следовательно, $g(x) = h(x)$ для любого $x \in X$, что и означает равенство функционалов $g = h$. ■

Пример 5.5.8. Приведём пример нерефлексивного банахова пространства X, такого, что в его сопряжённом пространстве X^* существует слабо* сходящаяся и слабо расходящаяся последовательность. Рассмотрим пространство $X = c_0$. Тогда, в силу утверждений 5.2.5 и 5.2.3, имеем равенства

$$X^* = \ell_1 \quad \text{и} \quad X^{**} = \ell_\infty.$$

Рассмотрим последовательность функционалов $f_n \in c_0^*$ вида

$$f_n(y) = y(n) \qquad \forall\, y \in c_0.$$

В силу утверждения 5.2.5, функционал f_n реализуется базисным элементом e_n из пространства ℓ_1 по формуле

$$f_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y(k)e_n(k).$$

Для любого $y \in c_0$ получаем

$$f_n(y) = y(n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность f_n является слабо* сходящейся к нулю в c_0^*, т. е. базисная последовательность e_n слабо* сходится к нулю в ℓ_1. Рассмотрим функционал

$$\Phi \in c_0^{**} = \ell_1^* = \ell_\infty,$$

который реализуется элементом $z \in \ell_\infty$ вида $z(k) = (-1)^k$ согласно утверждению 5.2.3 по формуле

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z(k) \qquad \forall\, x \in \ell_1.$$

Получаем последовательность

$$\Phi(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} e_n(k) z(k) = (-1)^n,$$

которая не имеет предела при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность e_n не является слабо сходящейся в ℓ_1, т. е. последовательность функционалов f_n не является слабо сходящейся в c_0^*. ▲

Замечание 5.5.9. Наличие в линейном нормированном пространстве, являющемся сопряжённым к некоторому линейному нормированному пространству, слабо* сходящейся и одновременно слабо расходящейся последовательности, служит доказательством его нерефлексивности. Этот замечательный факт можно использовать для доказательства нерефлексивности пространства ℓ_∞, которое, в силу утверждения 5.2.3, является сопряжённым к пространству ℓ_1. Пусть $\Phi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ — изометрический изоморфизм, описанный в утверждении 5.2.3. Рассмотрим последовательность $z_n \in \ell_\infty$ вида

$$z_n(k) = \begin{cases} 1, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

и элемент $z \in \ell_\infty$ вида $z(k) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для любого $x \in \ell_1$ получаем

$$\left| \left(\Phi^{-1}(z)\right)(x) - \left(\Phi^{-1}(z_n)\right)(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x(k) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, в силу утверждения 5.5.6, последовательность z_n слабо* сходится к элементу z. Так как согласно замечанию 5.5.3 слабая сходимость всегда влечёт слабую*, то, в силу утверждения 5.5.7, последовательность z_n может сходиться слабо только к тому же элементу z. Но как раз этот факт не имеет места ! Действительно, рассмотрим подпространство

$$L = \mathrm{Lin}\{z_n\}_{n=1}^{\infty},$$

очевидно состоящее из всех финитных числовых последовательностей. Ясно, что расстояние от элемента z до подпространства L в пространстве ℓ_∞ не меньше единицы. Поэтому

$$z \notin [L].$$

Следовательно, в силу пункта 1 следствия 5.1.6 теоремы Хана-Банаха, существует функционал $f \in \ell_\infty^*$, такой, что $f(z) = 1$ и $f = 0$ на $[L]$. Но тогда $f(z_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. числовая последовательность $f(z_n)$ не сходится к $f(z)$ при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность z_n является слабо расходящейся и одновременно слабо* сходящейся в пространстве ℓ_∞, что и доказывает нерефлексивность этого пространства. $\square$

Утверждение 5.5.10. *Пусть пространство X является сепарабельным. Для любого $R > 0$ рассмотрим слабую* топологию на шаре $B_R^*(0) \subset X^*$, т. е. семейство*

$$\tau_{w^*}(R) = \left\{ \, U \cap B_R^*(0) \quad \Big| \quad U \in \tau_{w^*} \, \right\}.$$

Тогда топологическое пространство $\big(B_R^*(0), \tau_{w^*}(R)\big)$ является метрическим пространством, т. е. топология $\tau_{w^*}(R)$ метризуема.

Доказательство. Так как пространство X сепарабельно, то на единичной сфере в пространстве X существует счётное всюду плотное множество

$$A = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X,$$

т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем равенство $\|x_n\| = 1$, и для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $m = m(x, \varepsilon)$, такой, что

$$\|x - x_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Определим для любых функционалов $f, g \in B_R^*(0)$ величину

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \left| f(x_n) - g(x_n) \right|.$$

Покажем, что функция ρ является метрикой на шаре $B_R^*(0)$. Так как справедливо неравенство

$$|f(x_n) - g(x_n)| \leqslant \big(\|f\| + \|g\|\big) \, \|x_n\| \leqslant 2R,$$

то

$$0 \leqslant \rho(f, g) \leqslant 2R \qquad \forall \, f, g \in B_R^*(0).$$

Далее, если $\rho(f, g) = 0$, то получаем

$$f(x_n) = g(x_n) \qquad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in E = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Так как множество E является всюду плотным в X, то, в силу непрерывности функционалов f и g, получаем равенство

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in X, \quad \Rightarrow \quad f = g.$$

Равенство $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ очевидно. Для любых $f, g, h \in B_R^*(0)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|f(x_n) - g(x_n)| \leqslant |f(x_n) - h(x_n)| + |h(x_n) - g(x_n)|.$$

Следовательно, получаем

$$\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h) + \rho(g,h),$$

т. е. для функции ρ справедливо неравенство треугольника.

Пусть $\tau_\rho^*(R)$ — метрическая топология в $B_R^*(0)$, порождённая метрикой ρ. Покажем, что справедливо равенство

$$\tau_{w^*}(R) = \tau_\rho^*(R).$$

Заметим, что предбазу топологии $\tau_{w^*}(R)$ образует семейство

$$\sigma_{w^*}(R) = \left\{\ V^*(x,f,\varepsilon) \cap B_R^*(0) \quad \middle| \quad x \in X,\ \ f \in X^*,\ \ \varepsilon > 0\ \right\}.$$

Следовательно, вложение

$$\tau_{w^*}(R) \subset \tau_\rho^*(R)$$

следует из вложения

$$\sigma_{w^*}(R) \subset \tau_\rho^*(R).$$

Докажем это последнее вложение. Зафиксируем произвольные вектор $x \in X$, функционал $f \in X^*$ и число $\varepsilon > 0$. Если $x = 0$, то

$$V^*(x,f,\varepsilon) = X^* \quad \text{и} \quad V^*(x,f,\varepsilon) \cap B_R^*(0) = B_R^*(0) \in \tau_\rho^*(R),$$

т. е. в этом случае доказывать нечего. Поэтому пусть $x \neq 0$. Определим

$$y = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|}.$$

Тогда получаем равенство

$$V^*(x,f,\varepsilon) = V^*(y,f,\delta).$$

Рассмотрим произвольный функционал

$$g \in V^*(y, f, \delta) \cap B_R^*(0), \quad \text{т. е.} \quad |g(y) - f(y)| < \delta \quad \text{и} \quad \|g\| \leqslant R.$$

Существует номер m, такой, что

$$\|y - x_m\| < \frac{\delta - |g(y) - f(y)|}{4R}.$$

Пусть число

$$r = \frac{\delta - |g(y) - f(y)|}{2^{m+1}} > 0.$$

Рассмотрим произвольный функционал $h \in B_R^*(0)$ вида $\rho(g, h) < r$. Тогда справедливо неравенство

$$|h(x_m) - g(x_m)| < 2^m r = \frac{\delta - |g(y) - f(y)|}{2}.$$

Следовательно, получаем

$$|h(y) - f(y)| \leqslant |h(y) - g(y)| + |g(y) - f(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \|(h - g)(y - x_m)| + |(h - g)(x_m)| + |(g - f)(y)| <$$

$$< \|y - x_m\| 2R + \frac{\delta + |(g - f)(y)|}{2} < \frac{\delta - |(g - f)(y)|}{2} + \frac{\delta + |(g - f)(y)|}{2} = \delta,$$

т. е. выполнено вложение

$$h \in V^*(y, f, \delta) \cap B_R^*(0) = V^*(x, f, \varepsilon) \cap B_R^*(0).$$

Следовательно, любой функционал g из множества

$$V^*(x, f, \varepsilon) \cap B_R^*(0)$$

я вляется его ρ–внутренней точкой. Но тогда справедливо вложение

$$V^*(x, f, \varepsilon) \cap B_R^*(0) \in \tau_\rho^*(R),$$

что и требовалось.

Теперь докажем обратное вложение

$$\tau_\rho^*(R) \subset \tau_{w^*}(R).$$

Так как базой $\beta^*_\rho(R)$ метрической топологии $\tau^*_\rho(R)$ служат ρ-открытые шары вида

$$O^\rho_r(f) = \left\{ \ g \in B^*_R(0) \quad \Big| \quad \rho(f,g) < r \ \right\}, \quad f \in B^*_R(0), \quad r > 0,$$

то достаточно доказать вложение

$$\beta^*_\rho(R) \subset \tau_{w^*}(R).$$

Зафиксируем функционал $f \in B^*_R(0)$ и число $r > 0$. Рассмотрим произвольный функционал

$$g \in O^\rho_r(f), \quad \text{т. е.} \quad g \in B^*_R(0) \quad \text{и} \quad \rho(f,g) < r.$$

Существует номер N, такой, что

$$2^{-N} < \frac{r - \rho(f,g)}{4R}.$$

Пусть число

$$\delta = \frac{r - \rho(f,g)}{2} > 0.$$

Рассмотрим произвольный функционал

$$h \in \left(\bigcap_{n=1}^{N} V(x_n, g, \delta) \right) \cap B^*_R(0) = U^*(g) \in \tau_{w^*}(R).$$

Тогда получаем

$$\rho(f,h) \leqslant \rho(g,h) + \rho(f,g) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |(g-h)(x_n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} 2R + \rho(f,g) <$$

$$< \delta + 2^{-N} 2R + \rho(f,g) < \frac{r - \rho(f,g)}{2} + \frac{r - \rho(f,g)}{2} + \rho(f,g) = r.$$

Следовательно, $h \in O^\rho_r(f)$, т. е. справедливо вложение $U^*(g) \subset O^\rho_r(f)$. Получаем

$$O^\rho_r(f) = \bigcup_{g \in O^\rho_r(f)} \{g\} \subset \bigcup_{g \in O^\rho_r(f)} U^*(g) \subset O^\rho_r(f),$$

т. е. справедливо соотношение

$$O_r^\rho(f) = \bigcup_{g \in O_r^\rho(f)} U^*(g) \in \tau_{w^*}(R),$$

что и требовалось. ■

Утверждение 5.5.11. *Пусть линейное нормированное пространство X является полным, а последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ является слабо* сходящейся к функционалу $g \in X^*$. Тогда справедливы неравенства*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < +\infty \quad \text{и} \quad \|g\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|f_n\|.$$

Доказательство. Так как для любого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является сходящейся к числу $g(x)$, то она является ограниченной. Следовательно, так как пространство X полно, по теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза получаем ограниченность последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $\mathcal{L}(X, \mathbb{C}) = X^*$, т. е. выполнено неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < +\infty.$$

Для любого $x \in X$ имеем равенство

$$|g(x)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(x)|.$$

Тогда для любого $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой, что для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство

$$|g(x)| \leqslant |f_n(x)| + \varepsilon \leqslant \|f_n\| + \varepsilon.$$

Переходя в правой части последнего неравенства к нижнему пределу при $n \to \infty$, получаем

$$|g(x)| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|f_n\| + \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|g\| = \sup_{\|x\|=1} |g(x)| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|f_n\| + \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to +0$ получаем требуемое неравенство

$$\|g\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

■

П р и м е р 5.5.12. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X и слабо* сходящейся последовательности функционалов из X^*, которая не является ограниченной в X^*. Рассмотрим неполное пространство

$$(X, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$$

из примера 1.4.15. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим линейный функционал $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ вида

$$f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} x(k) \qquad \forall\, x \in X.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant n\|x\|_\infty, \quad \forall\, x \in X, \quad \Rightarrow \quad \|f_n\| \leqslant n,$$

а для вектора $z_n \in X$ вида

$$z_n(k) = \begin{cases} 1, & n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \\ 0, & 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{или} \quad k > 2n \end{cases}$$

имеем соотношения

$$\|z_n\|_\infty = 1 \quad \text{и} \quad \|f_n\| \geqslant |f_n(z_n)| = n.$$

Следовательно,

$$\|f_n\| = n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

т. е. последовательность функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ не является ограниченной в X^*. Однако для любого вектора $x \in X = \ell_1$ получаем

$$|f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} |x(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

в силу критерия Коши сходимости числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|.$$

Поэтому последовательность функционалов f_n слабо* сходится к нулевому функционалу в пространстве X^*. ▲

З а м е ч а н и е 5.5.13. Пусть пространство X полное бесконечномерное и сепарабельное. Пусть $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ — счётное всюду плотное на единичной сфере в пространстве X множество. Пусть

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| f(x_n) - g(x_n) \right| \qquad \forall\, f, g \in X^*$$

метрика в X^*, определённая в утверждении 5.5.10. Покажем, что в пространстве X^* существует последовательность, сходящаяся по метрике ρ к нулевому функционалу и не являющаяся слабо* сходящейся. Для любого номера n рассмотрим конечномерное подпространство

$$L_n = \mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_n\} \subset X.$$

Так как пространство X бесконечномерно, то существует вектор $z_n \in \in X$, такой, что $z_n \notin L_n$. Конечномерное подпространство L_n является замкнутым в X по следствию 3.1.19. Тогда в силу пункта 1 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха существует нетривиальный функционал $g_n \in X^*$, равный нулю на подпространстве L_n, а $g_n(z_n) = 1$. Определим функционал

$$f_n = \frac{n}{\|g_n\|} g_n.$$

Тогда $\|f_n\| = n$. Следовательно, последовательность функционалов f_n является неограниченной по норме пространства X^*. Поэтому в силу полноты пространства X и утверждения 5.5.11 получаем, что последовательность f_n не является слабо* сходящейся. Покажем, что

$$\rho(f_n, 0) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Действительно, так как по определению функционала f_n имеем

$$f_n(x_k) = 0 \qquad \forall\, k \in \overline{1, n},$$

то получаем

$$\rho(f_n, 0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \left| f_n(x_k) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} n = \frac{n}{2^n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. Это замечание показывает, что сходимость по метрике ρ не равносильна слабой* сходимости без условия ограниченности последовательности функционалов по норме сопряжённого пространства X^*. □

О п р е д е л е н и е 5.5.14. *Последовательность функционалов*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$$

называется слабо фундаментальной, если для любого вектора* $x \in$ $\in X$ *числовая последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *является фундаментальной в* $\mathbb{C}$. *Пространство* X^* *называется слабо* полным, если любая слабо* фундаментальная последовательность из* X^* *является слабо* сходящейся.*

У т в е р ж д е н и е 5.5.15. *Пусть пространство* X *является полным. Тогда пространство* X^* *является слабо* полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что слабая* сходимость и слабая* фундаментальность последовательности функционалов из пространства $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ является поточечной сходимостью и поточечной фундаментальностью этой последовательности линейных ограниченных операторов, действующих из X в $\mathbb{C}$. В силу полноты пространств X и $\mathbb{C}$ по теореме 3.4.31 пространство $\mathcal{L}(X, \mathbb{C}) = X^*$ является полным относительно поточечной сходимости, т. е. слабо* полным. ■

П р и м е р 5.5.16. Приведём пример неполного пространства X, для которого пространство X^* не является слабо* полным. Рассмотрим неполное пространство $(X, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ (см. пример 1.4.15). Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функционал $f_n \colon X \to \mathbb{C}$ вида

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k) \qquad \forall\, x \in X.$$

Видим, что

$$|f_n(x)| \leqslant n\|x\|_\infty \quad \forall\, x \in X, \quad \Rightarrow \quad \|f_n\| \leqslant n.$$

С другой стороны, для вектора $z_n \in X = \ell_1$ вида

$$z_n(k) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

имеем

$$\|z_n\|_\infty = 1 \quad \text{и} \quad \|f_n\| \geqslant |f_n(z_n)| = n.$$

Следовательно, $\|f_n\| = n$. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ является слабо* фундаментальной, так как для любого $x \in X = \ell_1$ и любых номеров m, n имеем

$$|f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} |x(k)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При этом для любого $x \in X = \ell_1$ существует

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) = g(x).$$

Покажем, что функционал $g\colon X \to \mathbb{C}$ не является ограниченным, т. е. $g \notin X^*$. Действительно, справедливы соотношения

$$\|g\| \geqslant |g(z_n)| = n \to \infty,$$

т. е. имеет место равенство $\|g\| = +\infty$. Следовательно, слабо* фундаментальная последовательность ограниченных функционалов f_n не является слабо* сходящейся в пространстве X^*. ▲

Теорема 5.5.17. (Банах, Алаоглу) *Пусть пространство X является сепарабельным. Тогда для любого $R > 0$ шар $B_R^*(0) \subset X^*$ является слабо* компактным.*

Доказательство. В силу утверждения 5.5.10, слабая* топология на шаре $B_R^*(0)$ метризуема. Следовательно, по теореме 2.2.3, слабая* компактность шара $B_R^*(0)$ эквивалентна его слабой* секвенциальной компактности. Для доказательства слабой* секвенциальной компактности шара $B_R^*(0)$ рассмотрим произвольную последовательность функционалов

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_R^*(0),$$

и покажем, что она содержит слабо* сходящуюся подпоследовательность к некоторому функционалу $g \in B_R^*(0)$.

Пусть $E = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счётное всюду плотное подмножество пространства X. Так как числовая последовательность $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в силу неравенства

$$|f_n(x_1)| \leqslant R\|x_1\| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то, по теореме Больцано—Вейерштрасса, она имеет сходящуюся подпоследовательность

$$\{f_{n_k(1)}(x_1)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для номера m имеем строго возрастающую последовательность

$$\{n_k(m)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N},$$

такую, что для любого $s \in \overline{1,m}$ числовая последовательность

$$\{f_{n_k(m)}(x_s)\}_{k=1}^{\infty}$$

является сходящейся. Так как числовая последовательность

$$\{f_{n_k(m)}(x_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$$

ограничена в силу неравенства

$$|f_{n_k(m)}(x_{m+1})| \leqslant R\|x_{m+1}\| \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

то, по теореме Больцано—Вейерштрасса, она имеет сходящуюся подпоследовательность

$$\{f_{n_k(m+1)}(x_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}.$$

Рассмотрим последовательность функционалов

$$\{f_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено вложение

$$\{n_k(m+1)\}_{k=1}^{\infty} \subset \{n_k(m)\}_{k=1}^{\infty},$$

то имеет место неравенство

$$n_{m+1}(m+1) \geqslant n_{m+1}(m) > n_m(m).$$

Поэтому последовательность натуральных чисел $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$ является строго возрастающей, а последовательность функционалов

$$\{f_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$$

является подпоследовательностью последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{n_k(k)\}_{k=m}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{n_k(m)\}_{k=1}^{\infty}$, то существует предел

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k(k)}(x_m) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k(m)}(x_m) = g(x_m).$$

Покажем, что для любого вектора $x \in X$ числовая последовательность

$$\{f_{n_k(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

является сходящейся. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер m, такой, что

$$\|x - x_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для всех $k, s \geqslant m$ получаем неравенства

$$\left|f_{n_k(k)}(x) - f_{n_s(s)}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|f_{n_k(k)}(x - x_m)\right| + \left|f_{n_s(s)}(x - x_m)\right| + \left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2R\varepsilon + \left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right|.$$

Так как

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ s\to\infty}} \left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right| = \left|g(x_m) - g(x_m)\right| = 0,$$

то существует номер $M \geqslant m$, такой, что для всех $k, s \geqslant M$ выполнено неравенство

$$\left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, при всех $k, s \geqslant M$ получаем неравенство

$$\left|f_{n_k(k)}(x) - f_{n_s(s)}(x)\right| \leqslant (2R + 1)\varepsilon.$$

Таким образом, числовая последовательность

$$\{f_{n_k(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

является фундаментальной и, поэтому, сходящейся. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k(k)}(x) = g(x).$$

Тем самым определён линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{C}$ как поточечный предел на X последовательности $f_{n_k(k)}$. При этом для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ имеем

$$|g(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k(k)}(x)| \leqslant R,$$

т. е. справедливо неравенство $\|g\| \leqslant R$. Следовательно, функционал

$$g \in B_R^*(0) \subset X^*,$$

и последовательность $f_{n_k(k)}$ поточечно на X, а, значит, и слабо*, сходится к функционалу g, что и требовалось. ■

Пример 5.5.18. Приведём пример несепарабельного банахова пространства X, такого, что единичный шар $B_1^*(0)$ из сопряжённого пространства X^* не является секвенциально компактным. Пусть пространство $X = \ell_\infty$. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n \in X^*$ вида

$$f_n(x) = x(n) \qquad \forall\, x \in \ell_\infty, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что

$$\|f_n\| = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Действительно, определим элемент $y \in \ell_\infty$ вида

$$y(n) = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\|y\|_\infty = 1$, и справедливы соотношения:

$$1 = |f_n(y)| \leqslant \|f_n\| = \sup_{\|x\|_\infty = 1} |x(n)| \leqslant \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|_\infty = 1.$$

Таким образом,

$$f_n \in B_1^*(0).$$

При этом любая подпоследовательность f_{n_k} не является слабо* сходящейся, так как для элемента $z \in \ell_\infty$ вида

$$z(n_k) = (-1)^k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

получаем $f_{n_k}(z) = (-1)^k$ — расходящаяся числовая последовательность. ▲

Одним из применений теоремы 5.5.17 Банаха—Алаоглу является доказательство с её помощью слабой секвенциальной компактности любого слабого компакта в бесконечномерном линейном нормированном пространстве. Напомним, что в таком пространстве слабая топология неметризуема в силу утверждения 5.4.28. Поэтому слабая секвенциальная компактность произвольного слабого компакта в нём неочевидна. Имеет место следующая

Теорема 5.5.19. (Эберлейн, Шмульян) *Пусть X — линейное нормированное пространство, множество $K \subset X$ — слабый компакт. Тогда K является слабым секвенциальным компактом.*

Доказательство. Так как любой линейный функционал $f \in X^*$ является слабо непрерывным, то множество $f(K)$ является компактом в $\mathbb{C}$. Поэтому $f(K)$ ограничено в $\mathbb{C}$, то есть

$$\forall\, f \in X^* \quad \exists\, R_f > 0 \quad \forall\, x \in K \quad \hookrightarrow \quad |f(x)| \leqslant R_f.$$

Покажем, что слабый компакт K ограничен в пространстве X, то есть

$$\exists\, R > 0 \quad \forall\, x \in K \quad \hookrightarrow \quad \|x\| \leqslant R.$$

Предположим противное. Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in K \quad : \quad \|x_n\| > n.$$

Рассмотрим отображение $F\colon X \to X^{**}$ из утверждения 5.1.10 вида

$$(Fx)(f) = f(x) \qquad \forall\, x \in X,\ f \in X^*.$$

Отображение F — это изометрия из X на подпространство $F(X) \subset$ $\subset X^{**}$, поэтому

$$\|Fx_n\| = \|x_n\| > n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $Fx_n \in X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$ является неограниченной, а пространство $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ является полным в силу теоремы 3.4.16, то, по теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза, существует $f \in X^*$, такой, что последовательность $(Fx_n)(f) = f(x_n)$ неограничена в $\mathbb{C}$. Однако,

$$|f(x_n)| \leqslant R_f \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Получили противоречие. Таким образом, существует $R > 0$, такое, что

$$K \subset B_R(0).$$

Теперь рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$. Нам требуется доказать, что она имеет слабо сходящуюся подпоследовательность к некоторому элементу множества K. Если множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечно, то она имеет стационарную подпоследовательность, и доказывать нечего. Если же множество её значений бесконечно, то сущесвует её подпоследовательность, состоящая из попарно различных элементов, которую для простоты также обозначим x_n. Рассмотрим множество её значений

$$E = \left\{ \, x_n \;\;\middle|\;\; n \in \mathbb{N} \, \right\} \subset K.$$

Определим подпространство $L \subset X$ как сильное замыкание в X линейной оболочки множества E, то есть

$$L = [\operatorname{Lin} E]_{\|\cdot\|}\,.$$

Рассматриваем L как линейное нормированное пространство с нормой из X. Заметим, что L является сепарабельным, так как содержит счётное всюду плотное подмножество — это всевозможные конечные линейные комбинации элементов последовательности x_n с комплексными коэффициентами, вещественная и мнимая части которых рациональны. Тогда на единичной сфере пространства L существует счётное всюду плотное подмножество, обозначим его

$$Z = \{z_s\}_{s=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad z_s \in L, \quad \|z_s\| = 1 \quad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

Введём в сопряжённом пространстве L^* метрику так же, как в теореме 5.5.10:

$$\rho(f,g) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} |(f-g)(z_s)|, \qquad \forall\, f, g \in L^*.$$

Рассмотрим в L^* единичный шар (относительно операторной нормы):

$$B_1^*(0) = \left\{\, f \in L^* \;\;\middle|\;\; \|f\| \leqslant 1 \,\right\}.$$

По утверждению 5.5.10, шар $B_1^*(0)$ с индуцированной из L^* слабой* топологией является метрическим пространством относительно метрики ρ. По теореме 5.5.17 Банаха—Алаоглу, шар $B_1^*(0)$ слабо* компактен, то есть метрическое пространство $(B_1^*(0), \rho)$ компактно. Тогда, по теореме 2.2.3, шар $B_1^*(0)$ является ρ–вполне ограниченным. Поэтому для любого $m \in \mathbb{N}$ существует его конечная 2^{-m}–сеть относительно метрики ρ. Пусть это множество $M_m \subset B_1^*(0)$. Следовательно, множество

$$M = \bigcup_{m=1}^{+\infty} M_m$$

является счётным и ρ–всюду плотным подмножеством шара $B_1^*(0)$, то есть метрическое пространство $(B_1^*(0), \rho)$ сепарабельно. Пусть счётное множество M имеет вид

$$M = \left\{f_s\right\}_{s=1}^{\infty}, \qquad \|f_s\| \leqslant 1 \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

Числовая последовательность $\{f_1(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной, так как

$$|f_1(x_n)| \leqslant \|x_n\| \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, по теореме Больцано—Вейерштрасса, она имеет сходящуюся подпоследовательность, то есть существует строго возрастающая последовательность

$$\big\{n_k(1)\big\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N},$$

такая, что числовая последовательность $\{f_1(x_{n_k(1)})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Далее, рассуждая по индукции, предполагаем, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ существует строго возрастающая подпоследовательность

$$\big\{n_k(m)\big\}_{k=1}^{\infty} \subset \big\{n_k(m-1)\big\}_{k=1}^{\infty},$$

такая, что для любого номера $s \in \overline{1,m}$ числовая последовательность $\{f_s(x_{n_k(m)})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Видим, что следующая последовательность $\{f_{m+1}(x_{n_k(m)})\}_{k=1}^{\infty}$ также ограничена:

$$|f_{m+1}(x_{n_k(m)})| \leqslant \|x_{n_k(m)}\| \leqslant R \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, по теореме Больцано—Вейерштрасса, она имеет сходящуюся подпоследовательность, то есть существует строго возрастающая последовательность

$$\big\{n_k(m+1)\big\}_{k=1}^{\infty} \subset \big\{n_k(m)\big\}_{k=1}^{\infty},$$

такая, что числовая последовательность $\{f_{m+1}(x_{n_k(m+1)})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. При этом для любого номера $s \in \overline{1,m}$ числовая последовательность $\{f_s(x_{n_k(m+1)})\}_{k=1}^{\infty}$ также сходится как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{f_s(x_{n_k(m)})\}_{k=1}^{\infty}$.

