Г.Е. Иванов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 2

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций, читаемых автором студентам второго курса Московского физико-технического института (государственного университета).

Содержание материала соответствует программе кафедры высшей математики МФТИ (ГУ).

Текст, заключенный между знаками $\triangleright$ и $\triangleleft$, не был прочитан в основное лекционное время; соответствующий материал не войдет в экзаменационные билеты.

Автор благодарен всем коллегам и студентам за полезные советы и обсуждение данного материала. Особую признательность автор выражает старшему преподавателю кафедры высшей математики С.С. Николаенко за ценные замечания и предложения.

Глава 14

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Теорема Фубини

Лемма 1. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ конечно измеримо. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A \subset A_\varepsilon$ и $\mu(A_\varepsilon) < \mu(A) + \varepsilon$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению конечной измеримости существует клеточное множество $B \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\mu^*(A\Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$. По определению верхней меры найдется множество $C \subset \mathbb{R}^n$, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A\Delta B \subset C$, $\mu(C) < \varepsilon$. Определим множество $A_\varepsilon = B \cup C$. Тогда множество A_ε представимо в виде объединения счетного набора клеток. Заметим, что $A \subset B \cup (A\Delta B) \subset$ $\subset B \cup C = A_\varepsilon$. Так как $B \subset A \cup (A\Delta B) \subset A \cup C$, то $A_\varepsilon = B \cup C \subset A \cup C$, а значит, $\mu(A_\varepsilon) < \mu(A) + \varepsilon$. □

Лемма 2. *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ – счетный набор конечно измеримых вложенных множеств, $X_{k+1} \subset X_k \subset \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $X = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Тогда*

$$\mu(X) = \lim_{k\to\infty} \mu(X_k). \tag{1}$$

Доказательство. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество $C_k =$ $= X_k \setminus X_{k+1}$. Поскольку набор множеств $X, C_1, C_2, \ldots$ составляет измеримое разбиение множества X_1, то в силу счетной аддитивности меры Лебега имеем

$$\mu(X_1) = \mu(X) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k),$$

то есть

$$\mu(X_1) = \mu(X) + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \mu(C_k). \tag{2}$$

Поскольку $X_{k+1} \subset X_k$, то $X_k = X_{k+1} \cup C_k$, причем X_{k+1} и C_k не пересекаются. Поэтому $\mu(X_k) = \mu(X_{k+1}) + \mu(C_k)$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mu(C_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \Big(\mu(X_k) - \mu(X_{k+1})\Big) = \mu(X_1) - \mu(X_N).$$

Отсюда и из соотношения (2) получаем соотношение (1). □

Замечание. Условие конечной измеримости множеств X_k в лемме 2 нельзя заменить условием измеримости этих множеств. Действительно, рассмотрим множества $X_k = [k, +\infty)$ в $\mathbb{R}$. Тогда $X = \emptyset$, $\mu(X_k) = +\infty$, $\mu(X) = 0$ и соотношение (1) не выполнено.

Лемма 3. *Пусть для неотрицательной функции* $f : X \to [0, +\infty)$ *справедливо равенство* $\int\limits_X f(x)\,dx = 0$. *Тогда* $f(x) = 0$ *для почти всех* $x \in X$.

Доказательство. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$X_k = \left\{x \in X :\ f(x) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$0 = \int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_{X_k} f(x)\,dx + \int\limits_{X \setminus X_k} f(x)\,dx \geq \int\limits_{X_k} f(x)\,dx \geq \frac{\mu(X_k)}{k}.$$

Поэтому $\mu(X_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как для множества $\widehat{X} = \{x \in X :\ f(x) > 0\}$ справедливо равенство $\widehat{X} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, то в силу счетной аддитивности меры Лебега $\mu(\widehat{X}) = 0$. □

Пусть функция f определена почти всюду на множестве X. Рассмотрим любое продолжение $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ функции f на множество X, т.е. $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для почти всех $x \in X$. Тогда интеграл $\int\limits_X f(x)\,dx$ будем понимать как $\int\limits_X \widetilde{f}(x)\,dx$. Поскольку интеграл не зависит от значений функции на множестве нулевой меры, то значение $\int\limits_X f(x)\,dx$ не зависит от продолжения функции f на множество X.

Рассмотрим арифметическое n-мерное пространство $\mathbb{R}^n_x$ и арифметическое m-мерное пространство $\mathbb{R}^m_y$, а также их декартово произведение $\mathbb{R}^{n+m}$, элементами которого являются пары (x, y), где $x \in \in \mathbb{R}^n_x$, $y \in \mathbb{R}^m_y$. Для множеств $X \subset \mathbb{R}^n_x$, $Y \subset \mathbb{R}^m_y$, $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ через $\mu_x(X)$, $\mu_y(Y)$, $\mu(A)$ будем обозначать меры множеств X, Y, A в пространствах $\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}^m_y, \mathbb{R}^{n+m}$ соответственно. Для множества $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и функции $f : A \to \mathbb{R}$ через $\int\limits_A f(x, y)\, dx\, dy$ будем обозначать интеграл Лебега функции f по множеству A (если этот интеграл существует).

Для множества $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и точки $x \in \mathbb{R}^n_x$ через $A(x)$ обозначим сечение множества A:

$$A(x) = \{y \in \mathbb{R}^m_y :\ (x, y) \in A\}.$$

Теорема 1. *(О выражении меры множества через интеграл от меры сечений.) Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ конечно измеримо. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ множество $A(x)$ конечно измеримо в $\mathbb{R}^m_y$ и*

$$\mu(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\, dx. \tag{3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть A – клетка в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда $A = A_x \times A_y$, где A_x и A_y – клетки в $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^m_y$ соответственно, $\mu(A) = \mu_x(A_x) \cdot \mu_y(A_y)$. При этом

$$A(x) = \begin{cases} A_y, & x \in A_x, \\ \emptyset, & x \notin A_x. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\, dx = \int\limits_{A_x} \mu_y(A_y)\, dx = \mu_x(A_x) \cdot \mu_y(A_y) = \mu(A),$$

то есть в этом случае множество $A(x)$ измеримо при всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство (3).

Шаг 2. Пусть множество A можно представить как объединение счетного набора клеток. В этом случае A можно представить в виде дизъюнктного объединения счетного числа клеток: $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \Pi_i$.

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n_x$ имеем $A(x) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \Pi_i(x)$. В силу счетной аддитивности меры Лебега

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i), \qquad \mu_y(A(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_y(\Pi_i(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_x.$$

Функция $f(x) = \mu_y(A(x))$ измерима как предел конечных сумм измеримых функций $\mu_y(\Pi_i(x))$. Как показано на шаге 1,

$$\mu(\Pi_i) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(\Pi_i(x))\, dx \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Поэтому в силу теоремы об интегрировании функционального ряда с неотрицательными членами

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i(x)) \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(\Pi_i(x))\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i) = \mu(A),$$

а значит, в этом случае множество $A(x)$ измеримо при всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство (3).

Шаг 3. Пусть $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где каждое множество A_k является объединением счетного числа клеток и $\mu(A_k) < +\infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим множество $B_k = \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$. Тогда B_k является объединением счетного числа клеток, $B_{k+1} \subset B_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Следовательно, для каждого $x \in \mathbb{R}^n_x$ имеем $A(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k(x)$. Как показано на шаге 2,

$$\mu(B_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B_k(x))\, dx \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\mu(B_k) < +\infty$, то по лемме 2 §6 главы «Мера и интеграл Лебега» при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ имеем $\mu_y(B_k(x)) < +\infty$. В силу леммы 2 справедливы соотношения

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k),$$

$$\mu_y(A(x)) = \lim_{k\to\infty} \mu_y(B_k(x)) \quad \text{при почти всех } x \in \mathbb{R}^n_x.$$

Следовательно,

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B_k(x))\,dx \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \lim_{k\to\infty} \mu_y(B_k(x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\,dx.$$

Равенство $\overset{*}{=}$ следует из теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Действительно, последовательность функций $f_k(x) = \mu_y(B_k(x))$ поточечно сходится к функции $\mu_y(A(x))$ и $0 \le \mu_y(B_k(x)) \le \mu_y(B_1(x))$ для любых $x \in \mathbb{R}^n_x$, $k \in \mathbb{N}$ причем функция $\mu_y(B_1(x))$ интегрируема на $\mathbb{R}^n_x$.

Таким образом, в этом случае множество $A(x)$ измеримо при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство (3).

Шаг 4. Пусть $\mu(A) = 0$. Покажем, что $\mu_y(A(x)) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$. По определению верхней меры для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется множество A_k, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A \subset A_k$ и $\mu(A_k) < \frac{1}{k}$. Рассмотрим множество $B = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Так как $B \subset A_k$, то $\mu(B) \le \mu(A_k) < \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\mu(B) = 0$. Как показано на шаге 3, множество $B(x)$ измеримо при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B(x))\,dx = \mu(B) = 0.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $\mu_y(B(x)) = 0$ для почти всех $x \in \in \mathbb{R}^n_x$. Так как $A \subset A_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $A \subset \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = B$. Поэтому

$A(x) \subset B(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n_x$. Следовательно, $\mu_y(A(x)) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$.

Шаг 5. Рассмотрим общий случай: множество A конечно измеримо. В силу леммы 1 для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется множество $A_k \subset \subset \mathbb{R}^{n+m}$, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A \subset A_k$ и $\mu(A_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}$. Рассмотрим измеримые множества $B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и $C = B \setminus A$. Так как $A \subset B \subset A_k$, то $\mu(A) \leq \leq \mu(B) \leq \mu(A_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}$ и в силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ получаем равенство $\mu(B) = \mu(A)$. Следовательно, $\mu(C) = \mu(B) - \mu(A) = 0$. Как показано на шаге 3, множество $B(x)$ измеримо при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство

$$\mu(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B(x))\, dx.$$

На шаге 4 показано, что $\mu_y(C(x)) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$. Поэтому для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ множество $A(x)$ измеримо и $\mu_y(A(x)) = = \mu_y(B(x))$. Следовательно, справедливо равенство (3). Из конечности интеграла в формуле (3) следует, что при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ множество $A(x)$ конечно измеримо. $\square$

Теорема 2. (О геометрическом смысле интеграла.) *Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана неотрицательная функция $f : X \to [0, +\infty]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *функция f интегрируема на множестве X;*

(2) *множество $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in X,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ конечно измеримо в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

При этом, если выполнено условие (1) или условие (2), то

$$\mu(F) = \int\limits_X f(x)\, dx. \tag{4}$$

Доказательство. В §10 главы «Мера и интеграл Лебега» было доказано, что (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Заметим, что сечение множества F имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} [0, f(x)], & x \in X, \\ \emptyset, & x \notin X. \end{cases}$$

Из условия (2) по теореме 1 следует существование интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_y(F(x))\,dx = \mu(F).$$

Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_y(F(x))\,dx = \int\limits_{X} \mu_y(F(x))\,dx = \int\limits_{X} f(x)\,dx,$$

то из условия (2) следует условие (1) и при выполнении любого из условий (1), (2) справедливо равенство (4). $\square$

Теорема 3. (Фубини.) *Пусть X и Y – измеримые множества в $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^m_y$ соответственно. Пусть функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема. Тогда для почти всех $x \in X$ существует конечный интеграл $\int\limits_Y f(x,y)\,dy$ и справедлива формула Фубини*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция f неотрицательна. По теореме о геометрическом смысле интеграла множество

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{n+m+1} :\ (x,y) \in X \times Y,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

измеримо в $\mathbb{R}^{n+m+1}$ и

$$\mu(A) = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy < +\infty.$$

По теореме 1 множество

$$A(x) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^{m+1} :\ (x,y,z) \in A\}$$

конечно измеримо в $\mathbb{R}^{m+1}$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и

$$\mu(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_{(y,z)}(A(x))\,dx = \int\limits_X \mu_{(y,z)}(A(x))\,dx.$$

Поскольку при $x \in X$

$$A(x) = \{(y,z): \ y \in Y, \ 0 \le z \le f(x,y)\},$$

то снова применяя теорему о геометрическом смысле интеграла при тех $x \in X$, при которых множество $A(x)$ конечно измеримо, получаем

$$\mu_{(y,z)}(A(x)) = \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

В общем случае представим функцию $f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$. В силу доказанного выше

$$\int\limits_{X\times Y} f_\pm(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f_\pm(x,y)\,dy.$$

В силу линейности интеграла получаем формулу Фубини. □

Замечание. Из теоремы Фубини следует, что если функция $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$ и существуют повторные интегралы $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ и $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то они равны кратному и, следовательно, равны между собой. Если же кратный интеграл не существует, то указанные повторные интегралы могут существовать, но быть различными. Например, для функции $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ имеет место $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = -$ $-\pi/4$, но $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = \pi/4$. Действительно, интегрируя по частям, получаем $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$, следовательно, $\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{1+y^2}$, поэтому $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = -$ $-\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\pi/4$. Второй повторный интеграл вычисляется аналогично.

Следствие. *Пусть функция $f : A \to \mathbb{R}$ интегрируема на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ функция $f(x, y)$ интегрируема по y на сечении $A(x)$ и*

$$\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\pi_x(A)} dx \int\limits_{A(x)} f(x,y)\,dy,$$

где $\pi_x(A) := \{x \in \mathbb{R}^n_x |\ \exists y \in \mathbb{R}^m_y :\ (x, y) \in A\}$ – проекция множества A на пространство $\mathbb{R}^n_x$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A, \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus A. \end{cases}$$

Так как функция $\tilde{f}$ интегрируема на A и на $\mathbb{R}^{n+m} \setminus A$, то $\tilde{f}$ интегрируема на $\mathbb{R}^{n+m}$. В силу теоремы Фубини для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ существует конечный интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} dx \int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy.$$

Отсюда и из равенств

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy = \int\limits_{A(x)} f(x,y)\,dy \qquad \forall x \in \pi_x(A),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy = 0 \qquad \forall x \notin \pi_x(A)$$

получаем доказываемое равенство. $\square$

§ 2. Разбиение единицы

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. *Носителем* функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется замкнутое множество

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in X \ : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Лемма 1. *Пусть заданы числа $\delta > 0$, $\varepsilon > \delta$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует гладкая функция $\beta : \mathbb{R}^n \to [0;1]$ такая, что $\operatorname{supp} \beta \subset$ $\subset U_\varepsilon(x_0)$ и $\beta(x) = 1$ при $x \in U_\delta(x_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\eta(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Из правила Лопиталя следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^k} = 0. \tag{1}$$

Используя это соотношение при $k = 1$, получаем существование $\eta'(0) = 0$. Дифференцируя в других точках стандартным способом, получаем для любого $t \in \mathbb{R}$

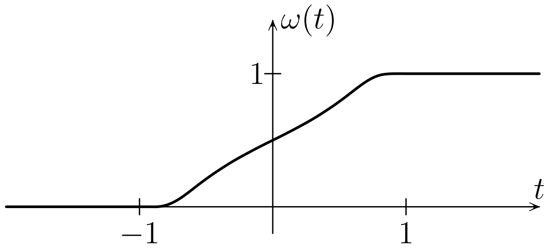
$$\eta'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Используя соотношение (1), по индукции получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ существует

$$\eta^{(k)}(t) = \begin{cases} P_{2k}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

где $P_{2k}(\tau)$ – многочлен степени $2k$ относительно τ. Следовательно, функция η бесконечно дифференцируема. Отсюда следует бесконечная дифференцируемость функции

$$\omega(t) := \frac{\eta(1+t)}{\eta(1+t) + \eta(1-t)}.$$



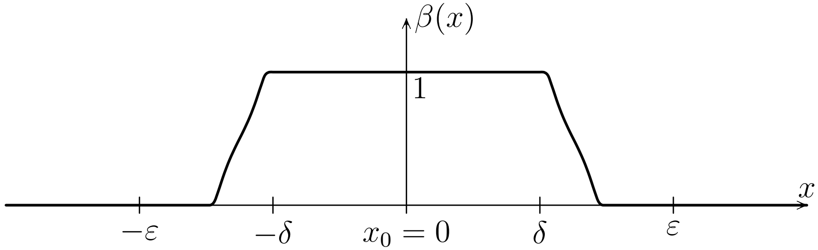
Заметим, что

$$\begin{aligned} \omega(t) = 0 \quad &\text{при} \quad t \le -1, \\ \omega(t) = 1 \quad &\text{при} \quad t \ge 1, \\ \omega(t) \in (0,1) \quad &\text{при} \quad t \in (-1,1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что «функция-шапочка» (bump function) $\beta : \mathbb{R}^n \to$ $\to [0,1]$, заданная формулой

$$\beta(x) := \omega\left(1 + \frac{4(\delta - |x - x_0|)}{\varepsilon - \delta}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяет требуемым условиям.



$\square$

Определение. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^I$ – конечное покрытие множества $K \subset$ $\subset \mathbb{R}^n$. Набор функций $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$, $\varrho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{V_i\}_{i=1}^I$ *множества* K, если выполнены условия $\operatorname{supp} \varrho_i \subset V_i$ при всех $i \in \overline{1,I}$ и

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(x) = 1 \qquad \forall x \in K.$$

Если все функции $\varrho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ этого набора являются гладкими, то разбиение единицы называется *гладким*.