Реализуя диагональный процесс Кантора, рассматриваем последовательность натуральных чисел $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\{n_s(k+1)\}_{s=1}^{\infty} \subset \{n_s(k)\}_{s=1}^{\infty} \quad \Rightarrow \quad n_{k+1}(k+1) \geqslant n_{k+1}(k).$$

Так как последовательность $\{n_s(k)\}_{s=1}^{\infty}$ строго возрастает, то в частности имеем $n_{k+1}(k) > n_k(k)$. Следовательно,

$$n_{k+1}(k+1) \geqslant n_{k+1}(k) > n_k(k) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

то есть последовательность $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$ строго возрастает. Тогда получаем, что $\{x_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность исходной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, причём для любого $s \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_s(x_{n_k(k)})\}_{k=s}^{\infty}$ сходится при $k \to \infty$ как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{f_s(x_{n_k(s)})\}_{k=1}^{\infty}$. Обозначим для краткости

$$y_k = x_{n_k(k)} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

и рассмотрим множество значений этой последовательности, обозначив его Y. Множество Y бесконечно, так как по условию значения последовательности y_k попарно различны. Тогда, в силу утверждения 2.1.6, множество Y имеет слабо предельную точку $y \in K$. То есть любой слабой окрестности y принадлежит некоторый элемент последовательности y_k, отличный от y.

Зафиксируем произвольно $s \in \mathbb{N}$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\ell \in \mathbb{N}$, такое, что для любых $k, r > \ell$ выполнено неравенство

$$|f_s(y_k) - f_s(y_r)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Определим конечное множество

$$S_\ell = \left\{ \, y_k \;\; \middle| \;\; 1 \leqslant k \leqslant \ell, \;\; y_k \neq y \, \right\}.$$

Так как одноточечное множество в линейном нормированном пространстве является слабо замкнутым, то множество S_ℓ также слабо замкнуто в X как конечное объединение одноточечных множеств. Тогда множество

$$U(y) = V\left(y, f_s, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \backslash S_\ell$$

является слабо открытым в X и содержит элемент y, то есть является слабой окрестностью y в пространстве X. Следовательно, ему принадлежит некоторый элемент y_r, отличный от y, поэтому автоматически получается, что $r > \ell$. Тогда для любого $k > \ell$ находим, что

$$|f_s(y_k) - f_s(y)| \leqslant |f_s(y_k) - f_s(y_r)| + |f_s(y_r) - f_s(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, доказано соотношение

$$\lim_{k \to \infty} f_s(y_k) = f_s(y) \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

Осталось показать, что для любого $g \in X^*$ вида $\|g\| \leqslant 1$ выполнено $g(y_k) \to g(y)$ при $k \to \infty$. Предположим противное, то есть существует $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{y_{k_r}\}_{r=1}^{\infty}$, такие, что

$$|g(y_{k_r}) - g(y)| \geqslant \varepsilon_0 \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$y_{k_r} \notin V(y, g, \varepsilon_0) \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}$$

то есть элемент y не является слабо предельной точкой последовательности $\{y_{k_r}\}_{r=1}^{\infty}$ в слабом компакте K. Однако, применяя для последовательности y_{k_r} те же рассуждения, что и для последовательности x_n, получаем, что существует слабая предельная точка $z \in K$

последовательности $\{y_{k_r}\}_{r=1}^{\infty}$ и её подпоследовательность $y_{k_{r_m}}$, такие, что

$$\lim_{m\to\infty} f_s(y_{k_{r_m}}) = f_s(z) \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{m\to\infty} f_s(y_{k_{r_m}}) = \lim_{k\to\infty} f_s(y_k) = f_s(y) \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$f_s(y) = f_s(z) \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

Так как множество $\{f_s\}_{s=1}^{\infty}$ является ρ—всюду плотным в шаре единичном $B_1^*(0) \subset L^*$, а индуцированная из L^* в шар $B_1^*(0)$ слабая* топология метризуема метрикой ρ, то немедленно получаем равенство

$$h(y) = h(z) \qquad \forall\, h \in B_1^*(0).$$

Так как сужение функционала g на подпространство L очевидно принадлежит шару $B_1^*(0)$, то, в частности, получаем, что $g(y) = g(z)$. Следовательно,

$$V(z, g, \varepsilon_0) = V(y, g, \varepsilon_0) \not\ni y_{k_r} \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}.$$

Получили противоречие с тем, что z — слабая предельная точка последовательности y_{k_r}. Теорема доказана. ■

Теорема 5.5.20. (Банах, Тихонов) *Пусть пространство X рефлексивно и сепарабельно. Тогда любая ограниченная в X последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $F\colon X \to X^{**}$ — изометрический изоморфизм между X и X^{**} вида

$$(Fx)(f) = f(x) \qquad \forall\, x \in X, \quad \forall\, f \in X^*.$$

Так как пространство X сепарабельно, то пространство $X^{**} = \operatorname{Im} F$ тоже является сепарабельным в силу изометричности отображения F. Следовательно, в силу утверждения 5.2.11 получаем, что пространство X^* является сепарабельным. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X.$$

Тогда существует $R > 0$, такое, что

$$\|x_n\| \leqslant R \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, последовательность

$$\varPhi_n = Fx_n \in X^{**}$$

является ограниченной в X^{**}, и

$$\|\varPhi_n\| = \|x_n\| \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Так как пространство X^* является сепарабельным, то, в силу теоремы 5.5.17 Банаха—Алаоглу, существует подпоследовательность $\varPhi_{n_k}$, слабо* сходящаяся в X^{**} к функционалу $\varPsi \in X^{**}$. Следовательно, существует вектор $y \in X$, такой, что

$$\varPsi = Fy.$$

Для любого функционала $f \in X^*$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} \varPhi_{n_k}(f) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \varPsi(f) = f(y).$$

Таким образом, в силу утверждения 5.4.7 последовательность x_{n_k} слабо сходится к вектору $y \in X$ при $k \to \infty$, что и требовалось. ■

Замечание 5.5.21. Заметим, что в сепарабельном нерефлексивном пространстве ℓ_1 ограниченная последовательность базисных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет слабо сходящейся подпоследовательности, так как по теореме 5.4.12 Шура слабая и сильная сходимости в ℓ_1 эквивалентны, а любая подпоследовательность последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является сильно фундаментальной. □

Утверждение 5.5.22. *Пусть пространство X рефлексивно и сепарабельно. Пусть множество $S \subset X$ является выпуклым и замкнутым. Тогда для любого вектора $x \in X$ в множестве S существует ближайший элемент, т. е. вектор $y = y(x) \in S$, такой, что*

$$\|x - y\| = \rho(x, S) = \inf_{z\in S} \|x - z\|.$$

Доказательство. По определению точной нижней грани числовой функции для вектора $x \in X$ существует минимизирующая последовательность $z_n \in S$, такая, что выполнено равенство

$$\rho(x, S) = \lim_{n\to\infty} \|x - z_n\|.$$

Так как
$$\|z_n\| \leqslant \|x\| + \|x - z_n\|,$$
а сходящаяся числовая последовательность $\|x - z_n\|$ является ограниченной, то последовательность z_n является ограниченной в пространстве X. Следовательно, по теореме 5.5.20 Банаха—Тихонова, она имеет слабо сходящуюся подпоследовательность z_{n_k} к вектору $y \in X$. Так как по теореме 5.4.14 Мазура выпуклое замкнутое множество S является слабо замкнутым, то выполнено вложение $y \in S$. В силу пункта 2 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха существует функционал $f \in X^*$ вида
$$\|f\| = 1 \quad \text{и} \quad |f(x - y)| = \|x - y\|.$$
Следовательно, получаем соотношения
$$\rho(x, S) \leqslant \|x - y\| = |f(x - y)| = \lim_{k\to\infty} |f(x - z_{n_k})| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \|x - z_{n_k}\| = \rho(x, S),$$
откуда сразу получаем равенство
$$\rho(x, S) = \|x - y\|.$$
Таким образом, вектор $y \in S$ является ближайшим к вектору x элементом множества S, что и требовалось. ■

Пример 5.5.23. Приведём пример выпуклого замкнутого ограниченного множества из нерефлексивного сепарабельного банахова пространства X, не имеющего ближайшего элемента для заданного вектора $x \in X$. Этот пример предложил студент 574 группы МФТИ Р. Гимадеев. В нерефлексивном сепарабельном банаховом пространстве $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ рассмотрим стандартный счётный базис $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и определим множество
$$M = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n \right\}_{n=1}^{\infty}.$$
В качестве выпуклого замкнутого ограниченного множества S из пространства ℓ_1 рассмотрим замыкание в ℓ_1 выпуклой оболочки множества M, т. е.
$$S = [\operatorname{conv} M].$$
Напомним, что выпуклой оболочкой множества линейного пространства называется совокупность всевозможных конечных выпуклых

комбинаций точек этого множества, т. е. выпуклой оболочкой множества M является множество

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k \quad \middle| \quad N \in \mathbb{N}, \ \begin{array}{c} x_1 \in M, \ldots, x_N \in M, \\ \alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_N \geqslant 0, \end{array} \ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1 \right\}.$$

Будем изучать расстояние от нуля до множества S, т. е.

$$\rho(0, S) = \inf_{z \in S} \|z\|_1.$$

Рассмотрим произвольную точку

$$z \in S = [\operatorname{conv} M].$$

Так как все элементы множества M имеют вещественные неотрицательные компоненты, то тем же свойством обладают элементы множеств $\operatorname{conv} M$ и $S = [\operatorname{conv} M]$. Следовательно,

$$z(k) \geqslant 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Определим для любого номера k число

$$\beta_k = \frac{z(k)}{1 + \frac{1}{k}} \geqslant 0.$$

Тогда получаем

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} z(k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k e_k.$$

Для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют номер N, неотрицательные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ вида

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1,$$

такие, что выполнено неравенство

$$\varepsilon \geqslant \left\| z - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k \right\|_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{N} |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k.$$

Следовательно, получаем неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \leqslant \varepsilon+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k = \varepsilon+1, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \geqslant -\varepsilon+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k+2\sum_{k=N+1}^{\infty}\beta_k \geqslant -\varepsilon+1.$$

Таким образом, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k = 1.$$

Получаем неравенство

$$\|z\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)\beta_k > \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k = 1.$$

Следовательно, справедлива оценка $\rho(0,S) \geqslant 1$. С другой стороны, имеем неравенства

$$\rho(0,S) \leqslant \rho(0,M) \leqslant \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1.$$

Таким образом,

$$\rho(0,S) = 1 < \|z\|_1 \qquad \forall\, z \in S,$$

т. е. нулевой элемент из ℓ_1 не имеет ближайшего элемента в выпуклом замкнутом ограниченном множестве $S \subset \ell_1$.

Приведём аналогичный пример в нерефлексивном банаховом пространстве $\big(C[0,1], \|\cdot\|_c\big)$. Этот пример предложил студент 673 группы МФТИ И. Цыбулин. Рассмотрим множество

$$M = \left\{\, x \in C[0,1] \quad \middle| \quad x(0)=0,\ \ \|x\|_c \leqslant 2,\ \ \int\limits_0^1 x(t)\,dt = 1 \,\right\}.$$

Множество M является выпуклым, так как для любых $x, y \in M$ и числа $\lambda \in [0,1]$ получаем

$$\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)(0) = \lambda x(0) + (1-\lambda)y(0) = 0,$$

$$\big\|\lambda x + (1-\lambda)y\big\|_c \leqslant \lambda\|x\|_c + (1-\lambda)\|y\|_c \leqslant 2,$$

$$\int\limits_0^1 \big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)(t)\,dt = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

т. е.

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in M.$$

Множество M является ограниченным, так как

$$\|x\|_c \leqslant 2 \qquad \forall\, x \in M.$$

Множество M является замкнутым. Действительно, для любой функции $z \in [M]$ имеем последовательность $x_n \in M$, такую, что

$$\|x_n - z\|_c = \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - z(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда получаем соотношения

$$z(0) = \lim_{n\to\infty} x_n(0) = 0, \quad \|z\|_c = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_c \leqslant 2,$$

$$\left|\int\limits_0^1 z(t)\,dt - 1\right| = \left|\int\limits_0^1 \big(z(t) - x_n(t)\big)\ dt\right| \leqslant \|z{-}x_n\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

откуда следует равенство

$$\int\limits_0^1 z(t)\,dt = 1.$$

Следовательно, выполнено вложение $z \in M$. Покажем, что для любой функции $x \in M$ выполнены соотношения

$$\rho(0, M) = 1 < \|x\|_c.$$

Для любого $x \in M$ имеем

$$\|x\|_c \geqslant \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt \geqslant \left|\int\limits_0^1 x(t)\,dt\right| = 1,$$

т. е. справедливо неравенство

$$\rho(0, M) \geqslant 1.$$

Для любых чисел $\varepsilon \in (0,1)$ и $a \in (0,1)$ определим функцию

$$x_{a,\varepsilon}(t) = (1+\varepsilon)\begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 1, & a \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 x_{a,\varepsilon}(t)\,dt = (1+\varepsilon)\left(1-\frac{a}{2}\right) = 1 \quad \text{при} \quad a = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \in (0,1).$$

Следовательно, для такого a получаем вложение

$$x_{a,\varepsilon} \in M$$

и равенство

$$\|x_{a,\varepsilon}\|_c = 1+\varepsilon,$$

т. е. выполнено неравенство

$$\rho(0,M) \leqslant 1+\varepsilon.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to +0$ получаем

$$1 \leqslant \rho(0,M) \leqslant 1,$$

т. е. справедливо равенство

$$\rho(0,M) = 1.$$

Предположим, что для некоторой функции $x \in M$ выполнено неравенство

$$\|x\|_c \leqslant 1.$$

Так как $x(0) = 0$, то существует $\delta \in (0,1)$, такое, что

$$|x(t)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta.$$

Тогда получаем

$$1 = \int\limits_0^1 x(t)\,dt \leqslant \frac{\delta}{2} + 1 - \delta = 1 - \frac{\delta}{2} < 1,$$

т. е. противоречие. Таким образом, для любого $x \in M$ выполнено строгое неравенство

$$\|x\|_c > 1,$$

что и требовалось. ▲

З а д а ч а 5.5.24. Пусть ненулевое линейное нормированное пространство X рефлексивно и сепарабельно. Доказать, что любой функционал $f \in X^*$ достигает своей нормы, т. е. на единичной сфере в X существует элемент $x_f \in X$, для которого выполнено равенство

$$\|f\| = |f(x_f)|.$$

Р е ш е н и е. Если функционал f нулевой, то его нулевая норма достигается на любом элементе единичной сферы пространства X. Поэтому далее считаем $f \neq 0$. По определению нормы функционала f, существует максимизирующая последовательность $x_n \in B_1(0)$, такая, что

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)|.$$

По теореме 5.5.20 последовательность x_n имеет слабо сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} к некоторому элементу $y \in X$. Следовательно,

$$f(x_{n_k}) \to f(y) \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

что влечёт равенство

$$\|f\| = |f(y)|.$$

Так как $\|f\| > 0$, то $y \neq 0$. В силу утверждения 5.4.10, имеем неравенство

$$\|y\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| \leqslant 1.$$

Если $\|y\| < 1$, то рассмотрим элемент $z = \frac{y}{\|y\|}$. Тогда $\|z\| = 1$ и справедливы противоречивые соотношения:

$$\|f\| \geqslant |f(z)| = \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{\|f\|}{\|y\|} > \|f\|.$$

Полученное противоречие влечёт равенство $\|y\| = 1$, т. е. искомый элемент x_f на единичной сфере пространства X, доставляющий норму функционала f, равен y. ▲

З а м е ч а н и е 5.5.25. Заметим, что для произвольного линейного нормированного пространства X и ненулевого функционала $f \in X^*$ свойство достижимости нормы f равносильно тому, что любой элемент пространства X имеет ближайшую точку в ядре функционала $\operatorname{Ker} f$. Действительно, неравенство $f \neq 0$ равносильно $\operatorname{Ker} f \neq X$, т. е. существует элемент

$$x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f.$$

Тогда справедливо равенство

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Lin}\{x_0\} = X,$$

так как очевидно, что

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Lin}\{x_0\} = \{0\},$$

и для любого $x \in X$ существует элемент

$$z = \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in \operatorname{Lin}\{x_0\},$$

такой, что

$$y = x - z \in \operatorname{Ker} f,$$

так как

$$f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = 0.$$

Это означает, что

$$\|f\| = \sup_{\substack{y \in \operatorname{Ker} f \\ t \neq 0}} \frac{|f(y + tx_0)|}{\|y + tx_0\|} =$$

$$= \sup_{\substack{y \in \operatorname{Ker} f \\ t \neq 0}} = \frac{|t|\,|f(x_0)|}{\|y + tx_0\|} = \sup_{y \in \operatorname{Ker} f} \frac{|f(x_0)|}{\|y + x_0\|} =$$

$$= \frac{|f(x_0)|}{\inf\limits_{y \in \operatorname{Ker} f} \|y + x_0\|} = \frac{|f(x_0)|}{\rho(x_0, \operatorname{Ker} f)}.$$

Если норма функционала f достигается на некотором элементе единичной сферы x_f, т. е.

$$|f(x_f)| = \|f\| > 0 \quad \text{и} \quad \|x_f\| = 1,$$

то для любого $x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ определим вектор

$$y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_f)} x_f \in \operatorname{Ker} f,$$

который и будет ближайшим к x_0 в $\operatorname{Ker} f$. Действительно, имеем:

$$\|x_0 - y_0\| = \frac{|f(x_0)|}{|f(x_f)|} = \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \rho(x_0, \operatorname{Ker} f).$$

Обратно, если некоторый элемент

$$x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f$$

имеет ближайший в $\operatorname{Ker} f$ элемент y_0, т. е.

$$y_0 \in \operatorname{Ker} f \quad \text{и} \quad \|x_0 - y_0\| = \rho(x_0, \operatorname{Ker} f) > 0,$$

то определим на единичной сфере в X элемент

$$x_f = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|},$$

для которого получаем:

$$|f(x_f)| = \frac{|f(x_0 - y_0)|}{\|x_0 - y_0\|} = \frac{|f(x_0)|}{\rho(x_0, \operatorname{Ker} f)} = \|f\|.$$

Так как для любого функционала $f \in X^*$ его ядро $\operatorname{Ker} f$, — замкнутое подпространство в X, — является выпуклым и замкнутым множеством, то в случае рефлексивного сепарабельного пространства X, согласно утверждению 5.5.22, для любого элемента пространства X существует ближайший элемент в $\operatorname{Ker} f$, что равносильно достижимости нормы функционалом f. $\square$

Ещё одно интересное применение теоремы Банаха—Тихонова можно показать на примере вычисления сопряжённых пространств

$$\big(\mathbb{L}_1[a,b]\big)^* \quad \text{и} \quad \big(\mathbb{L}_1(E)\big)^*.$$

Утверждение 5.5.26. *Заданы числа a и b, причём $a < b$. Тогда пространство $\big(\mathbb{L}_1[a,b]\big)^*$ изометрически изоморфно пространству $\mathbb{L}_\infty[a,b]$: для любого $\Phi \in \big(\mathbb{L}_1[a,b]\big)^*$ существует единственная комплексная функция $f \in \mathbb{L}_\infty[a,b]$, такая, что*

$$\Phi(g) = \int\limits_{[a,b]} fg\, d\mu \qquad \forall\, g \in \mathbb{L}_1[a,b], \tag{$*$}$$

причём $\|\Phi\| = \|f\|_\infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что любая функция $f \in \mathbb{L}_\infty[a,b]$ порождает по формуле $(*)$ функционал $\Phi \in \big(\mathbb{L}_1[a,b]\big)^*$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \|\Phi\|.$$

Так как для любой функции $g \in \mathbb{L}_1[a, b]$ и почти всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant \|f\|_\infty |g(x)|,$$

то справедливо вложение $fg \in \mathbb{L}_1[a, b]$ и неравенство

$$|\Phi(g)| \leqslant \int\limits_{[a,b]} |fg| \, d\mu \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Следовательно,

$$\|\Phi\| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Если $\|f\|_\infty > 0$, то для любого числа M вида $0 < M < \|f\|_\infty$ существует измеримое множество $E \subset [a, b]$ положительной меры, такое, что

$$|f(x)| > M \qquad \forall\, x \in E.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим измеримое множество

$$E_m = \left\{ x \in E \;\;\middle|\;\; |f(x)| \geqslant M + \frac{1}{m} \right\}.$$

Тогда

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = E.$$

Так как $\mu(E) > 0$, то существует номер m, такой, что множество E_m имеет положительную меру. Для любого числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим комплексную функцию $s_\varepsilon \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида

$$s_\varepsilon(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{|z|}, & |z| \geqslant \varepsilon, \\ \\ \frac{\bar{z}}{\varepsilon}, & |z| < \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что s_ε непрерывна на $\mathbb{C}$, при $|z| \geqslant \varepsilon$ выполнены равенства

$$|s_\varepsilon(z)| = 1 \quad \text{и} \quad s_\varepsilon(z) z = |z|,$$

а при $|z| < \varepsilon$ имеем

$$|s_\varepsilon(z)| < 1 \quad \text{и} \quad s_\varepsilon(z) z = \frac{|z|^2}{\varepsilon} \in [0, \varepsilon).$$

Непрерывность функции s_ε влечёт измеримость суперпозиции $s_\varepsilon(f)$ на $[a,b]$ в силу утверждения 4.2.8. Теперь определим измеримую функцию

$$g_m(x) = \frac{\delta_{E_m}(x) s_M(f(x))}{\mu(E_m)} \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Имеем:

$$\|g_m\|_1 = \int\limits_{E_m} \frac{|s_M(f)|\, d\mu}{\mu(E_m)} = \int\limits_{E_m} \frac{d\mu}{\mu(E_m)} = 1$$

и

$$\|f\|_\infty \geqslant \|\varPhi\| \geqslant |\varPhi(g_m)| = \int\limits_{E_m} \frac{s_M(f) f\, d\mu}{\mu(E_m)} = \int\limits_{E_m} \frac{|f|\, d\mu}{\mu(E_m)} \geqslant M + \frac{1}{m} > M,$$

откуда при $M \to \|f\|_\infty - 0$ получаем равенство

$$\|f\|_\infty = \|\varPhi\|.$$

Рассмотрим теперь произвольный ненулевой функционал

$$\varPhi \in (\mathbb{L}_1[a,b])^*$$

(для нулевого функционала $\varPhi$ в формулу $(*)$ очевидно подойдёт нулевая функция f). Нам требуется построить функцию $f \in \mathbb{L}_\infty[a,b]$, которая удовлетворяет формуле $(*)$. Для этого определим функцию

$$\varphi(x) = \varPhi\left(\delta_{[a,x]\cap[a,b]}\right) \qquad \forall\, x \in [a, b+1].$$

Очевидно, что для любых чисел t и τ вида $a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b+1$ имеет место равенство

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = \varPhi\left(\delta_{(\tau,t]\cap[a,b]}\right),$$

откуда немедленно следует неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leqslant \|\varPhi\|\, |t-\tau| \qquad \forall\, t,\tau \in [a, b+1].$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условию Липшица с константой $\|\varPhi\|$. Определим последовательность функций

$$\psi_n(x) = n\left(\varphi\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - \varphi(x)\right) \qquad \forall\, x \in [a,b], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Имеем:

$$|\psi_n(x)| = n\left|\varphi\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - \varphi(x)\right| \leqslant n\, \|\varPhi\|\, \tfrac{1}{n} = \|\varPhi\|.$$

Рассмотрим последовательность ψ_n в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2[a,b]$. Напомним, что сепарабельность $\mathbb{L}_2[a,b]$ следует из следствия 4.4.12, а гильбертовость пространства $\mathbb{L}_2[a,b]$ влечёт его рефлексивность в силу утверждения 5.3.2. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\|\psi_n\|_2 = \sqrt{\int\limits_{[a,b]} |\psi_n|^2 \, d\mu} \leqslant \|\varPhi\|\sqrt{b-a},$$

то последовательность ψ_n является ограниченной в рефлексивном сепарабельном пространстве $\mathbb{L}_2[a,b]$. Следовательно, по теореме 5.5.20 Банаха—Тихонова, она имеет слабо сходящуюся в $\mathbb{L}_2[a,b]$ подпоследовательность ψ_{n_k} к некоторой функции $f \in \mathbb{L}_2[a,b]$. Так как

$$|\psi_n(x)| \leqslant \|\varPhi\| \qquad \forall\, x \in [a,b], \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то можно показать, что

$$|f(x)| \leqslant \|\varPhi\| \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Действительно, рассмотрим измеримое множество

$$E = \left\{\ x \in [a,b] \quad \middle| \quad |f(x)| > \|\varPhi\|\ \right\}$$

Рассмотрев для любого $m \in \mathbb{N}$ измеримое множество

$$E_m = \left\{\ x \in [a,b] \quad \middle| \quad |f(x)| \geqslant \|\varPhi\| + \frac{1}{m}\ \right\},$$

легко видеть, что справедливо равенство

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Зафиксируем произвольный номер m и рассмотрим измеримую функцию

$$g_m(x) = \delta_{E_m}(x) s_{\|\varPhi\|}(f(x)) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Ясно, что

$$\|g_m\|_2 = \sqrt{\int\limits_{E_m} \left|s_{\|\varPhi\|}(f)\right|^2 \, d\mu} = \sqrt{\mu(E_m)} \leqslant \sqrt{b-a},$$

поэтому справедливо вложение

$$g_m \in \mathbb{L}_2[a,b].$$

Следовательно, в силу теоремы 5.3.1 Рисса—Фреше, имеем:

$$\int\limits_{[a,b]} \psi_{n_k} g_m \, d\mu \to \int\limits_{[a,b]} f g_m \, d\mu \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, справедливы неравенства:

$$\left| \int\limits_{[a,b]} \psi_{n_k} g_m \, d\mu \right| \leqslant \int\limits_{E_m} |\psi_{n_k}| \, \left| s_{\|\varPhi\|}(f) \right| \, d\mu \leqslant \|\varPhi\| \, \mu(E_m),$$

$$\left| \int\limits_{[a,b]} f g_m \, d\mu \right| = \left| \int\limits_{E_m} f s_{\|\varPhi\|}(f) \, d\mu \right| = \int\limits_{E_m} |f| \, d\mu \geqslant \left(\|\varPhi\| + \tfrac{1}{m} \right) \mu(E_m).$$

Отсюда находим, что

$$\|\varPhi\| \, \mu(E_m) \geqslant \left(\|\varPhi\| + \frac{1}{m} \right) \mu(E_m), \quad \Rightarrow \quad 0 \geqslant \frac{1}{m} \mu(E_m).$$

Так как по определению $\mu(E_m) \geqslant 0$, то получаем равенство

$$\mu(E_m) = 0 \qquad \forall \, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, E представляет собой счётное объединение множеств меры нуль, и, поэтому, само имеет меру нуль. Таким образом, для всех $x \in [a,b] \backslash E$, т. е. для почти всех $x \in [a,b]$, справедливо неравенство

$$|f(x)| \leqslant \|\varPhi\|,$$

которое доказывает вложение $f \in \mathbb{L}_\infty[a,b]$ и неравенство

$$\|f\|_\infty \leqslant \|\varPhi\|.$$

Теперь покажем, что для любого измеримого множества $E \subset [a,b]$ справедливо равенство

$$\varPhi\left(\delta_E\right) = \int\limits_E f \, d\mu.$$

Сначала докажем это равенство для произвольного отрезка

$$E = [\alpha, \beta] \subset [a,b].$$

Имеем:

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} \psi_{n_k}\, d\mu = n_k \left(\int\limits_{\alpha+\frac{1}{n_k}}^{\beta+\frac{1}{n_k}} \varphi(x)\, dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx \right) =$$

$$= n_k \left(\int\limits_{\beta}^{\beta+\frac{1}{n_k}} \varphi(x)\, dx - \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\frac{1}{n_k}} \varphi(x)\, dx \right)$$

По теореме о среднем для интеграла Римана от непрерывной функции φ, для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют числа

$$\alpha_k \in \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{n_k}\right] \quad \text{и} \quad \beta_k \in \left[\beta, \beta + \frac{1}{n_k}\right],$$

такие, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\frac{1}{n_k}} \varphi(x)\, dx = \frac{\varphi(\alpha_k)}{n_k}, \qquad \int\limits_{\beta}^{\beta+\frac{1}{n_k}} \varphi(x)\, dx = \frac{\varphi(\beta_k)}{n_k}.$$

Следовательно, получаем:

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} \psi_{n_k}\, d\mu = \varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k) \to \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, в силу слабой сходимости последовательности ψ_{n_k} в пространстве $\mathbb{L}_2[a,b]$ к функции f, при $k \to \infty$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} \psi_{n_k}\, d\mu = \int\limits_{[a,b]} \psi_{n_k} \delta_{[\alpha,\beta]}\, d\mu \to \int\limits_{[a,b]} f \delta_{[\alpha,\beta]}\, d\mu = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f\, d\mu.$$

Таким образом, выполнено равенство

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f\, d\mu.$$

По определению функции φ имеем равенство

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varPhi\left(\delta_{(\alpha,\beta]}\right).$$

Так как характеристическая функция одноточечного множества из отрезка $[a,b]$ равна нулю почти всюду на $[a,b]$, то действие на неё функционала $\varPhi$ равно нулю. Следовательно, получаем

$$\varPhi\left(\delta_{(\alpha,\beta]}\right) = \varPhi\left(\delta_{(\alpha,\beta]}\right) + \varPhi\left(\delta_{\{\alpha\}}\right) = \varPhi\left(\delta_{[\alpha,\beta]}\right).$$

Таким образом, доказано равенство

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} f\,d\mu = \varPhi\left(\delta_{[\alpha,\beta]}\right).$$

Так как интеграл Лебега функции f по любому одноточечному множеству из отрезка $[a,b]$ равен нулю, то для любого промежутка $I \subset$ $\subset [a,b]$ (отрезка, интервала, полуинтервала) немедленно получаем аналогичное равенство

$$\int\limits_I f\,d\mu = \varPhi\left(\delta_I\right).$$

Действительно, пусть отрезок $J \subset [a,b]$ является замыканием промежутка I. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\int\limits_I f\,d\mu = \int\limits_J f\,d\mu = \varPhi\left(\delta_J\right) = \varPhi\left(\delta_I\right).$$

Теперь рассмотрим произвольное клеточное множество $S \subset [a,b]$. Существует конечное семейство попарно непересекающихся промежутков $\{I_j\}_{j=1}^N$, объединение которых равно S. Тогда получаем:

$$\int\limits_S f\,d\mu = \sum_{j=1}^N \int\limits_{I_j} f\,d\mu = \sum_{j=1}^N \varPhi\left(\delta_{I_j}\right) = \varPhi\left(\sum_{j=1}^N \delta_{I_j}\right) = \varPhi\left(\delta_S\right).$$

Наконец рассмотрим произвольное измеримое множество $E \subset [a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует клеточное множество $S \subset [a,b]$, такое, что

$$\mu\left(E \Delta S\right) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда получаем:

$$\left|\int\limits_E f\,d\mu - \varPhi\left(\delta_E\right)\right| \leqslant \left|\int\limits_E f\,d\mu - \int\limits_S f\,d\mu\right| + \left|\varPhi\left(\delta_S\right) - \varPhi\left(\delta_E\right)\right|$$

Имеем соотношения:

$$\left| \int\limits_E f\,d\mu - \int\limits_S f\,d\mu \right| \leqslant \int\limits_{E\Delta S} |f|\,d\mu \leqslant \|f\|_\infty \mu\,(E\Delta S) \leqslant \|\varPhi\|\varepsilon,$$

$$\left|\varPhi\,(\delta_E) - \varPhi\,(\delta_S)\right| = \left|\varPhi\left(\delta_{E\setminus S}\right) - \varPhi\left(\delta_{S\setminus E}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varPhi\|\left(\|\delta_{E\setminus S}\|_1 + \|\delta_{S\setminus E}\|_1\right) = \|\varPhi\|\mu\,(E\Delta S) \leqslant \|\varPhi\|\varepsilon.$$

Таким образом, получили неравенство

$$\left| \int\limits_E f\,d\mu - \varPhi\,(\delta_E) \right| \leqslant 2\|\varPhi\|\varepsilon,$$

из которого при $\varepsilon \to +0$ получаем требуемое равенство

$$\int\limits_E f\,d\mu = \varPhi\,(\delta_E)\,.$$

Далее, для произвольной простой измеримой функции $\eta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ вида

$$\eta(x) = \sum_{k=1}^N c_k \delta_{E_k}(x) \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — различные комплексные числа, а $E_1, \ldots, E_N$ — попарно непересекающиеся измеримые подмножества отрезка $[a,b]$, получаем:

$$\varPhi(\eta) = \sum_{k=1}^N c_k\,\varPhi(\delta_{E_k}) = \sum_{k=1}^N c_k \int\limits_{E_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^N c_k \int\limits_{[a,b]} f\delta_{E_k}\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} f\eta\,d\mu.$$

Наконец, для произвольной функции $g \in \mathbb{L}_1[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует простая измеримая функция $\eta_\varepsilon\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, такая, что

$$\|g - \eta_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$$

(это показано в начале доказательства теоремы 4.4.10). Отсюда имеем:

$$\left| \varPhi(g) - \int\limits_{[a,b]} fg\,d\mu \right| \leqslant \left|\varPhi(g) - \varPhi(\eta_\varepsilon)\right| + \left| \int\limits_{[a,b]} f\eta_\varepsilon\,d\mu - \int\limits_{[a,b]} fg\,d\mu \right|$$

Так как справедливы оценки

$$\left|\varPhi(g)-\varPhi(\eta_\varepsilon)\right| = \left|\varPhi(g-\eta_\varepsilon)\right| \leqslant \|\varPhi\|\,\|g-\eta_\varepsilon\|_1 \leqslant \|\varPhi\|\varepsilon,$$

$$\left|\int\limits_{[a,b]} f\eta_\varepsilon\,d\mu - \int\limits_{[a,b]} fg\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_{[a,b]} |f|\,|\eta_\varepsilon - g|\,d\mu \leqslant \|f\|_\infty \|g-\eta_\varepsilon\|_1 \leqslant \|\varPhi\|\varepsilon,$$

то получаем неравенство

$$\left|\varPhi(g) - \int\limits_{[a,b]} fg\,d\mu\right| \leqslant 2\|\varPhi\|\varepsilon,$$

из которого при $\varepsilon \to +0$ получаем доказываемую формулу $(*)$.

Покажем единственность построенной для функционала

$$\varPhi \in \big(\mathbb{L}_1[a,b]\big)^*$$

функции $f \in \mathbb{L}_\infty[a,b]$, удовлетворяющей $(*)$. Предположим, что для некоторой другой функции $h \in \mathbb{L}_\infty[a,b]$ тоже справедлива формула $(*)$. Тогда определим функцию

$$g = \overline{f-h} \in \mathbb{L}_\infty[a,b] \subset \mathbb{L}_1[a,b],$$

и получим:

$$\varPhi(g) = \int\limits_{[a,b]} fg\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} hg\,d\mu, \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{[a,b]} (f-h)g\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} |f-h|^2\,d\mu = 0.$$

Отсюда сразу следует, что $f(x) = h(x)$ для почти всех $x \in [a,b]$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 5.5.27. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу. Тогда пространство $\big(\mathbb{L}_1(E)\big)^*$ изометрически изоморфно пространству $\mathbb{L}_\infty(E)$: для любого $\varPhi \in \big(\mathbb{L}_1(E)\big)^*$ существует единственная комплексная функция $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$, такая, что*

$$\varPhi(g) = \int\limits_E fg\,d\mu \qquad \forall\, g \in \mathbb{L}_1(E), \tag{$**$}$$

причём $\|\varPhi\| = \|f\|_\infty$.

Доказательство. Как и в утверждении 5.5.26, сначала покажем, что любая функция $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ порождает по формуле $(**)$ функционал $\varPhi \in (\mathbb{L}_1(E))^*$ с нормой $\|f\|_\infty = \|\varPhi\|$. Так как для любой функции $g \in \mathbb{L}_1(E)$ и почти всех $x \in E$ выполнено неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant \|f\|_\infty |g(x)|,$$

то справедливо вложение $fg \in \mathbb{L}_1(E)$ и неравенство

$$|\varPhi(g)| \leqslant \int\limits_E |fg|\,d\mu \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Следовательно,

$$\|\varPhi\| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Если $\|f\|_\infty > 0$, то для любого числа M вида $0 < M < \|f\|_\infty$ существует измеримое множество $G \subset E$ положительной меры, такое, что $|f(x)| > M$ для любого $x \in G$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим измеримое множество

$$G_m = \left\{ x \in G \;\;\middle|\;\; |f(x)| \geqslant M + \frac{1}{m} \right\}$$

Тогда

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = G.$$

Так как $\mu(G) > 0$, то существует номер m, такой, что множество G_m имеет положительную меру. Рассмотрим измеримую функцию

$$g_m(x) = \frac{\delta_{G_m}(x) s_M(f(x))}{\mu(G_m)} \qquad \forall\, x \in E$$

(напомним, что для любого $\varepsilon > 0$ непрерывная в $\mathbb{C}$ функция s_ε определена в начале доказательства утверждения 5.5.26) Имеем:

$$\|g_m\|_1 = \int\limits_{G_m} \frac{|s_M(f)|\,d\mu}{\mu(G_m)} = \int\limits_{G_m} \frac{d\mu}{\mu(G_m)} = 1,$$

$$\|f\|_\infty \geqslant \|\varPhi\| \geqslant |\varPhi(g_m)| = \int\limits_{G_m} \frac{s_M(f) f\,d\mu}{\mu(G_m)} = \int\limits_{G_m} \frac{|f|\,d\mu}{\mu(G_m)} \geqslant M + \frac{1}{m} > M,$$

откуда при $M \to \|f\|_\infty - 0$ получаем равенство

$$\|f\|_\infty = \|\varPhi\|.$$

Рассмотрим теперь произвольный ненулевой функционал

$$\varPhi \in \bigl(\mathbb{L}_1(E)\bigr)^*$$

(для нулевого функционала $\varPhi$ в формулу $(**)$ очевидно подойдёт нулевая функция f). Нам требуется построить функцию $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$, которая удовлетворяет формуле $(**)$. Для любого целого числа m определим измеримое множество

$$E_m = E \cap [m, m+1).$$

Эти множества попарно непересекаются, а их объединение равно E. Для любой функции $g \in \mathbb{L}_1(E)$ и любого $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $g_m = g\delta_{E_m}$. Так как в силу счётной аддитивности интеграла Лебега (теорема 4.3.25) справедливо равенство

$$\|g\|_1 = \int\limits_E |g|\,d\mu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{E_m} |g|\,d\mu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int\limits_E |g_m|\,d\mu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \|g_m\|_1,$$

то ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m$$

сходится абсолютно в пространстве $\mathbb{L}_1(E)$. Этот ряд сходится к функции g, так как

$$\Bigl\|g - \sum_{m=-N}^{N} g_m\Bigr\|_1 \leqslant \sum_{|m|>N} \int\limits_{E_m} |g| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, выполнено равенство

$$\varPhi(g) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varPhi(g_m).$$

Для любого $m \in \mathbb{Z}$ определим линейные операторы

$$I_m\colon \mathbb{L}_1(E) \to \mathbb{L}_1[m, m+1] \quad \text{и} \quad J_m\colon \mathbb{L}_1[m, m+1] \to \mathbb{L}_1(E)$$

следующим образом:

$$(I_m g)(x) = \begin{cases} g(x), & x \in E_m, \\ 0, & x \in [m, m+1]\setminus E_m, \end{cases} \qquad \forall\, g \in \mathbb{L}_1(E),$$

$$(J_m h)(x) = \begin{cases} h(x), & x \in E_m, \\ \\ 0, & x \in E \setminus E_m, \end{cases} \qquad \forall\, h \in \mathbb{L}_1[m, m+1].$$

Очевидно, что

$$\|I_m g\|_1 = \int\limits_{E_m} |g|\, d\mu \leqslant \int\limits_{E} |g|\, d\mu = \|g\|_1 \qquad \forall\, g \in \mathbb{L}_1(E).$$

Следовательно, $\|I_m\| \leqslant 1$, т. е. оператор I_m непрерывен. Аналогично,

$$\|J_m h\|_1 = \int\limits_{E_m} |h|\, d\mu \leqslant \int\limits_{[m,m+1]} |h|\, d\mu = \|h\|_1 \qquad \forall\, h \in \mathbb{L}_1[m, m+1]$$

Следовательно, $\|J_m\| \leqslant 1$, т. е. оператор J_m непрерывен. Определим функционал

$$\varPhi_m = \varPhi \circ J_m \in \left(\mathbb{L}_1[m, m+1]\right)^*.$$

Заметим, что функционал $\varPhi_m$ линеен и непрерывен как суперпозиция линейных и непрерывных отображений $\varPhi$ и J_m. В силу утверждения 5.5.26 существует функция $f_m \in \mathbb{L}_\infty[m, m+1]$, такая, что для любой функции $h \in \mathbb{L}_1[m, m+1]$ имеет место равенство

$$\varPhi_m(h) = \int\limits_{[m,m+1]} f_m h\, d\mu.$$

Заметим, что согласно утверждению 5.5.26 имеем соотношения:

$$\|f_m\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{[m,m+1]} |f_m| = \|\varPhi_m\| \leqslant \|\varPhi\|\, \|J_m\| \leqslant \|\varPhi\|.$$

Так как для любой функции $g \in \mathbb{L}_1(E)$ очевидно справедливо равенство

$$\varPhi\left(g\delta_{E_m}\right) = \varPhi(g_m) = \varPhi_m(I_m(g)),$$

то для любого $m \in \mathbb{Z}$ получаем:

$$\varPhi(g_m) = \int\limits_{[m,m+1]} f_m I_m(g)\, d\mu = \int\limits_{E_m} f_m g\, d\mu.$$

Определим функцию $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ по формуле:

$$f(x) = f_m(x) \quad \forall\, x \in E_m, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что существенная ограниченность функции f на множестве E следует из соотношений:

$$\|f\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{E_m} |f_m| \right) \leqslant \sup_{m\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{[m,m+1]} |f_m| \right) \leqslant \sup_{m\in\mathbb{Z}} \|\Phi\| = \|\Phi\|.$$

При этом для любой функции $g \in \mathbb{L}_1(E)$ имеем равенства:

$$\Phi(g) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Phi(g_m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{E_m} f_m g\, d\mu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{E_m} fg\, d\mu = \int\limits_E fg\, d\mu,$$

т. е. формула $(**)$ установлена.

Наконец, покажем единственность функции $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$. Предположим, что для рассматриваемого функционала $\Phi \in \big(\mathbb{L}_1(E)\big)^*$ существует ещё одна функция $h \in \mathbb{L}_\infty(E)$, удовлетворяющая $(**)$:

$$\Phi(g) = \int\limits_E fg\, d\mu = \int\limits_E hg\, d\mu \qquad \forall\, g \in \mathbb{L}_1(E).$$

Тогда для любого числа $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию

$$g_m = \overline{(f-h)}\delta_{E_m}.$$

Заметим, что вложение $g_m \in \mathbb{L}_1(E)$ следует из соотношений:

$$\|g_m\|_1 = \int\limits_{E_m} |f-h|\, d\mu \leqslant \|f-h\|_\infty \mu(E_m) \leqslant \|f-h\|_\infty.$$

Следовательно, получаем:

$$0 = \Phi(g_m) - \Phi(g_m) = \int\limits_{E_m} (f-h)\overline{(f-h)}\, d\mu = \int\limits_{E_m} |f-h|^2\, d\mu,$$

откуда следует равенство

$$\int\limits_E |f-h|^2\, d\mu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{E_m} |f-h|^2\, d\mu = 0.$$

Следовательно, $f(x) = h(x)$ для почти всех $x \in E$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 5.5.28. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу. Тогда последовательность функций $f_m \in \mathbb{L}_1(E)$ является слабо сходящейся в пространстве $\mathbb{L}_1(E)$ к функции $g \in \mathbb{L}_1(E)$ если и только если она сильно ограничена (т. е. ограничена числовая последовательность норм $\|f_m\|_1$), и для любого измеримого по Лебегу множества $G \subset E$ выполнено*

$$\int\limits_G f_m \, d\mu \to \int\limits_G g \, d\mu \qquad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Доказательство. В силу утверждения 5.5.27 слабая сходимость f_m к g в пространстве $\mathbb{L}_1(E)$ равносильна соотношениям

$$\int\limits_E f_m h \, d\mu \to \int\limits_E gh \, d\mu \qquad \text{при} \quad m \to \infty$$

для любой функции $h \in \mathbb{L}_\infty(E)$. Так как по утверждению 4.4.31 система характеристических функций всех измеримых подмножеств множества E полна в пространстве $\mathbb{L}_\infty(E)$, то в силу утверждения 5.4.22 получаем, что f_m слабо сходится к g если и только если ограничена последовательность норм $\|f_m\|_1$, и для любого измеримого множества $G \subset E$ выполнено:

$$\int\limits_E f_m \delta_G \, d\mu = \int\limits_G f_m \, d\mu \to \int\limits_E g \delta_G \, d\mu = \int\limits_G g \, d\mu \qquad \text{при} \quad m \to \infty,$$

что и требовалось доказать. ■

5.6. Сопряжённый оператор

Определение 5.6.1. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор*

$$A^* \colon Y^* \to X^*$$

называется сопряжённым к оператору A, если для всех $x \in X$ и $g \in Y^*$ выполнено равенство

$$g(Ax) = (A^* g)(x).$$

Утверждение 5.6.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда существует единственный сопряжённый оператор A^*, причём он является линейным и ограниченным, т. е. выполнено вложение $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. При этом справедливо равенство*

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Доказательство. Для произвольного фиксированного $g \in Y^*$ рассмотрим линейный функционал $\varPhi_g \colon X \to \mathbb{C}$ вида

$$\varPhi_g(x) = g(Ax) \qquad \forall\, x \in X.$$

Так как

$$|\varPhi_g(x)| \leqslant \|g\|\,\|A\|\,\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X,$$

то получаем

$$\|\varPhi_g\| \leqslant \|g\|\,\|A\|.$$

Следовательно, выполнено вложение

$$\varPhi_g \in X^*.$$

Определим значение оператора $A^* \colon Y^* \to X^*$ по формуле

$$A^* g = \varPhi_g.$$

Тогда для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$ выполнено равенство

$$(A^* g)(x) = \varPhi_g(x) = g(Ax),$$

т. е. оператор A^* удовлетворяет определению 5.6.1 и поэтому является сопряжённым к оператору A. Если некоторый оператор $B \colon Y^* \to X^*$ является сопряжённым к оператору A, то по определению 5.6.1 для любого $g \in Y^*$ получаем равенство

$$Bg = \varPhi_g = A^* g, \quad \text{т. е.} \quad B = A^*.$$

Таким образом, установлена единственность сопряжённого оператора. Для любых функционалов $g_1, g_2 \in Y^*$ и скаляров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, при каждом $x \in X$, получаем равенство

$$\Big(A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\Big)(x) =$$

$$= (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)(Ax) = \alpha_1 g_1(Ax) + \alpha_2 g_2(Ax) =$$

$$= \big(\alpha_1 A^*(g_1) + \alpha_2 A^*(g_2)\big)(x),$$

т. е. справедливо равенство

$$A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 A^*(g_1) + \alpha_2 A^*(g_2).$$

Следовательно, оператор A^* является линейным. Доказанное выше для любого функционала $g \in Y^*$ неравенство

$$\|A^* g\| = \|\varPhi_g\| \leqslant \|g\|\,\|A\|$$

означает оценку

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|,$$

т. е. линейный оператор A^* является ограниченным, и справедливо вложение

$$A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*).$$

С другой стороны, в силу следствия 5.1.6 для любого $x \in X$ получаем

$$\|Ax\|_Y = \sup_{\substack{g\in Y^*,\\ \|g\|=1}} \big|g(Ax)\big| = \sup_{\substack{g\in Y^*,\\ \|g\|=1}} \big|(A^*g)(x)\big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{g\in Y^*,\\ \|g\|=1}} \|A^*g\|\,\|x\|_X = \|A^*\|\,\|x\|_X.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Таким образом, доказано равенство

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

■

З а м е ч а н и е 5.6.3. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейные операторы $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда справедливы равенства

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (\alpha A)^* = \alpha A^*.$$

Действительно, для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$ имеем соотношения

$$\big((A+B)^*g\big)\,(x) = g\,\big((A+B)(x)\big) = g(Ax) + g(Bx) =$$

$$= (A^*g)(x) + (B^*g)(x) = \big((A^*+B^*)(g)\big)\,(x),$$

т. е. $(A+B)^*g = (A^*+B^*)(g)$. Следовательно, в силу произвольности функционала $g \in Y^*$, получаем равенство

$$(A+B)^* = A^* + B^*.$$

Аналогично, для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$ имеем соотношения

$$\big((\alpha A)^*(g)\big)(x) = g\big((\alpha A)(x)\big) = g\big(\alpha(Ax)\big) =$$

$$= \alpha g(Ax) = \alpha(A^*g)(x) = \big((\alpha A^*)(g)\big)(x),$$

т. е. $(\alpha A)^*g = \alpha(A^*g)$. Следовательно, в силу произвольности функционала $g \in Y^*$, получаем равенство

$$(\alpha A)^* = \alpha A^*.$$

$\square$

Замечание 5.6.4. Пусть $X = Y = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$. В этом случае можно естественным образом изменить определение сопряжённого оператора A^*, отождествляя пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$ по теореме 5.3.1 Рисса—Фреше. Согласно этой теореме, любой функционал из $\mathcal{H}^*$ реализуется единственным вектором из $\mathcal{H}$ с помощью скалярного произведения. Поэтому естественно полагать, что сопряжённый оператор A^* действует в пространстве $\mathcal{H}$, и для любых векторов $x, y \in \mathcal{H}$ выполнено равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Это соотношение определяет единственный линейный оператор $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, причём

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Действительно, любой фиксированный $y \in \mathcal{H}$ определяет линейный функционал $\varPhi_y \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ вида

$$\varPhi_y(x) = (Ax, y) \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

При этом,

$$|\varPhi_y(x)| \leqslant \|Ax\|\,\|y\| \leqslant \big(\|A\|\,\|y\|\big)\,\|x\|.$$

Следовательно, для любого $y \in \mathcal{H}$ получаем

$$\|\varPhi_y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|,$$

т.е. справедливо вложение $\varPhi_y \in \mathcal{H}^*$. Тогда, по теореме 5.3.1 Рисса—Фреше,

$$\varPhi_y(x) = \big(x, z(\varPhi_y)\big) \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H},$$

где $z\colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ — определённая в теореме Рисса—Фреше сопряженно-линейная изометрическая биекция. Таким образом, определён оператор $A^*\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ вида

$$A^* y = z(\varPhi_y).$$

Так как для любых векторов $y, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ и скаляра $\alpha \in \mathbb{C}$, очевидно, выполнены равенства

$$\varPhi_{y_1+y_2} = \varPhi_{y_1} + \varPhi_{y_2} \quad \text{и} \quad \varPhi_{\alpha y} = \overline{\alpha}\varPhi_y,$$

то получаем

$$A^*(y_1 + y_2) = z(\varPhi_{y_1} + \varPhi_{y_2}) = z(\varPhi_{y_1}) + z(\varPhi_{y_2}) = A^* y_1 + A^* y_2,$$

$$A^*(\alpha y) = z\left(\overline{\alpha}\varPhi_y\right) = \alpha z(\varPhi_y) = \alpha A^*(y).$$

Следовательно, оператор A^* является линейным, а доказанное выше для любого $y \in \mathcal{H}$ неравенство

$$\|A^* y\| = \|z(\varPhi_y)\| = \|\varPhi_y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$$

означает неравенство

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|,$$

т. е. $A^* \in \mathcal{L}(H)$. Также получаем оценку

$$\|Ax\| = \sup_{\|y\|=1} \bigl|(Ax, y)\bigr| = \sup_{\|y\|=1} \bigl|(x, A^* y)\bigr| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|A^* y\|\,\|x\| = \|A^*\|\,\|x\|,$$

т. е. $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Следовательно, доказано равенство

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Заметим, что при таком определении операции сопряжения линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве она становится сопряжённо-линейной. Действительно, для любых операторов $A, B \in \mathcal{L}(H)$ и любого скаляра $\alpha \in \mathbb{C}$ при всех $x, y \in \mathcal{H}$ имеем равенства

$$\bigl(x, (A+B)^*(y)\bigr) = \bigl((A+B)x, y\bigr) = \\ = (Ax, y) + (Bx, y) = \bigl(x, (A^* + B^*)y\bigr),$$

$$\bigl(x, (\alpha A)^* y\bigr) = \alpha(Ax, y) = \alpha\left(x, A^* y\right) = \left(x, \overline{\alpha} A^* y\right),$$

откуда получаем

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*.$$

□

Определение 5.6.5. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ и $N \subset X^*$ — подпространства. Правым аннулятором подпространства L называется множество*

$$L^{\perp} = \left\{ f \in X^* \quad \middle| \quad f(x) = 0 \quad \forall\, x \in L \right\}.$$

Левым аннулятором подпространства N называется множество

$$^{\perp}N = \left\{ x \in X \quad \middle| \quad f(x) = 0 \quad \forall\, f \in N \right\}.$$

Замечание 5.6.6. Заметим, что правый аннулятор подпространства $L \subset X$ является замкнутым подпространством в X^*, а левый аннулятор подпространства $N \subset X^*$ является замкнутым подпространством в X. Действительно, для любых функционалов $f, g \in L^{\perp}$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ для любого вектора $x \in L$ получаем

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = 0, \quad \text{так как} \quad f(x) = g(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha f + \beta g \in L^{\perp}.$$

Если функционал $f \in X^*$ является точкой прикосновения множества $L^{\perp}$, то существует последовательность

$$\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^{\perp},$$

такая, что

$$\|f - f_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда для любого вектора $x \in L$ получаем соотношения

$$|f(x)| = |(f - f_m)(x)| \leqslant \|f - f_m\|\,\|x\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т. е. $f(x) = 0$. Следовательно, справедливо вложение

$$f \in L^{\perp},$$

что означает замкнутость подпространства $L^{\perp}$.

Аналогично для любых векторов $x, y \in {}^{\perp}N$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ для любого функционала $f \in N$ получаем

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0, \quad \text{так как} \quad f(x) = f(y) = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha x + \beta y \in {}^{\perp}N.$$

Если вектор $x \in X$ является точкой прикосновения подпространства ${}^{\perp}N$, то существует последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset {}^{\perp}N$, такая, что

$$\|x - x_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда для любого функционала $f \in N$ получаем соотношения

$$|f(x)| = |f(x - x_m)| \leqslant \|f\| \, \|x - x_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т. е. $x \in {}^{\perp}N$. Следовательно, справедливо вложение

$$x \in {}^{\perp}N,$$

что означает замкнутость подпространства ${}^{\perp}N$. □

Утверждение 5.6.7. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ и $N \subset X^*$ — подпространства. Тогда справедливы соотношения*

$${}^{\perp}\left(L^{\perp}\right) = [L], \qquad \left({}^{\perp}N\right)^{\perp} \supset [N],$$

при этом равенство

$$\left({}^{\perp}N\right)^{\perp} = [N]$$

имеет место, если пространство X рефлексивно.