Теорема 1. (О разбиении единицы.) *Для любого конечного открытого покрытия компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкое разбиение единицы на $\mathbb{R}^n$, подчиненное этому покрытию.*

Доказательство. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^{I}$ – конечное открытое покрытие компакта K. Для любой точки $x \in K$ выберем индекс $i = i(x) \in \overline{1, I}$ так, что $x \in V_i$ и число $\varepsilon(x) > 0$ так, что $U_{\varepsilon(x)}(x) \subset V_i$ (такое $\varepsilon(x) >$ > 0 существует, поскольку множество V_i открыто). Положим $\delta(x) :=$ $= \frac{\varepsilon(x)}{2}$. Тогда семейство открытых множеств $\{U_{\delta(x)}(x)\}_{x \in K}$ образует открытое покрытие компакта K. По критерию копактности Гейне–Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т.е. существует конечный набор точек $\{x_j\}_{j=1}^{J}$ компакта K такой, что

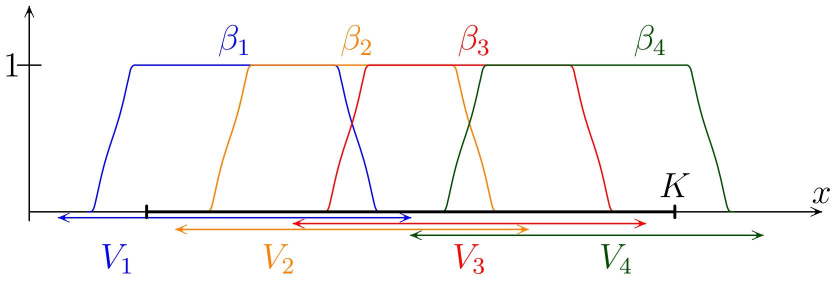
$$K \subset \bigcup_{j=1}^{J} U_{\delta(x_j)}(x_j). \tag{2}$$

В силу леммы 1 для каждого $j \in \overline{1, J}$ найдется гладкая функция $\beta_j : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ такая, что $\operatorname{supp} \beta_j \subset U_{\varepsilon(x_j)}(x_j)$ и $\beta_j(x) = 1$ при $x \in$ $\in U_{\delta(x_j)}(x_j)$. Так как $\forall j \in \overline{1, J} \hookrightarrow \operatorname{supp} \beta_j \subset U_{\varepsilon(x_j)}(x_j) \subset V_{i(x_j)}$, то

$$\forall j \in \overline{1, J}\ \exists i \in \overline{1, I} : \ \operatorname{supp} \beta_j \subset V_i. \tag{3}$$

Из включения (2) следует, что

$$\forall x \in K\ \exists j \in \overline{1, J} : \ \beta_j(x) = 1. \tag{4}$$



Определим гладкие функции $\gamma_j : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, $j \in \overline{1, J}$:

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_1(x) & := & \beta_1(x), \\
\gamma_2(x) & := & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\beta_2(x), \\
\dots & \dots & \dots \\
\gamma_J(x) & := & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\dots\Big(1-\beta_{J-1}(x)\Big)\beta_J(x).
\end{array}$$

Заметим, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$

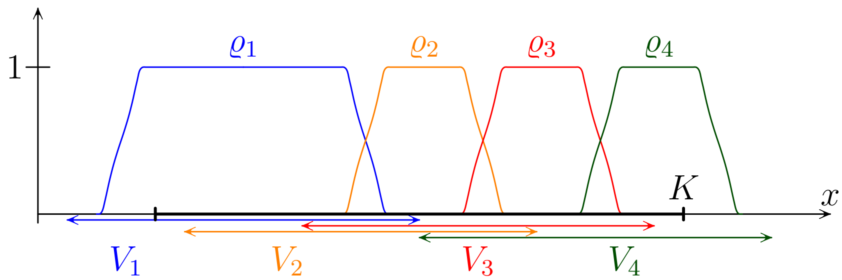
$$\begin{array}{rcl}
1-\gamma_1(x)-\gamma_2(x) & = & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\Big(1-\beta_2(x)\Big), \\
1-\gamma_1(x)-\gamma_2(x)-\gamma_3(x) & = & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\Big(1-\beta_2(x)\Big)\Big(1-\beta_3(x)\Big), \\
\dots & \dots & \dots \\
1-\gamma_1(x)-\dots-\gamma_J(x) & = & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\Big(1-\beta_2(x)\Big)\dots\Big(1-\beta_J(x)\Big).
\end{array}$$

Поэтому в силу соотношения (4) имеем

$$\sum_{j=1}^{J} \gamma_j(x) = 1 \quad \forall x \in K. \tag{5}$$

Для каждого индекса $i \in \overline{1,I}$ через S_i обозначим набор индексов $j \in \overline{1,J}$ таких, что $\operatorname{supp}\gamma_j \subset V_i$ и $\operatorname{supp}\gamma_j \not\subset V_k$ при всех $k \in \overline{1,i-1}$. Тогда $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Из соотношения (3) следует, что $\bigcup\limits_{i\in\overline{1,I}} S_i =$ $= \overline{1,J}$. Определим

$$\varrho_i(x) := \sum_{j\in S_i} \gamma_j(x).$$



Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(x) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j \in S_i} \gamma_j(x) = \sum_{j=1}^{J} \gamma_j(x) = 1 \qquad \forall x \in K,$$

где последнее равенство следует из равенства (5). При этом $\operatorname{supp} \varrho_i \subset \bigcup\limits_{j \in S_i} \operatorname{supp} \gamma_j \subset V_i$ при всех $i \in \overline{1, I}$. Следовательно, $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$ – искомое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_i\}_{i=1}^{I}$ компакта K. $\square$

Разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$ позволяет представить функцию $f : K \to \mathbb{R}$ в виде суммы функций $f_i(x) := f(x) \cdot \varrho_i(x)$ с носителями в некоторых «малых» окрестностях. Тем самым рассмотрение функции f на «большом» множестве K сводится к рассмотрению функций f_i на «малых» множествах. Этот подход будет применен в следующем параграфе для доказательства теоремы о замене переменных в кратном интеграле и позднее для определения интеграла от дифференциальной формы по многообразию.

§ 3. Замена переменных в кратном интеграле

Напомним, что C^k-гладким диффеоморфизмом открытых множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется взаимно однозначное отображение φ из X в Y такое, что φ и обратное к нему отображение φ^{-1} являются k раз непрерывно дифференцируемыми. C^1-гладкий диффеоморфизм называют *диффеоморфизмом* (без указания степени гладкости).

В данном параграфе будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *(О замене переменных в кратном интеграле.) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$ и $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Пусть функция $f : Y \to \mathbb{R}$ интегрируема. Тогда*

$$\int\limits_Y f(y)\, dy = \int\limits_X f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|\, dx \tag{$*$}$$

Сначала докажем теорему 1 при дополнительных предположениях. Затем будем постепенно отказываться от этих дополнительных предположений.

Лемма 1. *Теорема 1 справедлива при дополнительных предположениях*

(1^o) *функция f непрерывна на Y;*

(2^o) *ее носитель* $\operatorname{supp} f$ *компактен и лежит в* Y*;*

(3^o) *диффеоморфизм* φ *представим в виде суперпозиции диффеоморфизмов* $g_1, ..., g_n$*, каждый из которых меняет только одну координату и линейного диффеоморфизма* $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, меняющего только порядок координат:* $\varphi = \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1$.

Доказательство. Обозначим $h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|$ при $x \in X$.

Шаг 1. Рассмотрим сначала одномерный случай ($n = 1$). В этом случае $h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|$. Так как множество $Y \subset \mathbb{R}^1_y$ открыто, то оно представимо в виде дизъюнктного объединения не более, чем счетного набора открытых числовых промежутков: $Y = \bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$, где Λ – не более, чем счетное множество индексов. В силу аддитивности интеграла Лебега достаточно доказать, что

$$\int\limits_{(a_\lambda, b_\lambda)} f(y)\,dy = \int\limits_{\varphi^{-1}((a_\lambda, b_\lambda))} h(x)\,dx \qquad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{1}$$

Фиксируем произвольный индекс $\lambda \in \Lambda$. Так как множество $\operatorname{supp} f \subset \subset Y$ компактно, то множество $\operatorname{supp} f \cap (a_\lambda, b_\lambda)$ также компактно, а значит, найдется отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a_\lambda, b_\lambda)$ такой, что $\operatorname{supp} f \cap \cap (a_\lambda, b_\lambda) \subset [\alpha, \beta]$. Так как $f(y) = 0$ при $y \in (a_\lambda, b_\lambda) \setminus [\alpha, \beta]$ и $h(x) = 0$ при $x \in \varphi^{-1}((a_\lambda, b_\lambda)) \setminus \varphi^{-1}([\alpha, \beta])$, то

$$\int\limits_{(a_\lambda, b_\lambda)} f(y)\,dy = \int\limits_{[\alpha, \beta]} f(y)\,dy,$$

$$\int\limits_{\varphi^{-1}((a_\lambda, b_\lambda))} h(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha, \beta])} h(x)\,dx.$$

Поэтому для доказательства равенства (1) достаточно доказать равенство

$$\int\limits_{[\alpha, \beta]} f(y)\,dy = \int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha, \beta])} h(x)\,dx. \tag{2}$$

Поскольку φ – диффеоморфизм, то функция $\varphi'(\cdot)$ непрерывна и не обращается в нуль на отрезке $\varphi^{-1}([\alpha, \beta])$. Здесь мы воспользовались теоремой о том, что непрерывная функция отрезок переводит в отрезок или в точку, причем в точку перевести не может, так как φ –

диффеоморфизм. По теореме о промежуточном значении функция $\varphi'(\cdot)$ сохраняет знак на отрезке $\varphi^{-1}([\alpha,\beta])$. Если этот знак положителен, то $\varphi^{-1}([\alpha,\beta]) = [\varphi^{-1}(\alpha), \varphi^{-1}(\beta)]$, иначе, если этот знак отрицателен, то $\varphi^{-1}([\alpha,\beta]) = [\varphi^{-1}(\beta), \varphi^{-1}(\alpha)]$. В любом случае с учетом равенства $h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|$ получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha,\beta])} h(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha,\beta])} f(\varphi(x))\cdot|\varphi'(x)|\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx.$$

Отсюда по теореме о замене переменной в интеграле по отрезку получаем равенство (2) и завершаем доказательство в случае $n = 1$.

Шаг 2. Рассмотрим теперь случай $n > 1$ и будем предполагать, что диффеоморфизм φ меняет только одну координату.

Пусть для определенности диффеоморфизм φ меняет лишь первую координату. Представим вектор $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ как $x = (x^1, z)$, где $z = (x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1}_z$. Так как диффеоморфизм φ меняет лишь первую координату, то $\varphi(x^1, z) = (\varphi_1(x^1, z), z)$ и, следовательно, $\det \mathcal{D}\,\varphi(x^1, z) = (\varphi_1)'_{x^1}(x^1, z)$,

$$h(x^1, z) = f(\varphi_1(x^1, z), z) \cdot |(\varphi_1)'_{x^1}(x^1, z)|.$$

В силу следствия из теоремы Фубини

$$\int\limits_X h(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_z} dz \int\limits_{X(z)} h(x^1, z)\,dx^1,$$

$$\int\limits_Y f(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_z} dz \int\limits_{Y(z)} f(y^1, z)\,dy^1,$$

где $X(z) = \{x^1 \in \mathbb{R} :\ (x^1, z) \in X\}$,

$Y(z) = \{y^1 \in \mathbb{R} :\ (y^1, z) \in Y\} = \{y^1 \in \mathbb{R} :\ (y^1, z) \in \varphi(X)\} = \varphi_1(X(z), z)$

Поэтому для доказательства искомого равенства достаточно проверить, что для любого $z \in \mathbb{R}^{n-1}_z$

$$\int\limits_{\varphi_1(X(z),z)} f(y^1, z)\,dy^1 = \int\limits_{X(z)} f(\varphi_1(x^1, z), z) \cdot |(\varphi_1)'_{x^1}(x^1, z)|\,dx^1.$$

Таким образом, случай $n > 1$ сводится к одномерному, который рассмотрен на шаге 1.

Шаг 3. Рассмотрим общий случай: $\varphi = \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1$, где диффеоморфизмы $g_1, ..., g_n$ меняют только одну координату, α – линейный диффеоморфизм, меняющий только порядок координат. Если $n = 1$, то требуемое утверждение доказано на шаге 1. Поэтому предполагаем, что $n > 1$.

Обозначим $X_0 = X$, $X_j = g_j(X_{j-1})$, где $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $Y = \varphi(X) = \alpha(X_n)$. Так как интеграл Лебега не меняется при перестановке координат, то

$$\int\limits_Y f(y)\,dy = \int\limits_{X_n} (f \circ \alpha)(x)\,dx.$$

Применяя n раз утверждение, доказанное на шаге 2, получаем

$$\int\limits_{X_n} (f \circ \alpha)(x)\,dx = \int\limits_{X_{n-1}} (f \circ \alpha \circ g_n)(x) \cdot |\det \mathcal{D}\, g_n|\,dx = \ldots$$

$$\ldots = \int\limits_{X_0} (f \circ \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1)(x) \cdot |\det \mathcal{D}\, g_n| \cdots |\det \mathcal{D}\, g_1|\,dx =$$

$$= \int\limits_X f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|\,dx.$$

□

Лемма 2. *Теорема 1 справедлива при дополнительных предположениях* (1^o), (2^o).

Доказательство. По теореме о расщеплении отображений для любой точки $x \in X$ найдется такая ее окрестность $U(x) \subset X$, что сужение φ на эту окрестность представимо в виде суперпозиции диффеоморфизмов $g_1, ..., g_n$, каждый из которых меняет только одну координату и линейного диффеоморфизма $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, меняющего только порядок координат: $\varphi = \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1$. Согласно теореме 3 §5 главы «Теорема о неявной функции» множество

$\varphi(U(x))$ открыто. В силу компактности $\operatorname{supp} f$ из открытого покрытия $\{\varphi(U(x))\}_{x\in X}$ этого компакта можно выделить его конечное подпокрытие $\{\varphi(U(x_i))\}_{i=1}^I$: $\quad \operatorname{supp} f \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} \varphi(U(x_i))$. По теореме о разбиении единицы существует гладкое разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$, подчиненное этому покрытию, т.е. $\varrho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $\operatorname{supp} \varrho_i \subset \varphi(U(x_i))$ при всех $i \in \overline{1,I}$ и

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(y) = 1 \quad \forall y \in \operatorname{supp} f.$$

Обозначим $f_i(y) := f(y)\cdot\varrho_i(y)$ для любого $y \in Y$. Тогда для любого $y \in Y$ справедливо равенство $f(y) = \sum\limits_{i=1}^{I} f_i(y)$. Зафиксируем произвольный индекс $i \in \overline{1,I}$ и покажем, что

$$\int\limits_Y f_i(y)\,dy = \int\limits_X f_i(\varphi(x))\cdot|\det\mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx. \tag{3}$$

Обозначим $h_i(x) := f_i(\varphi(x))\cdot|\det\mathcal{D}\,\varphi(x)|$. Поскольку $\operatorname{supp} f_i \subset \subset \varphi(U(x_i))$ и $\operatorname{supp} h_i \subset U(x_i)$, то

$$\int\limits_Y f_i(y)\,dy = \int\limits_{\varphi(U(x_i))} f_i(y)\,dy, \qquad \int\limits_X h_i(x)\,dx = \int\limits_{U(x_i)} h_i(x)\,dx.$$

Равенство

$$\int\limits_{\varphi(U(x_i))} f_i(y)\,dy = \int\limits_{U(x_i)} f_i(\varphi(x))\cdot|\det\mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{U(x_i)} h_i(x)\,dx$$

доказано в лемме 1. Отсюда следует равенство (3). Суммируя равенства (3) по всем $i \in \overline{1,I}$, получаем доказываемое равенство $(*)$. $\square$

Определение. *Расстоянием от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \subset \mathbb{R}^n$* называется

$$d_A(x) := \inf_{a\in A} |x-a|.$$

Лемма 3. *Для любых* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *и любого множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$|d_A(x_1) - d_A(x_2)| \leq |x_1 - x_2|.$$

Доказательство. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и $a \in A$ в силу неравенства треугольника имеем $|x_1 - a| \geq |x_2 - a| - |x_1 - x_2| \geq d_A(x_2) - |x_1 - x_2|$. Поэтому $d_A(x_1) \geq d_A(x_2) - |x_1 - x_2|$, т.е. $d_A(x_2) - d_A(x_1) \leq |x_1 - x_2|$. Аналогично, $d_A(x_1) - d_A(x_2) \leq |x_1 - x_2|$. $\square$

Замечание. Из леммы 3 следует непрерывность функции расстояния $d_A(x)$.

Лемма 4. *Теорема 1 справедлива при дополнительном предположении* (1^o).

Идея доказательства леммы 4 состоит в следующем. Приблизим непрерывную функцию $f : Y \to \mathbb{R}$ последовательностью непрерывных функций $f_k : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (2^o). Далее в силу леммы 2 получим равенство $(*)$ для функций f_k вместо f. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим равенство $(*)$ для функции f.

Доказательство. Шаг 1. Пусть сначала $f(y) \geq 0$ при всех $y \in Y$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества

$$Y_k := \{y \in Y : \ |y| < k\}, \qquad Z_k := \mathbb{R}^n_y \setminus Y_k$$

и определим функцию

$$f_k(y) := f(y) \cdot \beta(k \cdot d_{Z_k}(y)),$$

где

$$\beta(t) := \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

В силу леммы 3 функция $d_{Z_k}(y)$ непрерывна. Отсюда и из непрерывности функций f и β следует непрерывность функции $f_k : \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{R}$.

Покажем, что

$$\operatorname{supp} f_k \subset Y_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Фиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}$ и $y_0 \in \operatorname{supp} f_k = \overline{\{y \in \mathbb{R}^n_y :\ f_k(y) \neq 0\}}$. Если $f_k(y) \neq 0$, то $\beta(k \cdot d_{Z_k}(y)) > 0$, а значит, $k \cdot d_{Z_k}(y) \geq \frac{1}{2}$. Следовательно, $y_0 \in \overline{\{y \in \mathbb{R}^n_y :\ d_{Z_k}(y) \geq \frac{1}{2k}\}}$. В силу непрерывности функции $d_{Z_k}(y)$ получаем $d_{Z_k}(y_0) \geq \frac{1}{2k} > 0$. Поэтому $y_0 \notin Z_k$, а значит, $y_0 \in Y_k$, что доказывает включение (4).

Из включения (4) следует, что множество $\operatorname{supp} f_k$ ограничено и содержится в Y. Отсюда и из замкнутости $\operatorname{supp} f_k$ следует, что $\operatorname{supp} f_k$ – компакт, лежащий в Y.