Доказательство. Для любых $x \in L$ и $f \in L^{\perp}$ справедливо равенство $f(x) = 0$. Следовательно, выполнено вложение

$$x \in {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right), \quad \text{т. е.} \quad L \subset {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right).$$

Так как, в силу замечания 5.6.6, множество ${}^{\perp}\left(L^{\perp}\right)$ замкнуто, то получаем вложение

$$[L] \subset {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right).$$

Предположим, что существует вектор

$$x \in {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right) \setminus [L].$$

Тогда, в силу пункта 1 следствия 5.1.6, существует функционал $f \in X^*$, такой, что

$$f(z) = 0 \qquad \forall\, z \in [L], \quad \text{а} \quad f(x) = 1.$$

Но тогда получаем, что

$$f \in L^{\perp}, \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0,$$

т. е. получили противоречие. Таким образом, доказано равенство

$$[L] = {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right).$$

Для любых $f \in N$ и $x \in {}^{\perp}N$ справедливо равенство

$$f(x) = 0.$$

Следовательно, выполнено вложение

$$f \in \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}, \quad \text{т. е.} \quad N \subset \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}.$$

Так как, в силу замечания 5.6.6, множество $\left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$ замкнуто, то получаем вложение

$$[N] \subset \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}.$$

Далее считаем, что пространство X является рефлексивным. Предположим, что существует функционал

$$f \in \left({}^{\perp}N\right)^{\perp} \backslash [N].$$

Тогда, в силу пункта 1 следствия 5.1.6, существует функционал $\varPhi \in$ $\in X^{**}$, такой, что

$$\varPhi(g) = 0 \qquad \forall\, g \in [N], \quad \text{а} \quad \varPhi(f) = 1.$$

В силу рефлексивности пространства X, для функционала $\varPhi \in X^{**}$ существует вектор $x \in X$, такой, что

$$\varPhi = Fx, \quad \text{т. е.} \quad \varPhi(g) = (Fx)(g) = g(x) \quad \forall\, g \in X^{*}.$$

Следовательно, получаем

$$g(x) = 0 \qquad \forall\, g \in [N].$$

Это означает вложение $x \in {}^{\perp}N$. Но тогда соотношение

$$0 = f(x) = (Fx)(f) = \varPhi(f)$$

противоречит равенству $\varPhi(f) = 1$. Таким образом, доказано равенство

$$[N] = \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}.$$

■

П р и м е р 5.6.8. Покажем, что в случае нерефлексивного пространства X может оказаться, что для некоторого подпространства $N \subset X^*$ имеет место неравенство

$$[N] \neq \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}.$$

Рассмотрим пространство $X = c_0$, тогда $X^* = \ell_1$. Пусть подпространство $N \subset \ell_1$ имеет вид

$$N = \left\{ x \in \ell_1 \quad \middle| \quad \sum_{m=1}^{\infty} x(m) = 0 \right\}.$$

Очевидно, что N — собственное замкнутое подпространство в ℓ_1, т. е.

$$[N] = N \neq \ell_1.$$

Рассмотрим произвольный вектор

$$z \in {}^{\perp}N \subset c_0.$$

Для любых различных номеров $m, n \in \mathbb{N}$ определим вектор $x \in N$ вида

$$x = e_m - e_n.$$

Тогда справедливо равенство

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} z(k)x(k) = z(m) - z(n).$$

Следовательно, z — стационарная последовательность из c_0. Но тогда z — нулевая последовательность. Таким образом, выполнено равенство

$${}^{\perp}N = \{0\}.$$

Следовательно,

$$\left({}^{\perp}N\right)^{\perp} = \ell_1 \neq N = [N],$$

что и требовалось. ▲

После примера 5.6.8 возникает естественный вопрос — для подпространства $N \subset X^*$ произвольного линейного нормированного пространства X какова связь множества $\left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$ с его подпространством N ? Оказывается, $\left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$ совпадает со слабым* замыканием подпространства N, то есть имеет место следующее

Утверждение 5.6.9. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $N \subset X^*$ — подпространство. Тогда*

$$\left({}^{\perp}N\right)^{\perp} = \left[N\right]_{\tau_{w^*}}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого подпространства $L \subset X$ его аннулятор $L^{\perp}$ является слабо* замкнутым в X^*. Для этого покажем вложение

$$X^* \backslash L^{\perp} \in \tau_{w^*}.$$

Рассмотрим произвольный функционал $f \in X^* \backslash L^{\perp}$. Следовательно, существует $x_0 \in L$, такой, что $f(x_0) \neq 0$. Для числа

$$\varepsilon_0 = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$$

рассмотрим слабую* окрестность функционала f вида

$$V^*(x_0, f, \varepsilon_0) = \left\{ g \in X^* \;\middle|\; |g(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \right\}.$$

Тогда для любого функционала $g \in V^*(x_0, f, \varepsilon_0)$ получаем

$$|g(x_0)| \geqslant |f(x_0)| - |g(x_0) - f(x_0)| > 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 > 0.$$

Следовательно, $g(x_0) \neq 0$ для $x_0 \in L$, то есть $g \notin L^{\perp}$. Таким образом, выполнено

$$V^*(x_0, f, \varepsilon_0) \subset X^* \backslash L^{\perp},$$

то есть вложение $X^* \backslash L^{\perp} \in \tau_{w^*}$ доказано.

В частности, для подпространства $L = {}^{\perp}N$ получаем слабую* замкнутость множества

$$L^{\perp} = \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}.$$

Тогда находим, что вложение

$$\left({}^{\perp}N\right)^{\perp} \supset N \quad \Rightarrow \quad \left({}^{\perp}N\right)^{\perp} \supset \left[N\right]_{\tau_{w^*}}.$$

Предположим, что существует функционал

$$h \in \left({}^{\perp}N\right)^{\perp} \backslash \left[N\right]_{\tau_{w^*}}.$$

Следовательно, существует слабая* окрестность нуля $U \subset X^*$, такая, что

$$(h + U) \cap \left[N\right]_{\tau_{w^*}} = \varnothing.$$

Так как $0 \in U \in \tau_{w^*}$, то существует $\delta > 0$ и векторы $x_1, \ldots, x_M \in X$, такие, что

$$W = \bigcap_{k=1}^{M} V^*(x_k, 0, \delta) \subset U, \quad \Rightarrow \quad (h + W) \cap \big[N\big]_{\tau_{w^*}} = \varnothing.$$

Заметим, что W — выпуклая симметричная слабая* окрестность нуля в X^*. В частности, $W = -W$. Поэтому

$$h \notin W + \big[N\big]_{\tau_{w^*}} = G.$$

Множество $G \subset X^*$ выпукло и слабо* открыто. Далее нам понадобится аналог теоремы об отделимости точки от не содержащего её выпуклого открытого множества в пространстве X^* со слабой* топологией (это следствие теоремы 3.4а из [2, Гл. 3, С. 70]). Утверждается, что существует линейный слабо* непрерывный функционал $\varPhi\colon X^* \to \mathbb{C}$, такой, что

$$\operatorname{Re} \varPhi(f) < 1 = \operatorname{Re} \varPhi(h) \quad \forall\, f \in G.$$

Для доказательства этого факта рассмотрим функцию Минковского множества G:

$$\mu_G(f) = \inf \left\{ \, t > 0 \quad \middle| \quad \frac{f}{t} \in G \, \right\}, \quad f \in X^*.$$

Для любого $f \in X^*$ определим число

$$p_W(f) = \max \left\{ \, \frac{|f(x_k)|}{\delta} \quad \middle| \quad 1 \leqslant k \leqslant M \, \right\}.$$

Заметим, что для любого $f \in X^*$ и произвольного положительного числа $t > p_W(f)$ выполнено

$$\frac{f}{t} \in W \subset G, \quad \Rightarrow \quad \mu_G(f) \leqslant p_W(f) \quad \forall\, f \in X^*.$$

Заметим, что из вложения $0 \in G$ и выпуклости множества G следует

$$\frac{f}{t} \in G \quad \forall\, f \in X^*, \quad \forall\, t > \mu_G(f).$$

Действительно, если $t > \mu_G(f)$, то, по определению μ_G, существует $t_1 \in (0, t)$, такое, что

$$\frac{f}{t_1} \in G.$$

Так как $0 \in G$ и множество G выпукло, то получаем:

$$\frac{f}{t} = \frac{t_1}{t}\,\frac{f}{t_1} + \left(1 - \frac{t_1}{t}\right) 0 \in G.$$

Функция μ_G положительно однородна и полуаддитивна:

$$\mu_G(\lambda f) = \lambda \mu_G(f) \quad \forall\, \lambda > 0, \quad \forall\, f \in X^*,$$

$$\mu_G(f_1 + f_2) \leqslant \mu_G(f_1) + \mu_G(f_2) \quad \forall\, f_1 \in X^*, \quad \forall\, f_2 \in X^*.$$

Действительно,

$$\mu_G(\lambda f) = \inf \left\{ \, t > 0 \quad \middle| \quad \frac{\lambda f}{t} \in G \, \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \, \lambda t > 0 \quad \middle| \quad \frac{f}{t} \in G \, \right\} = \lambda \mu_G(f).$$

Далее, для любых $t_1 > \mu_G(f)$ и $t_2 > \mu_G(f_2)$ имеем вложения

$$\frac{f_1}{t_1} \in G, \quad \frac{f_2}{t_2} \in G,$$

откуда, в силу выпуклости множества G, получаем

$$\frac{f_1 + f_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{t_1 + t_2}\,\frac{f_1}{t_1} + \frac{t_2}{t_1 + t_2}\,\frac{f_2}{t_2} \in G.$$

Следовательно,

$$\mu_G(f_1 + f_2) \leqslant t_1 + t_2,$$

откуда при $t_1 \to \mu_G(f_1) + 0$ и $t_2 \to \mu_G(f_2) + 0$ находим

$$\mu_G(f_1 + f_2) \leqslant \mu_G(f_1) + \mu_G(f_2).$$

Заметим, наконец, что

$$G = \left\{ \, g \in X^* \;\middle|\; \mu_G(g) < 1 \, \right\}.$$

Действительно, если $\mu_G(g) < 1$, то существует $t \in (0, 1)$, такое, что

$$\frac{g}{t} \in G.$$

Следовательно, в силу вложения $0 \in G$ и выпуклости множества G, получаем

$$g = t\,\frac{g}{t} + (1 - t) 0 \in G.$$

Обратно, если $g \in G$, то существуют функционалы $f \in \left[N\right]_{\tau_{w^*}}$ и $\varphi \in W$, такие, что

$$g = f + \varphi.$$

Вложение $\varphi \in W$ равносильно неравенству

$$p_W(\varphi) < 1.$$

Далее, так как N — подпространство, то для любого $f \in \left[N\right]_{\tau_{w^*}}$ выполнено

$$\left[N\right]_{\tau_{w^*}} - f = \left[N\right]_{\tau_{w^*}}.$$

Следовательно, получаем

$$\mu_G(f + \varphi) = \inf\left\{\, t > 0 \quad \middle| \quad \frac{f + \varphi}{t} \in G \,\right\} =$$

$$= \inf\left\{\, t > 0 \quad \middle| \quad \frac{\varphi}{t} \in G \,\right\} = \mu_G(\varphi)$$

В частности, для $\varphi \in W$ это означает, что

$$\mu_G(g) = \mu_G(\varphi) \leqslant p_W(\varphi) < 1,$$

что и требовалось.

Определим вещественно-линейное подпространство

$$L = \left[N\right]_{\tau_{w^*}} \oplus \left\{\, \lambda h \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R} \,\right\}$$

и вещественно-линейный функционал

$$\Psi\colon L \to \mathbb{R}$$

по формуле

$$\Psi(f + \lambda h) = \lambda, \quad f \in \left[N\right]_{\tau_{w^*}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что соотношение $h \notin G$ влечёт неравенство $\mu_G(h) \geqslant 1$. Тогда для любого $\lambda > 0$ и любого $f \in \left[N\right]_{\tau_{w^*}}$ находим

$$\Psi(f + \lambda h) = \lambda \leqslant \lambda\mu_G(h) = \mu_G(\lambda h) = \mu_G(f + \lambda h).$$

Если же $\lambda \leqslant 0$, то получаем очевидное неравенство

$$\Psi(f + \lambda h) = \lambda \leqslant 0 \leqslant \mu_G(f + \lambda h).$$

По теореме Хана—Банаха (это теорема 3.2 из [2, Гл. 3, С. 68]), существует вещественно-линейный функционал $\varLambda\colon X^* \to \mathbb{R}$, такой, что

$$\varLambda\big|_L = \varPsi, \quad \varLambda(g) \leqslant \mu_G(g) \quad \forall\, g \in X^*.$$

Для любого $g \in G$ получаем

$$\varLambda(g) \leqslant \mu_G(g) < 1 = \Lambda(h)$$

Искомый комплексный линейный функционал $\varPhi\colon X^* \to \mathbb{C}$ строится по обычной формуле

$$\varPhi(g) = \varLambda(g) - i\varLambda(ig), \quad g \in X^*,$$

так что $\operatorname{Re}\varPhi = \varLambda$. Покажем, что $\varPhi$ является слабо* непрерывным. Достаточно доказать его слабую* непрерывность в нуле. Для любого функционала $g \in W$ представим комплексное число $\varPhi(g)$ в экспоненциальной форме:

$$\varPhi(g) = |\varPhi(g)|e^{i\alpha}, \quad \Rightarrow \quad |\varPhi(g)| = \varPhi\left(e^{-i\alpha}g\right) = \varLambda\left(e^{-i\alpha}g\right).$$

Так как $e^{-i\alpha}W = W$, то $e^{-i\alpha}g \in W \subset G$, следовательно,

$$|\varPhi(g)| = \varLambda\left(e^{-i\alpha}g\right) < 1 \quad \forall\, g \in W.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует слабая* окрестность нуля $W_\varepsilon = \varepsilon W$, такая, что для любого $g \in W_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|\varPhi(g)| < \varepsilon,$$

что и требовалось. Следовательно, в силу замечания 5.5.4, существует вектор $z \in X$, такой, что

$$\varPhi = Fz, \quad \text{т. е.} \quad \varPhi(g) = g(z) \quad \forall\, g \in X^*.$$

Далее, так как множество G содержит подпространство N, то для любого функционала $f \in N$ и вещественного числа $t \neq 0$ получаем

$$\varLambda(tf) = t\varLambda(f) < 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sign}(t)\varLambda(f) < \frac{1}{|t|} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Следовательно,

$$\pm\varLambda(f) \leqslant 0, \quad \Rightarrow \quad \varLambda(f) = 0 \quad \forall\, f \in \mathbb{N}.$$

Но тогда отсюда немедленно следует, что

$$\Phi(f) = \operatorname{Re} \Lambda(f) - i\Lambda(if) = 0 \quad \forall\, f \in \mathbb{N}.$$

Так как $\Phi = Fz$ для подходящего $z \in X$, то это означает, что

$$\Phi(f) = f(z) = 0 \quad \forall\, f \in N, \quad \Rightarrow \quad z \in {}^{\perp}N.$$

Тогда вложение $h \in \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$ влечёт равенство

$$h(z) = 0$$

С другой стороны, по построению функционала Φ

$$1 = \operatorname{Re} \Phi(h) = \operatorname{Re} h(z),$$

то есть получили противоречие. Таким образом, наше предположение о существовании функционала h неверно, и справедливо равенство

$$\left({}^{\perp}N\right)^{\perp} = \left[N\right]_{\tau_{w^*}}$$

■

Т е о р е м а 5.6.10. (Фредгольм) *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда справедливы соотношения*

$$\operatorname{Ker} A = {}^{\perp}\left(\operatorname{Im} A^*\right), \qquad \operatorname{Ker} A^* = \left(\operatorname{Im} A\right)^{\perp}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу пункта 3 следствия 5.1.6 вложение $x \in \operatorname{Ker} A$, т. е. равенство $Ax = 0$ равносильно соотношению

$$g(Ax) = 0 \qquad \forall\, g \in Y^*,$$

что в свою очередь равносильно

$$(A^* g)(x) = 0 \qquad \forall\, g \in Y^*,$$

а это равносильно вложению

$$x \in {}^{\perp}\left(\operatorname{Im} A^*\right).$$

Таким образом, доказано равенство

$$\operatorname{Ker} A = {}^{\perp}\left(\operatorname{Im} A^*\right).$$

Вложение $g \in \operatorname{Ker} A^*$, т. е. равенство $A^* g = 0$, равносильно соотношению

$$(A^* g)(x) = 0 \qquad \forall\, x \in X,$$

что в свою очередь равносильно

$$g(Ax) = 0 \qquad \forall\, x \in X,$$

а это равносильно вложению

$$g \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

Таким образом, доказано равенство

$$\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

■

Следствие 5.6.11. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда справедливы соотношения*

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*]_{\tau_{w^*}} \supset [\operatorname{Im} A^*], \qquad {}^{\perp}(\operatorname{Ker} A^*) = [\operatorname{Im} A].$$

Если пространство X рефлексивно, то выполнено равенство

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*].$$

Доказательство. В силу утверждений 5.6.7 и 5.6.9, и теоремы 5.6.10 получаем

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \Big({}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)\Big)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*]_{\tau_{w^*}} \supset [\operatorname{Im} A^*],$$

$${}^{\perp}(\operatorname{Ker} A^*) = {}^{\perp}\big((\operatorname{Im} A)^{\perp}\big) = [\operatorname{Im} A].$$

Если пространство X рефлексивно, то для подпространства $\operatorname{Im} A^* \subset \subset X^*$, в силу утверждения 5.6.7, имеем равенство

$$\Big({}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)\Big)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*].$$

Следовательно, в этом случае выполнено равенство

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*].$$

■

П р и м е р 5.6.12. В случае, когда пространство X не является рефлексивным, для линейного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ может иметь место неравенство
$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \neq [\operatorname{Im} A^*]\,.$$
Приведём два таких примера.

Сначала рассмотрим пространства $X = Y = \ell_1$ и линейный оператор $A\colon \ell_1 \to \ell_1$ вида
$$(Ax)(k) = \frac{x(k)}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \ell_1.$$
Очевидно неравенство $\|A\| \leqslant 1$, так как для всех $x \in \ell_1$ имеем
$$\|Ax\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x(k)}{k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| = \|x\|_1,$$
т. е. выполнено вложение $A \in \mathcal{L}(\ell_1)$. Очевидно, что
$$\operatorname{Ker} A = \{0\}.$$
Действительно, равенство $Ax = 0$ для некоторого $x \in \ell_1$ равносильно равенству
$$\frac{x(k)}{k} = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \text{т. е.} \quad x(k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
В силу утверждения 5.2.3, справедливо равенство $\ell_1^* = \ell_\infty$. Тогда сопряжённый линейный оператор $A^*\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ имеет вид
$$(A^* z)(k) = \frac{z(k)}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, z \in \ell_\infty.$$
Действительно, для всех $x \in \ell_1$ и $z \in \ell_\infty$ выполнено равенство
$$\sum_{k=1}^{\infty} (Ax)(k) z(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\, \frac{1}{k}\, z(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) (A^* z)(k).$$
Так как $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то
$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \ell_\infty.$$
Теперь покажем, что
$$[\operatorname{Im} A^*] \neq \ell_\infty.$$

Рассмотрим вектор $z \in \ell_\infty$ вида $z(k) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что выполнено
$$z \notin [\operatorname{Im} A^*].$$
Действительно, для любого $x \in \ell_\infty$ имеем
$$\|z - A^* x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|1 - \frac{x(k)}{k}\right| \geqslant \lim_{k\to\infty} \left|1 - \frac{x(k)}{k}\right| = 1.$$
Следовательно, $\rho(z, \operatorname{Im} A^*) \geqslant 1$, т. е. действительно $z \notin [\operatorname{Im} A^*]$, что и требовалось.

Теперь рассмотрим пространства $X = Y = \mathbb{L}_1[0,1]$ и линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_1[0,1] \to \mathbb{L}_1[0,1]$ вида
$$(Ax)(t) = tx(t) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1], \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_1[0,1].$$
Очевидно неравенство
$$\|A\| \leqslant 1,$$
так как для всех $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ имеем
$$\|Ax\|_1 = \int\limits_{[0,1]} |tx(t)|\, d\mu \leqslant \int\limits_{[0,1]} |x(t)|\, d\mu = \|x\|_1.$$
Следовательно, выполнено вложение $A \in \mathcal{L}(\mathbb{L}_1[0,1])$. Очевидно, что
$$\operatorname{Ker} A = \{0\}.$$
Действительно, равенство $Ax = 0$ для некоторого $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ равносильно равенству
$$tx(t) = 0 \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1],$$
что влечёт равенство
$$x(t) = 0 \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1],$$
т. е. $x = 0$ в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$. Известно, что
$$(\mathbb{L}_1[0,1])^* = \mathbb{L}_\infty[0,1],$$
причём для любого функционала $f \in \big(\mathbb{L}_1[0,1]\big)^*$ существует единственный элемент $z_f \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$, такой, что
$$\|f\| = \|z_f\|_\infty.$$

Для всех $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ выполнено равенство

$$f(x) = \int\limits_{[0,1]} x(t) z_f(t)\, d\mu.$$

Тогда сопряжённый линейный оператор $A^*\colon \mathbb{L}_\infty[0,1] \to \mathbb{L}_\infty[0,1]$ имеет вид

$$(A^*z)(t) = tz(t) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1], \quad \forall\, z \in \mathbb{L}_\infty[0,1].$$

Действительно, для всех $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ и $z \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$ выполнено равенство

$$\int\limits_{[0,1]} (Ax)(t) z(t)\, d\mu = \int\limits_{[0,1]} x(t) t z(t)\, d\mu = \int\limits_{[0,1]} x(t)(A^*z)(t)\, d\mu.$$

Так как $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \mathbb{L}_\infty[0,1]$. Теперь покажем, что

$$[\operatorname{Im} A^*] \neq \mathbb{L}_\infty[0,1].$$

Рассмотрим функцию $z \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$, равную единице почти всюду на $[0,1]$, т. е.

$$z(t) = 1 \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1].$$

Покажем, что выполнено

$$z \notin [\operatorname{Im} A^*].$$

Действительно, для любого $x \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$ и любого числа $\delta \in (0,1)$ имеем

$$\|z - A^*x\|_\infty \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,\delta]} |1 - tx(t)| \geqslant 1 - \delta \|x\|_\infty \to 1 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно,

$$\rho(z, \operatorname{Im} A^*) \geqslant 1,$$

т. е. действительно $z \notin [\operatorname{Im} A^*]$, что и требовалось. ▲

Заметим, что в в примере 5.6.12 множества значений рассмотренных операторов $A\colon X \to Y$ всюду плотны в Y, но не равны Y, то есть являются незамкнутыми в Y. Оказывается, если линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ имеет замкнутое множестсво значений, а пространства X и Y банаховы, то множество значений сопряжённого оператора A^* также замкнуто и совпадает с правым аннулятором ядра оператора A. То есть, справедлива следующая

Теорема 5.6.13. *Пусть X, Y — банаховы пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ таков, что $\operatorname{Im} A$ замкнут в Y. Тогда $\operatorname{Im} A^*$ замкнуто, и справедливо равенство:*

$$\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^{\perp} .$$

Доказательство. Так как по следствию 5.6.11 имееи вложение

$$[\operatorname{Im} A^*] \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp} ,$$

то нам достаточно доказать вложение $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \subset \operatorname{Im} A^*$. Зафиксируем произвольный

$$f \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} .$$

Определим линейный функционал $g \colon \operatorname{Im} A \to \mathbb{C}$ по формуле

$$g(Ax) = f(x), \quad x \in X.$$

Заметим, что если $Ax = Az$ для некоторых $x, z \in X$, то $x - z \in \operatorname{Ker} A$, откуда следует, что $f(x - z) = 0$, то есть

$$g(Ax) = f(x) = f(z) = g(Az).$$

Таким образом, определение линейного функционала g корректно. Так как $\operatorname{Im} A$ замкнуто в банаховом пространстве Y, то само $\operatorname{Im} A$ является банаховым пространством. Следовательно, по теореме 3.4.36 Банаха об открытом отображении, линейный оператор $A \colon X \to \operatorname{Im} A$ является открытым отображением. Следовательно, существует число $r > 0$, такое, что

$$O_r^Y(0) \cap \operatorname{Im} A \subset A\left(O_1^X(0)\right) .$$

Тогда для любого $y \in \operatorname{Im} A \backslash \{0\}$ имеем вложение

$$\frac{ry}{2\|y\|} \in O_r^Y(0) \cap \operatorname{Im} A \subset A\left(O_1^X(0)\right) ,$$

то есть существует $z \in O_1^X(0)$, такой, что

$$\frac{ry}{2\|y\|} = Az \quad \Leftrightarrow \quad y = Ax \quad \text{для} \quad x = \frac{2\|y\|}{r} z \in X.$$

Видим, что имеет место неравенство

$$\|x\| \leqslant \frac{2}{r}\|y\|.$$

Тогда получаем:

$$|g(y)| = |g(Ax)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \leqslant \frac{2\|f\|}{r}\,\|y\|.$$

Это означает, что выполнено неравенство

$$\|g\| \leqslant \frac{2\|f\|}{r},$$

то есть линейный функционал $g\colon \operatorname{Im} A \to \mathbb{C}$ непрерывен. Тогда, по следствию 5.1.5 теоремы Хана—Банаха, существует $h \in Y^*$, такой, что

$$h\big|_{\operatorname{Im} A} = g, \quad \|h\| = \|g\|.$$

Следовательно, для любого $x \in X$ получаем:

$$(A^*h)(x) = h(Ax) = g(Ax) = f(x), \quad \Rightarrow \quad A^*h = f.$$

Таким образом, $f \in \operatorname{Im} A^*$, что и требовалось. ■

Теорема 5.6.14. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда если существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, то существует и оператор*

$$(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*),$$

причём выполнено равенство

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Обратно, если существует оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$, а пространство X рефлексивно, то существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, причём выполнено равенство

$$A^{-1} = F^{-1}\left((A^*)^{-1}\right)^* H,$$

где $F\colon X \to X^{**}$ и $H\colon Y \to Y^{**}$ — изометрические изоморфизмы, введённые в утверждении 5.1.10.

Доказательство. Пусть существует обратный оператор

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X).$$

Тогда существует оператор $(A^{-1})^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$. Для любого функционала $f \in X^*$ и любого вектора $x \in X$ имеем

$$\left(A^*(A^{-1})^*f\right)(x) = \left((A^{-1})^*f\right)(Ax) = f(A^{-1}Ax) = f(x).$$

В силу произвольности вектора $x \in X$ получаем равенство

$$A^*(A^{-1})^* f = f \quad \text{для любого} \quad f \in X^*.$$

Следовательно, оператор $(A^{-1})^*$ является правым обратным оператором для A^*. Аналогично для любого функционала $g \in Y^*$ и любого вектора $y \in Y$ имеем

$$\big((A^{-1})^* A^* g\big)(y) = \big(A^* g\big)(A^{-1}y) = g(AA^{-1}y) = g(y).$$

В силу произвольности вектора $y \in Y$ получаем равенство

$$(A^{-1})^* A^* g = g \qquad \forall\, g \in Y^*.$$

Следовательно, оператор $(A^{-1})^*$ является левым обратным оператором для A^*. Таким образом, по определению 3.5.7 оператор $(A^{-1})^*$ является обратным оператором для A^*, т. е. существует оператор

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Пусть теперь оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ существует. Тогда, по доказанному выше, линейный оператор

$$B = \big((A^*)^{-1}\big)^* \in \mathcal{L}(Y^{**}, X^{**})$$

является обратным к оператору $A^{**} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. Так как пространство X рефлексивно, то, по определению 5.1.11, имеем равенство

$$\operatorname{Im} F = X^{**}.$$

Следовательно, оператор $F^{-1}BH \in \mathcal{L}(Y, X)$. Тогда для любого вектора $y \in Y$ и функционала $g \in Y^*$ имеем

$$g\left(AF^{-1}BHy\right) = (A^*g)\left(F^{-1}BHy\right) = (BHy)(A^*g) =$$

$$= (Hy)\left((A^*)^{-1}A^*g\right) = (Hy)(g) = g(y).$$

В силу произвольности функционала $g \in Y^*$, согласно пункту 3 следствия 5.1.6, получаем равенство

$$AF^{-1}BHy = y \qquad \forall\, y \in Y.$$

Следовательно, оператор $F^{-1}BH$ является правым обратным для оператора A. Аналогично для любого вектора $x \in X$ и функционала

$f \in X^*$ имеем

$$f\left(F^{-1}BHAx\right) = (BHAx)(f) = (HAx)\left((A^*)^{-1}f\right) =$$

$$= \left((A^*)^{-1}f\right)(Ax) = \left(A^*(A^*)^{-1}f\right)(x) = f(x).$$

Тогда, в силу произвольности функционала $f \in X^*$, согласно пункту 3 следствия 5.1.6, получаем равенство

$$F^{-1}BHAx = x \qquad \forall\, x \in X.$$

Следовательно, оператор $F^{-1}BH$ является левым обратным для оператора A. Таким образом, по определению 3.5.7 оператор $F^{-1}BH$ является обратным оператором для A, т. е. существует оператор

$$A^{-1} = F^{-1}BH.$$

■

Заметим, что существование оператора $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ в силу утверждения 3.5.12 влечёт ограниченность оператора A^* снизу. Будет ли при условии существования оператора $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ существовать и оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ без дополнительного предположения о рефлексивности пространства X ? Ответ даёт следующее

Утверждение 5.6.15. *Пусть X — банахово пространство, Z — линейное нормированное пространство. Пусть оператор $T \in \mathcal{L}(X, Z)$ таков, что его сопряжённый ограничен снизу, то есть*

$$\exists\, k > 0 \quad \forall\, f \in Z^* \quad \|T^*f\| \geqslant k\|f\|.$$

Тогда оператор T является открытым отображением, то есть

$$\exists\, r > 0 \quad O_r^Z(0) \subset T\left(O_1^X(0)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$S = \left[T\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Очевидно, что S выпукло и замкнуто в Z. Тогда для любого $z_0 \in Z \backslash S$, по теореме 5.1.8 об отделимости, существует $f \in Z^*$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\operatorname{Re} f(z) \leqslant \gamma < \operatorname{Re} f(z_0) \quad \forall\, z \in S.$$

В частности, для любого $x \in O_1^X(0)$ имеем $z = Tx \in S$, и поэтому

$$\operatorname{Re} f(Tx) = \operatorname{Re}(T^* f)(x) \leqslant \gamma < \operatorname{Re} f(z_0), \quad \Rightarrow \quad \|T^* f\| \leqslant \gamma < \operatorname{Re} f(z_0).$$

Так как по условию $k\|f\| \leqslant \|T^* f\| \leqslant \gamma$, то получаем

$$\|f\| \leqslant \frac{\gamma}{k}, \quad \Rightarrow \quad \gamma < \operatorname{Re} f(z_0) \leqslant \|f\|\,\|z_0\| \leqslant \frac{\gamma}{k}\,\|z_0\|, \quad \Rightarrow \quad k < \|z_0\|.$$

Следовательно, получаем, что

$$z_0 \notin S, \quad \Rightarrow \quad z_0 \notin O_k^Z(0),$$

откуда немедленно следует вложение

$$O_k^Z(0) \subset S = \left[T\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Как было показано в доказательстве теоремы 3.4.36 Банаха об открытом отображении,

$$O_k^Z(0) \subset \left[T\left(O_1^X(0)\right)\right], \quad \Rightarrow \quad \left[T\left(O_1^X(0)\right)\right] \subset T\left(O_3^X(0)\right).$$

Именно здесь используется полнота пространства X. Окончательно получаем, что для числа $r = \frac{k}{3} > 0$ выполнено

$$O_r^Z(0) \subset T\left(O_1^X(0)\right),$$

и утверждение доказано. ■

С л е д с т в и е 5.6.16. *Пусть X — банахово пространство, Y — линейное нормированное пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ если и только если существует оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*,Y^*)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, то по теореме 5.6.14 существует оператор $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \in \mathcal{L}(X^*,Y^*)$.

Обратно, существование оператора $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*,Y^*)$ в силу утверждения 3.5.12 влечёт ограниченность оператора A^* снизу. Следовательно, по утверждению 5.6.15, оператор $A\colon X \to Y$ является открытым отображением. Тогда $\operatorname{Im} A = Y$, а по теореме 5.6.10 имеем

$$\operatorname{Ker} A = {}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*) = {}^{\perp}(X^*) = \{0\}.$$

Тогда, в силу утверждения 3.5.10, получаем, что существует непрерывный обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. ■

Как было показано в теореме 5.6.13, для линейного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y, замкнутость его множества значений влечёт замкнутость множества значений его сопряжённого оператора. Оказывается, имеет место и обратное утверждение. Справедлива следующая

Теорема 5.6.17. *Пусть X и Y — банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $\operatorname{Im} A^*$ замкнут в X^*. Тогда $\operatorname{Im} A$ замкнут в Y.*

Доказательство. Определим замкнутое подпространство

$$Z = [\operatorname{Im} A]$$

банахова пространства Y. Тогда Z также является банаховым пространством. Рассмотрим оператор $T\colon X \to Z$, определив его по формуле

$$Tx = Ax, \quad x \in X.$$

Тогда $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A$ — всюду плотно в Z. Следовательно, по теореме 5.6.10, имеем

$$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp} = \{0\}.$$

Таким образом, существует обратный оператор

$$(T^*)^{-1}\colon \operatorname{Im} T^* \to Z^*.$$

Покажем, что

$$\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} A^*.$$

С одной стороны, для любого $f \in \operatorname{Im} A^*$ рассмотрим $g \in Y^*$, такой, что

$$A^* g = f.$$

Обозначим

$$g|_Z = h \in Z^*.$$

Тогда любого $x \in X$ имеем:

$$f(x) = (A^* g)(x) = g(Ax) = g(Tx) = h(Tx) = (T^* h)(x).$$

Следовательно, $f = T^* h$, то есть получаем вложение

$$f \in \operatorname{Im} T^*.$$

С другой стороны, для любого $\phi \in \operatorname{Im} T^*$ рассмотрим $\psi \in Z^*$, такой, что
$$\phi = T^*\psi.$$
По следствию 5.1.5 теоремы Хана—Банаха, существует $h \in Y^*$, такой, что
$$h\big|_Z = \psi, \quad \|h\| = \|\psi\|.$$
Тогда для любого $x \in X$ имеем:
$$\phi(x) = (T^*\psi)(x) = \psi(Tx) = h(Ax) = (A^*h)(x).$$
Следовательно, $\phi = A^*h$, то есть получаем вложение $\phi \in \operatorname{Im} A^*$.

Полученное равенство $\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} A^*$ и замкнутость подпространства $\operatorname{Im} A^*$ в X^* означает, что $\operatorname{Im} T^*$ является замкнутым подпространством в банаховом пространстве X^*. Следовательно, $\operatorname{Im} T^*$ также банахово. Поэтому, по теореме 3.5.14 Банаха об обратном операторе, получаем вложение
$$(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} T^*, X^*).$$
Следовательно, в силу утверждения 3.5.12, оператор T^* ограничен снизу. Тогда, по утверждению 5.6.15, оператор $T\colon X \to Z$ является открытым отображением. В частности это означает, что
$$\operatorname{Im} T = Z.$$
Так как по определению оператора T очевидно равенство $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A$, то получаем:
$$[\operatorname{Im} A] = Z = \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A \subset [\operatorname{Im} A], \quad \Rightarrow \quad [\operatorname{Im} A] = \operatorname{Im} A.$$
Теорема доказана. ■

Из теоремы 5.6.17 немедленно получаем следующий критерий сюръективности линейного оператора:

Следствие 5.6.18. *Пусть X и Y — банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда*
$$\begin{gathered} \operatorname{Im} A = Y \\ \Updownarrow \\ \operatorname{Ker} A^* = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A^* \quad \text{замкнуто} \\ \Updownarrow \\ \text{оператор} \quad A^* \quad \text{ограничен снизу.} \end{gathered}$$

Доказательство. Равенство $\operatorname{Im} A = Y$ по теореме 5.6.10 влечёт равенство

$$\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp} = Y^{\perp} = \{0\}.$$

Тогда существует обратный оператор $(A^*)^{-1}\colon \operatorname{Im} A^* \to Y^*$. Также равенство $\operatorname{Im} A = Y$ в частности означает замкнутость $\operatorname{Im} A$ в Y, откуда по теореме 5.6.13 следует замкнутость $\operatorname{Im} A^*$ в X^*. В силу полноты пространства X^*, его замкнутое подпространство $\operatorname{Im} A^*$ также является банаховым пространством. Тогда, по теореме 3.5.14 Банаха об обратном операторе, оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A^*, Y^*)$. Следовательно, в силу утверждения 3.5.12, оператор A^* ограничен снизу. Наконец, из ограниченности снизу оператора A^* следует полнота пространства $\operatorname{Im} A^*$. Действительно, пусть существует $k > 0$, такое, что

$$\|A^* g\| \geqslant k\|g\| \quad \forall\, g \in \operatorname{Im} Y^*.$$

Для любой фундаментальной последовательности $f_n = A^* g_n \in \operatorname{Im} A^*$ следует фундаментальность последовательности прообразов $g_n \in Y^*$:

$$\|f_n - f_m\| = \|A^*(g_n - g_m)\| \geqslant k\|g_n - g_m\| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|g_n - g_m\| \leqslant \frac{\|f_n - f_m\|}{k} \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Так как Y^* полно, то g_n сходится в Y^* к некоторому $g \in Y^*$. Тогда

$$f_n = A^* g_n \to A^* g \in \operatorname{Im} A^*,$$

то есть полнота $\operatorname{Im} A^*$ доказана. Но тогда $\operatorname{Im} A^*$ является замкнутым подпространством в X^*, откуда в силу теоремы 5.6.17 следует замкнутость $\operatorname{Im} A$ в Y. Следовательно, по следствию 5.6.11 получаем, что

$$\operatorname{Im} A = [\operatorname{Im} A] = {}^{\perp}(\operatorname{Ker} A^*) = {}^{\perp}\{0\} = Y.$$

■

5.7. Спектр линейного оператора

В этом параграфе рассматриваем нетривиальное комплексное банахово пространство X и линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X)$. Тождественный оператор, действующий в X, обозначим I, т. е.

$$I(x) = x \qquad \forall\, x \in X.$$

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ будем рассматривать линейный оператор

$$A_\lambda = A - \lambda I.$$

Определение 5.7.1. *Линейный оператор A будем называть непрерывно обратимым на X, если существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Замечание 5.7.2. В силу теоремы 3.5.14 Банаха об обратном операторе линейный оператор A является непрерывно обратимым на X тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = X$. $\square$

Теорема 5.7.3. (Дж. фон Нейман) *Пусть $\|A\| < 1$. Тогда линейный оператор $I - A$ является непрерывно обратимым на X, причём справедливо равенство*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ряд

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

сходится абсолютно в полном пространстве $\mathcal{L}(X)$ по признаку сравнения, так как $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ — член сходящегося ряда в силу неравенства $\|A\| < 1$. Рассмотрим последовательность $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ частичных сумм этого ряда, т. е.

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} A^k \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Она является фундаментальной и, значит, сходящейся в полном пространстве $\mathcal{L}(X)$ к оператору $S \in \mathcal{L}(X)$. Далее,

$$(I - A)S_m = S_m(I - A) = I - A^{m+1} \to I \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

в силу соотношения

$$\|A^{m+1}\| \leqslant \|A\|^{m+1} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

С другой стороны, так как $S_m \to S$, то

$$(I - A)S_m \to (I - A)S \quad \text{и} \quad S_m(I - A) \to S(I - A) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно,

$$(I - A)S = S(I - A) = I.$$

Таким образом, оператор $S \in \mathcal{L}(X)$ является как правым, так и левым обратным для оператора $I - A$ на всём X, что означает непрерывную обратимость оператора $I - A$ на X и равенство

$$(I - A)^{-1} = S,$$

что и требовалось. ■

Следствие 5.7.4. *Пусть оператор A является непрерывно обратимым на X, а оператор $\Delta A \in \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Тогда оператор $A+\Delta A$ является непрерывно обратимым на X, причём справедливо неравенство

$$\big\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\big\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}.$$

Доказательство. Так как

$$A + \Delta A = A\left(I + A^{-1}\Delta A\right), \quad \text{а} \quad \|A^{-1}\Delta A\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1,$$

то, по теореме 5.7.3, оператор $I + A^{-1}\Delta A$ является непрерывно обратимым на X. Следовательно, оператор

$$B = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

является обратным для оператора $A+\Delta A$, т. е. оператор $A+\Delta A$ является непрерывно обратимым на X, причём справедливо равенство

$$(A + \Delta A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\Delta A)^k A^{-1}.$$

Тогда получаем

$$\big\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\big\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\Delta A)^k A^{-1}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\|A^{-1}\|^{k+1}\|\Delta A\|^k = \frac{\|A^{-1}\|^2\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}.$$

■

Определение 5.7.5. *Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярным для оператора A, если оператор A_λ непрерывно обратим на X. Совокупность всех регулярных скаляров для оператора A называется его резольвентным множеством и обозначается $\rho(A)$. Для любого $\lambda \in \in \rho(A)$ линейный оператор*

$$R_A(\lambda) = (A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

называется резольвентой оператора A.

Утверждение 5.7.6. *Резольвентное множество $\rho(A)$ является открытым в $\mathbb{C}$, а любое число $\lambda \in \mathbb{C}$ вида $|\lambda| > \|A\|$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$. Отображение*

$$R_A \colon \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$$

является непрерывным, и для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$ справедливо тождество Гильберта:

$$R_A(\lambda_1) - R_A(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) R_A(\lambda_2) R_A(\lambda_1).$$

Доказательство. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda| > \|A\|,$$

то, по теореме 5.7.3, оператор

$$A_\lambda = -\lambda \left(I - \frac{A}{\lambda} \right)$$

является непрерывно обратимым, причём справедливо равенство

$$R_A(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Следовательно, число $\lambda \in \rho(A)$, т. е. резольвентное множество оператора A содержит внешность замкнутого круга из $\mathbb{C}$ с центром в нуле радиуса $\|A\|$.

Для любого $\lambda \in \rho(A)$ и скаляра $\Delta\lambda$ вида

$$|\Delta\lambda| < \frac{1}{\|R_A(\lambda)\|},$$

в силу следствия 5.7.4, получаем, что оператор

$$A_{\lambda+\Delta\lambda} = A_\lambda - \Delta\lambda I = A_\lambda \bigl(I - R_A(\lambda)\Delta\lambda \bigr)$$

является непрерывно обратимым на X, причём справедливо неравенство
$$\big\|R_A(\lambda+\Delta\lambda)-R_A(\lambda)\big\| \leqslant \frac{\|R_A(\lambda)\|^2|\Delta\lambda|}{1-\|R_A(\lambda)\|\,|\Delta\lambda|}.$$
Следовательно, множество $\rho(A)$ открыто, и
$$\|R_A(\lambda+\Delta\lambda)-R_A(\lambda)\| = O(|\Delta\lambda|) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta\lambda \to 0.$$
Поэтому отображение $R_A\colon \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ является непрерывным. Наконец, для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$ получаем равенства
$$R_A(\lambda_1)-R_A(\lambda_2) = R_A(\lambda_2)\,(A_{\lambda_2}-A_{\lambda_1})\,R_A(\lambda_1) =$$
$$= (\lambda_1-\lambda_2)R_A(\lambda_2)R_A(\lambda_1).$$
■

Определение 5.7.7. *Спектром оператора A называется множество*
$$\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A).$$
Спектральным радиусом оператора A называется величина
$$r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

Теорема 5.7.8. *Спектр оператора A является непустым компактным множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. В силу утверждения 5.7.6 резольвентное множество $\rho(A)$ открыто в $\mathbb{C}$. Следовательно, спектр
$$\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$$
замкнут в $\mathbb{C}$. В силу утверждения 5.7.6, любое число $\lambda \in \mathbb{C}$ вида
$$|\lambda| > \|A\|$$
является регулярным значением оператора A. Следовательно, для любого $\lambda \in \sigma(A)$ выполнено неравенство
$$|\lambda| \leqslant \|A\|.$$
Таким образом, спектр $\sigma(A)$ является ограниченным множеством в $\mathbb{C}$. Поэтому $\sigma(A)$ как ограниченное замкнутое множество является

компактом в $\mathbb{C}$. Покажем, что $\sigma(A) \neq \varnothing$. Предположим противное. Тогда $\rho(A) = \mathbb{C}$. Для любого функционала $\Phi \in \big(\mathcal{L}(X)\big)^*$ рассмотрим функцию $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида

$$\varphi(z) = \Phi\left(R_A(z)\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

В силу равенства Гильберта, для любых чисел $z, \Delta z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z) = \Phi\left(\Delta z R_A(z) R_A(z + \Delta z)\right) = \\ = \Delta z \Phi\left(R_A(z) R_A(z + \Delta z)\right).$$

Так как резольвента R_A непрерывна на резольвентном множестве, т. е. для рассматриваемого случая в $\mathbb{C}$, то получаем

$$\varphi'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z} = \Phi\left(R_A^2(z)\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, производная $\varphi(z)$ непрерывна на $\mathbb{C}$ как суперпозиция непрерывных отображений. Поэтому комплексная функция φ является целой функцией. При этом для всех $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| > \|A\|$, в силу теоремы 5.7.3, получаем

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{\|\Phi\|}{|z|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{|z|^k} = \frac{\|\Phi\|}{|z| - \|A\|} \to 0 \qquad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы Лиувилля из теории функций комплексного переменного, получаем, что

$$\varphi(z) = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Но тогда получается, что для любого $z \in \mathbb{C}$ и любого функционала $\Phi \in \big(\mathcal{L}(X)\big)^*$ выполнено

$$\Phi\left(R_A(z)\right) = 0.$$

Поэтому, в силу пункта 3 следствия 5.1.6, получаем

$$R_A(z) = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

что противоречит взаимной однозначности оператора

$$R_A(z) = (A - zI)^{-1}.$$

Следовательно, полученное противоречие доказывает непустоту спектра $\sigma(A)$ оператора A. ■

Замечание 5.7.9. В силу следствия 5.6.16, для произвольного числа $\lambda \in \mathbb{C}$ существует оператор

$$(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

тогда и только тогда, когда существует оператор

$$((A - \lambda I)^*)^{-1} = (A^* - \lambda I^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*).$$

Здесь оператор I^* является тождественным оператором в пространстве X^*. Следовательно, вложение $\lambda \in \rho(A)$ равносильно вложению $\lambda \in \rho(A^*)$, т. е. справедливо равенство

$$\rho(A) = \rho(A^*).$$

Следовательно,

$$\sigma(A) = \sigma(A^*).$$

□

Теорема 5.7.10. *Существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$.

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ определим оператор

$$B_{\lambda,n} = \sum_{m=0}^{n-1} A^m \lambda^{n-1-m}.$$

Тогда справедливо равенство

$$A^n - \lambda^n I = (A - \lambda I) B_{\lambda,n} = B_{\lambda,n}(A - \lambda I).$$

Следовательно, если выполнено вложение $\lambda^n \in \rho(A^n)$, то оператор A_λ имеет левый обратный оператор

$$R_{A^n}(\lambda^n) B_{\lambda,n} \in \mathcal{L}(X)$$

и правый обратный оператор

$$B_{\lambda,n} R_{A^n}(\lambda^n) \in \mathcal{L}(X).$$

Поэтому, согласно замечанию 3.5.6, эти операторы совпадают и равны

$$R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(X),$$

т. е. $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, имеет место вложение

$$\rho(A^n) \subset (\rho(A))^n,$$

которое влечёт вложение

$$(\sigma(A))^n \subset \sigma(A^n).$$

Поэтому, для любого $\lambda \in \sigma(A)$ справедливо неравенство

$$|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|,$$

откуда получаем оценку

$$|\lambda| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Для произвольного функционала $\varPhi \in \big(\mathcal{L}(X)\big)^*$ рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \varPhi\left(R_A(z)\right) \quad \text{при} \quad z \in \rho(A).$$

Как показано в доказательстве теоремы 5.7.8, функция φ регулярна в $\rho(A)$, а в окрестности бесконечности $|z| > \|A\|$ имеет разложение в ряд Лорана по степеням z вида

$$\varphi(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varPhi(A^n)}{z^{n+1}}.$$

Так как $\|A\| \geqslant r(A)$, то в окрестности бесконечности $|z| > r(A)$ функция φ имеет такой же ряд Лорана по степеням z в силу теоремы единственности разложения регулярной в кольце комплексной функции в ряд Лорана. Следовательно, для любого $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| > r(A)$ и любого функционала $\varPhi \in \big(\mathcal{L}(X)\big)^*$ существует число $M(\varPhi, z) > 0$, такое, что

$$\left|\frac{\varPhi(A^n)}{z^n}\right| \leqslant M(\varPhi, z) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при каждом $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| > r(A)$ последовательность линейных функционалов $H_{n,z} \in \big(\mathcal{L}(X)\big)^{**}$ вида

$$H_{n,z}(\varPhi) = \frac{\varPhi(A^n)}{z^n}$$

является поточечно ограниченной, так как при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|H_{n,z}(\Phi)| \leqslant M(\Phi, z).$$

Тогда, по теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза, последовательность функционалов $H_{n,z}$ ограничена в пространстве $\big(\mathcal{L}(X)\big)^{**}$ по операторной норме, т. е. существует число $L(z) > 0$, такое, что

$$\|H_{n,z}\| \leqslant L(z) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Так как по пункту 4 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха справедливо равенство

$$\|H_{n,z}\| = \sup_{\|\Phi\|=1} \frac{|\Phi(A^n)|}{|z|^n} = \frac{\|A^n\|}{|z|^n},$$

то имеем неравенство

$$|z| > \frac{\sqrt[n]{\|A^n\|}}{\sqrt[n]{L(z)}} \quad \text{при всех} \quad |z| > r(A) \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\sqrt[n]{L(z)} \to 1$ при $n \to \infty$, то получаем неравенство

$$|z| \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \quad \text{при всех} \quad |z| > r(A).$$

Следовательно, при $|z| \to r(A) + 0$ получаем неравенство

$$r(A) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Таким образом, доказаны следующие неравенства:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|},$$

откуда получаем, что существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A).$$

■

Замечание 5.7.11. По теореме 3.5.14 Банаха об обратном операторе, число $\lambda \in \rho(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A_\lambda = X.$$

Следовательно, вложение $\lambda \in \sigma(A)$ возможно либо при $\operatorname{Ker} A_\lambda \neq \{0\}$ (в этом случае оператор A_λ не имеет левого обратного оператора), либо $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$, но $\operatorname{Im} A_\lambda \neq X$. В этом случае существует обратный оператор

$$(A_\lambda)^{-1}\colon \operatorname{Im} A_\lambda \to X,$$

но $(A_\lambda)^{-1} \notin \mathcal{L}(X)$ в силу неравенства $\operatorname{Im} A_\lambda \neq X$. Однако если подпространство $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнуто в X, то оно является полным, и по теореме 3.5.14 Банаха об обратном операторе выполнено вложение

$$(A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, X).$$

Если же подпространство $\operatorname{Im} A_\lambda$ незамкнуто, то, в силу утверждения 3.5.13, имеет место равенство

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| = +\infty.$$

□

Определение 5.7.12. *Множество*

$$\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$$

называется точечным спектром оператора A, если вложение $\lambda \in$ $\in \sigma_p(A)$ равносильно выполнению соотношения

$$\operatorname{Ker} A_\lambda \neq \{0\}.$$

Любое число $\lambda \in \sigma_p(A)$ называется собственным числом оператора A, а любой нетривиальный вектор из ядра $\operatorname{Ker} A_\lambda$ называется собственным вектором оператора A, соответствующим числу λ.

Определение 5.7.13. *Множество*

$$\sigma_c(A) \subset \sigma(A)$$

называется непрерывным спектром оператора A, если вложение $\lambda \in$ $\in \sigma_c(A)$ равносильно выполнению соотношений

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}, \quad \operatorname{Im} A_\lambda \neq X, \quad [\operatorname{Im} A_\lambda] = X.$$

Определение 5.7.14. *Множество $\sigma_r(A) \subset \sigma(A)$ называется остаточным спектром оператора A, если вложение $\lambda \in \sigma_r(A)$ равносильно выполнению соотношений*

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}, \quad [\operatorname{Im} A_\lambda] \neq X.$$

Утверждение 5.7.15. *Справедливо равенство*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Доказательство. Сразу следует из замечания 5.7.11. ■

Утверждение 5.7.16. *Пусть число $\lambda \in \sigma(A)$. Тогда вложение $\lambda \in \sigma_c(A)$ равносильно соотношениям*

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\} \quad \text{и} \operatorname{Ker} A_\lambda^* = \{0\},$$

а вложение $\lambda \in \sigma_r(A)$ равносильно соотношениям

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A_\lambda^* \neq \{0\}.$$

Доказательство. По теореме 5.6.10 Фредгольма, справедливо равенство

$$(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = \operatorname{Ker} A_\lambda^*.$$

Если число $\lambda \in \sigma_c(A)$, то

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\} \quad \text{и} \quad [\operatorname{Im} A_\lambda] = X.$$

Так как для любого подпространства $L \subset X$ выполнено равенство

$$L^\perp = [L]^\perp,$$

то получаем

$$\operatorname{Ker} A_\lambda^* = X^\perp = \{0\}.$$

Обратно, если

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A_\lambda^* = \{0\},$$

то, в силу утверждения 5.6.7, получаем

$$[\operatorname{Im} A_\lambda] = {}^\perp\Big((\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp\Big) = {}^\perp(\operatorname{Ker} A_\lambda^*) = {}^\perp\big(\{0\}\big) = X,$$

т. е. $\lambda \in \sigma_c(A)$.