В силу леммы 2 имеем

$$\int\limits_Y f_k(y)\, dy = \int\limits_X h_k(x)\, dx, \tag{5}$$

где

$$h_k(x) = f_k(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|.$$

Заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $Y_k \subset \subset Y_{k+1}$, а значит, $Z_{k+1} \subset Z_k$. Следовательно, для любых $k \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}^n_y$ имеем:

$$0 \leq d_{Z_k}(y) \leq d_{Z_{k+1}}(y).$$

Поэтому с учетом нестрогого возрастания функции β

$$0 \leq f_k(y) \leq f_{k+1}(y) \leq f(y) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n_y. \tag{6}$$

Покажем, что

$$f(y) = \lim_{k \to \infty} f_k(y) \quad \forall y \in Y. \tag{7}$$

Фиксируем произвольную точку $y \in Y$. Так как множество Y открыто, то найдется индекс $k \in \mathbb{N}$ такой, что $U_{1/k}(y) \subset Y$. Выберем индекс k настолько большим, чтобы наряду с условием $U_{1/k}(y) \subset Y$ выполнялось неравенство $k > |y| + 1$. Тогда $U_{1/k}(y) \subset Y_k$. Следовательно, $\forall z \in Z_k \hookrightarrow \ |y - z| \geq \frac{1}{k}$. Поэтому $d_{Z_k}(y) \geq \frac{1}{k}$, а значит, $f_k(y) = f(y)$. С учетом неравенств (6) получаем, что $f_j(y) = f(y)$ при всех $j \geq k$. Отсюда следует соотношение (7).

Из соотношения (7) следует также, что

$$\lim_{k \to \infty} h_k(x) = h(x) \quad \forall x \in X,$$

где

$$h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенствах (5) и используя теорему Б. Леви, получаем доказываемое равенство

$$\int\limits_Y f(y)\,dy = \int\limits_X h(x)\,dx.$$

Шаг 2. Из непрерывности функции f следует непрерывность ее положительной составляющей $f_+(y) = \max\{f(y), 0\}$ и отрицательной составляющую $f_-(y) = \max\{-f(y), 0\}$ функции f: $f(y) = f_+(y) - f_-(y)$. На шаге 1 равенство $(*)$ доказано для положительной и отрицательной составляющих функции f. В силу линейности интеграла отсюда следует искомое равенство $(*)$ для функции f.

$\triangleright$

Определение. *Индикаторной функцией множества* A называется функция

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Лемма 5. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n_x$ *и* $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ *– открытые множества,* $\varphi : X \to Y$ *– диффеоморфизм. Пусть* $A \subset X$ *– компакт. Тогда*

$$\mu(\varphi(A)) = \int\limits_A |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим

$$f(y) = \mathbf{1}_{\varphi(A)}(y), \quad y \in Y,$$

$$h(x) = \mathbf{1}_A(x) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|, \quad x \in X.$$

Поскольку $\mu(\varphi(A)) = \int\limits_{\varphi(A)} dy = \int\limits_Y f(y)\,dy$, то доказываемое равенство (8) эквивалентно равенству

$$\int\limits_Y f(y)\,dy = \int\limits_X h(x)\,dx. \tag{9}$$

Идея доказательства леммы 5 состоит в том, чтобы приблизить разрывную функцию f последовательностью непрерывных функций f_k, для которых равенство $(*)$ справедливо в силу леммы 4. Переходя к пределу в равенстве $(*)$ для f_k, получим равенство (9). Реализуем эту идею.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим непрерывную функцию

$$\gamma_k(x) = \max\{1 - k \cdot d_A(x), 0\}, \quad x \in X.$$

Заметим, что

$$\mathbf{1}_A(x) = \lim_{k \to \infty} \gamma_k(x) \quad \forall x \in X. \tag{10}$$

Действительно, фиксируем произвольную точку $x \in X$. Если $x \in A$, то $\gamma_k(x) = 1 = \mathbf{1}_A(x)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а значит, соотношение (10) выполнено. Пусть теперь $x \notin A$. Тогда в силу замкнутости множества A имеем $d_A(x) > > 0$. Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ так, что $d_A(x) > \frac{1}{k_0}$. Тогда при всех $k \geq k_0$ получаем $\gamma_k(x) = 0 = \mathbf{1}_A(x)$, а значит, соотношение (10) снова выполнено.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим функции

$$f_k(y) = \gamma_k(\varphi^{-1}(y)), \quad y \in Y,$$

$$h_k(x) = \gamma_k(x) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|, \quad x \in X.$$

В силу леммы 4 для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\int\limits_Y f_k(y)\,dy = \int\limits_X h_k(x)\,dx. \tag{11}$$

Из соотношения (10) следует, что

$$h(x) = \lim_{k \to \infty} h_k(x) \quad \forall x \in X$$

и

$$f(y) = \lim_{k \to \infty} f_k(y) \quad \forall y \in Y.$$

Согласно теореме Б. Леви получаем

$$\int\limits_X h(x)\,dx = \lim_{k \to \infty} \int\limits_X h_k(x)\,dx, \qquad \int\limits_Y f(y)\,dy = \lim_{k \to \infty} \int\limits_Y f_k(y)\,dy.$$

Переходя к пределу в равенстве (11), получаем равенство (9). $\square$

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. *δ-окрестностью множества A* называется множество

$$U_\delta(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d_A(x) < \delta\}.$$

Лемма 6. (Свойства окрестности множества.)

(1). *Для любых $A \subset \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$ множество $U_\delta(A)$ открыто.*

(2). *Если $0 < \delta_1 < \delta_2$, то $\overline{U_{\delta_1}(A)} \subset U_{\delta_2}(A)$.*

(3). *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ открыто, множество $A \subset X$ – компакт. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(A) \subset X$.*

Доказательство. (1). Открытость $U_\delta(A)$ следует из непрерывности функции $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(2). Пусть $0 < \delta_1 < \delta_2$, $x \in \overline{U_{\delta_1}(A)}$. Тогда в силу критерия точки прикосновения существует последовательность $\{x_k\} \subset U_{\delta_1}(A)$ такая, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Так как $d_A(x_k) < \delta_1$, то $d_A(x) \leq \delta_1 < \delta_2$. Следовательно, $x \in U_{\delta_2}(A)$.

(3). Предположим противное. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует

$$y_k \in U_{\frac{1}{k}}(A) \setminus X. \tag{12}$$

Так как $d_A(y_k) < \frac{1}{k}$, то найдется точка $a_k \in A$ такая, что $|a_k - y_k| < \frac{1}{k}$. В силу компактности A из $\{a_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{a_{k_j}\}$, сходящуюся к некоторому $a \in A$. Так как $a \in A \subset X$, то найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(a) \subset X$. С другой стороны, $|a - y_{k_j}| \leq |a - - a_{k_j}| + |a_{k_j} - y_{k_j}| < |a - a_{k_j}| + \frac{1}{k_j} \to 0$ при $j \to \infty$. Поэтому найдется индекс j такой, что $y_{k_j} \in U_{\delta_0}(a) \subset X$, что противоречит условию (12). $\square$

Лемма 7. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(S) < +\infty$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует не более, чем счетный набор кубов $\{Q_k\}$ такой, что множество $Q = \bigcup\limits_k Q_k$ удовлетворяет условиям*

$$S \subset Q \subset U_\varepsilon(S), \qquad \sum_k \mu(Q_k) < \mu^*(S) + \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть сначала S – клетка, т.е. $S = \omega_1 \times \ldots \times \omega_n$, где ω_i – ограниченный числовой промежуток (интервал, полуинтервал или отрезок) длины $|\omega_i|$. Фиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим кубы с длиной ребра δ, представимые как декартово произведение n отрезков вида $[m\delta, (m + + 1)\delta]$, где $m \in \mathbb{Z}$. Пусть $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{K} Q_k$ – объединение всех таких кубов, пересекающихся с S. Тогда

$$\sum_{k=1}^{K} \mu(Q_k) = \mu(Q) \leq (|\omega_1| + 2\delta) \cdot (|\omega_2| + 2\delta) \cdots (|\omega_n| + 2\delta),$$

$S \subset Q \subset U_{\varepsilon'}(S)$ при $\varepsilon' > \delta\sqrt{n}$. Выбирая достаточно малое число $\delta > 0$, а именно такое, что $(|\omega_1| + 2\delta) \cdot (|\omega_2| + 2\delta) \cdots (|\omega_n| + 2\delta) < |\omega_1| \cdot |\omega_2| \cdots |\omega_n| + + \varepsilon = \mu^*(S) + \varepsilon$ и $\delta\sqrt{n} < \varepsilon$, получаем утверждение леммы для клетки S.

Пусть теперь $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(S) < +\infty$, $\varepsilon > 0$. По определению верхней меры найдется счетный набор клеток Π_i такой, что $S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} \Pi_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i) < < \mu^*(S) + \frac{\varepsilon}{2}$. Фиксируем число $\delta > 0$. Как показано выше, каждую клетку

Π_i можно покрыть конечным набором кубов $\{Q_k^i\}_{k=1}^{K_i}$ с длиной ребра $\le \delta$ так, что $\sum\limits_{k=1}^{K_i} \mu(Q_k^i) < \mu(\Pi_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. При этом

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_i} \mu(Q_k^i) < \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu(\Pi_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) < \mu^*(S) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \mu^*(S) + \varepsilon.$$

Исключая из набора $\{Q_k^i\}_{\substack{k\in\overline{1,K_i}\\ i\in\mathbb{N}}}$ кубы, не пересекающиеся с S, получим, что объединение Q оставшихся кубов удовлетворяет включению $Q \subset \subset U_{\varepsilon'}(S)$ при $\varepsilon' > \delta\sqrt{n}$. Выбирая $\delta > 0$ из условия $\delta\sqrt{n} < \varepsilon$, завершаем доказательство. $\square$

Лемма 8. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ – открытые множества, $A \subset X$ – компакт, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Тогда существует число $C > 0$ такое, что для любого $S \subset A$ справедливо неравенство*

$$\mu^*(\varphi(S)) \le C\mu^*(S). \tag{13}$$

Доказательство. В силу пункта (3) леммы 6 существует число $\varepsilon_0 > > 0$ такое, что $U_{2\varepsilon_0}(A) \subset X$. Так как норма $\|\mathcal{D}\,\varphi(x)\|$ матрицы Якоби непрерывно зависит от x, то она ограничена на компакте $\overline{U_{\varepsilon_0}(A)} \subset X$. Поэтому

$$\sup_{x\in\overline{U_{\varepsilon_0}(A)}} \|\mathcal{D}\,\varphi(x)\| = C_1 < +\infty.$$

Пусть q – куб в $\mathbb{R}^n$ с длиной ребра a, содержащийся в $\overline{U_{\varepsilon_0}(A)}$. Оценим $\mu^*(\varphi(q))$ сверху. Пусть x_0 – центр куба q. Тогда $\forall x \in q \hookrightarrow |x - x_0| \le \le \frac{a}{2}\sqrt{n}$. Согласно теореме Лагранжа о среднем для любого $x \in q$ справедливо неравенство $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le C_1\frac{a}{2}\sqrt{n}$. Поэтому множество $\varphi(q)$ содержится в замкнутом кубе с центром в $\varphi(x_0)$ и длиной ребра $aC_1\sqrt{n}$. Следовательно,

$$\mu^*(\varphi(q)) \le a^n(C_1\sqrt{n})^n = C\mu(q),$$

где $C = (C_1\sqrt{n})^n$.

Зафиксируем произвольное множество $S \subset A$ и покажем справедливость неравенства (13). Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. В силу леммы 7 существует не более, чем счетный набор кубов $\{Q_k\}$ такой, что множество $Q = \bigcup\limits_k Q_k$ удовлетворяет условиям

$$S \subset Q \subset U_\varepsilon(S), \qquad \sum_k \mu(Q_k) < \mu^*(S) + \varepsilon.$$

Как показано выше, для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\mu^*(\varphi(Q_k)) \le C\mu(Q_k)$. Поэтому в силу счетной полуаддитивности верхней меры

$$\mu^*(\varphi(S)) \le \sum_k \mu^*(\varphi(Q_k)) \le C\sum_k \mu(Q_k) \le C(\mu^*(S)+\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем неравенство (13). $\square$

Лемма 9. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$ и $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Пусть множество $A \subset X$ конечно измеримо. Тогда*

$$\mu(\varphi(A)) = \int\limits_A |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx.$$

Доказательство. Обозначим $h(x) = |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|$.

1) Пусть сначала множество A ограничено и $\overline{A} \subset X$. Тогда $\overline{A}$ – компакт. Так как множество A измеримо, то существует последовательность клеточных множеств $\{A_k\}$ такая, что $\mu^*(A_k\Delta A) \to 0$ при $k\to\infty$. Так как для клеточных множеств A_k справедливы равенства $\mu^*(A_k\Delta\overline{A_k}) = 0$, то $\mu^*(\overline{A_k}\Delta A) \to 0$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим компакты $B_k = \overline{A_k} \cap \overline{A}$. Так как $B_k\Delta A \subset \overline{A_k}\Delta A$, то $\mu^*(B_k\Delta A) \to 0$ при $k\to\infty$. В силу леммы 8 существует число $C > 0$ такое, что $\mu^*(\varphi(B_k\Delta A)) \le C\mu^*(B_k\Delta A)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $|\mu(\varphi(B_k)) - \mu(\varphi(A))| \le \mu^*\Big(\varphi(B_k)\Delta\varphi(A)\Big) = \mu^*(\varphi(B_k\Delta A)) \to 0$ при $k\to\infty$, т.е.

$$\mu(\varphi(A)) = \lim_{k\to\infty} \mu(\varphi(B_k)). \tag{14}$$

Поскольку

$$\left|\int\limits_{B_k} h(x)\,dx - \int\limits_A h(x)\,dx\right| \le C_h\mu^*(B_k\Delta A) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

(где $C_h = \max\limits_{x\in\overline{A}} h(x)$), то

$$\int\limits_A h(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{B_k} h(x)\,dx. \tag{15}$$

В силу леммы 5 имеем $\mu(\varphi(B_k)) = \int\limits_{B_k} h(x)\,dx$. Переходя в этом равенстве к пределу при $k\to\infty$ в силу соотношений (14), (15) получаем доказываемое равенство в рассматриваемом случае.

2) Пусть теперь множество $A \subset X$ конечно измеримо. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$X_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d_{\mathbb{R}^n \setminus X}(x) \geq \frac{1}{k},\ |x| \leq k \right\}.$$

Заметим, что X_k – компакт, $X_k \subset X_{k+1} \subset X$. Поэтому множества $A_k := A \cap X_k$ ограничены и $\overline{A_k} \subset X_k \subset X$. В силу первой части доказательства

$$\mu(\varphi(A_k)) = \int\limits_{A_k} h(x)\, dx.$$

Заметим, что $A_k \subset A_{k+1}$ и $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Используя непрерывность интеграла Лебега по множествам получаем

$$\mu(\varphi(A)) = \lim_{k \to \infty} \mu(\varphi(A_k)) = \lim_{k \to \infty} \int\limits_{A_k} h(x)\, dx = \int\limits_{A} h(x)\, dx.$$

$\square$

Следствие. (О геометрическом смысле модуля якобиана.) *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$ и $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Пусть $x_0 \in X$ и $\{A_k\}$ – последовательность измеримых подмножеств X таких, что $\mu(A_k) \neq 0$ и $\delta_k := \sup\limits_{x \in A_k} |x_0 - x| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда*

$$|\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)| = \lim_{k \to \infty} \frac{\mu(\varphi(A_k))}{\mu(A_k)}.$$

Доказательство. Обозначим $\varepsilon_k := \sup\limits_{x \in A_k} \Big| \det \mathcal{D}\,\varphi(x) - \det \mathcal{D}\,\varphi(x_0) \Big|$. Поскольку $\delta_k \to 0$ и функция $\det \mathcal{D}\,\varphi(x)$ непрерывна, то $\varepsilon_k \to 0$. Интегрируя неравенство $\Big| |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)| - |\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)| \Big| \leq \varepsilon_k$ по множеству A_k, в силу леммы 9 получаем $\Big| \mu(\varphi(A_k)) - \mu(A_k) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)| \Big| \leq \varepsilon_k \cdot \mu(A_k)$. Поэтому

$$\left| \frac{\mu(\varphi(A_k))}{\mu(A_k)} - |\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)| \right| \leq \varepsilon_k \to 0.$$

$\square$

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим положительную составляющую $f_+(y) = \max\{f(y), 0\}$ и отрицательную составляющую $f_-(y) = \max\{-f(y), 0\}$ функции f: $f(y) = f_+(y) - f_-(y)$. Докажем требуемое равенство для положительной составляющей. Для отрицательной составляющей оно доказывается аналогично. В силу линейности интеграла отсюда следует искомое равенство.

Итак, осталось доказать

$$\int\limits_Y f_+(y)\,dy = \int\limits_X f_+(\varphi(x))\cdot|\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx. \tag{16}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим счетно-ступенчатую функцию $f_k(y) = = \frac{[2^k f_+(y)]}{2^k}$, где $[t]$ – целая часть числа t, т.е. $[t] \in \mathbb{Z}$, $[t] \in (t-1, t]$. Тогда $f_k(y) \le f_{k+1}(y)$ и $f_+(y) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(y)$. Из леммы 9 в силу счетной аддитивности интеграла Лебега следует, что

$$\int\limits_Y f_k(y)\,dy = \int\limits_X f_k(\varphi(x))\cdot|\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx.$$

Отсюда по теореме Б. Леви получаем равенство (16). $\square\triangleleft$

Пример 1. Пусть в открытом круге $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 < r_0^2\}$ задана интегрируемая функция $f(x,y)$. Для вычисления интеграла $\int\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ часто удобно ввести полярные координаты:

$$r \ge 0, \quad \varphi\in[0,2\pi], \qquad x = r\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\varphi.$$

Отображение $F(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$ непрерывно дифференцируемо, и его якобиан

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} = r.$$

Отображение $F : \mathbb{R}^2_{r\varphi} \to \mathbb{R}^2_{xy}$ не является взаимно однозначным, так как, например, точки $(r,0)$ и $(r,2\pi)$ переходят в одну и ту же точку. Чтобы удовлетворить требованиям взаимной однозначности, рассмотрим открытое множество

$$X = \{(r,\varphi) \ : \ r\in(0,r_0),\ \varphi\in(0,2\pi)\},$$

которое при отображении F переходит во множество

$$Y = \{(x,y) \ : \ (0 < x^2+y^2 < r_0^2) \text{ и } (y\neq 0 \text{ при } x>0)\}.$$

Сужение отображения F на множество X взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо. Якобиан отображения F на множестве X не обращается в ноль. Поэтому согласно теореме об обратном отображении F является диффеоморфизмом из X в $Y = F(X)$. В силу теоремы о замене переменных в кратном интеграле и следствия из теоремы Фубини справедливы равенства

$$\int\limits_Y f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{r_0} r\,dr \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Поскольку круг Ω отличается от множества Y на множество меры нуль, а интеграл по множеству меры нуль равен нулю, то

$$\int\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_Y f(x,y)\,dx\,dy.$$

Таким образом, вычисление интеграла по кругу Ω сводится к вычислению повторного интеграла:

$$\int\limits_{x^2+y^2<r_0^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{r_0} r\,dr \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 2. Вычислить интеграл Пуассона $I := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Решение. Используя формулу Фубини, имеем

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Переходя к полярным координатам (см. предыдущий пример), получаем

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -\pi \int\limits_0^{+\infty} de^{-r^2} = -\pi\ e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r\to+\infty} = \pi.$$

Поскольку $I \geq 0$, то $I = \sqrt{\pi}$. Итак,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Глава 15

ПОДМНОГООБРАЗИЯ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^N$

§ 1. Криволинейные системы координат

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n_x$ и $B \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $f : A \to B$ – гладкий диффеоморфизм,

$$f(x) = \begin{pmatrix} y^1(x^1, \dots, x^n) \\ \cdots \\ y^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix} \qquad \forall x = (x^1, \dots, x^n) \in A.$$

Тогда набор функций $(y^1, \dots, y^n)$ называется *криволинейной системой координат на множестве* A. Набор чисел $(y^1(x), \dots, y^n(x)) \in \in B$ называется *координатным набором* точки $x \in A$ в криволинейной системе координат $(y^1, \dots, y^n)$.