Если число $\lambda \in \sigma_r(A)$, то

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\} \quad \text{и} \quad [\operatorname{Im} A_\lambda] \neq X.$$

В силу пункта 1 следствия 5.1.6 теоремы Хана—Банаха, существует нетривиальный функционал $f \in X^*$, такой, что

$$f \in [\operatorname{Im} A_\lambda]^\perp = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = \operatorname{Ker} A_\lambda^*,$$

т. е. $\operatorname{Ker} A_\lambda^* \neq \{0\}$. Обратно, если

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A_\lambda^* \neq \{0\},$$

то

$$(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \neq \{0\}.$$

Следовательно, получаем соотношения

$$[\operatorname{Im} A_\lambda] = {}^\perp\Big((\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp\Big) \neq {}^\perp\big(\{0\}\big) = X,$$

т. е. $\lambda \in \sigma_r(A)$. ■

Теорема 5.7.17. (об отображении спектра многочленом) *Пусть*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

комплексный многочлен степени N (т. е. $a_N \neq 0$). Тогда справедливо равенство

$$\sigma\big(P(A)\big) = P\big(\sigma(A)\big).$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что оператор $P(A)$ непрерывно обратим на X тогда и только тогда, когда выполнено

$$0 \notin P\big(\sigma(A)\big).$$

Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — все различные комплексные корни многочлена P кратности $r_1, \ldots, r_m$ соответственно. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем равенство

$$P(z) = a_N \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{r_k}.$$

Следовательно, получаем

$$P(A) = a_N (A_{z_1})^{r_1} \ldots (A_{z_m})^{r_m}.$$

Если имеем соотношение

$$0 \notin P\big(\sigma(A)\big), \quad \text{т. е.} \quad z_k \notin \sigma(A) \quad \forall\, k \in \overline{1, m},$$

то существует обратный оператор

$$\big(P(A)\big)^{-1} = \frac{1}{a_N}\big((A_{z_N})^{-1}\big)^{r_N} \ldots \big((A_{z_1})^{-1}\big)^{r_1} \in \mathcal{L}(X).$$

Обратно, пусть оператор $P(A)$ непрерывно обратим на X, т. е. существует обратный оператор

$$\big(P(A)\big)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Рассмотрим произвольное $n \in \overline{1,m}$. Так как линейные операторы A_{z_k} при всех $k \in \overline{1,m}$ перестановочны, то, определив оператор

$$T = a_N (A_{z_n})^{r_n - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{m} (A_{z_k})^{r_k},$$

получаем равенство

$$P(A) = A_{z_n} T = T A_{z_n}.$$

Следовательно,

$$I = A_{z_n} T \big(P(A)\big)^{-1} = \big(P(A)\big)^{-1} T A_{z_n}.$$

Таким образом, оператор A_{z_n} имеет левый и правый обратные операторы, непрерывные на X. Следовательно, по замечанию 3.5.6 получаем

$$T \big(P(A)\big)^{-1} = \big(P(A)\big)^{-1} T = \big(A_{z_n}\big)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

т. е. выполнено $z_n \notin \sigma(A)$. Таким образом, справедливо соотношение

$$0 \notin P\left(\sigma(A)\right).$$

В силу вышеизложенного получаем, что соотношение

$$\lambda \notin \sigma\left(P(A)\right)$$

равносильно непрерывной обратимости на X оператора

$$\big(P(A)\big)_\lambda = (P - \lambda)(A),$$

что в свою очередь равносильно

$$0 \notin (P - \lambda)\left(\sigma(A)\right), \quad \text{т. е.} \quad \lambda \notin P\left(\sigma(A)\right).$$

Следовательно, вложение

$$\lambda \in \sigma\left(P(A)\right)$$

равносильно вложению

$$\lambda \in P\left(\sigma(A)\right),$$

т. е. справедливо равенство

$$\sigma\left(P(A)\right) = P\left(\sigma(A)\right),$$

что и требовалось. ■

5.8. Компактный оператор

В этом параграфе рассматриваются банаховы пространства X, Y и линейный оператор $A\colon X \to Y$.

Определение 5.8.1. *Линейный оператор A называется компактным, если для любого ограниченного множества $S \subset X$ его образ $A(X)$ является вполне ограниченным в Y.*

Замечание 5.8.2. Так как вполне ограниченность множества влечёт его ограниченность, то компактный оператор является ограниченным оператором. Примером некомпактного линейного ограниченного оператора может служить тождественный оператор на бесконечномерном банаховом пространстве, так как по теореме 3.1.25 Рисса единичная сфера в бесконечномерном банаховом пространстве не является вполне ограниченным множеством. В банаховом пространстве вполне ограниченность множества равносильна тому, что его замыкание является компактом (см. замечание 2.2.5). Следовательно, оператор A является компактным тогда и только тогда, когда замыкание образа любого ограниченного множества из X под действием A является компактом в Y. Компактность оператора A равносильна тому, что

$$A\left(B_1(0)\right)$$

является вполне ограниченным множеством в Y. Необходимость этого условия очевидна. Покажем достаточность. Для любого ограниченного множества $S \subset X$ существует число $R > 0$, такое, что

$$S \subset B_R(0).$$

Тогда,

$$S/R \subset B_1(0), \quad \Rightarrow \quad A\left(S/R\right) \subset A\left(B_1(0)\right),$$

и множество $A\left(S/R\right)$ является вполне ограниченным как подмножество вполне ограниченного множества. Но тогда вполне ограниченным является и множество

$$RA\left(S/R\right) = A(S),$$

что и требовалось. Так как сумма вполне ограниченных множеств и умножение вполне ограниченного множества на скаляр тоже являются вполне ограниченными множествами, то конечная линейная комбинация компактных операторов тоже является компактным оператором. Таким образом, множество всех компактных операторов, действующих из X в Y, образует в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ подпространство, которое обозначим $\mathcal{K}(X,Y)$. Если $Y = X$, то обозначим $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$. $\square$

Утверждение 5.8.3. *Если линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ имеет конечномерный образ, то он компактный.*

Доказательство. Так как оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то для любого ограниченного множества $S \subset X$ имеем $A(S)$ — ограниченное подмножество конечномерного подпространства $\operatorname{Im} A$. По следствию 3.1.19 конечномерное подпространство $\operatorname{Im} A$ полно в Y. Следовательно, выполнено вложение

$$[A(S)] \subset \operatorname{Im} A.$$

В силу следствия 3.1.19, любое замкнутое ограниченное подмножество конечномерного подпространства из Y является компактом в Y. Поэтому $[A(S)]$ — компакт, и в силу замечания 5.8.2 получаем, что A — компактный оператор. $\blacksquare$

Утверждение 5.8.4. *Пусть линейный оператор A является компактным, а его образ $\operatorname{Im} A$ замкнут. Тогда оператор A имеет конечномерный образ.*

Доказательство. Пусть $Z = \operatorname{Im} A$ — замкнутое подпространство в банаховом пространстве Y. Следовательно, подпространство Z само является полным. Тогда по теореме 3.4.36 $A \in \mathcal{L}(X,Z)$ является открытым отображением. Следовательно, множество

$$A\left(O_1(0)\right)$$

открыто в банаховом пространстве Z. Так как оператор A компактен, то открытое множество

$$A\left(O_1(0)\right)$$

является вполне ограниченным в Z. Следовательно, в Z существует вполне ограниченная сфера положительного радиуса. Тогда, по теореме 3.1.25 Рисса получаем, что пространство $Z = \operatorname{Im} A$ является конечномерным. $\blacksquare$

Утверждение 5.8.5. *Пусть последовательность операторов*

$$\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}(X, Y)$$

является сходящейся к оператору A по операторной норме, т. е.

$$\|A_m - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда A является компактным оператором, т. е. $A \in \mathcal{K}(X, Y)$. Иными словами, подпространство $\mathcal{K}(X, Y)$ замкнуто в $\mathcal{L}(X, Y)$.

Доказательство. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $m \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\|A_m - A\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для любого $x \in B_1(0)$ получаем неравенство

$$\|A_m(x) - A(x)\| \leqslant \|A_m - A\| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad m \geqslant N(\varepsilon).$$

Зафиксируем произвольное $m \geqslant N(\varepsilon)$. Так как множество $A_m\left(B_1(0)\right)$ вполне ограничено в Y, то существуют векторы

$$x_1, \ldots, x_M \in B_1(0),$$

такие, что множество

$$A_m(x_1), \ldots, A_m(x_M) \in A_m\left(B_1(0)\right)$$

является конечной ε–сетью множества $A_m\left(B_1(0)\right)$. Покажем, что множество

$$A(x_1), \ldots, A(x_M) \in A\left(B_1(0)\right)$$

является конечной 3ε–сетью множества $A\left(B_1(0)\right)$. Действительно, для любого $x \in B_1(0)$ существует $k \in \overline{1, M}$, такой, что

$$\|A_m(x) - A_m(x_k)\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда получаем следующие неравенства:

$$\|A(x) - A(x_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A(x) - A_m(x)\| + \|A_m(x) - A_m(x_k)\| + \|A_m(x_k) - A(x_k)\| \leqslant 3\varepsilon,$$

что и требовалось. ■

Определение 5.8.6. *Оператор A называется конечномерным, если он является пределом последовательности линейных непрерывных операторов с конечномерными образами.*

Замечание 5.8.7. В силу утверждений 5.8.3 и 5.8.5 всякий конечномерный оператор является компактным. $\square$

Утверждение 5.8.8. *Пусть $Y = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а линейный оператор A является компактным. Тогда A — конечномерный оператор.*

Доказательство. Так как A — компактный оператор, то множество $A\big(B_1(0)\big)$ является вполне ограниченным в $\mathcal{H}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε–сеть

$$\{y_m\}_{m=1}^{M} \subset A\big(B_1(0)\big)$$

множества $A\big(B_1(0)\big)$. Определим конечномерное подпространство

$$L_\varepsilon = \mathrm{Lin}\{y_1, \ldots, y_M\} \subset \mathcal{H}.$$

Так как подпространство L_ε конечномерно, то в силу следствия 3.1.19 оно является замкнутым в пространстве $\mathcal{H}$. Тогда по теореме 3.2.14 Рисса об ортогональном дополнении справедливо равенство

$$\mathcal{H} = L_\varepsilon \oplus (L_\varepsilon)^{\perp}.$$

Поэтому для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ существуют единственные векторы

$$y_{\|} \in L_\varepsilon \quad \text{и} \quad y_{\perp} \in (L_\varepsilon)^{\perp},$$

такие, что

$$y = y_{\|} + y_{\perp}.$$

Определим линейный оператор $P_\varepsilon \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ортогонального проектирования на подпространство L_ε по формуле

$$P_\varepsilon(y) = y_{\|} \qquad \forall\, y \in \mathcal{H}.$$

Так как для любого $y \in \mathcal{H}$ выполнены соотношения

$$\|y\| = \sqrt{(y_{\|} + y_{\perp}, y_{\|} + y_{\perp})} = \sqrt{(y_{\|}, y_{\|}) + (y_{\perp}, y_{\perp})} =$$

$$= \sqrt{\|y_{\|}\|^2 + \|y_{\perp}\|^2} \geqslant \|y_{\|}\| = \|P_\varepsilon(y)\|,$$

то получаем
$$\|P_\varepsilon\| \leqslant 1.$$
Следовательно, $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Определим линейный оператор
$$A_\varepsilon = P_\varepsilon A \in \mathcal{L}(X, \mathcal{H}).$$
Так как $\operatorname{Im} A_\varepsilon \subset L_\varepsilon$, то оператор A_ε имеет конечномерный образ. Рассмотрим в X произвольный вектор $x \in B_1(0)$. Для него существует номер $m \in \overline{1, M}$, такой, что
$$\|A(x) - y_m\| \leqslant \varepsilon.$$
При этом по определению оператора P_ε справедливо равенство
$$P_\varepsilon(y_m) = y_m.$$
Отсюда получаем
$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leqslant \|A(x) - y_m\| + \|P_\varepsilon(y_m - A(x))\| \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \|P_\varepsilon\|)\|A(x) - y_m\| \leqslant 2\varepsilon.$$
В силу произвольности вектора $x \in B_1(0)$ получаем неравенство
$$\|A - A_\varepsilon\| \leqslant 2\varepsilon.$$
Тогда, выбрав последовательность $\varepsilon_n \to +0$ при $n \to \infty$, получаем последовательность линейных операторов
$$A_{\varepsilon_n} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{H})$$
с конечномерными образами, такую, что
$$\|A - A_{\varepsilon_n}\| \leqslant 2\varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$
Следовательно, оператор A является конечномерным. ■

Пример 5.8.9. Пусть функция $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ такова, что
$$K \in \mathbb{L}_2\left([0,1]^2\right).$$
Рассмотрим линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ вида
$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} K(t,\tau)x(\tau)\,d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1], \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Покажем, что оператор A является компактным. Прежде всего покажем, что оператор A является непрерывным, т. е. справедливо вложение

$$A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{L}_2[0,1]\right).$$

Для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ имеем соотношения

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} d\mu(t) \left| \int\limits_{[0,1]} K(t,\tau)x(\tau)\, d\mu(\tau) \right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_{[0,1]} d\mu(t) \left(\int\limits_{[0,1]} |K(t,\tau)|^2\, d\mu(\tau) \right) \left(\int\limits_{[0,1]} |x(\tau)|^2\, d\mu(\tau) \right)} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} |K(t,\tau)|^2\, d\mu(t) \times d\mu(\tau)} \sqrt{\int\limits_{[0,1]} |x(\tau)|^2\, d\mu(\tau)} = \|K\|_2 \|x\|_2.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|A\| \leqslant \|K\|_2 < +\infty,$$

т. е. оператор A является непрерывным. Счётная система

$$S = \left\{ f_n(t) = \sin(\pi n t) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2[0,1]$. Тогда счётная система

$$E = \left\{ f_n(t) f_m(\tau) \right\}_{n,m=1}^{\infty}$$

образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2\left([0,1]^2\right)$. Занумеруем элементы системы E с помощью одного индекса, получим

$$E = \left\{ g_k(t,\tau) = f_{n_k}(t) f_{m_k}(\tau) \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Для любого номера N рассмотрим N-ю сумму Фурье функции K по системе E в пространстве $\mathbb{L}_2\left([0,1]^2\right)$:

$$S_N(t,\tau) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(K, g_k)}{(g_k, g_k)}\, g_k(t,\tau).$$

Справедливо соотношение

$$\|S_N - K\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Для любого номера N определим линейный оператор

$$A_N\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$$

следующим образом:

$$(A_N x)(t) = \int\limits_{[0,1]} S_N(t,\tau)x(\tau)\,d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1], \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Так как выполнено неравенство

$$\|A_N\| \leqslant \|S_N\|_2 < +\infty,$$

то оператор A_N является непрерывным. Также для любой функции $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ справедливо вложение

$$A_N x \in \operatorname{Lin}\{f_{n_1}, \ldots, f_{n_N}\}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} A_N \subset \operatorname{Lin}\{f_{n_1}, \ldots, f_{n_N}\}.$$

Поэтому

$$\dim \operatorname{Im} A_N \leqslant N,$$

т. е. оператор A_N имеет конечномерный образ. Наконец, для любой функции $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ и для почти всех $t \in [0,1]$ имеем

$$\big((A - A_N)(x)\big)(t) = \int\limits_{[0,1]} \big(K(t,\tau) - S_N(t,\tau)\big)\, x(\tau)\,d\mu(\tau).$$

Следовательно, получаем

$$\|A - A_N\| \leqslant \|K - S_N\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Таким образом, доказано, что оператор A является конечномерным. Следовательно, по утверждению 5.8.7 получаем компактность оператора A. ▲

Утверждение 5.8.10. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, операторы*

$$A \in \mathcal{K}(X,Y), \quad B \in \mathcal{L}(Z,X), \quad C \in \mathcal{L}(Y,Z).$$

Тогда операторы

$$AB \in \mathcal{K}(Z,Y) \quad \text{и} \quad CA \in \mathcal{K}(X,Z).$$

Доказательство. Так как для любого ограниченного множества $S \subset Z$ множество $B(S)$ ограничено в X, то $A\big(B(S)\big)$ является вполне ограниченным множеством в Y. Следовательно, получаем вложение $AB \in \mathcal{K}(Z,Y)$. Для любого ограниченного множества $S \subset X$ множество $A(S)$ является вполне ограниченным в Y. Тогда $C\big(A(S)\big)$ тоже является вполне ограниченным множествоv в Z. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим произвольную конечную ε–сеть множества $A(S)$. Ограниченный оператор C переведёт элементы этой сети в конечное множество, которое очевидно будет $\|C\|\varepsilon$–сетью множества $C\big(A(S)\big)$. Следовательно, $CA \in \mathcal{K}(X,Z)$. ■

Утверждение 5.8.11. *Пусть пространство X является рефлексивным и сепарабельным. Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ является компактным тогда и только тогда, когда он любую слабо сходящуюся последовательность из X переводит в сильно сходящуюся последовательность в Y.*

Доказательство. Пусть оператор A является компактным. Рассмотрим произвольную последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X,$$

слабо сходящуюся к вектору $z \in X$. Тогда последовательность $A(x_n)$ является слабо сходящейся к $A(z)$, так как для любого функционала $g \in Y^*$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} g(Ax_n) = \lim_{n\to\infty} (A^*g)(x_n) = (A^*g)(z) = g(Az).$$

Предположим, что $A(x_n)$ не является сильно сходящейся к вектору $A(z)$. Следовательно, существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $A(x_{n_m})$, такие, что

$$\|A(x_{n_m}) - A(z)\| \geqslant \varepsilon_0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Так как слабо сходящаяся последовательность x_n ограничена в X в силу утверждения 5.4.10, то в силу компактности оператора A последовательность $A(x_{n_m})$ является вполне ограниченным множеством в пространстве Y. Следовательно, она содержит сильно фундаментальную подпоследовательность $A(x_{n_{m_k}})$. Так как пространство Y является полным, то существует вектор $y \in Y$, к которому сильно сходится последовательность $A(x_{n_{m_k}})$. Так как последовательность $A(x_{n_{m_k}})$ является также и слабо сходящейся к вектору $A(z)$, то в силу утверждения 5.4.8 получаем равенство

$$A(z) = y.$$

Однако это противоречит неравенству

$$\|y - A(z)\| = \lim_{k\to\infty} \|A(x_{n_{m_k}}) - A(z)\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Следовательно, последовательность $A(x_n)$ является сильно сходящейся к вектору $A(z)$. Заметим, что мы пока не пользовались рефлексивностью и сепарабельностью пространства X.

Предположим теперь, что линейный ограниченный оператор A всякую слабо сходящуюся последовательность из X переводит в сильно сходящуюся последовательность в Y. Рассмотрим образ единичного шара $A(B_1(0))$. Для любой последовательности $y_n \in A(B_1(0))$ существует последовательность $x_n \in B_1(0) \subset X$, такая, что

$$A(x_n) = y_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность x_n ограничена в рефлексивном сепарабельном пространстве X, то по теореме 5.5.20 Банаха—Тихонова она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность x_{n_m}. Следовательно, последовательность $A(x_{n_m})$ является сильно сходящейся. Таким образом, любая последовательность из множества $A(B_1(0))$ имеет сильно сходящуюся подпоследовательность. Если при этом множество $A(B_1(0))$ не является вполне ограниченным, то существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $y_n \in A(B_1(0))$, такие, что

$$\|y_n - y_m\| \geqslant \varepsilon_0 \qquad \forall\, n \neq m.$$

Следовательно, любая подпоследовательность последовательности y_n не является сильно фундаментальной, и поэтому не является сильно сходящейся. Полученное противоречие означает, что множество $A(B_1(0))$ является вполне ограниченным. Следовательно, в силу замечания 5.8.2 получаем компактность оператора A. ■

Задача 5.8.12. Пусть X — рефлексивное сепарабельное пространство. Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, \ell_1)$. Доказать, что A — компактный оператор.

Решение. Так как оператор A является линейным и ограниченным, то, как показано в доказательстве утверждения 5.8.11, он всякую слабо сходящуюся последовательность пространства X переводит в слабо сходящуюся последовательность пространства ℓ_1. В силу теоремы 5.4.12 Шура в пространстве ℓ_1 слабая и сильная сходимости эквивалентны. Следовательно, оператор A всякую слабо сходящуюся последовательность рефлексивного сепарабельного пространства X переводит в сильно сходящуюся последовательность пространства ℓ_1. В силу утверждения 5.8.11 это означает компактность оператора A. ▲

Утверждение 5.8.13. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$, а комплексное число $\lambda \neq 0$. Тогда $\operatorname{Ker} A_\lambda$ конечномерно, а $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{Ker} A_\lambda$ — ограниченная последовательность. Тогда существует $R > 0$, такое, что

$$\|x_n\| \leqslant R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Так как в силу компактности оператора A множество

$$\left[A\left(B_R(0)\right)\right]$$

компактно в X, то, по теореме 2.2.3, оно является секвенциально компактным, и поэтому последовательность

$$y_n = A(x_n) \in \left[A\left(B_R(0)\right)\right]$$

имеет сходящуюся подпоследовательность

$$y_{n_k} \to z \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Но тогда получаем

$$x_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\lambda} \to \frac{z}{\lambda} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, любое ограниченное замкнутое подмножество из $\operatorname{Ker} A_\lambda$ является секвенциально компактным, и, в силу теоремы 2.2.3, это равносильно компактности. Следовательно, по теореме 3.1.25 Рисса о некомпактности единичной сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве получаем, что

$$\dim \operatorname{Ker} A_\lambda = N < +\infty.$$

Рассмотрим в конечномерном пространстве $\operatorname{Ker} A_\lambda$ произвольный базис

$$\{e_n\}_{n=1}^N.$$

Тогда для любого вектора $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ существуют единственные скаляры $\alpha_n(x) \in \mathbb{C}$, такие, что выполнено равенство

$$x = \sum_{n=1}^N \alpha_n(x) e_n.$$

Очевидно, что

$$\alpha_n \colon \operatorname{Ker} A_\lambda \to \mathbb{C}$$

является линейным функционалом для любого $n \in \overline{1, N}$, а функция

$$\|x\|_e = \sum_{n=1}^N |\alpha_n(x)|$$

является нормой в конечномерном пространстве $\operatorname{Ker} A_\lambda$. По теореме 3.1.18, все нормы в $\operatorname{Ker} A_\lambda$ эквивалентны. Поэтому существует число $C > 0$, такое, что для всех $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ выполнено неравенство

$$\|x\|_e \leqslant C\|x\|.$$

Тогда

$$|\alpha_n(x)| \leqslant C\|x\| \qquad \forall\, x \in \operatorname{Ker} A_\lambda, \quad \forall\, n \in \overline{1, N}.$$

Следовательно, функционал α_n является непрерывным на $\operatorname{Ker} A_\lambda$ при каждом $n \in \overline{1, N}$. По следствию 5.1.5 теоремы Хана—Банаха, для любого $n \in \overline{1, N}$ существует линейный функционал $f_n \in X^*$, такой, что

$$f = \alpha_n \quad \text{на} \quad \operatorname{Ker} A_\lambda.$$

Определим замкнутое подпространство

$$M = \bigcap_{n=1}^N \operatorname{Ker} f_n.$$

Тогда справедливо равенство

$$X = M \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda.$$

Действительно, для любого вектора $x \in X$ определим вектор

$$y = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) e_n \in \operatorname{Ker} A_\lambda.$$

Так как выполнены равенства

$$f_k(e_n) = \alpha_k(e_n) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq n, \quad \text{и} \quad f_k(e_k) = 1,$$

то для любого $k \in \overline{1, N}$ получаем

$$f_k(x - y) = f_k(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) f_k(e_n) = f_k(x) - f_k(x) = 0.$$

Следовательно, $x - y \in M$, т. е. справедливо равенство

$$X = M + \operatorname{Ker} A_\lambda.$$

Покажем, что сумма прямая, т. е.

$$M \cap \operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}.$$

Действительно, если $x \in M \cap \operatorname{Ker} A_\lambda$, то

$$f_n(x) = \alpha_n(x) = 0 \quad \forall\, n \in \overline{1, N}, \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Теперь докажем, что $\operatorname{Im} A_\lambda$ — замкнутое подпространство. Ясно, что

$$\operatorname{Im} A_\lambda = A_\lambda(M).$$

Покажем, что оператор A_λ ограничен снизу на M, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство

$$\|A_\lambda(x)\| \geqslant L\|x\|.$$

Предположим, рассуждая от противного, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_n \in M$, такой, что

$$\|A_\lambda(x_n)\| < \frac{\|x_n\|}{n}.$$

Тогда $x_n \neq 0$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Определим вектор

$$z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \in M, \qquad \|z_n\| = 1.$$

Тогда

$$\|A_\lambda(z_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Так как последовательность z_n ограничена, то в силу компактности оператора A последовательность $A(z_n)$ имеет сходящуюся подпоследовательность

$$A(z_{n_k}) \to u \in X.$$

Так как

$$A_\lambda(z_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то получаем, что

$$z_{n_k} = \frac{A(z_{n_k}) - A_\lambda(z_{n_k})}{\lambda} \to \frac{u}{\lambda} = v \in M \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

причём выполнено равенство $\|v\| = 1$. Но тогда

$$\|A_\lambda(v)\| = \lim_{k\to\infty} \|A_\lambda(z_{n_k})\| = 0,$$

т. е. $A_\lambda(v) = 0$. Следовательно, выполнено вложение

$$v \in M \cap \operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\},$$

т. е. $v = 0$, что противоречит равенству $\|v\| = 1$. Итак, оператор A_λ является ограниченным снизу на M. Следовательно, в силу утверждения 3.5.12 оператор A_λ является непрерывно обратимым на M и по утверждению 3.5.13 его множество значений $A_\lambda(M) = \operatorname{Im} A_\lambda$ замкнуто в X, что и требовалось. ■

Пример 5.8.14. Приведём пример оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, у которого для некоторого скаляра $\lambda \neq 0$ ядро $\operatorname{Ker} A_\lambda$ бесконечномерно, а множество значений $\operatorname{Im} A_\lambda$ незамкнуто. Пусть $X = C[0,2]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,2]$ вещественных функций x с нормой равномерной сходимости

$$\|x\|_c = \max_{t\in[0,2]} |x(t)|.$$

Рассмотрим линейный оператор $T\colon C[0,2] \to C[0,2]$ вида

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau, & t \in [0,1], \\ \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\|T\| \leqslant 2$, т. е. T является непрерывным оператором. Тогда $x \in \operatorname{Ker} T$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau = 0 \quad \text{и} \quad x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [1,2].$$

Следовательно, ядро $\operatorname{Ker} T$ бесконечномерно. Множество значений $\operatorname{Im} T$ состоит из всех непрерывных на отрезке $[0,2]$ функций, постоянных на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[1,2]$. Тогда замыкание $[\operatorname{Im} T]$ будет совпадать с множеством $S \subset C[0,2]$, состоящим из всех непрерывных на отрезке $[0,2]$ функций, постоянных на отрезке $[0,1]$. Действительно, вложение $[\operatorname{Im} T] \subset S$ очевидно, покажем обратное вложение. Рассмотрим произвольную функцию $x \in S$. По теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P_ε, такой, что

$$|x(t) - P_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, t \in [1,2].$$

Так как $x(t) = x(1)$ при всех $t \in [0,1]$, то

$$|x(t) - P_\varepsilon(1)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

Определим функцию $z_\varepsilon \in C[0,2]$ вида

$$z_\varepsilon(t) = P'_\varepsilon(t) + \begin{cases} 2(1-t)P_\varepsilon(0), & t \in [0,1], \\ 0, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Тогда получаем

$$\int\limits_0^1 z_\varepsilon(\tau)\,d\tau = P_\varepsilon(0) + P_\varepsilon(1) - P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1),$$

а для любого $t \in [1,2]$ имеем равенство

$$\int\limits_0^t z_\varepsilon(\tau)\,d\tau = P_\varepsilon(1) + \int\limits_1^t P'_\varepsilon(\tau)\,d\tau = P_\varepsilon(t).$$

Следовательно, получаем

$$\|x - T(z_\varepsilon)\|_c \leqslant \varepsilon,$$

что означает вложение $S \subset [\operatorname{Im} T]$. Таким образом, доказано равенство

$$[\operatorname{Im} T] = S.$$

При этом очевидно неравенство $S \neq \operatorname{Im} T$, так как в множестве S имеются недифференцируемые на отрезке $[1,2]$ функции. Тогда искомый оператор $A = T + I$ и число $\lambda = 1$, т. е. $A_\lambda = T$. ▲

Утверждение 5.8.15. *Линейный оператор A является компактным тогда и только тогда, когда компактен сопряжённый оператор A^*.*

Доказательство. Пусть линейный оператор A является компактным. Тогда множество

$$K = \left[A\left(B_1(0)\right)\right]$$

является компактом в Y. Для доказательства компактности оператора A^* покажем, что для любой последовательности

$$\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y^*$$

вида

$$\|g_n\| \leqslant 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

существует сходящаяся подпоследовательность $A^*(g_{n_k}) \in X^*$. В пространстве $C(K)$ рассмотрим последовательность функций

$$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(K)$$

вида

$$\varphi_n(y) = g_n(y) \qquad \forall\, y \in K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенства

$$\|\varphi_n\|_c = \sup_{y \in K} |g_n(y)| = \sup_{x \in B_1(0)} \left|g_n\left(A(x)\right)\right| =$$

$$= \sup_{x \in B_1(0)} \left|(A^* g_n)(x)\right| = \|A^* g_n\| \leqslant \|A^*\|.$$

Следовательно, последовательность φ_n является ограниченной в пространстве $C(K)$. Для любых векторов $y, z \in K$ и номера $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$|\varphi_n(y) - \varphi_n(z)| = |g_n(y - z)| \leqslant \|g_n\|\,\|y - z\| \leqslant \|y - z\|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, такое, что для любых векторов $y, z \in K$ вида

$$\|y - z\| \leqslant \delta(\varepsilon),$$

и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|\varphi_n(y) - \varphi_n(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является равностепенно непрерывным и ограниченным в пространстве $C(K)$. Тогда, по теореме 2.2.14 Арцелла—Асколи, множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является вполне ограниченным в пространстве $C(K)$. Следовательно, последовательность φ_n имеет равномерно сходящуюся на K подпоследовательность φ_{n_k}, т. е.