Образ $f(M)$ произвольного множества $M \subset A$ будем называть *множеством* M *в криволинейной системе координат* $(y^1, \dots, y^n)$.

Замечание. Исходная декартова система координат $(x^1, \dots, x^n)$ является частным случаем криволинейной системы координат, поскольку соответствует тождественному диффеоморфизму $f(x) = = \mathrm{Id}(x) := x$.

Пример 1. (Полярная система координат.)

Рассмотрим отображение $F : \Pi_{\varphi_0} \to A_{\varphi_0}$

$$F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ – произвольное число;
$\Pi_{\varphi_0} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)\}$,

$$A_{\varphi_0} := F(\Pi_{\varphi_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} : \ r > 0, \ \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \right\}$$

– плоскость с разрезом по лучу $\left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi_0 \\ r\sin\varphi_0 \end{pmatrix} : \ r \geq 0 \right\}$. Заметим, что $F \in C^\infty(\Pi_{\varphi_0}, A_{\varphi_0})$ и якобиан

$$\det \mathcal{D}\, F(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0 \qquad \forall (r,\varphi) \in \Pi_{\varphi_0}.$$

Покажем, что отображение $F : \Pi_{\varphi_0} \to A_{\varphi_0}$ взаимно однозначно. Пусть $(r_1,\varphi_1) \in \Pi_{\varphi_0}$, $(r_2,\varphi_2) \in \Pi_{\varphi_0}$ и $F(r_1,\varphi_1) = F(r_2,\varphi_2)$, т.е.

$$\begin{cases} r_1\cos\varphi_1 = r_2\cos\varphi_2, \\ r_1\sin\varphi_1 = r_2\sin\varphi_2. \end{cases}$$

Тогда $r_1^2 = r_1^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2) = r_2^2$. Отсюда и из неравенств $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ следует, что $r_1 = r_2 > 0$. Поэтому $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$. Используя условия $\varphi_1, \varphi_2 \in (\varphi_0, \varphi_0 + + 2\pi)$, в силу леммы 5 §10 главы 2 получаем равенство $\varphi_1 = \varphi_2$. Таким образом, отображение $F : \Pi_{\varphi_0} \to A_{\varphi_0}$ является гладким взаимно однозначным отображением с неравным нулю якобианом. В силу теоремы 2 §5 главы «Теорема о неявной функции» отображение F является C^∞-гладким диффеоморфизмом. Поэтому гладкий диффеоморфизм $F^{-1} : A_{\varphi_0} \to \Pi_{\varphi_0}$ задает криволинейную систему координат (r,φ), которая называется *полярной системой координат.*

Теорема 1. (О построении криволинейной системы координат исходя из ее части.) *Пусть на δ-окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданы гладкие функции $y^1, \ldots, y^k : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$, дифференциалы которых в точке x_0 линейно независимы. Тогда найдутся гладкие функции $y^{k+1}, \ldots, y^n : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ такие, что набор функций $y^1, \ldots, y^n$ составляет криволинейную систему координат на некоторой окрестности точки x_0. Иными словами, набор гладких функций $y^1, \ldots, y^k$ с линейно независимыми дифференциалами можно достроить до криволинейной системы координат $y^1, \ldots, y^n$, частью которой являются функции $y^1, \ldots, y^k$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $g(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) \\ \cdots \\ y^k(x) \end{pmatrix}$.

Строками матрицы Якоби этого отображения

$$\mathcal{D}\, g = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

являются коэффициентами в формулах $dy^i = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$, выражающих дифференциалы функций y^i через дифференциалы независимых переменных x^j. Поскольку в точке x_0 дифференциалы $dy^1, \ldots, dy^k$ линейно независимы, то строки матрицы $\mathcal{D}\, g(x_0)$ линейно независимы. По теореме о ранге матрица $\mathcal{D}\, g(x_0)$ имеет k линейно независимых столбцов. Без потери общности будем считать, что первые k столбцов матрицы $\mathcal{D}\, g(x_0)$ линейно независимы (если это не так, то можно перенумеровать переменные x^i так, чтобы это условие выполнялось).

Определим гладкие функции

$$y^{k+1}(x^1, \ldots, x^n) = x^{k+1}, \qquad y^n(x^1, \ldots, x^n) = x^n$$

и отображение $f(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) \\ \cdots \\ y^n(x) \end{pmatrix}$. Матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\mathcal{D}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^k} & \frac{\partial y^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^k} & \frac{\partial y^k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку столбцы матрицы $\mathcal{D}\, f(x_0)$ линейно независимы, то $\det \mathcal{D}\, f(x_0) \neq 0$. По теореме об обратном отображении найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что сужение отображения f на $U(x_0)$ является диффеоморфизмом. Таким образом, отображение f является гладким диффеоморфизмом и набор его координатных функций $y^1, \ldots, y^n$ составляет криволинейную систему координат на $U(x_0)$. $\square$

$\triangleright$

Теорема 2. *Внутренность, замыкание и граница множества инвариантны относительно замены криволинейной системы координат.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n_x$ и $B \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества. Пусть заданы гладкий диффеоморфизм $f : A \to B$, а также множество

$M \subset A$. Требуется доказать равенства

$$\operatorname{int} f(M) = f(\operatorname{int} M), \tag{1}$$

$$\overline{f(M)} = f(\overline{M}), \tag{2}$$

$$\partial f(M) = f(\partial M), \tag{3}$$

где $\overline{M}$ – замыкание множества M в метрическом пространстве A с метрикой $\mathbb{R}^n_x$; $\overline{f(M)}$ – замыкание множества $f(M)$ в метрическом пространстве B с метрикой $\mathbb{R}^n_y$; $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$, $\partial f(M) = \overline{f(M)} \setminus \operatorname{int} f(M)$. Поскольку множества A и B открыты, то внутренности $\operatorname{int} M$ и $\operatorname{int} f(M)$ в метрических пространствах A и B соответственно совпадают с внутренностями множеств M и $f(M)$ в обычном смысле (т.е. в пространствах $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^n_y$ соответственно).

Пусть $x_0 \in \operatorname{int} M$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(x_0) \subset \subset M$. В силу теоремы 2 §5 главы «Теорема о неявной функции» множество $f(U_\delta(x_0))$ открыто. Поэтому $f(x_0) \in f(U_\delta(x_0)) = \operatorname{int} f(U_\delta(x_0)) \subset \operatorname{int} f(M)$. Таким образом, доказано включение

$$f(\operatorname{int} M) \subset \operatorname{int} f(M). \tag{4}$$

Применяя это включение к диффеоморфизму f^{-1} и множеству $f(M)$, получаем $f^{-1}(\operatorname{int} f(M)) \subset \operatorname{int} f^{-1}(f(M)) = \operatorname{int} M$. Поэтому $\operatorname{int} f(M) = = f\Big(f^{-1}(\operatorname{int} f(M))\Big) \subset f(\operatorname{int} M)$. Последнее включение вместе с включением (4) доказывает равенство (1).

Пусть теперь $x_0 \in \overline{M}$. Тогда найдется последовательность точек $x_k \in \in M$ такая, что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$. В силу непрерывности f имеем $f(x_k) \to f(x_0)$. Поэтому $f(x_0) \in \overline{f(M)}$. Тем самым доказано включение $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$. Применяя это включение для диффеоморфизма f^{-1} и множества $f(M)$, получаем обратное включение. Таким образом, равенство (2) доказано.

Поскольку отображение f взаимно однозначно, то $f\Big(\overline{M} \setminus \operatorname{int} M\Big) = f(\overline{M}) \setminus f(\operatorname{int} M)$. Отсюда и из равенств (1), (2) получаем

$$f(\partial M) = f\Big(\overline{M} \setminus \operatorname{int} M\Big) = f(\overline{M}) \setminus f(\operatorname{int} M) =$$

$$= \overline{f(M)} \setminus \operatorname{int} f(M) = \partial f(M),$$

т.е. равенство (3) также доказано. $\square$

$\triangleleft$

§ 2. Гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$

Говоря неформально, множество $M \subset \mathbb{R}^N$ является гладким n-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$, если в достаточно малой окрестности каждой своей точки в некоторой криволинейной системе координат множество M имеет вид n-мерного линейного подпространства

$$L^n = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} \tag{1}$$

или полуподпространства

$$L^n_- = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x^1 \leq 0 \right\}. \tag{2}$$

Дадим аккуратные определения.

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^N_p$ будем называть *гладким n-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N_p$ в точке $P \in M$* и писать $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$, если существует гладкий диффеоморфизм $f : X \to U(P)$ из открытого множества $X \subset \mathbb{R}^N_x$ в окрестность $U(P) \subset \mathbb{R}^N_p$ точки P такой, что

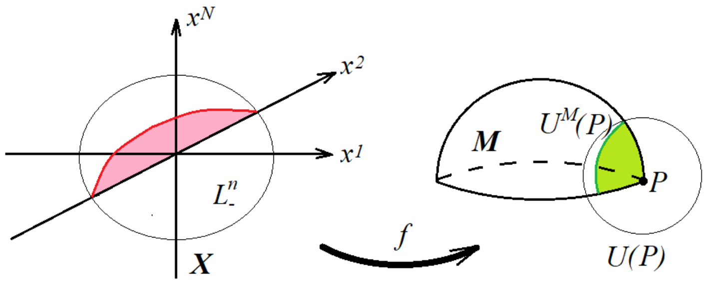
$$U^M = f(L^n \cap X) \tag{3}$$

или

$$U^M = f(L^n_- \cap X), \tag{4}$$

где $U^M := M \cap U(P)$.

При этом диффеоморфизм $f : X \to U(P)$ будем называть *каноническим диффеоморфизмом*, а диффеоморфизм $f^{-1} : U(P) \to X$ – *выпрямляющим диффеоморфизмом* для подмногообразия M в точке P.



Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^N$ будем называть *гладким n-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$ (или n-мерным многообразием, гладко вложенным в $\mathbb{R}^N$)* и писать $M \in \mathfrak{M}^n_N$, если $M \in \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ для любой точки $P \in M$.

Замечание. Открытое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является n-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^n$, в качестве канонического диффеоморфизма можно взять тождественное отображение.

Пример 1. Нижняя полусфера

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} : \; p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1, \; p_z \leq 0 \right\}$$

является гладким двумерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^3$.

В качестве криволинейной системы координат рассмотрим набор функций

$$x^1 = \theta, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = \varrho - 1,$$

где $(\varrho, \theta, \varphi)$ – сферические координаты, связанные с прямоугольными декартовыми координатами (p_x, p_y, p_z) следующим образом:

$$\begin{aligned} p_x &= \varrho \cos\theta \cos\varphi \\ p_y &= \varrho \cos\theta \sin\varphi \\ p_z &= \varrho \sin\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

$\varrho \geq 0$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Тогда в координатах (x^1, x^2, x^3) полусфера M задается системой условий $x^3 = 0$ и $x^1 \leq 0$.

Поэтому в достаточно малой окрестности точки $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \in M$ при $p_z \in (-1, 0)$ полусфера M имеет вид линейного подпространства

$$L^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

В окрестности точки $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ полусфера M имеет вид полуподпространства

$$L^2_- = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad x^1 \leq 0 \right\}.$$

В окрестности точки $\widehat{P} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in M$ набор функций (x^1, x^2, x^3) не является криволинейной системой координат, так как отображение (5) не является взаимно-однозначным. Тем не менее, $M \in \mathfrak{M}^2_3(\widehat{P})$. В качестве криволинейной системы координат в окрестности этой точки можно взять, например, систему функций (u, v, w), где

$$\begin{aligned} &u = p_x \\ &v = p_y \\ &w = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 1. \end{aligned}$$

Тогда в окрестности точки $\widehat{P}$ полусфера M имеет вид линейного подпространства, заданного уравнением $w = 0$.

Теорема 1. (О гладком подмногообразии, заданном системой уравнений.) *Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^N$ открыто, а множество $M \subset \subset \mathbb{R}^N$ задано системой уравнений:*

$$M = \{p \in U : \ g(p) = \overline{0}_k\},$$

где $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ и в точке $p_0 \in M$ ранг матрицы Якоби $\mathcal{D}\, g(p_0)$ равен k. Тогда $M \in \mathfrak{M}^{N-k}_N(p_0)$.

Доказательство. Пусть $g(p) = \begin{pmatrix} g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$. В силу теоремы о построении криволинейной системы координат, исходя из ее части найдутся гладкие функции $x^1(p), \dots, x^{N-k}(p)$ такие, что набор функций $(g^1, \dots, g^k, x^1, \dots, x^{N-k})$ составляет криволинейную систему координат в окрестности $U(p_0) \subset U$ точки p_0. Тогда отображение $\varphi(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ x^{N-k}(p) \\ g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$ является гладким диффеоморфизмом из $U(p_0)$ в окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 = \varphi(p_0)$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что этот диффеоморфизм является выпрямляющим, т.е.

$$M \cap U(p_0) = \varphi^{-1}(L^{N-k} \cap U(x_0)).$$

Действительно, если $p \in M \cap U(p_0)$, то при $i \in \overline{1,k}$ имеем $g^i(p) = 0$ и, следовательно, $\varphi(p) \in L^{N-k} \cap U(x_0)$, а значит, $p \in \varphi^{-1}(L^{N-k} \cap U(x_0))$. Обратно, пусть $p \in \varphi^{-1}(L^{N-k} \cap U(x_0))$. Тогда точка $x = \varphi(p)$ удовлетворяет включению $x \in L^{N-k} \cap U(x_0)$. Так как $\varphi(p) = x \in L^{N-k}$, то для любого $i \in \overline{1,k}$ имеем $g^i(p) = 0$. Следовательно, $p \in M \cap U(p_0)$. Таким образом, $M \in \mathfrak{M}_N^{N-k}(p_0)$, отображение φ^{-1} является каноническим, а отображение φ – выпрямляющим диффеоморфизмом для M в точке p_0. □

Пример 2. Сфера в $\mathbb{R}^N$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $p_0 = \begin{pmatrix} p_0^1 \\ \dots \\ p_0^N \end{pmatrix}$, т.е. множество

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} p^1 \\ \dots \\ p^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N : \ (p^1 - p_0^1)^2 + \ldots + (p^N - p_0^N)^2 = r^2 \right\}$$

является гладким подмногообразием размерности $(N-1)$. Это следует из теоремы 1, поскольку матрица Якоби функции

$$g(p) = (p^1 - p_0^1)^2 + \ldots + (p^N - p_0^N)^2 - r^2$$

равна строке $2(p^1 - p_0^1, \ldots, p^N - p_0^N)$, которая не обращается в ноль при $\begin{pmatrix} p^1 \\ \ldots \\ p^N \end{pmatrix} \in M$.

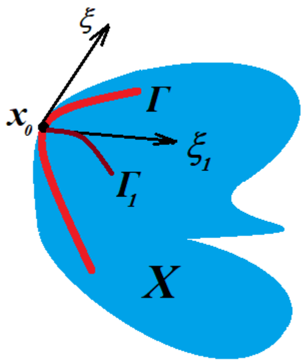
Задача 1. Пусть функция $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ удовлетворяет условию $\operatorname{grad} g(p) \neq \overline{0}$ для любого вектора $p \in \mathbb{R}^n$ такого, что $g(p) = 0$. Пусть множество $M = \{p \in \mathbb{R}^n : \ g(p) \leq 0\}$ не пусто. Покажите, что $M \in \in \mathfrak{M}_n^n$.

§ 3. Геометрический касательный вектор

В формулировке достаточных условий условного экстремума будет использоваться понятие касательного пространства.

Определение. Вектор $\xi \in \mathbb{R}^N$ называется *(геометрическим) касательным вектором* к множеству $X \subset \mathbb{R}^N$ в точке $x_0 \in X$, если существует непрерывная вектор-функция $r : [a, b] \to X$ такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a, b]$. (Здесь, как обычно, под $r'(a)$ понимается правая производная вектор-функции r в точке a, а под $r'(b)$ – ее левая производная в точке b.)

Геометрически это означает существование кривой $\Gamma = \{r(t) : \ t \in \in [a, b]\}$, лежащей в X, проходящей через точку x_0 и такой, что вектор ξ является направляющим вектором касательной к кривой Γ в точке x_0.



Определение. Множество всех (геометрических) касательных векторов к множеству X в точке $x_0 \in X$ обозначается через $\widetilde{T}_{x_0}(X)$.

Задача 1. Покажите, что для множества

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\}$$

множество касательных векторов в точке $(0, 0)$ совпадает с X и, следовательно, не является линейным пространством.

Определение. Если множество $\widetilde{T}_{x_0}(X)$ является линейным пространством, оно называется *(геометрическим) касательным пространством* к множеству X в точке $x_0 \in X$.

В следующей лемме сформулированы элементарные свойства множества касательных векторов.

Лемма 1. 1) *Если $x_0 \in X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{R}^N$, то $\widetilde{T}_{x_0}(X_1) \subset \widetilde{T}_{x_0}(X_2)$.*

2) *Множество касательных векторов к множеству $X \subset \mathbb{R}^N$ в точке $x_0 \in X$ имеет локальный характер, т.е. зависит от вида множества X лишь в сколь угодно малой окрестности точки x_0.*

Иными словами, для любой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$ справедливо равенство

$$\widetilde{T}_{x_0}(X) = \widetilde{T}_{x_0}(X \cap U(x_0)).$$

Доказательство. 1) Если $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X_1)$, то существует кривая $\Gamma = \{r(t) :\ t \in [a,b]\}$, лежащая в X_1 и такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a,b]$. Тогда Γ лежит в X_2 и, следовательно, $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X_2)$.

2) Включение $\widetilde{T}_{x_0}(X \cap U(x_0)) \subset \widetilde{T}_{x_0}(X)$ следует из пункта (1). Докажем обратное включение. Пусть $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$. Тогда существует кривая $\Gamma = \{r(t) :\ t \in [a,b]\}$, лежащая в X и такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a,b]$. В силу непрерывности функции $r(t)$ найдется отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ такой, что $t_0 \in [\alpha,\beta]$ и $r(t) \in U(x_0)$ при всех $t \in [\alpha,\beta]$. Заменяя отрезок $[a,b]$ отрезком $[\alpha,\beta]$, получим кривую $\tilde{\Gamma} = \{r(t) :\ t \in [\alpha,\beta]\}$, лежащую в $X \cap U(x_0)$. Поэтому $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X \cap U(x_0))$. $\square$

Лемма 2. *Множество геометрических касательных векторов к линейному подпространству $L^n \subset \mathbb{R}^N$ или полуподпространству $L^n_- \subset \mathbb{R}^N$ совпадает с L^n:*

$$\widetilde{T}_{x_0}(L^n) = L^n \qquad \forall x_0 \in L^n, \tag{1}$$

$$\widetilde{T}_{x_0}(L^n_-) = L^n \qquad \forall x_0 \in L^n_-. \tag{2}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in L^n_-$. Сначала докажем включение $\widetilde{T}_{x_0}(L^n_-) \subset L^n$. Фиксируем произвольный вектор $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L^n_-)$. По определению касательного вектора найдется вектор-функция $r : [a,b] \to L^n_-$ и число $t_0 \in [a,b]$ такие, что $r'(t_0) = \xi$. Пусть $r^i(t)$ и ξ^i – компоненты векторов $r(t)$ и ξ соответственно. Так как $r(t) \in L^n_- \subset L^n$, то согласно формуле (1) § 2 имеем $r^i(t) = 0$ при всех $i \in \{n+1, N\}$. Следовательно, $\xi^i = (r^i)'(t_0) = 0$ при всех $i \in \{n+1, N\}$, т.е. $\xi \in L^n$. Таким образом, доказано включение $\widetilde{T}_{x_0}(L^n_-) \subset L^n$.

Докажем обратное включение. Фиксируем произвольный вектор $\xi \in L^n$. Рассмотрим кривые (прямолинейные отрезки)

$$\Gamma^+ = \{r(t) : \ t \in [0,1]\}, \qquad \Gamma^- = \{r(t) : \ t \in [-1,0]\},$$

где $r(t) = x_0 + t\xi$. В зависимости от знака первой координаты вектора ξ выполнено хотя бы одно из включений $\Gamma^+ \subset L^n_-$ или $\Gamma^- \subset L^n_-$. Так как $r(0) = x_0$ и $r'(0) = \xi$, то $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L^n_-)$. Итак, равенство (2) доказано. Равенство (1) доказывается аналогично. □

Обобщая понятие образа множества A при отображении $f : X \to Y$ на случай $A \not\subset X$, образом $f(A)$ множества A при отображении f будем называть множество $f(A \cap X)$.

Лемма 3. *Пусть задан диффеоморфизм $y(x)$ из окрестности точки x_0 в окрестность точки $y_0 = y(x_0)$. Пусть $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^N$. Тогда*

$$\widetilde{T}_{y_0}(y(X)) = \{\mathcal{D}\, y(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$. Тогда найдется непрерывная функция $r : [a,b] \to X$ такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a,b]$. В силу непрерывности функции $r(t)$ найдется такой отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, что $t_0 \in [\alpha,\beta]$ и для любого $t \in [\alpha,\beta]$ точка $r(t)$ лежит в окрестности точки x_0, в которой определена функция $y(x)$. Тогда $g(t) = y(r(t))$ является непрерывной функцией из $[\alpha,\beta]$ в $y(X)$, $y(r(t_0)) = y(x_0) = y_0$ и по теореме о дифференцировании сложной функции $g'(t) = \mathcal{D}\, y(x_0) \cdot r'(t_0) = \mathcal{D}\, y(x_0) \cdot \xi$. Поэтому $\mathcal{D}\, y(x_0) \cdot \xi \in \widetilde{T}_{y_0}(y(X))$. Таким образом, доказано включение правой части равенства (3) в его левую часть. Повторяя эти же рассуждения для диффеоморфизма, обратного к исходному, получаем обратное включение. □

Теорема 1. (О структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$.) *Множество геометрических касательных векторов к гладкому n-мерному подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$ является n-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^N$.*

Если f – канонический диффеоморфизм для $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ в точке P, $x_0 = f^{-1}(P)$, то

$$\widetilde{T}_P(M) = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in L^n\}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть f – канонический диффеоморфизм для $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ в точке P, $x_0 = f^{-1}(P)$. По определению канонического диффеоморфизма справедливо одно из равенств

$$U^M = f(L^n \cap X) \quad \text{или} \quad U^M = f(L^n_- \cap X), \tag{5}$$

где $U^M = M \cap U(P)$, $U(P)$ – окрестность точки P, X – окрестность точки x_0.

В силу леммы 2 имеем $\widetilde{T}_{x_0}(L^n) = \widetilde{T}_{x_0}(L^n_-) = L^n$. Поэтому согласно лемме 1

$$\widetilde{T}_{x_0}(L^n \cap X) = \widetilde{T}_{x_0}(L^n_- \cap X) = L^n.$$

Еще раз используя лемму 1, получаем

$$\widetilde{T}_P(M) = \widetilde{T}_P(M \cap U(P)) = \widetilde{T}_P(U^M).$$

Отсюда, из равенств (5) и из леммы 3 следует, что

$$\widetilde{T}_P(U^M) = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L^n \cap X)\} = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in L^n\}$$

или

$$\widetilde{T}_P(U^M) = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L^n_- \cap X)\} = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in L^n\}.$$

Поэтому с учетом невырожденности матрицы $\mathcal{D} f(x_0)$ множество $\widetilde{T}_P(M)$ является n-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^N$. □

Теорема 2. (О структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений.)

Пусть вектор-функция $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ является гладкой в окрестности точки $p_0 \in M$ и матрица $\mathcal{D}\, g(p_0)$ имеет полный ранг k. Тогда множество геометрических касательных векторов $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ к множеству

$$M = \{p \in \mathbb{R}^N : \; g(p) = \overline{0}_k\}$$

имеет вид

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : \; dg(p_0)[\xi] = \overline{0}_k\}.$$

Доказательство. Пусть $g(p) = \begin{pmatrix} g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$. Как показано в доказательстве теоремы о гладком подмногообразии, заданном системой уравнений, отображение вида $\varphi(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ x^{N-k}(p) \\ g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$ является выпрямляющим, а φ^{-1} – каноническим диффеоморфизмом для $M \in \mathfrak{M}_N^{N-k}$ в точке p_0. Обозначим $x_0 = \varphi(p_0)$. Согласно теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$ имеем

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\mathcal{D}\, \varphi^{-1}(x_0) \cdot \widehat{\xi} : \; \widehat{\xi} \in L^{N-k}\}.$$

Поскольку $\mathcal{D}\, \varphi^{-1}(x_0) = (\mathcal{D}\, \varphi(p_0))^{-1}$, то, обозначая $\xi = \mathcal{D}\, \varphi^{-1}(x_0) \cdot \widehat{\xi}$, получаем

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : \; \mathcal{D}\, \varphi(p_0) \cdot \xi \in L^{N-k}\} =$$
$$= \{\xi \in \mathbb{R}^N : \; d\varphi(p_0)[\xi] \in L^{N-k}\} =$$
$$= \{\xi \in \mathbb{R}^N : \; dg(p_0)[\xi] = \overline{0}_k\}.$$

$\square$

Глава 16

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Безусловный экстремум

Определение. Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f : X \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in X$ называется точкой *строгого локального минимума (максимума)* функции f на множестве X, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap X \hookrightarrow \ f(x_0) < (>) f(x).$$

Если здесь строгое неравенство заменить нестрогим, то получится определение *нестрогого локального минимума (максимума)*. Точки минимума и максимума называются точками *экстремума*.

Определение. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции f на множестве X. Тогда если $x_0 \in \operatorname{int} X$, то x_0 называется точкой *безусловного локального экстремума* функции f; если $x_0 \in \partial X$, то x_0 называется точкой *условного локального экстремума* функции f.

Лемма 1. *x_0 – точка строгого безусловного локального минимума функции f тогда и только тогда, когда*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x_0) < f(x).$$

Доказательство. Пусть x_0 – точка строго безусловного локального минимума функции f. Тогда $\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \bigcap X \hookrightarrow$ $\hookrightarrow\ f(x_0) < f(x)$. Поскольку $x_0 \in \operatorname{int} X$, то $\exists \delta_2 > 0 : U_{\delta_2}(x_0) \subset X$. Определим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow\ f(x_0) < f(x)$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Утверждения, аналогичные лемме 1, справедливы и для максимума, и для нестрогих экстремумов. Иными словами, в определении безусловного экстремума множество X указывать не нужно.

Теорема 1. *(Необходимое условие экстремума.) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и дифференцируема в точке x_0. Если x_0 – точка безусловного локального экстремума функции f, то* $\operatorname{grad} f(x_0) = \overline{0}$.

Доказательство. Поскольку координаты вектора $\operatorname{grad} f(x_0) = \overline{0}$ равны частным производным $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$, то достаточно доказать, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0 \quad \forall i \in \overline{1,n}$. Зафиксируем произвольное $i \in \overline{1,n}$ и рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x^i) = f(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)$. Поскольку x_0 – точка локального экстремума функции f, то x_0^i – точка локального экстремума функции $\varphi(x^i)$. В силу теоремы Ферма $\varphi'(x_0^i) = 0$. Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \varphi'(x_0^i) = 0$. □

Определение. Если $\operatorname{grad} f(x_0) = \overline{0}$, то точка x_0 называется *стационарной точкой* функции f.

Из теоремы 1 следует, что точки экстремума функции являются ее стационарными точками. Обратное неверно. Например, для функции одной переменной $f(x) = x^3$ точка $x_0 = 0$ является стационарной точкой, но не является точкой экстремума.

Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (т. е. частные производные функции f до второго порядка включительно непрерывны в окрестности точки x_0). Тогда справедлива следующая формула Тейлора (глава 6, §11, теорема 2):

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0)[\Delta x] + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)[\Delta x] + o(|\Delta x|^2) \quad \text{при} \quad \Delta x \to \overline{0}.$$

Через $f'_x(x_0)$ обозначим строку частных производных первого порядка или, что то же самое, координатную строку вектора градиента:

$$f'_x(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix},$$

а через $f''_{xx}(x_0)$ – матрицу частных производных второго порядка:

$$f''_{xx}(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Поскольку для дважды непрерывно дифференцируемой функции f частные производные второго порядка не зависят от порядка дифференцирования, то $f''_{xx}(x_0)$ – симметрическая матрица.

Полагая $dx = \Delta x = x - x_0 = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \cdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}$, $\quad \Delta f = f(x) - f(x_0)$, получаем равенства

$$df(x_0)[dx] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\, dx^i = f'_x(x_0)\, dx,$$

$$d^2 f(x_0)[dx] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\, dx^i\, dx^j = (dx)^T\, f''_{xx}(x_0)\, dx. \tag{1}$$

Из формулы (1) следует, что второй дифференциал функции f является квадратичной формой относительно вектора dx.

Напомним, что квадратичная форма $k(x) = x^T\, M\, x$ называется

1) положительно определенной, если $k(x) > 0 \quad \forall x \neq \bar{0}$;

2) отрицательно определенной, если $k(x) < 0 \quad \forall x \neq \bar{0}$;

3) знаконеопределенной, если $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n :\ k(x_1) > 0,\ k(x_2) < 0$.

Легко видеть, что квадратичная форма $k(x) = x^T\, M\, x$ отрицательно определена, если квадратичная форма $-k(x) = x^T\,(-M)\, x$ положительно определена. Для проверки положительной и отрицательной определенности квадратичной формы удобно использовать критерий Сильвестра. Доказательство того, что квадратичная форма знаконеопределена, проводят по определению.

Лемма 2. *Если квадратичная форма $k(x)$ положительно определена, то*

$$\exists \lambda > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow\ k(x) \geq \lambda |x|^2.$$

Доказательство. Поскольку функция $k(x) = x^T\, M\, x$ непрерывна, а единичная сфера $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| = 1\}$ ограничена и замкнута, т. е. является компактом, то существует $\min\limits_{x \in S} k(x) = \lambda$. Из положительной определенности квадратичной формы $k(x)$ следует, что $\lambda > 0$. Из определения минимума получаем, что $\forall \widetilde{x} \in S \hookrightarrow\ k(\widetilde{x}) \geq \lambda$.

Если $x = \overline{0}$, то $k(x) = 0$, и неравенство $k(x) \geq \lambda |x|^2$ выполняется.

Если $x \neq \overline{0}$, то $\widetilde{x} = \frac{x}{|x|} \in S$, следовательно, $k(\widetilde{x}) \geq \lambda$, $\quad k(x) = x^T\, M\, x = |x|^2\, \widetilde{x}^T\, M\, \widetilde{x} = |x|^2\, k(\widetilde{x}) \geq \lambda |x|^2$. □

Теорема 2. *(Достаточные условия экстремума.) Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 и пусть x_0 – стационарная точка функции f. Обозначим $k(dx) = d^2 f(x_0)[dx]$. Тогда*

1) если квадратичная форма $k(dx)$ положительно определена, то x_0 – точка строгого безусловного локального минимума функции f;

2) если квадратичная форма $k(dx)$ отрицательно определена, то x_0 – точка строгого безусловного локального максимума функции f;

3) если квадратичная форма $k(dx)$ знаконеопределена, то x_0 не является точкой безусловного локального экстремума функции f;

4) если квадратичная форма $k(dx)$ не является ни положительно, ни отрицательно определенной и не является знаконеопределенной, то x_0 может быть точкой локального экстремума, а может и не быть.

Доказательство. Поскольку x_0 – стационарная точка функции f, то $df(x_0)[dx] = 0$, следовательно, по формуле Тейлора

$$\Delta f = \frac{1}{2} k(\Delta x) + o(|\Delta x|^2) \quad \text{при} \quad \Delta x \to \overline{0}. \tag{2}$$

1) Пусть квадратичная форма $k(dx)$ положительно определена. В силу леммы 2 $\quad \exists \lambda > 0 \,:\, \forall \Delta x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow\ k(\Delta x) \geq \lambda |\Delta x|^2$. Отсюда и из (2) следует, что $\Delta f \geq \frac{\lambda}{2} |\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2)$ при $\Delta x \to \overline{0}$. По определению o-малого $\lim\limits_{\Delta x \to \overline{0}} \frac{o(|\Delta x|^2)}{|\Delta x|^2} = 0$, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to \overline{0}} \frac{\frac{\lambda}{2} |\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2)}{|\Delta x|^2} = \frac{\lambda}{2} > 0.$$

Следовательно,

$$\exists\delta>0\ :\ \forall\Delta x\in\overset{o}{U}_\delta(\overline{0})\hookrightarrow\ \frac{\lambda}{2}|\Delta x|^2+o(|\Delta x|^2)>0,$$

поэтому $\forall x\in\overset{o}{U}_\delta(x_0)\hookrightarrow\ f(x)-f(x_0)=\Delta f\geq\frac{\lambda}{2}|\Delta x|^2+o(|\Delta x|^2)>0$, а значит, x_0 – точка строгого безусловного локального минимума.

Пункт (2) сводится к пункту (1) заменой функции $f(x)$ на $-f(x)$.

3) Пусть квадратичная форма $k(dx)$ знаконеопределена, т. е. $\exists\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^n$: $k(\xi_1)>0$, $k(\xi_2)<0$. Применяя формулу (2) для $\Delta x = t\xi_1$, получим $f(x_0+t\xi_1)-f(x_0)=\Delta f=\frac{1}{2}k(\Delta x)+o(|\Delta x|^2)=\frac{1}{2}k(t\xi_1)+o(t^2)=t^2\left(k(\xi_1)+\frac{o(t^2)}{t^2}\right)$ при $t\to 0$. Поэтому

$$\exists\delta_1>0:\ \forall t\in(0,\delta_1)\hookrightarrow\ \Delta f=f(x_0+t\xi_1)-f(x_0)>0.$$

Аналогично,

$$\exists\delta_2>0:\ \forall t\in(0,\delta_2)\hookrightarrow\ \Delta f=f(x_0+t\xi_2)-f(x_0)<0.$$

Поэтому $\forall\delta>0\quad\exists t_1=\min\left\{\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta}{2|\xi_1|}\right\}$, $\exists t_2=\min\left\{\frac{\delta_2}{2},\frac{\delta}{2|\xi_2|}\right\}$ такие, что $x_1=x_0+t_1\xi_1\in U_\delta(x_0)$, $\quad x_2=x_0+t_2\xi_2\in U_\delta(x_0)$, $\quad f(x_1)-f(x_0)>0$, $\quad f(x_2)-f(x_0)<0$. Следовательно, точка x_0 не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума функции f.