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_m}\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad k, m \to \infty.$$

Получаем

$$\big\|A^*(g_{n_k}) - A^*(g_{n_m})\big\| = \sup_{x \in B_1(0)} \big|\big(A^*(g_{n_k} - g_{n_m})\big)(x)\big| =$$

$$= \sup_{x \in B_1(0)} \big|(g_{n_k} - g_{n_m})\big(A(x)\big)\big| = \sup_{y \in K} \big|g_{n_k}(y) - g_{n_m}(y)\big| =$$

$$= \|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_m}\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad k, m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $A^*(g_{n_k})$ является фундаментальной и поэтому сходящейся в пространстве X^*. Таким образом, оператор A^* является компактным.

Пусть теперь оператор A^* является компактным. Тогда компактным является оператор A^{**}. Рассмотрим линейные изометрические отображения $F\colon X \to X^{**}$ и $H\colon Y \to Y^{**}$ вида

$$(Fx)(f) = f(x) \qquad \forall\, x \in X, \quad \forall\, f \in X^*,$$

$$(Hy)(g) = g(y) \qquad \forall\, y \in Y, \quad \forall\, g \in Y^*.$$

Тогда для всех $x \in X$ и $g \in Y^*$ получаем

$$\big(H(Ax)\big)(g) = g(Ax) = (A^*g)(x) = (Fx)(A^*g) = (A^{**}Fx)(g).$$

Следовательно, справедливо равенство $HA = A^{**}F$. Так как отображение F — изометрия, то выполнено вложение

$$F\big(B_1(0)\big) \subset B_1^{**}(0) \text{ — единичный шар в пространстве } X^{**}.$$

Отсюда получаем

$$A^{**}F\left(B_1(0)\right) \subset A^{**}\left(B_1^{**}(0)\right),$$

а это вполне ограниченное множество в пространстве Y^{**} в силу компактности оператора A^{**}. Тогда множество $HA\left(B_1(0)\right)$ является вполне ограниченным в Y^{**}. Так как отображение H — изометрия, то множество $A\left(B_1(0)\right)$ является вполне ограниченным в пространстве Y. Таким образом, оператор A является компактным. ■

Следствие 5.8.16. (Фредгольм) *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда для любого скаляра $\lambda \neq 0$ справедливы равенства*

$$\operatorname{Im} A_\lambda = {}^{\perp}\left(\operatorname{Ker} A_\lambda^*\right), \quad \operatorname{Im} A_\lambda^* = \left(\operatorname{Ker} A_\lambda\right)^{\perp}.$$

Доказательство. Применяя следствие 5.6.11 и утверждение 5.8.13 для компактного оператора A, получаем равенства

$$\operatorname{Im} A_\lambda = [\operatorname{Im} A_\lambda] = {}^{\perp}\left(\operatorname{Ker} A_\lambda^*\right).$$

Так как $(A_\lambda)^* = A_\lambda^*$, то, применяя теорему 5.6.13, для оператора A_λ, имеющего замкнутое множество значений $\operatorname{Im} A_\lambda$, получаем

$$\operatorname{Im} A_\lambda^* = \left(\operatorname{Ker} A_\lambda\right)^{\perp}.$$

■

Задача 5.8.17. Пусть Y — рефлексивное сепарабельное пространство. Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(c_0, Y)$. Доказать, что A — компактный оператор.

Решение. В силу утверждения 5.2.5 имеет место равенство $(c_0)^* = \ell_1$. Следовательно, сопряжённый оператор $A^*: Y^* \to \ell_1$. Заметим, что в силу рефлексивности пространства Y имеет место рефлексивность сопряжённого пространства Y^*. Так как пространство Y ещё и сепарабельно, то изометричное ему пространство Y^{**} тоже является сепарабельным. Тогда в силу утверждения 5.2.11 получаем сепарабельность пространства Y^*. Следовательно, в силу утверждения задачи 5.8.12 получаем компактность сопряжённого оператора A^*. Отсюда в силу утверждения 5.8.15 получаем компактность оператора A. ▲

Утверждение 5.8.18. *Пусть оператор $A \in \mathcal{K}(X)$, а нетривиальный скаляр $\lambda \in \sigma_p(A)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{Im} A_\lambda \neq X.$$

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что

$$\operatorname{Im} A_\lambda = X.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутое подпространство

$$M_n = \operatorname{Ker}(A_\lambda)^n.$$

Так как

$$\lambda \in \sigma_p(A), \quad \text{то} \quad \operatorname{Ker} A_\lambda = M_1 \neq \{0\}.$$

Следовательно, существует нетривиальный вектор $x_1 \in M_1$. Так как $\operatorname{Im} A_\lambda = X$, то существует вектор $x_2 \in X$, такой, что

$$A_\lambda(x_2) = x_1 \neq 0.$$

Тогда

$$x_2 \notin M_1, \quad \text{но} \quad (A_\lambda)^2(x_2) = A_\lambda(x_1) = 0, \quad \text{т. е.} \quad x_2 \in M_2.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$M_1 \subsetneq M_2.$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для номера $n \geqslant 2$ и любого $m \in \overline{1,n}$ определены нетривиальные векторы $x_m \in M_m$ вида

$$A_\lambda(x_k) = x_{k-1} \qquad \forall\, k \in \overline{2,m}.$$

Так как $\operatorname{Im} A_\lambda = X$, то существует вектор $x_{n+1} \in X$, такой, что

$$A_\lambda(x_{n+1}) = x_n \in M_n.$$

Следовательно,

$$(A_\lambda)^n(x_{n+1}) = x_1 \neq 0,$$

Тогда

$$x_{n+1} \notin M_n, \quad \text{но} \quad (A_\lambda)^{n+1}(x_{n+1}) = A_\lambda(x_1) = 0, \quad \text{т. е.} \quad x_{n+1} \in M_{n+1}.$$

Следовательно, $M_n \neq M_{n+1}$, а вложение $M_n \subset M_{n+1}$ очевидно. При каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого вектора $x \in M_{n+1}$ получаем равенство

$$(A_\lambda)^n \big(A_\lambda(x)\big) = (A_\lambda)^{n+1}(x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad A_\lambda(x) \in M_n.$$

Таким образом, справедливо вложение

$$A_\lambda(M_{n+1}) \subset M_n.$$

Для любого вектора $x \in M_n$ получаем

$$(A_\lambda)^n(Ax) = A\big((A_\lambda)^n(x)\big) = 0, \quad \text{т. е.} \quad A(x) \in M_n.$$

Поэтому справедливо вложение

$$A(M_n) \subset M_n.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ применим лемму 3.1.21 Рисса о почти перпендикуляре в линейном нормированном пространстве M_{n+1} для его собственного замкнутого подпространства M_n. Получаем, что существует вектор $z_n \in M_{n+1}$, такой, что

$$\|z_n\| = 1 \quad \text{и} \quad \rho(z_n, M_n) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ вида $m < n$ получаем, что

$$A(z_m) \in A(M_{m+1}) \subset M_{m+1} \subset M_n, \quad A_\lambda(z_n) \in A_\lambda(M_{n+1}) \subset M_n.$$

Следовательно, вектор

$$w = A(z_m) - A_\lambda(z_n) \in M_n.$$

Тогда получаем

$$\|A(z_n) - A(z_m)\| = \|\lambda z_n - w\| \geqslant |\lambda|\, \rho(z_n, M_n) \geqslant \frac{|\lambda|}{2}.$$

Следовательно, последовательность $A(z_n)$ не имеет фундаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A. ■

Пример 5.8.19. Приведём пример оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, у которого для некоторого скаляра $\lambda \neq 0$ выполнены соотношения

$$\operatorname{Ker} A_\lambda \neq \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A_\lambda = X.$$

Рассмотрим линейный оператор $T\colon \ell_1 \to \ell_1$ вида

$$(Tx)(k) = x(k+1) \qquad \forall\, x \in \ell_1, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Lin}\{e_1\} \neq \{0\}, \quad \text{а} \quad \operatorname{Im} T = \ell_1.$$

Тогда искомый оператор $A = T + I$ и число $\lambda = 1$, т. е. $A_\lambda = T$. ▲

Утверждение 5.8.20. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда для любого $\delta > 0$ множество*

$$\Lambda_\delta = \left\{ \lambda \in \sigma_p(A) \quad \middle| \quad |\lambda| \geqslant \delta \right\}$$

конечно или пусто.

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что множество Λ_δ бесконечно для некоторого $\delta > 0$. Тогда оно содержит счётное подмножество

$$\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda_\delta$$

различных собственных чисел оператора A. Пусть $x_m \in X$ — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному числу λ_m. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы, как собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным числам. Для любого $n \in N$ определим конечномерное (и поэтому замкнутое) подпространство

$$M_n = \mathrm{Lin}\{x_m\}_{m=1}^{n}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$M_n \subset M_{n+1} \quad \text{и} \quad M_n \neq M_{n+1},$$

$$A(M_n) \subset M_n \quad \text{и} \quad A_{\lambda_{n+1}}(M_{n+1}) \subset M_n.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ применим лемму 3.1.21 Рисса о почти перпендикуляре в линейном нормированном пространстве M_{n+1} для его собственного замкнутого подпространства M_n. Получаем, что существует вектор $z_n \in M_{n+1}$, такой, что

$$\|z_n\| = 1 \quad \text{и} \quad \rho(z_n, M_n) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ вида $m < n$ получаем, что

$$A(z_m) \in A(M_{m+1}) \subset M_{m+1} \subset M_n,$$

$$A_{\lambda_{n+1}}(z_n) \in A_{\lambda_{n+1}}(M_{n+1}) \subset M_n.$$

Следовательно, вектор

$$w = A(z_m) - A_{\lambda_{n+1}}(z_n) \in M_n.$$

Тогда получаем

$$\|A(z_n) - A(z_m)\| = \|\lambda_{n+1} z_n - w\| \geqslant |\lambda_{n+1}|\, \rho(z_n, M_n) \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому последовательность $A(z_n)$ не имеет фундаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.■

Следствие 5.8.21. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда точечный спектр $\sigma_p(A)$ является не более чем счётным (быть может, пустым) множеством.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$\sigma_p(A)\backslash\{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{\frac{1}{n}},$$

а множество $\Lambda_{\frac{1}{n}}$ конечно или пусто для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, множество $\sigma_p(A)\backslash\{0\}$ не более чем счётно как счётное объединение конечных или пустых множеств. Тогда и $\sigma_p(A)$ не более чем счётно. ■

Утверждение 5.8.22. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда для любого комплексного числа $\lambda \neq 0$ имеет место равенство*

$$\dim \operatorname{Ker} A_\lambda = \dim \operatorname{Ker} A^*_\lambda.$$

Доказательство. Проведём его для случая $X = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Доказательство общего случая см. в теореме 4.25 [2, ч. I, гл. 4, с. 123].

По утверждению 5.8.15 оператор $A^* \in \mathcal{K}(X^*)$. В силу утверждения 5.8.13 справедливы неравенства

$$\dim \operatorname{Ker} A_\lambda < +\infty \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Ker} A^*_\lambda < +\infty,$$

а подпространства $\operatorname{Im} A_\lambda$ и $\operatorname{Im} A^*_\lambda$ замкнуты. По теореме 5.6.10 Фредгольма, имеем равенства

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = {}^{\perp}\left(\operatorname{Im} A^*_\lambda\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A^*_\lambda = \left(\operatorname{Im} A_\lambda\right)^{\perp}.$$

Обозначим

$$m = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda, \quad n = \dim \left(\left(\operatorname{Im} A_\lambda\right)^{\perp}\right),$$

$$m^* = \dim \operatorname{Ker} A^*_\lambda, \quad n^* = \dim \left({}^{\perp}\left(\operatorname{Im} A^*_\lambda\right)\right).$$

Тогда $m = n^*$ и $m^* = n$. Если для оператора A доказать неравенство

$$m \leqslant n,$$

то аналогичными рассуждениями для оператора A^* будем иметь неравенство

$$m^* \leqslant n^*.$$

Следовательно, получим

$$m^* \leqslant n^* = m \leqslant n = m^*, \quad \Rightarrow \quad m = m^*,$$

что и требуется.

Предположим, рассуждая от противного, что $m > n$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим ортогональные дополнения

$$M = (\operatorname{Ker} A_\lambda)^\perp \subset \mathcal{H}, \quad N = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \subset \mathcal{H}.$$

Тогда, по теореме 3.2.14 Рисса об ортогональном дополнении, справедливы равенства

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} A_\lambda \oplus M, \quad \mathcal{H} = \operatorname{Im} A_\lambda \oplus N.$$

По предположению имеем

$$n = \dim N < m = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda.$$

Тогда существует линейный оператор $F\colon \operatorname{Ker} A_\lambda \to N$, такой, что

$$\operatorname{Ker} F \neq \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} F = N.$$

В силу конечномерности $\operatorname{Ker} A_\lambda$, по утверждению 3.4.19, оператор F является непрерывным. В силу конечномерности N, по утверждению 5.8.3, оператор F является компактным. Рассмотрим линейный непрерывный оператор P проектирования из $\mathcal{H}$ на $\operatorname{Ker} A_\lambda$, т. е. $P\colon \mathcal{H} \to \operatorname{Ker} A_\lambda$ и

$$x - P(x) \in M \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Определим линейный оператор

$$\varPhi = A + FP \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Он является компактным в силу компактности оператора A и компактности оператора FP по утверждению 5.8.10. Заметим, что

$$\varPhi_\lambda = A_\lambda + FP.$$

По определению оператора F, существует нетривиальный вектор $x_0 \in \operatorname{Ker} A_\lambda$, такой, что

$$F(x_0) = 0.$$

При этом, в силу вложения $x_0 \in \operatorname{Ker} A_\lambda$, по определению проектора P, выполнено равенство $P(x_0) = x_0$. Тогда

$$\varPhi_\lambda(x_0) = A_\lambda(x_0) + F(x_0) = 0, \quad \text{т. е.} \quad x_0 \in \operatorname{Ker} \varPhi_\lambda.$$

Следовательно, $\lambda \in \sigma_p(\varPhi)$. Поэтому, по утверждению 5.8.18, получаем неравенство

$$\operatorname{Im} \varPhi_\lambda \neq \mathcal{H}.$$

С другой стороны, имеем равенства

$$P(\operatorname{Ker} A_\lambda) = \operatorname{Ker} A_\lambda, \quad P(M) = \{0\},$$

$$\varPhi_\lambda\left(\operatorname{Ker} A_\lambda\right) = FP(\operatorname{Ker} A_\lambda) = F(\operatorname{Ker} A_\lambda) = N,$$

$$A_\lambda(M) = A_\lambda(M + \operatorname{Ker} A_\lambda) = A_\lambda(\mathcal{H}) = \operatorname{Im} A_\lambda.$$

Следовательно, получаем

$$\operatorname{Im} \varPhi_\lambda = \varPhi_\lambda(\mathcal{H}) = \varPhi_\lambda\left(M + \operatorname{Ker} A_\lambda\right) =$$

$$= A_\lambda(M) + FP(M) + \varPhi_\lambda(\operatorname{Ker} A_\lambda) = \operatorname{Im} A_\lambda + N = \mathcal{H},$$

т. е. получили противоречие. ■

Теорема 5.8.23. *Пусть оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда любой нетривиальный элемент спектра оператора A является собственным значением оператора A, т. е.*

$$\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}.$$

Спектр оператора A не более чем счётен и не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки ноль.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$. Если предположить, что $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}.$$

Так как, по утверждению 5.8.22, имеем

$$\dim \operatorname{Ker} A_\lambda = 0 = \dim \operatorname{Ker} A^*_\lambda,$$

то $\operatorname{Ker} A_\lambda^* = \{0\}$. Тогда по следствию 5.8.16 получаем

$$\operatorname{Im} A_\lambda = {}^\perp(\{0\}) = X.$$

Следовательно, в силу замечания 5.7.11, получаем $\lambda \in \rho(A)$ — противоречие. Таким образом, справедливо вложение

$$\lambda \in \sigma_p(A).$$

Следовательно, доказано равенство

$$\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}.$$

По следствию 5.8.21 получаем, что спектр $\sigma(A)$ не более чем счётен. По утверждению 5.8.20 получаем, что любое нетривиальное собственное значение оператора A является изолированной точкой спектра $\sigma(A)$. Поэтому если спектр $\sigma(A)$ счётен, то его единственной предельной точкой может быть только ноль. ■

Замечание 5.8.24. Пусть X является бесконечномерным пространством, а линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда

$$0 \in \sigma(A).$$

Действительно, если предположить противное, то получим $\operatorname{Im} A = X$. Тогда подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто в X. Поэтому, в силу утверждения 5.8.4, получаем, что $\operatorname{Im} A = X$ конечномерно. Это противоречит бесконечномерности пространства X. □

5.9. Самосопряжённый оператор

В этом параграфе рассматриваются гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. В силу теоремы 5.3.1 Рисса—Фреше, будем отождествлять пространства $\mathcal{H}^*$ и $\mathcal{H}$. Тогда для любого подпространства $L \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ имеем $L^\perp = {}^\perp L$ — ортогональное дополнение подпространства L в $\mathcal{H}$ (см. определение 3.2.11). По замечанию 5.6.4, рассматриваем сопряжённый оператор $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ вида

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

При этом операция сопряжения линейного ограниченного оператора в $\mathcal{H}$ является сопряжённо–линейной (см. замечание 5.6.4).

Определение 5.9.1. *Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется самосопряжённым, если $A = A^*$, т. е.*

$$(A(x), y) = (x, A(y)) \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Теорема 5.9.2. (Хеллингер, Теплиц) *Пусть линейный оператор $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является симметричным, т. е. для всех $x, y \in \mathcal{H}$ справедливо равенство*

$$(T(x), y) = (x, T(y)).$$

Тогда $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и является самосопряжённым оператором.

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что $\|T\| = +\infty$. Тогда существует последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H},$$

такая, что $\|x_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и справедливо соотношение

$$\|T(x_n)\| \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функционал $f_n \in \mathcal{H}^*$ следующего вида:

$$f_n(y) = \left(y, \frac{T(x_n)}{\sqrt{\|T(x_n)\|}}\right) \qquad \forall\, y \in \mathcal{H}.$$

Тогда, по теореме 5.3.1 Рисса—Фреше, имеем

$$\|f_n\| = \left\| \frac{T(x_n)}{\sqrt{\|T(x_n)\|}} \right\| = \sqrt{\|T(x_n)\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В силу симметричности оператора T, для каждого вектора $y \in \mathcal{H}$ получаем

$$|f_n(y)| = \frac{|(T(y), x_n)|}{\sqrt{\|T(x_n)\|}} \leqslant \frac{\|T(y)\|}{\sqrt{\|T(x_n)\|}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность функционалов f_n является поточечно ограниченной в $\mathcal{H}$. Тогда, по теореме 3.4.23 Банаха—Штейнгауза, она является ограниченной в $\mathcal{H}^*$. Это означает, что существует $M > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|f_n\| = \sqrt{\|T(x_n)\|} \leqslant M,$$

т. е. получили противоречие. ■

Далее в этом параграфе рассматриваем самосопряжённый оператор A.

Утверждение 5.9.3. *Справедливы следующие свойства:*

1) $(A(x), x) \in \mathbb{R}$ *для любого* $x \in \mathcal{H}$*;*

2) точечный спектр оператора A *вещественен, т. е.* $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$*;*

3) для любых двух различных собственных чисел оператора A *любые соответствующие им собственные векторы ортогональны;*

4) $\|A^n\| = \|A\|^n$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Свойство 1 следует из равенств

$$(A(x), x) = (x, A(x)) = \overline{(A(x), x)},$$

т. е. мнимая часть $\mathrm{Im}(A(x), x) = 0$. Рассмотрим произвольное собственное число $\lambda \in \sigma_p(A)$ оператора A. Пусть $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ — собственный вектор A, соответствующий λ. Тогда получаем равенства

$$(A(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2.$$

Следовательно, в силу свойства 1, получаем

$$\lambda = \frac{(A(x), x)}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, т. е. свойство 2 доказано. Рассмотрим теперь два различных собственных числа $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператора A. Пусть $x_1 \in \operatorname{Ker} A_{\lambda_1}$ и $x_2 \in \operatorname{Ker} A_{\lambda_2}$ соответствующие им собственные векторы. Тогда получаем

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (A(x_1), x_2) = (x_1, A(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Следовательно,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то получаем $(x_1, x_2) = 0$, т. е. свойство 3 доказано. Далее, по определению операторной нормы очевидно неравенство

$$\|A^n\| \leqslant \|A\|^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и для всех $k \in \overline{1, m}$ справедливо равенство $\|A^k\| = \|A\|^k$ (для $m = 1$ это верно). Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ вида $\|x\| = 1$ получаем

$$\|A^m(x)\|^2 = \big(A^m(x), A^m(x)\big) = \big(A^{m+1}(x), A^{m-1}(x)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \|A^{m+1}(x)\|\, \|A^{m-1}(x)\| \leqslant \|A^{m+1}\|\, \|A^{m-1}\| = \|A^{m+1}\|\, \|A\|^{m-1}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\|A\|^{2m} = \|A^m\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|A^m(x)\|^2 \leqslant \|A^{m+1}\| \, \|A\|^{m-1}.$$

Отсюда получаем $\|A\|^{m+1} \leqslant \|A^{m+1}\|$, т. е. справедливо равенство

$$\|A\|^{m+1} = \|A^{m+1}\|,$$

что и требовалось. Наконец, спектральный радиус

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \|A\|,$$

т. е. свойство 4 доказано. ■

П р и м е р 5.9.4. Приведём пример самосопряжённого оператора A с пустым точечным спектром. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2\big([0,1]\big)$ и линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ вида

$$(Ax)(t) = tx(t) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Так как для всех $x, y \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$(A(x), y) = \int\limits_{[0,1]} t\, x(t)\, \overline{y(t)}\, d\mu = \int\limits_{[0,1]} x(t)\, \overline{t\, y(t)}\, d\mu = (x, A(y)),$$

то оператор A является самосопряжённым. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$. Тогда для п. в. $t \in [0,1]$ имеем

$$(t-\lambda)x(t) = 0.$$

Так как $t - \lambda \neq 0$ для почти всех $t \in [0,1]$, то получаем

$$x(t) = 0 \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1].$$

Следовательно, $x = 0$ в $\mathcal{H}$, то есть $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Это означает, что $\sigma_p(A) = \varnothing$. ▲

У т в е р ж д е н и е 5.9.5. *Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\operatorname{Ker} A_\lambda \oplus [\operatorname{Im} A_\lambda] = \mathcal{H}.$$

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$(A_\lambda)^* = A^* - \overline{\lambda} I^* = A - \overline{\lambda} I = A_{\overline{\lambda}}.$$

Следовательно, по следствию 5.6.11 теоремы Фредгольма получаем

$$\left(\operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}}\right)^\perp = [\operatorname{Im} A_\lambda].$$

Следовательно, по теореме 3.2.14 об ортогональном дополнении получаем равенство

$$\operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}} \oplus [\operatorname{Im} A_\lambda] = \mathcal{H}.$$

Если мнимая часть числа λ нетривиальна, то по свойству 2 утверждения 5.9.3 получаем соотношения

$$\lambda \notin \sigma_p(A) \subset \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \overline{\lambda} \notin \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}} = \{0\}.$$

Если же $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda = \overline{\lambda}$, и поэтому

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}}.$$

Следовательно, получаем требуемое равенство

$$\operatorname{Ker} A_\lambda \oplus [\operatorname{Im} A_\lambda] = \mathcal{H}.$$

■

Утверждение 5.9.6. *Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ с нетривиальной мнимой частью $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ справедливы вложение*

$$\lambda \in \rho(A)$$

и оценка для нормы резольвенты

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

Доказательство. По условию

$$\lambda = \mu + i\nu, \quad \text{где} \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \text{причём} \quad \nu \neq 0.$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$\|A_\lambda(x)\|^2 = (A_\mu(x) - i\nu x, A_\mu(x) - i\nu x) =$$

$$= \|A_\mu(x)\|^2 - i\nu(x, A_\mu(x)) + i\nu(A_\mu(x), x) + \nu^2\|x\|^2.$$

Так как $\mu \in \mathbb{R}$, то имеем

$$(A_\mu)^* = A_\mu, \quad \Rightarrow \quad (x, A_\mu(x)) = (A_\mu(x), x).$$

Следовательно, получаем

$$\|A_\lambda(x)\|^2 = \|A_\mu(x)\|^2 + \nu^2\|x\|^2 \geqslant \nu^2\|x\|^2.$$

Таким образом, для любого $x \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство

$$\|A_\lambda(x)\| \geqslant |\nu|\,\|x\|,$$

т. е. оператор A_λ ограничен снизу на $\mathcal{H}$. Тогда, в силу утверждения 3.5.12, получаем, что оператор A_λ непрерывно обратим, т. е. существует обратный оператор

$$(A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \mathcal{H}).$$

При этом, в силу утвержения 3.5.13, множество значений оператора A_λ является замкнутым. Но тогда, в силу $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и утверждения 5.9.5, получаем равенство $\operatorname{Im} A_\lambda = \mathcal{H}$. Поэтому

$$(A_\lambda)^{-1} = R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

т. е. справедливо вложение $\lambda \in \rho(A)$. При этом для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\|R_A(\lambda)x\| \leqslant \frac{\|A_\lambda R_A(\lambda)(x)\|}{|\nu|} = \frac{\|x\|}{|\nu|}.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\nu|},$$

что и требовалось. ■

Следствие 5.9.7. *Спектр самосопряжённого оператора вещественен, т. е. справедливо вложение*

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}.$$

Доказательство. Непосредственно следует из определения спектра $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ и утверждения 5.9.6. $\blacksquare$