4) Пусть $f(x)$ – функция одной переменной $x\in\mathbb{R}$. Тогда в случае $f''(x_0)=0$ квадратичная форма $d^2f(x_0)[dx]=f''(x_0)\,(dx)^2$ не является положительно определенной, отрицательно определенной, а также не является знаконеопределенной.

Для функции $f(x)=x^4$ имеем $f''(0)=0$, а точка $x_0=0$ является точкой минимума.

Для функции $f(x)=x^3$: $f''(0)=0$, а точка $x_0=0$ не является точкой экстремума. $\square$

Задача 1. Пусть функция $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и $\det f''_{xx}(x_0)<0$. Может ли функция f достигать локальный безусловный экстремум в точке x_0?

§ 2. Условный экстремум

Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданы скалярная целевая функция $f(x)$ и вектор-функция $g(x) = \begin{pmatrix} g^1(x) \\ \cdots \\ g^m(x) \end{pmatrix}$, задающая ограничения. Рассмотрим задачу отыскания экстремума целевой функции $f(x)$ на множестве

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = \overline{0}_m\} :$$

Исследовать на экстремум $f(x)$ *по* $x \in \mathbb{R}^n$ *таким, что* $g(x) = \overline{0}_m$. (1)

Далее будем всегда предполагать, что число ограничений $g^i(x) = 0$ меньше числа переменных x^j: $\quad m < n$.

Определение. *Функцией Лагранжа* для задачи (1) называется функция

$$L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x), \tag{2}$$

где вектор $\lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ называется вектором *множителей Лагранжа.*

Давая неформальное описание метода множителей Лагранжа, Жозеф Луи Лагранж сформулировал принцип, состоящий в том, что для отыскания решения задачи (1) следует составить функцию (2) и действовать так, как будто мы исследуем эту функцию на безусловный экстремум. Далее мы сформулируем и докажем две теоремы – о необходимых и о достаточных условиях условного экстремума, которые соответствуют принципу Лагранжа и представляют собой инструмент для исследования экстремума в задаче (1).

Теорема 1. (Необходимые условия экстремума.) *Пусть* x_0 *– точка локального экстремума в задаче (1). Пусть функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема, а вектор-функция* $g(x)$ *гладкая в окрестности точки* x_0*. Пусть матрица* $\mathcal{D}\, g(x_0)$ *имеет полный ранг* m*.*

Тогда существует вектор множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^m$ такой, что точка $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ является стационарной точкой функции Лагранжа.

Теорема 2. (Достаточные условия экстремума.) *Пусть $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0. Пусть вектор-функция $g(x)$ является гладкой в окрестности точки $x_0 \in \in \mathbb{R}^n$ и матрица $\mathcal{D}\, g(x_0)$ имеет полный ранг m. И пусть $k(dx) = = (dx)^T L''_{xx}(x_0, \lambda_0)\, dx$ – второй дифференциал функции Лагранжа по переменным x. Тогда*

1) если квадратичная форма $k(dx)$ положительно определена на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$, т. е. $k(dx) > 0 \quad \forall dx \in \widetilde{T}_{x_0}(M) \backslash \{\,\overline{0}\,\}$, то x_0 – точка строгого локального минимума в задаче (1);

2) если квадратичная форма $k(dx)$ отрицательно определена на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$, т. е. $k(dx) < 0 \quad \forall dx \in \widetilde{T}_{x_0}(M) \backslash \{\,\overline{0}\,\}$, то x_0 – точка строгого локального максимума в задаче (1);

3) если квадратичная форма $k(dx)$ знаконеопределена на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$, т. е. существуют векторы $\xi_1, \xi_2 \in \widetilde{T}_{x_0}(M)$: $k(\xi_1) > 0$, $k(\xi_2) < 0$, то x_0 не является точкой локального экстремума в задаче (1);

4) если условия предыдущих пунктов не выполнены, то точка x_0 может быть точкой локального экстремума в задаче (1), а может и не быть ею.

Общие построения для доказательства теорем 1, 2.

Обозначим $y^i(x) = g^i(x)$ при $i \in \overline{1, m}$. В силу теоремы о построении криволинейной системы координат, исходя из ее части найдутся гладкие функции $y^{m+1}(x), \ldots, y^n(x)$ такие, что набор функций $(y^1, \ldots, y^n)$ составляет криволинейную систему координат в окрестности точки x_0. Рассмотрим отображение $y(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) \\ \ldots \\ y^n(x) \end{pmatrix}$, через $x(y)$ обозначим обратное к нему отображение. Через $\widetilde{f}(y)$ и $\widetilde{L}(y, \lambda)$ обозначим функцию f и функцию Лагранжа L, выраженные через координаты y:

$$\widetilde{f}(y) := f(x(y)), \qquad \widetilde{L}(y, \lambda) := L(x(y), \lambda).$$

Подставляя в формулу (2) $x(y)$ вместо x, получаем

$$\widetilde{L}(y,\lambda) = f(x(y)) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i = \widetilde{f}(y) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i. \tag{3}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y,\lambda) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y) - \lambda_i \qquad \forall i \in \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y,\lambda) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y) \qquad \forall i \in \overline{m+1,n}. \tag{5}$$

Обозначим $y_0 := y(x_0)$.

Точка x_0 доставляет локальный минимум (максимум) функции $f(x)$ при условиях $g^i(x) = 0$, $i \in \overline{1,m}$ тогда и только тогда, когда точка y_0 доставляет локальный минимум (максимум) функции $\widetilde{f}(y)$ при условиях $y^1 = \ldots = y^m = 0$, т.е. точка $(y_0^{m+1},\ldots,y_0^n)$ доставляет безусловный локальный минимум (максимум) функции $\widetilde{f}(0,\ldots,0,y^{m+1},\ldots,y^n)$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть x_0 – точка локального экстремума в задаче (1). Тогда точка $(y_0^{m+1},\ldots,y_0^n)$ – точка безусловного экстремума функции $\widetilde{f}(0,\ldots,0,y^{m+1},\ldots,y^n)$. Из теоремы о необходимом условии безусловного экстремума получаем, что

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y_0) = 0 \qquad \forall i \in \overline{m+1,n}. \tag{6}$$

Полагая $\lambda_i = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y_0)$ при $i \in \overline{1,m}$ и используя равенства (4)–(6), получаем

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda) = 0 \qquad \forall i \in \overline{1,n}.$$

По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\frac{\partial L}{\partial x^j}(x_0,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda) \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0) = 0 \qquad \forall j \in \overline{1,n}.$$

Отсюда и из равенств

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^i}(x_0,\lambda) = -g^i(x_0) = 0 \qquad \forall i \in \overline{1,m}$$

следует, что $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа $L(x,\lambda)$.

$\square$

Доказательство теоремы 2.

Пусть $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа $L(x,\lambda)$. Тогда согласно теореме о дифференцировании сложной функции $\begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа $\widetilde{L}(y,\lambda)$. Отсюда и из формулы (5) следует, что

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y_0) = 0 \qquad \forall i \in \overline{m+1,n},$$

то есть выполнены необходимые условия безусловного экстремума функции $\widetilde{f}(0,\dots,0,y^{m+1},\dots,y^n)$ в точке $(y_0^{m+1},\dots,y_0^n)$. Согласно теореме о достаточных условиях безусловного экстремума характер экстремума функции $\widetilde{f}(0,\dots,0,y^{m+1},\dots,y^n)$ в этой точке определяется характером знакоопределенности второго дифференциала этой функции, т.е. квадратичной формы

$$\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0)\, dy^i\, dy^j .$$

Согласно равенству (3) эта квадратичная форма совпадает с квадратичной формой

$$\widetilde{m}(dy^{m+1},\dots,dy^n) := \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0,\lambda)\, dy^i\, dy^j . \tag{7}$$

Осталось доказать, что характер знакоопределенности квадратичной формы (7) на пространстве $\mathbb{R}^{n-m}$ совпадает с характером знакоопределенности квадратичной формы

$$k(dx) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0,\lambda)\, dx^i\, dx^j$$

на касательном пространстве $\widetilde{T}_{x_0}(M)$.

Дифференцируя равенство $L(x,\lambda) = \widetilde{L}(y(x),\lambda)$ при фиксированном λ, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x^i}(x,\lambda)\,dx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y(x),\lambda)\ dy^i(x).$$

Еще раз дифференцируя полученное равенство в точке (x_0,λ), имеем

$$k(dx) = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0,\lambda)\,dx^i\,dx^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0,\lambda)\ dy^i(x_0)\ dy^j(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda)\ d^2y^i(x).$$

Поскольку (y_0,λ) – стацинарная точка функции $\widetilde{L}(y,\lambda)$, то $\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda) = 0$, а значит,

$$k(dx) = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0,\lambda)\ dy^i\ dy^j, \tag{8}$$

где $dy^i = dy^i(x_0)[dx] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0)\ dx^j$.

Согласно теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений,

$$dx \in \widetilde{T}_{x_0}(M) \quad \Leftrightarrow \quad dg(x_0)[dx] = \overline{0}_m \quad \Leftrightarrow \quad dy^i(x_0)[dx] = 0 \quad \forall i \in \overline{1,m}.$$

Отсюда и из равенства (8) следует, что характер знакоопределенности квадратичной формы $k(dx)$ на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$ совпадает с характером знакоопределенности квадратичной формы

$$\sum_{i=m+1}^{n}\ \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0,\lambda)\ dy^i\ dy^j$$

на $\mathbb{R}^{n-m}$, т.е. с характером знакоопределенности квадратичной формы (7). $\square$

Пример 1. Достигается ли в точке $(0,0)$ локальный экстремум в задаче

$$\text{на экстремум } f(x,y) = 3y - 2x \text{ по } (x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad y+e^{2y}=x+e^x? \tag{9}$$

Решение. Поскольку уравнение $x+e^x = y+e^{2y}$ неразрешимо относительно x или y, то воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид $L(x,y,\lambda) = 3y - 2x - \lambda(y + e^{2y} - x - e^x)$. Найдем стационарные точки функции Лагранжа:

$$\left\{\begin{array}{l} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{c} -2 + \lambda(1 + e^x) = 0, \\ 3 - \lambda(1 + 2e^{2y}) = 0, \\ y + e^{2y} - x - e^x = 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

Получилась система из трех уравнений для определения стационарных точек функции Лагранжа. В данном примере рассматривается точка $(x_0, y_0) = (0,0)$. Подставляя $x = 0$, $y = 0$ в систему (10), получаем, что точка $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ является стационарной точкой функции Лагранжа. Согласно теореме 2, теперь нужно исследовать знакоопределенность второго дифференциала функции $L(x,y,\lambda) = 3y - 2x - (y + e^{2y} - x - e^x)$ на $\widetilde{T}_{x_0}$. Поскольку $d^2L(x,y,\lambda) = e^x(dx)^2 - 4e^{2y}(dy)^2$, то $d^2L(x_0,y_0,\lambda) = (dx)^2 - 4(dy)^2$. Найдем касательное подпространство:

$$\widetilde{T}_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \;:\; d(x + e^x - y - e^{2y})\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \;:\; 2dx - 3dy = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}dy \\ dy \end{pmatrix} \;:\; dy \in \mathbb{R} \right\}.$$

Поэтому при $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \in \widetilde{T}_{x_0} \setminus \{\,\overline{0}\,\}$: $\quad d^2L(x_0,y_0,\lambda) = (\frac{3}{2}dy)^2 - 4(dy)^2 = -\frac{7}{4}(dy)^2 < 0$. Следовательно, квадратичная форма $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ отрицательно определена на $\widetilde{T}_{x_0}$. Поэтому $(0,0)$ – точка локального максимума в задаче (9).

Глава 17

МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Топологическое пространство

В предыдущем параграфе мы рассматривали подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$. В дальнейшем будет удобнее забыть об объемлющем пространстве $\mathbb{R}^N$ и рассматривать многообразие M само по себе. Для того, чтобы дать общее (абстрактное) определение многообразия M нужно использовать понятие топологического пространства.

Определение. *Топологическим пространством* (X, τ) называется пара, состоящая из множества X и топологии τ, т.е. семейства подмножеств множества X таких, что

1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

2) если $X_\lambda \in \tau\ \forall \lambda \in \Lambda$, то $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \in \tau$;

3) если $X_1, X_2 \in \tau$, то $X_1 \cap X_2 \in \tau$.

Множество $U \subset X$ называется *открытым* в топологическом пространстве (X, τ), если $U \in \tau$.

Замечание. Поскольку семейство открытых множеств в любом метрическом пространстве (в частности, в $\mathbb{R}^n$) удовлетворяет определению топологии, то любое метрическое пространство является топологическим пространством. Семейство всех открытых подмножеств метрического пространства X с метрикой ϱ называется *топологией в X, порожденной метрикой ϱ.*

Определение. *Окрестностью точки* $x \in X$ в топологическом пространстве (X, τ) называется любое открытое множество $U(x) \subset X$, содержащее точку x.

Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $A \subset X$. *Внутренностью* $\operatorname{int} A$ множества A называется множество точек $x \in X$, для которых существует окрестность $U(x) \subset A$. *Замыканием* $\overline{A}$ множества A называется множество точек $x \in X$ таких, что $U(x) \cap A \neq \emptyset$ для любой окрестности $U(x)$ точки x. Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если $\overline{A} \subset A$.

Определение. Пусть (X, τ_X) – топологическое пространство, $A \subset \subset X$. Определим τ_A как семейство множеств V вида $V = U \cap A$, где $U \in \tau_X$. Тогда τ_A называется топологией на множестве A, *индуцированной* топологией τ_X.

Лемма 1. *Пусть (X, τ_X) – топологическое пространство, $A \subset X$, τ_A – топология на A, индуцированная топологией τ_X. Тогда (A, τ_A) – топологическое пространство.*

Доказательство. 1) Так как $\emptyset \in \tau_X$, то $\emptyset = \emptyset \cap A \in \tau_A$. Поскольку $X \in \tau_X$, то $A = X \cap A \in \tau_A$.

2) Пусть $V_\lambda \in \tau_A \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ найдется множество $U_\lambda \in \tau_X$ такое, что $V_\lambda = U_\lambda \cap A$. Поскольку $U := \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \in \tau_X$, то $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = U \cap A \in \tau_A$.

3) Пусть $V_1, V_2 \in \tau_A$. Тогда найдутся множества $U_1, U_2 \in \tau_X$ такие, что $V_i = U_i \cap A$ при $i = 1, 2$. Поскольку $U_1 \cap U_2 \in \tau_X$, то $V_1 \cap \cap V_2 = U_1 \cap U_2 \cap A \in \tau_A$. $\square$

Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют их непересекающиеся окрестности.

Определение. Будем говорить, что элемент $x_0 \in X$ является пределом последовательности $\{x_k\}$ элементов топологического пространства (X, τ) и писать $x_k \xrightarrow{\tau} x_0$, если

$$\forall U(x_0)\ \exists N:\ \forall k \geq N \hookrightarrow\ x_k \in U(x_0),$$

где $U(x_0)$ – окрестность точки x_0.

Замечание. Если топологическое пространство (X, τ) хаусдорфово, то у последовательности $\{x_n\}$ элементов этого пространства не может быть двух различных пределов. Это доказывается так же, как и для числовой последовательности.

Замечание. Если топологическое пространство (X, τ) не является хаусдорфовым, последовательность $\{x_n\}$ может иметь несколько различных пределов в этом пространстве. Рассмотрим множество $X = \{a, b\}$, состоящее из двух различных элементов a и b. Рассмотрим минимальную топологию $\tau = \{X, \emptyset\}$ на X. Окрестностью точки a (и, аналогично, точки b) является только множество X. Поэтому пространство (X, τ) не является хаусдорфовым. Любая последовательность $\{x_n\}$ в X имеет два различных предела: a и b.

Лемма 2. *Любое метрическое пространство (в частности, любое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ с индуцированной топологией) является хаусдорфовым.*

Доказательство. Пусть X – метрическое пространство с метрикой ϱ. Пусть точки $x_1, x_2 \in X$ различны. Определим $\varepsilon := \frac{\varrho(x_1,x_2)}{2}$. Тогда $\varepsilon > 0$ и множества $U_\varepsilon(x_i) = \{x \in X : \ \varrho(x, x_i) < \varepsilon\}$ являются непересекающимися окрестностями точек x_i. $\square$

Определение. *Базой* топологического пространства (X, τ) называется такое семейство $\mathcal{F}$ открытых подмножеств X, что каждое открытое подмножество X является объединением некоторого набора элементов семейства $\mathcal{F}$.

Лемма 3. *Любое подмножество X пространства $\mathbb{R}^n$ с индуцированной топологией является топологическим пространством со счетной базой.*

Доказательство. В качестве счетной базы на X можно взять семейство множеств, полученных путем пересечения множества X с открытыми шарами в $\mathbb{R}^n$ с рациональными радиусами и центрами в точках $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с рациональными координатами x_i. $\square$

Определение. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – топологические пространства.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $U(f(x_0)) \in \tau_Y$ точки $f(x_0)$ найдется окрестность $U(x_0) \in \tau_X$ точки x_0 такая, что $f\Big(U(x_0)\Big) \subset U(f(x_0))$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *секвенциально непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_k\}$ элементов X из сходимости $x_k \xrightarrow{\tau_X} x_0$ следует сходимость $f(x_k) \xrightarrow{\tau_Y} f(x_0)$

Отображение $f : X \to Y$ называется *(секвенциально) непрерывным*, если оно (секвенциально) непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно, непрерывно и обратное к нему отбражение $f^{-1} : Y \to X$ непрерывно.

Замечание. Легко видеть, что из непрерывности отображения f следует его секвенциальная непрерывность. Обратное в общем случае неверно. В случае, если топология τ_X имеет счетную базу, непрерывность отображения $f : X \to Y$ эквивалентна его секвенциальной непрерывности.

Далее в определении многообразия будет требоваться, что оно является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой. При этих требованиях справедливы привычные нам свойства пределов и непрерывных отображений.

Лемма 4. *Пусть* (X, τ_X) *и* (Y, τ_Y) *– топологические пространства, отображение* $f : X \to Y$ *непрерывно. Тогда для любого открытого множества* $A \in \tau_Y$ *его прообраз* $f^{-1}(A) := \{x \in X : \ f(x) \in A\}$ *является открытым в топологии* τ_X*.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in f^{-1}(A)$. Так как $f(x) \in A$, то множество A является окрестностью точки $f(x)$. По определению непрерывности отображения f найдется окрестность $U(x) \in \tau_X$ точки x такая, что $f(U(x)) \subset A$, а значит, $U(x) \subset \subset f^{-1}(A)$. Поэтому $f^{-1}(A) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(A)} U(x)$ и, следовательно, множество $f^{-1}(A)$ открыто как объединение открытых множеств $U(x)$. $\square$

Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *компактным*, если из любого открытого покрытия множества X можно выделить его конечное подпокрытие.

Топологическое пространство (X, τ) называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности элементов $x_k \in X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Множество $A \subset X$ в топологическом пространстве (X, τ) называется (секвенциально) компактным или (секвенциальным) компактом, если топологическое пространство A с топологией, индуцированной топологией τ, является (секвенциально) компактным.

Замечание. Из компактности топологического пространства следует его секвенциальная компактность. Обратное в общем случае неверно. Для метрических пространств компактность эквивалентна секвенциальной компактности.

Лемма 5. *Пусть* (X, τ_X) *– компактное топологическое пространство,* (Y, τ_Y) *– топологическое пространство, отображение* $f : X \to Y$ *непрерывно. Тогда* $f(X)$ *– компакт в* (Y, τ_Y).

Доказательство. Пусть $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое покрытие множества $f(X)$. В силу леммы 4 для любого $\lambda \in \Lambda$ множество $U_\lambda :=$ $= f^{-1}(V_\lambda)$ открыто. В силу компактности (X, τ_X) из открытого покрытия $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ множества X можно выделить его конечное подпокрытие $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$. Тогда $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ – конечное подпокрытие множества $f(X)$. □

Лемма 6. *Пусть* $A \subset X$ *– компакт в хаусдорфовом топологическом пространстве* (X, τ). *Тогда множество* A *замкнуто в* (X, τ).

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in X \setminus A$. В силу хаусдорфовости (X, τ) для каждой точки $a \in A$ найдутся окрестность $U(a)$ точки a и окрестность $U_a(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$U(a) \cap U_a(x_0) = \emptyset. \tag{1}$$

Согласно компактности A из его открытого покрытия $\{U(a)\}_{a\in A}$ можно выделить его конечное подпокрытие $\{U(a_k)\}_{k=1}^{k_0}$: $A \subset$ $\subset \bigcup\limits_{k=1}^{k_0} U(a_k)$. Рассмотрим окрестность $\widehat{U}(x_0) := \bigcap\limits_{k=1}^{k_0} U_{a_k}(x_0)$ точки x_0. Из соотношения (1) следует, что $U(a_k) \cap \widehat{U}(x_0) = \emptyset$ при всех $k \in \overline{1, k_0}$, а значит, $A \cap \widehat{U}(x_0) = \emptyset$. Следовательно, $x_0 \notin \overline{A}$. Итак, $X \setminus A \subset X \setminus \overline{A}$, а значит, $\overline{A} \subset A$, т.е. множество A замкнуто. □

Теорема 1. (Достаточное условие гомеоморфизма.) *Пусть* (X, τ_X) *– компактное топологическое пространство,* (Y, τ_Y) *– хаусдорфово топологическое пространство, отображение* $f : X \to Y$ *взаимно однозначно и непрерывно. Тогда* f *– гомеоморфизм из* X *в* Y.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $y_0 \in Y$. Требуется доказать непрерывность отображения f^{-1} в точке y_0. Обозначим $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Фиксируем произвольную окрестность $U(x_0) \in \tau_X$ точки x_0 требуется найти окрестность $V(y_0) \in \tau_Y$ точки y_0 такую, что

$$f^{-1}(V(y_0)) \subset U(x_0). \tag{2}$$

Покажем компактность множества $X_0 := X \setminus U(x_0)$ в (X, τ_X). Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое покрытие множества X_0. Тогда $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \cup \{U(x_0)\}$ – открытое покрытие множества X. В силу компактности (X, τ_X) из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'} \cup \{U(x_0)\}$. Тогда $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ – конечное подпокрытие множества X_0. Следовательно, X_0 – компакт. Согласно лемме 5 множество $f(X_0)$ – компакт в (Y, τ_Y), а значит, в силу леммы 6 оно замкнуто. Из взаимной однозначности f следует, что $f(X_0) = = Y \setminus f(U(x_0))$, а значит, множество $f(U(x_0))$ открыто в (Y, τ_Y). Поэтому $V(y_0) := f(U(x_0))$ – окрестность точки y_0, удовлетворяющая условию (2). $\square$

Определение. Множество A в топологическом пространстве (X, τ_X) называется ***гомеоморфным*** множеству B в топологическом пространстве (Y, τ_Y), если существует гомеоморфизм из A в B.

Замечание. Если множество A гомеоморфно множеству B, то множество B гомеоморфно множеству A. Если A гомеоморфно B, а B гомеоморфно C, то A гомеоморфно C. Это следует из того, что отображение, обратное к гомеоморфизму, является гомеоморфизмом и суперпозиция двух гомеоморфизмов также гомеоморфизм.

Определение. Свойство множеств, которое сохраняется при любом гомеоморфизме, называется *топологическим инвариантом.*

Определение. Топологическое пространство X называется *линейно-связным*, если для любых его точек P и Q существует непрерывная функция $r : [0,1] \to X$ такая, что $r(0) = P$ и $r(1) = Q$.

Замечание. Компактность и линейная связность являются топологическими инвариантами, поскольку они сохраняются при любом непрерывном отображении.

$\triangleright$

Лемма 7. *1) Единичная сфера $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ не гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^k$ при любом $k \in \mathbb{N}$.*

2) Пусть $\overset{o}{S}{}^{n-1} = S^{n-1} \setminus \{P\}$ – единичная сфера с выколотой точкой $P \in S^{n-1}$. Множество $\overset{o}{S}{}^{n-1}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^{n-1}$.

Доказательство. 1) Поскольку единичная сфера S^{n-1} является компактом, пространство $\mathbb{R}^k$ компактом не является, а компактность – топологический инвариант, то множества S^{n-1} и пространство $\mathbb{R}^k$ не гомеоморфны.

2) Без потери общности будем считать, что $P = (0, \dots, 0, 1)$. Рассмотрим отображение $\varphi : \overset{o}{S}{}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \overset{o}{S}{}^{n-1},$$

задающее стереографическую проекцию, а также обратное отображение $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to \overset{o}{S}{}^{n-1}$

$$\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{1}{|y|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \dots \\ 2y_{n-1} \\ |y|^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

Из непрерывности отображений φ и φ^{-1} следует, что φ – гомеоморфизм. $\square\triangleleft$

Пример 1. Покажем, что полуинтервал $[a, b)$ не гомеоморфен интервалу (c, d). Предположим противное: существует гомеоморфизм $f : [a, b) \to (c, d)$. Обозначим $y_0 := f(a)$. Тогда $y_0 \in (c, d)$ и интервал (a, b) гомеоморфен множеству $(c, y_0) \cup (y_0, d)$. Это противоречит тому, что линейная связность является топологическим инвариантом.

§ 2. Карта на топологическом пространстве и параметризация гладкого подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$

В дальнейшем для краткости в случае, если понятно о какой топологии идет речь, вместо «топологическое пространство (X, τ)» будем писать «топологическое пространство X».

Определение. Множество V называется *n-мерной допустимой областью параметров*, если V – открытое подмножество одного из следующих трех топологических пространств: $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n_- = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \; x^1 \le 0 \right\} \quad \text{или} \quad \mathbb{R}^n_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \; x^1 \ge 0 \right\},$$

где топологии в $\mathbb{R}^n_-$ и $\mathbb{R}^n_+$ индуцированы топологией пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. Открытый круг $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$ и полукруг $D_- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1, \ x \leq 0 \right\}$ являются двумерными допустимыми областями параметров, т.к. они окрыты в в топологических пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2_-$ соответственно. Замкнутый круг $\overline{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ не является допустимой областью параметров, т.к. он не является открытым подмножеством ни одного из топологических пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$, $\mathbb{R}^n_+$.

Определение. Пара (ψ, U) называется n-мерной ***картой*** на топологическом пространстве M, если U – открытое множество топологического пространства M, $\psi : V \to U$ – гомеоморфизм из V в U, V – n-мерная допустимая область параметров. При этом

а) гомеоморфизм ψ называется ***гомеоморфизмом карты*** или ***параметризацией карты*** (ψ, U),

б) множество U называется *районом действия*, а

в) множество V – *областью параметров* этой карты.

Замечание. Пусть для карты (ψ, U) на топологическом пространстве M область параметров $V := \psi^{-1}(U)$ является открытым подмножеством $\mathbb{R}^n_+$. Рассмотрим симметричное множеству V множество

$$V_- := \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} : \ \begin{pmatrix} -x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V \right\}$$

и отображение

$$\psi_- : V_- \to U, \quad \psi_-(x^1, x^2, \dots, x_n) = \psi(-x^1, x^2, \dots, x_n) \quad \forall \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V_-.$$

Тогда V_- – открытое подмножество $\mathbb{R}^n_-$ и районы действия карт (ψ, U) и (ψ_-, U) совпадают: $U = \psi(V) = \psi_-(V_-)$.

Имея в виду замену карты (ψ, U) на карту (ψ_-, U), можно рассматривать только карты, области параметров которых являются открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$, исключая $\mathbb{R}^n_+$ из определения допустимой области параметров. Однако переход от карты (ψ, U) к карте (ψ_-, U), как мы увидим позже, изменяет ориентацию. При рассмотрении вопроса ориентации многообразия будет существенно, что допустимой областью параметров может быть открытое подмножество любого из трех топологических пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$, $\mathbb{R}^n_+$.

Лемма 1. *Пусть $f : X \to U(P)$ – канонический диффеоморфизм для $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ в точке $P \in M$, множество $X \subset \mathbb{R}^N$ открыто, $U(P)$ – окрестность точки P в $\mathbb{R}^N$, $U^M = M \cap U(P)$. Тогда*

а) *множество*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in f^{-1}(U^M) \quad \right\} \tag{1}$$

является допустимой областью параметров;

б) *отображение $\psi : V \to U^M$, заданное формулой*

$$\psi(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0), \qquad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V, \tag{2}$$

является гомеоморфизмом из $V \subset \mathbb{R}^n$ в $U^M \subset \mathbb{R}^N$ в смысле топологий пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^N$.

в) *пара (ψ, U^M) является картой на топологическом пространстве M, топология которого индуцирована топологией пространства $\mathbb{R}^N$.*

Доказательство. По определению канонического диффеоморфизма выполнено одно из равенств

$$f^{-1}(U^M) = L^n \cap X \tag{3}$$

или

$$f^{-1}(U^M) = L^n_- \cap X, \tag{4}$$

а) Если выполнено равенство (3), то

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in X \right\}.$$

Если выполнено равенство (4), то

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_- : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in X \right\}.$$

Так как функция $g(x^1, \dots, x^n) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ непрерывна, то согласно лемме 4 множество V является открытым подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$.

б) Если выполнено равенство (3), то

$$\psi(V) = \left\{ f(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) : \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V \right\} =$$

$$= \left\{ f(x^1, \dots, x^N) : \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^N \end{pmatrix} \in L^n \cap X \right\} = f(L^n \cap X) = U^M.$$

Если выполнено равенство (4), то

$$\psi(V) = \left\{ f(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) : \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V \right\} =$$

$$= \left\{ f(x^1, \dots, x^N) : \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^N \end{pmatrix} \in L^n_- \cap X \right\} = f(L^n_- \cap X) = U^M.$$

Поэтому в любом случае $\psi(V) = U^M$.

Для любой точки $p \in U(P)$ через $x^i(p)$ обозначим координаты вектор-функции $f^{-1}(p)$: $f^{-1}(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ x^N(p) \end{pmatrix}$. Пусть $\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V$, $\psi(x^1, \dots, x^n) = p$. Тогда $f(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) = p$, а значит,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = f^{-1}(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^N(p) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отображение $\psi : V \to U^M$ взаимно однозначно и $\psi^{-1}(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ x^n(p) \end{pmatrix}$. Так как координаты вектор-функции $\psi^{-1}(p)$ являются координатами непрерывной вектор-функции $f^{-1}(p)$, то отображение $\psi^{-1} : U^M \to V$ также непрерывно. Поэтому ψ является гомеоморфизмом из V в U^M.

Из пунктов (а), (б) и определения карты получаем пункт (в). $\square$

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ и f – канонический диффеоморфизм для M в точке $P \in M$. Пусть для карты (ψ, U^M) выполняется соотношение (2), где $V = \psi^{-1}(U^M)$. Тогда будем говорить, что *карта* (ψ, U^M) *порождена каноническим диффеоморфизмом* f. Если для карты (ψ, U^M) найдется окрестность $U^M_P \subset U^M$ точки P (окрестность в смысле топологического пространства M) такая, что карта (ψ, U^M_P) порождена каноническим диффеоморфизмом f для M в точке P, то будем говорить, что *карта* (ψ, U^M) *в некоторой окрестности точки* P *порождена каноническим диффеоморфизмом* f.

Ранее (§5 глава 13) были определены классы $C^k(X, Y)$ k раз непрерывно дифференцируемых отображений из $X \subset \mathbb{R}^n$ в $Y \subset \mathbb{R}^m$ при условии, что множество X открыто в $\mathbb{R}^n$. Распространим это определение на случай, когда X – допустимая область параметров.

Определение классов $C^k(V,Y)$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$. Пусть V – допустимая область параметров, Y – произвольное подмножество $\mathbb{R}^m$. Класс $C^0(V,Y) = C(V,Y)$ состоит из непрерывных отображений $f : V \to Y$. Класс $C^k(V,Y)$ при $k \in \mathbb{N}$ состоит из отображений $f : V \to Y$ таких, что их можно продолжить до k раз непрерывно дифференцируемых отображений $\tilde{f} \in C^k(\tilde{V},\mathbb{R}^m)$, где $\tilde{V}$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $V \subset \tilde{V}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in V$. Класс $C^\infty(V,Y)$ определяется как пересечение классов $C^k(V,Y)$ по всем $k \in \mathbb{N}$. Отображения $f \in C^k(V,Y)$ будем называть C^k-гладкими.

Замечание. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ и карта (ψ, U^M) порождена некоторым каноническим диффеоморфизмом f для M в точке P, $V = \psi^{-1}(U^M)$, $x_0 = \psi^{-1}(P)$. Тогда

$$\psi \in C^\infty(V,\mathbb{R}^N), \qquad \operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x_0) = n. \tag{5}$$

Условие $\psi \in C^\infty(V,\mathbb{R}^N)$ следует из формулы (2) и гладкости диффеоморфизма f. Поскольку столбцы матрицы $\mathcal{D}\,\psi$ являются первыми n столбцами невырожденной матрицы $\mathcal{D}\,f$, то $\operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x_0) = n$.

Теорема 1. (О гладком подмногообразии, заданном параметрически.) *Пусть n-мерная карта (ψ, U^M) на топологическом пространстве $M \subset \mathbb{R}^N$ (топология на M индуцирована топологией пространства $\mathbb{R}^N$) удовлетворяет условиям (5), где $x_0 \in V := \psi^{-1}(U^M)$. Тогда $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$, где $P = \psi(x_0)$. При этом карта (ψ, U^M) в некоторой окрестности точки P порождена некоторым каноническим диффеоморфизмом f.*

Доказательство. Согласно замечанию, сделанному после определения карты, можно считать, что V – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$.

В силу условия $\operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x_0) = n$ по теореме о ранге матрица $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$ имеет n линейно независимых строк. Для определенности предполагаем, что первые n строк этой матрицы линейно независимы. Пусть

$$\psi(x^1,\ldots,x^n) = \begin{pmatrix} \psi^1(x^1,\ldots,x^n) \\ \cdots \\ \psi^N(x^1,\ldots,x^n) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение

$$f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \psi^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots \\ \psi^n(x^1, \ldots, x^n) \\ \psi^{n+1}(x^1, \ldots, x^n) + x^{n+1} \\ \ldots \\ \psi^N(x^1, \ldots, x^n) + x^N \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ x^N \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\overline{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$. Тогда $f(\overline{x}_0) = \psi(x_0) = P$. Матрица Якоби отображения f имеет вид

$$\mathcal{D}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \psi^1}{\partial x^n} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi^n}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \psi^n}{\partial x^n} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial x^n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi^N}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \psi^N}{\partial x^n} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$\det \mathcal{D}\, f(\overline{x}_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial x^1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial \psi^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi^n}{\partial x^1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial \psi^n}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

где последнее неравенство следует из того, что строки последней матрицы – это первые n строк матрицы $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$, которые линейно независимы.

Так как $\det \mathcal{D}\, f(\overline{x}_0) \neq 0$, то согласно теореме об обратном отображении сужение отображения f на некоторую окрестность точки $\overline{x}_0$ является гладким диффеоморфизмом. Поэтому набор функций $(x^1, \ldots, x^N) = f^{-1}$ является криволинейной системой координат в $U_\varepsilon(P)$ при некотором $\varepsilon > 0$. В этой системе координат множество M в $U_\varepsilon(P)$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} x^{n+1} = 0, \\ \ldots \\ x^N = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Если точка x_0 лежит на границе (в смысле топологии пространства $\mathbb{R}^n$) допустимой области параметров $V \subset \mathbb{R}^n_-$, то к системе уравнений (6) нужно добавить неравенство $x^1 \leq 0$. Тогда в криволинейной системе координат $(x^1, \ldots, x^N)$ в $U_\varepsilon(P)$ множество M имеет вид подпространства L^n или полуподпространства L^n_-. Следовательно, $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$.

Проведем детальное доказательство последнего утверждения.

Если x_0 – внутренняя точка множества V, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(x_0) \subset V$. Если x_0 лежит на границе множества $V \subset \mathbb{R}^n_-$, то найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(x_0) \cap \mathbb{R}^n_- \subset \subset V$. Согласно определению классов $C^k(V,Y)$, выбирая достаточно малое $\delta_0 > 0$, можно считать, что $\psi \in C^\infty(U_{\delta_0}(x_0), \mathbb{R}^N)$. Тогда $f \in \in C^\infty(U_{\delta_0}(\overline{x}_0), \mathbb{R}^N)$. Так как $\det \mathcal{D}\, f(\overline{x}_0) \neq 0$, то существует такое число $\delta \in (0, \delta_0]$, что сужение отображения f на $U_\delta(\overline{x}_0)$ является гладким диффеоморфизмом из $U_\delta(\overline{x}_0)$ в окрестность $U(P) \subset \mathbb{R}^N$ точки P.