Утверждение 5.9.8. *Число $\lambda \in \rho(A)$ тогда и только тогда, когда оператор A_λ является ограниченным снизу на $\mathcal{H}$, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для всех $x \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство*

$$\|A_\lambda(x)\| \geqslant L\|x\|.$$

Доказательство. Необходимость условия ограниченности снизу оператора A_λ на $\mathcal{H}$ для выполнения вложения $\lambda \in \rho(A)$ сразу следует из утверждения 3.5.12, при этом

$$L = \frac{1}{\|R_\lambda(A)\|}.$$

Докажем достаточность. Пусть оператор A_λ является ограниченным снизу на $\mathcal{H}$. Тогда, в силу утверждения 3.5.12, получаем, что оператор A_λ непрерывно обратим, т. е. существует обратный оператор

$$(A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \mathcal{H}).$$

При этом, в силу утверждения 3.5.13, образ оператора A_λ является замкнутым. Но тогда, в силу $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и утверждения 5.9.5, получаем равенство $\operatorname{Im} A_\lambda = \mathcal{H}$. Следовательно,

$$(A_\lambda)^{-1} = R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

т. е. справедливо вложение $\lambda \in \rho(A)$, что и требовалось. $\blacksquare$

Следствие 5.9.9. *Число $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность векторов $x_n \in \mathcal{H}$ вида $\|x_n\| = 1$, таких, что*

$$\|A_\lambda(x_n)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Вложение $\lambda \in \sigma(A)$ равносильно соотношению $\lambda \notin \rho(A)$, которое, в силу утверждения 5.9.8, выполняется тогда и только тогда, когда оператор A_λ не является ограниченным снизу на $\mathcal{H}$. Это в свою очередь равносильно тому, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вектор $z_n \in \mathcal{H}$, такой, что выполнено неравенство

$$\|A_\lambda(z_n)\| < \frac{\|z_n\|}{n}.$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $z_n \neq 0$. Определим единичный вектор

$$x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}.$$

Получаем

$$\|A_\lambda(x_n)\| < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 5.9.10. *Определим вещественные числа*

$$m_- = \inf_{\|x\|=1} (A(x), x), \quad m_+ = \sup_{\|x\|=1} (A(x), x).$$

Тогда справедливы вложения

$$\sigma(A) \subset [m_-, m_+], \quad m_\pm \in \sigma(A).$$

Доказательство. По определению чисел $m_\pm$ для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ справедливы неравенства

$$m_-\|x\|^2 \leqslant (A(x), x) \leqslant m_+\|x\|^2.$$

Тогда для любого вещественного числа $\lambda > m_+$ и любого $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$(\lambda - m_+)\|x\|^2 \leqslant (\lambda x, x) - (A(x), x) = -(A_\lambda(x), x) \leqslant \|A_\lambda(x)\| \, \|x\|,$$

т. е. справедливо неравенство

$$(\lambda - m_+)\|x\| \leqslant \|A_\lambda(x)\|.$$

Следовательно, оператор A_λ ограничен снизу на $\mathcal{H}$. В силу утверждения 5.9.8, получаем вложение

$$\lambda \in \rho(A).$$

Аналогично, для любого вещественного числа $\lambda < m_-$ и любого $x \in$ $\in \mathcal{H}$ получаем

$$(m_- - \lambda)\|x\|^2 \leqslant (A(x), x) - (\lambda x, x) = (A_\lambda(x), x) \leqslant \|A_\lambda(x)\| \, \|x\|,$$

т. е. справедливо неравенство

$$(m_- - \lambda)\|x\| \leqslant \|A_\lambda(x)\|.$$

Следовательно, оператор A_λ ограничен снизу на $\mathcal{H}$. В силу утверждения 5.9.8, получаем вложение

$$\lambda \in \rho(A).$$

Так как по следствию 5.9.7 спектр оператора A вещественен, то получаем вложение

$$\sigma \subset [m_-, m_+].$$

Докажем, что $m_+ \in \sigma(A)$. В силу утверждения 5.9.9, для этого требуется найти последовательность векторов $x_n \in \mathcal{H}$ вида $\|x_n\| = 1$, таких, что

$$\|A_{m_+}(x_n)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

По определению числа m_+, существует последовательность векторов $x_n \in \mathcal{H}$ вида $\|x_n\| = 1$, таких, что

$$(A(x_n), x_n) \to m_+ \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$(A_{m_+}(x_n), x_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

По определению числа m_+, для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство

$$(A_{m_+}(x), x) \leqslant 0.$$

Определим в $\mathcal{H}$ “полускалярное” произведение

$$\langle x, y \rangle = -(A_{m_+}(x), y) \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Тогда при всех $x \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство

$$\langle x, x \rangle \geqslant 0.$$

В силу равенства $(A_{m_+})^* = A_{m_+}$, для всех $x, y \in \mathcal{H}$ получаем равенство

$$\langle x, y \rangle = -(x, (A_{m_+}(y))) = -\overline{(A_{m_+}(y), x)} = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Следовательно, для “полускалярного” произведения справедливо неравенство Коши—Буняковского. Действительно, для любых векторов $x, y \in \mathcal{H}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ получаем неравенство

$$0 \leqslant \langle x - ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - 2t\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\bigl(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle\bigr)^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0.$$

Записав комплексное число $\langle x, y\rangle$ в экспоненциальной форме

$$\langle x, y\rangle = e^{i\varphi}|\langle x, y\rangle|,$$

получим

$$|\langle x, y\rangle| = \langle x, e^{i\varphi}y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, e^{i\varphi}y\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle e^{i\varphi}y, e^{i\varphi}y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle},$$

т. е. получаем неравенство Коши—Буняковского

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем соотношения

$$\|A_{m_+}(x_n)\|^2 = \bigl(A_{m_+}(x_n), A_{m_+}(x_n)\bigr) = -\left\langle x_n, A_{m_+}(x_n)\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\langle x_n, A_{m_+}(x_n)\right\rangle\right| \leqslant \langle x_n, x_n\rangle \left\langle A_{m_+}(x_n), A_{m_+}(x_n)\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \left|\bigl(A_{m_+}(x_n), x_n\bigr)\right| \, \|A_{m_+}\|^3 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, в силу утверждения 5.9.9 получаем требуемое вложение $m_+ \in \sigma(A)$. Совершенно аналогично доказывается другое вложение $m_- \in \sigma(A)$. ■

Следствие 5.9.11. *Справедливы равенства*

$$\|A\| = \max\bigl\{|m_-|, |m_+|\bigr\} = r(A).$$

Доказательство. По определению спектрального радиуса оператора A имеем равенство

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Так как по утверждению 5.9.10 выполнены вложения $m_\pm \in \sigma(A)$, то имеют место неравенства

$$|m_\pm| \leqslant r(A), \quad \Rightarrow \quad \max\Bigl\{|m_-|, |m_+|\Bigr\} \leqslant r(A).$$

С другой стороны, по тому же утверждению 5.9.10, в силу вложения $\sigma \subset [m_-, m_+]$, для любого $\lambda \in \sigma(A)$ получаем неравенство

$$|\lambda| \leqslant \max \Big\{ |m_-|, |m_+| \Big\}.$$

Следовательно,

$$r(A) \leqslant \max \Big\{ |m_-|, |m_+| \Big\}.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\max \big\{ |m_-|, |m_+| \big\} = r(A).$$

В силу пункта 4 утверждения 5.9.3, имеем равенство

$$r(A) = \|A\|.$$

Отсюда получаем требуемые равенства

$$\max \big\{ |m_-|, |m_+| \big\} = \|A\| = r(A).$$

■

Следствие 5.9.12. *Пусть нетривиальный линейный оператор $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Тогда справедливы равенства*

$$\|T\| = \sqrt{r(T^*T)} = \sqrt{\max_{\lambda \in \sigma_p(T^*T)} |\lambda|}.$$

Доказательство. Оператор T^*T является самосопряжённым. Поэтому, по следствию 5.9.11, получаем равенства

$$r(T^*T) = \|T^*T\| = \max \Big\{ \big| m_+(T^*T) \big|, \big| m_-(T^*T) \big| \Big\} =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \Big| \big(T^*T(x), x \big) \Big| = \sup_{\|x\|=1} \Big| \big(T(x), T(x) \big) \Big| =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|^2 = \|T\|^2.$$

По теореме 5.8.15 и утверждению 5.8.10, оператор T^*T является компактным. Так как оператор $T \neq 0$, то имеем

$$r(T^*T) = \|T^*T\| = \|T\|^2 > 0.$$

Поэтому, по теореме 5.8.23, получаем

$$\sigma_p(T^*T) \neq \varnothing$$

и имеем равенство

$$r(T^*T) = \max_{\lambda \in \sigma_p(T^*T)} |\lambda|,$$

что и требовалось. ■

Пример 5.9.13. Рассмотрим линейный оператор Вольтерра:

$$A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1],$$

который имеет вид

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,t]} x(\tau)\, d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Вычислим норму этого линейного оператора. Заметим, что оператор Вольтерра можно записать в виде

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} K(t,\tau)\, d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1],$$

где функция $K \in \mathbb{L}_2\left([0,1]^2\right)$ имеет вид

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1, \\ \\ 0, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Следовательно, как показано в примере 5.8.9, оператор Вольтерра является компактным в $\mathbb{L}_2[0,1]$, т. е. справедливо вложение $A \in \mathcal{K}\left(\mathbb{L}_2[0,1]\right)$. Для вычисления нормы оператора A воспользуемся следствием 5.9.12, согласно утверждению которого справедливо равенство

$$\|A\| = \sqrt{r\left(A^*A\right)} = \sqrt{\max_{\lambda \in \sigma_p(A^*A)} |\lambda|}.$$

Вычислим сопряжённый оператор $A^*\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$. Рассмотрим произвольные функции $x, y \in CL_2[0,1]$. Так как, в силу утверждения 4.3.41, интегралы Римана и Лебега непрерывной функции совпадают, то получаем

$$(Ax,y) = \int\limits_0^1 dt \left(\int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau\right) \overline{y(t)} = \int\limits_0^1 d\tau\, x(\tau) \overline{\left(\int\limits_\tau^1 y(t)\, dt\right)} = (x, A^*y).$$

Следовательно, для любой непрерывной функции $y \in CL_2[0,1]$ для п. в. $t \in [0,1]$ справедливо равенство

$$(A^*y)(t) = \int\limits_t^1 y(\tau)\,d\tau = \int\limits_{[t,1]} y(\tau)\,d\mu(\tau).$$

Так как пространство $CL_2[0,1]$ является всюду плотным в $\mathbb{L}_2[0,1]$, то для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ существует последовательность $y_n \in CL_2[0,1]$, такая, что

$$\|x - y_n\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда, в силу непрерывности оператора A^*, получаем

$$\|A^*x - A^*y_n\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для любого $t \in [0,1]$, в силу неравенства Коши—Буняковского, имеем

$$\left| \int\limits_{[t,1]} x(\tau)\,d\mu(\tau) - \int\limits_{[t,1]} y_n(\tau)\,d\mu(\tau) \right| \leqslant \int\limits_{[0,1]} \big|x(\tau) - y_n(\tau)\big|\,d\mu(\tau) \leqslant \|x - y_n\|_2.$$

Следовательно, получаем

$$\left\| \int\limits_{[t,1]} x(\tau)\,d\mu(\tau) - \int\limits_{[t,1]} y_n(\tau)\,d\mu(\tau) \right\|_2 =$$

$$= \sqrt{\int\limits_0^1 \left| \int\limits_{[t,1]} x(\tau)\,d\mu(\tau) - \int\limits_{[t,1]} y_n(\tau)\,d\mu(\tau) \right|^2 d\mu(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 \big(\|x - y_n\|_2\big)^2\,d\mu(t)} = \|x - y_n\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, при $n \to \infty$ выполнено соотношение

$$\left\| (A^*x)(t) - \int\limits_{[t,1]} x(\tau)\,d\mu(\tau) \right\|_2 = \lim_{n\to\infty} \left\| (A^*y_n)(t) - \int\limits_{[t,1]} x(\tau)\,d\mu(\tau) \right\|_2 = 0.$$

Следовательно, получаем равенство

$$(A^*x)(t) = \int\limits_{[t,1]} x(\tau)\, d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Рассмотрим самосопряжённый компактный оператор

$$A^*A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1],$$

который имеет вид

$$(A^*Ax)(t) = \int\limits_{[t,1]} d\mu(\tau) \int\limits_{[0,\tau]} d\mu(\xi)\, x(\xi) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1]$$

и для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$. Вычислим его точечный спектр. Нетривиальное число λ является собственным числом оператора A^*A тогда и только тогда, когда существует ненулевая функция $x_\lambda \in \mathbb{L}_2[0,1]$, такая, что

$$x_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(A^*Ax_\lambda)(t) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1].$$

Так как для любой функции $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ отображение $t \mapsto (A^*Ax)(t)$ является непрерывным на отрезке $[0,1]$, то без ограничения общности считаем функцию x_λ непрерывной на отрезке $[0,1]$, а равенство

$$x_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\left(A^*Ax_\lambda\right)(t) \tag{$*$}$$

выполненым для всех $t \in [0,1]$. Тогда, так как для любой непрерывной функции $x \in C[0,1]$ отображение $t \mapsto (A^*Ax)(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$ функцией, то функция x_λ также является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$. Дважды дифференцируя равенство $(*)$ по $t \in [0,1]$, получаем

$$x_\lambda'(t) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau, \quad x_\lambda''(t) = -\frac{x(t)}{\lambda} \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

и граничные условия

$$x_\lambda(1) = 0 \quad \text{и} \quad x_\lambda'(0) = 0.$$

Так как выполнены соотношения

$$\lambda \left(\|x_\lambda\|_2\right)^2 = (\lambda x_\lambda, x_\lambda) = (A^*Ax_\lambda, x_\lambda) = (Ax_\lambda, Ax_\lambda) = \left(\|Ax_\lambda\|_2\right)^2 > 0,$$

то получаем неравенство $\lambda > 0$. Следовательно,

$$x_\lambda = C\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

для числа $C \neq 0$. Условие $x_\lambda(1) = 0$ означает

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому точечный спектр оператора A^*A имеет вид

$$\sigma_p(A^*A)\backslash\{0\} = \left\{ \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^{-2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Отсюда окончательно находим

$$\|A\| = \sqrt{\max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right)^2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Заметим, что $0 \notin \sigma_p(A^*A)$, хотя это соотношение не нужно для вычисления $\|A\|$. Тем не менее докажем его. Если $x \in \operatorname{Ker}\left(A^*A\right)$, то получаем вложение

$$Ax \in \operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp.$$

Но также $Ax \in \operatorname{Im} A$. Следовательно, $Ax = 0$, т. е.

$$x \in \operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp.$$

Рассмотрим подпространство

$$E = A^*\left(CL_2[0,1]\right) \subset \operatorname{Im} A^*.$$

Так как справедливо равенство

$$E = \left\{ z \in CL_2[0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ — непрерывно дифференцируема} \\ \text{на отрезке } [0,1] \text{ и } z(1) = 0 \end{array} \right\},$$

то очевидно, что подпространство E всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,1]$. Следовательно,

$$E^\perp = \{0\}.$$

Тогда получаем
$$\{0\} \subset (\operatorname{Im} A^*)^{\perp} \subset E^{\perp} = \{0\}.$$
Поэтому $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, т. е. $x = 0$ в $\mathbb{L}_2[0,1]$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\big(A^*A\big)$ тривиально в $\mathbb{L}_2[0,1]$, и, поэтому, ноль не принадлежит точечному спектру оператора A^*A. ▲

Теорема 5.9.14. (Гильберт, Шмидт) *Пусть A — нетривиальный компактный самосопряжённый оператор. Тогда в замкнутом подпространстве $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ существует не более чем счётная ортогональная полная система из собственных векторов оператора A, т. е. существует не более чем счётное множество*
$$E \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp},$$
состоящее из попарно ортогональных собственных векторов оператора A, такое, что справедливо равенство
$$[\,\operatorname{Lin} E\,] = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

Доказательство. Так как оператор A нетривиален, то имеем $\|A\| > 0$. По свойству 4 утверждения 5.9.3, выполнено
$$r(A) = \|A\| > 0,$$
Поэтому существует нетривиальное число $\lambda \in \sigma(A)$. По теореме 5.8.23, число λ является собственным числом компактного оператора A. По той же теореме 5.8.23, точечный спектр компактного оператора A не более чем счётен. В силу утверждения 5.8.13, для любого нетривиального числа $\lambda \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}$ ядро $\operatorname{Ker} A_\lambda$ конечномерно, т. е.
$$N_\lambda = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda \in \mathbb{N},$$
а в $\operatorname{Ker} A_\lambda$ существует ортогональный базис
$$\left\{\ x_m(\lambda)\ :\ m \in \overline{1, N_\lambda}\ \right\}$$
из собственных векторов оператора A, соответствующих числу λ. В силу пункта 3 утверждения 5.9.3, собственные векторы самосопряжённого оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Таким образом, множество
$$E = \left\{\ x_m(\lambda)\ \ \Big|\ \ m \in \overline{1, N_\lambda},\ \lambda \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}\ \right\}$$

не пусто, не более чем счётно, и состоит из попарно ортогональных собственных векторов оператора A. Заметим, что в случае $\operatorname{Ker} A \neq \neq \{0\}$, в силу пункта 3 утверждения 5.9.3, получаем вложение

$$E \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

Если же $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то также имеем вложение

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \mathcal{H} \supset E.$$

Определим замкнутое подпространство

$$L = [\operatorname{Lin} E].$$

Требуется доказать, что справедливо равенство

$$L = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

Так как $E \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, то и $\operatorname{Lin} E \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Следовательно, в силу замкнутости подпространства $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ получаем вложение

$$L \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

Множество $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ как замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$ само является гильбертовым пространством. Рассмотрим замкнутое подпространство

$$M = \left\{ x \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} \quad \middle| \quad (x, y) = 0 \ \ \forall\, y \in L \ \right\}.$$

Это ортогональное дополнение подпространстча L в $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. По теореме 3.2.14 Рисса об ортогональном дополнении, получаем равенство

$$L \oplus M = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

По определению множества E, справедливо вложение

$$A(\operatorname{Lin} E) \subset \operatorname{Lin} E.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора A получаем

$$A(L) \subset L.$$

Тогда для любого $x \in M$ и любого $y \in L$, в силу самосопряжённости оператора A, получаем

$$(A(x), y) = (x, A(y)) = 0.$$

Поэтому $A(x) \in M$, т. е. справедливо вложение

$$A(M) \subset M.$$

Множество M как замкнутое подпространство $\mathcal{H}$ само является гильбертовым пространством. Таким образом, оператор $A\colon M \to M$ является компактным и самосопряжённым в гильбертовом пространстве M. Если оператор A является нетривиальным на M, т. е. $A(M) \neq \neq \{0\}$, то, в силу утверждения 5.9.3 и теоремы 5.8.23, оператор A имеет собственный вектор $z \in M$, отвечающий некоторому числу $\mu \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}$. Но тогда, по определению множества E, получаем вложения

$$z \in \operatorname{Ker} A_\mu \subset \operatorname{Lin} E \subset L.$$

Так как к тому же $z \in M$, то выполнено равенство $(z, z) = 0$, т. е. $z = 0$. Но это противоречит определению z как собственного вектора оператора A на M. Поэтому $A(M) = \{0\}$. Тогда $M \subset \operatorname{Ker} A$, и одновременно $M \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Следовательно,

$$M \subset (\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Ker} A)^\perp = \{0\},$$

т. е. $M = \{0\}$ — тривиальное подпространство. Таким образом, получаем $L = (\operatorname{Ker} A)^\perp$, что и требовалось. ■

Следствие 5.9.15. *Пусть A — нетривиальный компактный самосопряжённый оператор. Тогда в $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ существует не более чем счётный ортогональный базис*

$$E = \{e_n\}_{n=1}^N, \quad \text{где} \quad N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

из собственных векторов оператора A. При этом для любого $x \in \mathcal{H}$ существует единственный вектор $x_0 \in \operatorname{Ker} A$, такой, что справедливо равенство

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^N \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n.$$

Иными словами, справедливо следующее разложение гильбертова пространства:

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} A \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^N \operatorname{Lin} e_n \right).$$

Доказательство. Определённое в теореме 5.9.14 Гильберта—Шмидта множество

$$E = \{e_n\}_{n=1}^{N} \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}, \quad \text{где} \quad N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

состоящее из попарно ортогональных собственных векторов e_n оператора A, образует в $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ не более чем счётную полную ортогональную систему векторов. Следовательно, по теореме 3.3.12, система $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ образует в гильбертовом пространстве $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ ортогональный базис, а любой вектор $z \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ представляется сходящимся в $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ рядом Фурье

$$z = \sum_{n=1}^{N} \frac{(z, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n.$$

По теореме 3.2.14 Рисса об ортогональном дополнении, справедливо равенство

$$\operatorname{Ker} A \oplus (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \mathcal{H}.$$

Следовательно, для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ существуют единственные векторы $x_0 \in \operatorname{Ker} A$ и $z \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, такие, что $x = x_0 + z$. Так как $(x_0, e_n) = 0$ для любого номера $n \in \overline{1, N}$, то получаем равенство $(z, e_n) = (x, e_n)$ для всех номеров $n \in \overline{1, N}$. Следовательно, получаем требуемое равенство

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(z, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n = x_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n.$$

При этом, в силу равенства Парсеваля, имеем равенство

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, e_n)|^2}{\|e_n\|^2}.$$

■

Замечание 5.9.16. Пусть A — нетривиальный компактный самосопряжённый оператор, $E = \{e_n\}_{n=1}^{N}$ — ортогональный базис из собственных векторов оператора A в подпространстве $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Рассмотрим линейные операторы ортогонального проектирования из $\mathcal{H}$ на ядро $\operatorname{Ker} A$ и на одномерное подпространство $\operatorname{Lin}\{e_n\}$ для любого номера $n \in \overline{1, N}$. Пусть оператор $P_0 \colon \mathcal{H} \to \operatorname{Ker} A$ — ортогональный проектор на ядро $\operatorname{Ker} A$, а оператор

$P_n\colon \mathcal{H} \to \mathrm{Lin}\{e_n\}$ — ортогональный проектор на одномерное подпространство $\mathrm{Lin}\{e_n\}$, где номер $n \in \overline{1,N}$. Для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$P_n(x) = \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n.$$

Для любого номера $n \in \overline{1,N}$ выполнено равенство $\|P_n\| = 1$. Если $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$, то имеем $\|P_0\| = 1$, если же $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, то оператор P_0 тривиален. По следствию 5.9.15, для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем равенство

$$x = P_0(x) + \sum_{n=1}^{N} P_n(x).$$

Так как $AP_0 = 0$, а для любого номера $n \in \overline{1,N}$ выполнено

$$AP_n = \lambda_n P_n,$$

где λ_n — собственное число оператора A, соответствующее собственному вектору e_n, то для любого $x \in \mathcal{H}$ получаем равенство

$$A(x) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n(x).$$

Если $N \in \mathbb{N}$, то оператор A представляет собой конечную линейную комбинацию ортогональных проекторов

$$A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n.$$

Если же имеем $N = +\infty$, то для любого $x \in \mathcal{H}$, в силу равенства Парсеваля, имеем

$$\left\| A(x) - \sum_{m=1}^{n} \lambda_m P_m(x) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)} e_m \right\| = \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} |\lambda_m|^2 \frac{|(x, e_m)|^2}{\|e_m\|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_{m>n} |\lambda_m| \right) \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|(x, e_m)|^2}{\|e_m\|^2}} \leqslant \left(\sup_{m>n} |\lambda_m| \right) \|x\|.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left\| A - \sum_{m=1}^{n} \lambda_m P_m \right\| \leqslant \sup_{m>n} |\lambda_m|.$$

Так как по теореме 5.8.23 имеет место предельное соотношение

$$\lambda_m \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то получаем

$$\left\| A - \sum_{m=1}^{n} \lambda_m P_m \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому справедливо равенство

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m P_m,$$

причём ряд сходится в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ по операторной норме. $\square$

Для любого $\lambda \in \rho(A)$ вычислим резольвенту

$$R_A(\lambda) = (A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

оператора A. Для этого при каждом $y \in \mathcal{H}$ вычислим единственный вектор $x \in \mathcal{H}$ вида

$$A_\lambda(x) = y.$$

Это уравнени, в силу замечания 5.9.16, равносильно равенству

$$A_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{N} (\lambda_n - \lambda) P_n(x) - \lambda P_0(x) = P_0(y) + \sum_{n=1}^{N} P_n(y).$$

Следовательно, для любого номера $n \in \overline{1, N}$ получаем

$$(\lambda_n - \lambda) P_n(x) = P_n(y) \quad \text{и} \quad -\lambda P_0(x) = P_0(y).$$

Таким образом, справедливы равенства

$$x = (A_\lambda)^{-1}(y) = P_0(x) + \sum_{n=1}^{N} P_n(x) = -\frac{P_0(y)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n(y)}{\lambda_n - \lambda}.$$

Итак, для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ получаем равенство

$$(A_\lambda)^{-1}(y) = -\frac{P_0(y)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n(y)}{\lambda_n - \lambda}.$$

Если $N \in \mathbb{N}$, то резольвента оператора A имеет вид конечной линейной комбинации проекторов

$$R_A(\lambda) = -\frac{P_0}{\lambda} + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n}{\lambda_n - \lambda}.$$

Если же имеем $N = +\infty$, то последовательность линейных ограниченных операторов

$$S_n = -\frac{P_0}{\lambda} + \sum_{m=1}^{n} \frac{P_m}{\lambda_m - \lambda}$$

является поточечно сходящейся в пространстве $\mathcal{H}$ при $n \to \infty$ к резольвенте $R_A(\lambda)$, но не является фундаментальной в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \frac{\|P_{n+1}\|}{|\lambda_{n+1} - \lambda|} \geqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}| + |\lambda|} \geqslant \frac{1}{\|A\| + |\lambda|}.$$

Следовательно, поточечно сходящаяся к резольвенте $R_A(\lambda)$ последовательность операторов S_n является расходящейся в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Задача 5.9.17. Пусть для оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ справедливо вложение $A^*A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Доказать, что $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Решение. Требуется доказать вполне ограниченность множества $A\big(B_1(0)\big)$. В силу утверждения 2.2.6, достаточно проверить, что любая последовательность $y_n \in A\big(B_1(0)\big)$ имеет фундаментальную подпоследовательность. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_n \in B_1(0)$, такой что $y_n = Ax_n$. Так как оператор A^*A компактен, то множество $A^*A\big(B_1(0)\big)$ вполне ограничено. Следовательно, последовательность $z_n = A^*Ax_n$ имеет фундаментальную подпоследовательность $z_{n_k} = A^*Ax_{n_k}$. Покажем, что тогда подпоследовательность $y_{n_k} = Ax_{n_k}$ также фундаментальна. Имеем:

$$\|y_{n_k} - y_{n_m}\|^2 = \big(A(x_{n_k} - x_{n_m}), A(x_{n_k} - x_{n_m})\big) =$$
$$= \big(x_{n_k} - x_{n_m}, A^*A(x_{n_k} - x_{n_m})\big) = \big(x_{n_k} - x_{n_m}, z_{n_k} - z_{n_m}\big) \leqslant$$
$$\leqslant \|x_{n_k} - x_{n_m}\| \, \|z_{n_k} - z_{n_m}\| \leqslant 2\, \|z_{n_k} - z_{n_m}\| \to 0 \quad \text{при } k, m \to \infty,$$

что и требовалось. ▲

Заключение

Представленный курс призван дать читателю начальные представления о предмете функционального анализа, его основных идеях и конструкциях. Аппарат функционального анализа является тем математическим языком, на котором решается большое количество современных прикладных задач, например, из теории оптимального управления или математической физики. Естественным продолжением этого курса является изучение теории неограниченных линейных операторов, имеющей многочисленные приложения в современной математической физике, спектральной теории линейных операторов и теории банаховых алгебр. Это можно сделать, например, по книге У. Рудина "Функциональный анализ" [2]. В заключение остаётся пожелать всем читателям успехов в изучении и применении функционального анализа для решения самых разнообразных физико-математических задач.

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976, 542 с.

2. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 443 с.

3. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002, 488 с.

4. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976, 319 с.

5. Гелбаум Г., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, 251 с.