Поскольку множество U^M открыто в топологическом пространстве M, то найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $U_{\varepsilon_0}(P) \cap M \subset U^M$ и $U_{\varepsilon_0}(P) \subset U(P)$. Используя непрерывность отображения ψ^{-1}, выберем число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ так, что $\psi^{-1}(U_\varepsilon(P) \cap M) \subset U_\delta(x_0)$. Полагая

$$X := \{\overline{x} \in U_\delta(\overline{x}_0) : \ f(\overline{x}) \in U_\varepsilon(P)\}, \tag{7}$$

получаем, что сужение отображения f на открытое множество X является гладким диффеоморфизмом из X в $U_\varepsilon(P)$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что для множества $U^M_P := U_\varepsilon(P) \cap U^M = U_\varepsilon(P) \cap M$ справедливо одно из равенств

$$U^M_P = f(X \cap L^n) \tag{8}$$

или

$$U^M_P = f(X \cap L^n_-). \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда x_0 – внутренняя точка множества V. В этом случае $U_{\delta_0}(x_0) \subset V$. Фиксируем произвольную точку $\overline{x} \in X \cap L^n$. Тогда существует точка $x \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0_{N-n} \end{pmatrix}$. Поскольку $\overline{x} \in X \subset U_\delta(\overline{x}_0)$, то $x \in U_\delta(x_0) \subset V$. Из определения отображения f следует равенство $f(\overline{x}) = \psi(x)$. Поэтому $f(\overline{x}) = \psi(x) \in \psi(V) = = U^M$. Итак, $f(\overline{x}) \in U_\varepsilon(P) \cap U^M = U^M_P$, что доказывает включение $f(X \cap L^n) \subset U^M_P$.

Докажем обратное включение. Фиксируем произвольную точку $p \in U^M_P$. Поскольку $p \in U^M = \psi(V)$, то найдется точка $x \in V$ такая, что $p = \psi(x)$. При этом $x \in \psi^{-1}(U_\varepsilon(P) \cap M) \subset U_\delta(x_0)$. Полагая $\overline{x} := = \begin{pmatrix} x \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix}$, получаем $\overline{x} \in U_\delta(\overline{x}_0)$ и $f(\overline{x}) = \psi(x) = p \in U_\varepsilon(P)$. Отсюда и из равенства (7) следует включение $\overline{x} \in X \cap L^n$. Поэтому $p = f(\overline{x}) \in \in f(X \cap L^n)$. Таким образом, в данном случае реализуется равенство (8).

В случае, когда x_0 – граничная точка множества V, проводя аналогичные рассуждения, с заменой L^n на L^n_- получаем равенство (9). При этом при доказательстве включения $f(X \cap L^n_-) \subset U_P^M$ вместо $x \in U_\delta(x_0) \subset V$ следует написать $x \in U_\delta(x_0) \cap \mathbb{R}^n_- \subset V$.

Поскольку согласно определению отображения f справедливо равенство $\psi(x^1, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$, то карта (ψ, U_P^M) порождена каноническим диффеоморфизмом f для M в точке P. $\square$

Замечание. Условие полного ранга матрицы Якоби $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$ существенно в теореме 1, что показывает следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим множество

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = |x|, \ x \in [-1, 1]\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{1-\frac{1}{t}}, & t \in (0, 1], \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $\beta \in C^\infty([0,1],[0,1])$ является гомеоморфизмом из $[0,1]$ в $[0,1]$ и $\beta^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому отображение $\psi : [-1, 1] \to M$, заданное формулой $\psi(t) = \begin{pmatrix} \beta(|t|) \cdot \operatorname{sign} t \\ \beta(|t|) \end{pmatrix}$, является гомеоморфизмом из $[-1, 1]$ в M, причем $\psi \in C^\infty([-1,1], M)$, однако матрица Якоби $\mathcal{D}\,\psi(0)$ имеет ранг $0 < 1 = n$. Таким образом, все условия теоремы 1 кроме условия полного ранга матрицы Якоби $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$ выполнены.

При этом M не является гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^2$ в точке $P = (0, 0)$. Действительно, в противном случае по теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$ множество $\widetilde{T}_P(M)$ было бы линейным пространством. Однако

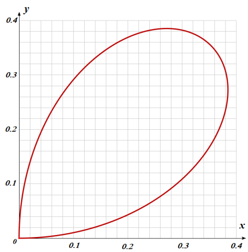
$$\widetilde{T}_P(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x \quad \text{или} \quad y = -x\}$$

не является линейным пространством.

Замечание. Условие непрерывности отображения ψ^{-1} (содержащееся в определении гомеоморфизма) существенно в теореме 1. Действительно, рассмотрим, например, множество $M = \psi([0, \frac{\pi}{2}))$, где отображение $\psi : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$ задано формулой

$$\psi(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \\ \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Отображение $\psi : [0, \frac{\pi}{2}) \to M$ является гладким и взаимно однозначным, но не является гомеоморфизмом, т.к. обратное к нему отображение ψ^{-1} не непрерывно в точке $P = (0,0)$. Остальные условия теоремы 1 выполнены. Множество M не является гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^2$ в точке P, что доказывается так же, как и в предыдущем примере.



Следствие теоремы 1.

Для множества $M \subset \mathbb{R}^N$ и точки $P \in M$ следующие условия эквивалентны:

(а) существует n-мерная карта (ψ, U^M) на топологическом пространстве M, для которой справедливы соотношения

$$\psi \in C^\infty(V, \mathbb{R}^N), \qquad \operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x_0) = n,$$

где $V = \psi^{-1}(U^M)$, $x_0 = \psi^{-1}(P)$;

(б) $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 из условия (а) следует условие (б). Обратно, пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$. В силу леммы 1 существует карта (ψ, U^M), порожденная каноническим диффеоморфизмом для M в точке P. В силу соотношений (5) выполнено условие (а). $\square$

Лемма 2. *Пусть $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$ – простая гладкая кривая, параметризованная гладкой функцией $r \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^N)$ без особых точек, т.е. $r'(t) \neq \overline{0}$. Тогда Γ – одномерное гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$.*

Доказательство. В силу достаточного условия гомеоморфизма отображение $r : [a,b] \to \Gamma$ является гомеоморфизмом.

Рассмотрим на топологическом пространстве Γ две карты (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2), где

$$\psi_1(x) = r(a+x), \quad x \in V_1 = [0, b-a), \qquad U_1 = \psi_1(V_1) = \Gamma \setminus \{r(b)\},$$

$$\psi_2(x) = r(b+x), \quad x \in V_2 = (a-b, 0], \qquad U_2 = \psi_2(V_2) = \Gamma \setminus \{r(a)\}.$$

Фиксируем произвольную точку $P \in \Gamma$. Тогда существует $t_0 \in [a,b]$: $r(t_0) = P$. Если $t_0 \neq b$, то $P \in U_1$, иначе $P \in U_2$. Так как $r'(t_0) \neq \overline{0}$, то $\operatorname{rg} \mathcal{D}\, r(t_0) = 1$. Из теоремы 1 следует, что $\Gamma \in \mathfrak{M}^1_N(P)$. $\square$

§ 3. Гладкие многообразия

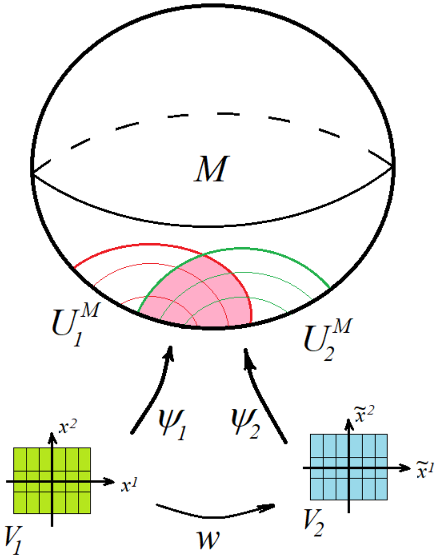
Определение. *Атласом* на топологическом пространстве (M, τ) называется набор n-мерных карт $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ на этом топологическом пространстве, районы действия которых покрывают множество M, т.е. $M = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

Определение. *n-мерным (абстрактным) многообразием* называется хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой, на котором существует атлас n-мерных карт.

Лемма 1. *Гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ удовлетворяет определению n-мерного (абстрактного) многообразия.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N$. Согласно леммам 2, 3 § 1 множество M с топологией, индуцированной топологией $\mathbb{R}^N$, является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой. Согласно лемме 1 § 2 для любой точки $P \in M$ найдется карта (ψ, U) на топологическом пространстве M, район действия которой содержит точку P. Семейство всех таких карт составляет атлас на M. $\square$

Определение замены координат. Пусть на топологическом пространстве M заданы две карты (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2), районы действия которых имеют непустое пересечение $U := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Пусть $V_1 = \psi_1^{-1}(U)$, $V_2 = \psi_2^{-1}(U)$. Тогда отображение $w : V_1 \to V_2$, $w = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ называется *заменой координат* от карты (ψ_1, U_1) к карте (ψ_2, U_2), *отображением перехода* или *отображением склейки* этих карт.



Замечание. Множества V_i, фигурирующие в предыдущем определении, являются допустимыми областями параметров, т.е. открытыми подмножествами одного из топологических пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$. Действительно, обозначим $\widetilde{V}_i := \psi_i^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$. Гомеоморфизм карты $\psi_i : \widetilde{V}_i \to M$ является непрерывным отображением относительно топологий пространств $\widetilde{V}_i$ и M, где топология в $\widetilde{V}_i$ индуцирована топологией пространства $\mathbb{R}^n$. Поскольку множество U открыто в топологическом пространстве M, то по лемме 4 § 1 множество $V_i = \psi_i^{-1}(U)$ открыто в топологическом пространстве $\widetilde{V}_i$. Согласно определению карты множество $\widetilde{V}_i$ открыто в топологическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$. Поэтому множество V_i также является открытым подмножеством соответствующего топологического пространства.

Определение. Пусть V_1 и V_2 – допустимые области параметров. Отображение $f : V_1 \to V_2$ называется гладким диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно, $f \in C^\infty(V_1, V_2)$ и $f^{-1} \in C^\infty(V_2, V_1)$, где классы $C^\infty(V_1, V_2)$ и $C^\infty(V_2, V_1)$ определены в § 2.

Определение. Атлас на n-мерном многообразии M называется *гладким атласом*, если для любых двух карт этого атласа, районы действия которых пересекаются, замена координат является гладким диффеоморфизмом.

Атлас на многообразии, состоящий из одной карты, считается гладким.

Теорема 1. (О гладком атласе на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^N$.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}_N^n$. Тогда карты на топологическом пространстве M, порожденные каноническими диффеоморфизмами на M, составляют гладкий атлас.*

Доказательство. Согласно лемме 1 § 2 для любой точки $P \in \in M$ найдется карта (ψ, U) на топологическом пространстве M, порожденная каноничеким диффеоморфизмом, район действия которой содержит точку P. Семейство всех таких карт составляет атлас на M. Покажем, что этот атлас гладкий.

Пусть карты (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2) на топологическом пространстве M порождены каноническими диффеоморфизмами для M и пусть $U := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Покажем, что отображение перехода от карты (ψ_1, U_1) к карте (ψ_2, U_2) является гладким диффеоморфизмом. Фиксируем произвольную точку $P \in U$. По условию существуют канонические диффеоморфизмы $f_i : X_i \to U(P)$, порождающие карты (ψ_i, U_i), т.е.

$$\psi_i(x^1, \dots, x^n) = f_i(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где X_i, $U(P)$ – открытые множества в $\mathbb{R}_x^N$ и $\mathbb{R}_p^N$ соответственно, $U = = M \cap U(P)$. Обозначим $V_i := \psi_i^{-1}(U)$. Выразим отображение замены координат $w = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$, $\;w : V_1 \to V_2$ через канонические диффеоморфизмы f_1 и f_2. Пусть $x \in V_1$, $y = w(x)$. Обозначим $p = \psi_1(x)$. Тогда $y = \psi_2^{-1}(p)$, т.е. $p = \psi_2(y)$. Отсюда и из (1) следует, что

$$p = f_1(x, \overline{0}_{N-n}) = f_2(y, \overline{0}_{N-n}) = f_2(w(x), \overline{0}_{N-n}).$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix} = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, \overline{0}_{N-n}) \qquad \forall x \in V_1, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} w^{-1}(y) \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix} = (f_1^{-1} \circ f_2)(y, \overline{0}_{N-n}) \qquad \forall y \in V_2. \tag{3}$$

Поскольку f_1, f_2 – гладкие диффеоморфизмы, то отображения $f_2^{-1} \circ f_1$ и $f_1^{-1} \circ f_2$ являются C^∞-гладкими. Отсюда и из формул (2), (3) следует, что отображение $w : V_1 \to V_2$ и обратное к нему $w^{-1} : V_2 \to V_1$ являются C^∞-гладкими. Поэтому w – гладкий диффеоморфизм. $\square$

Определение. Два гладких атласа на многообразии M называются *эквивалентными*, если их объединение является гладким атласом на M. Семейство всех глаких атласов, эквивалентных заданному гладкому атласу на M называется *гладкой структурой* на M.

Замечание. Легко видеть, что если атлас $\mathcal{A}_1$ эквивалентен атласу $\mathcal{A}_2$, а атлас $\mathcal{A}_2$ эквивалентен атласу $\mathcal{A}_3$, то атлас $\mathcal{A}_1$ эквивалентен атласу $\mathcal{A}_3$. Поэтому любые два атласа заданной гладкой структуры эквивалентны.

Определение. *Гладким n-мерным многообразием* называется пара $(M, \mathcal{D})$, состоящая из n-мерного многообразия M и гладкой структуры $\mathcal{D}$ на M. Семейство всех гладких n-мерных многообразий будем обозначать через $\mathfrak{M}^n$. В тех случаях, когда рассматривается только одна гладкая структура на многоообразии M, будем писать «гладкое многообразие M» или «$M \in \mathfrak{M}^n$», подразумевая многообразие M вместе с заданной на нем гладкой структурой.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что для гладкого подмногообразия M пространства $\mathbb{R}^N$ существует *естественная гладкая структура*, заданная атласом карт, порожденных каноническими диффеоморфизмами на M. Если не оговорено другое, то на $M \in \mathfrak{M}^n_N$ будем рассматривать именно эту гладкую структуру. В этом смысле любое гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ является глаким многообразием, т.е.

$$\mathfrak{M}^n_N \subset \mathfrak{M}^n.$$

Замечание. Из того, что множество $M \subset \mathbb{R}^N$ является гладким многообразием не следует, что M – гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$. Рассматривая атлас на $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ |x| \end{pmatrix} : \ x \in \mathbb{R} \right\}$, состоящий из одной карты (ψ, M), где $\psi(x) = \begin{pmatrix} x \\ |x| \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, получаем, что $M \in \mathfrak{M}^1$. Однако, как показано в примере 2 § 2, $M \notin \mathfrak{M}^1_2$.

Пример 1. Рассмотрим топологическое пространство $M = (-1, 1)$ с топологией, индуцированной топологией числовой прямой $\mathbb{R}$ и две карты (ψ_1, M) и (ψ_2, M), где $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = x^3$ при $x \in (-1, 1)$. Поскольку замена координат $(\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(x) = x^{1/3}$ является негладким отображением, то атлас, состоящий из карты (ψ_1, M) и атлас, состоящий из карты (ψ_2, M), не эквивалентны. Поэтому атласы $\{(\psi_1, M)\}$ и $\{(\psi_2, M)\}$ задают два различных гладких многообразия $(M, \mathcal{D}_1)$ и $(M, \mathcal{D}_2)$.

Пример 2. Построим гладкий атлас на окружности

$$S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \; x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

Как показано в примере 1 § 1 главы 15 отображение

$$F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

является гомеоморфизмом (и даже диффеоморфизмом) из

$$\Pi_{\varphi_0} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \; r > 0, \; \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)\}$$

в $F(\Pi_{\varphi_0})$ для любого $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Поэтому отображение

$$\psi(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

является гомеоморфизмом из $(\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ в $S^1 \setminus \{\psi(\varphi_0)\}$.

Рассмотрим допустимые области параметров в $\mathbb{R}^1$: $V_1 = (0, 2\pi)$ и $V_2 = (\pi, 3\pi)$. Обозначим через ψ_i сужение отображения ψ на множество V_i и положим $U_i := \psi_i(V_i)$ при $i = 1, 2$. Заметим, что

$$U_1 = S^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad U_2 = S^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2) – одномерные карты на топологическом пространстве S^1 (топология в $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ индуцирована топологией $\mathbb{R}^2$).

Поскольку районы действия U_i этих карт покрывают окружность S^1, то набор карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1,2}$ составляет атлас на S^1. Покажем, что этот атлас является гладким. Обозначая $U := U_1 \cap U_2$, $\widetilde{V}_i := \psi_i^{-1}(U)$ при $i = 1, 2$, получаем

$$\widetilde{V}_1 = (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi), \qquad \widetilde{V}_2 = (\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi).$$

Отображение склейки $w := \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ имеет вид

$$w(\varphi) = \begin{cases} \varphi + 2\pi, & \varphi \in (0,\pi), \\ \varphi, & \varphi \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Поскольку отображение склейки $w : \widetilde{V}_1 \to \widetilde{V}_2$ является гладким диффеоморфизмом, то набор карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1,2}$ составляет гладкий атлас на S^1.

Определение. *Картой на гладком многообразии* $(M, \mathcal{D})$ называется карта на топологическом пространстве M, совместимая с гладкой структурой $\mathcal{D}$, т.е. такая карта (ψ, U) на M, добавление которой к атласу гладкой структуры $\mathcal{D}$ сохраняет гладкость атласа. При этом набор функций $(x^1, \dots, x^n)$, равных координатам обратного гомеоморфизма $\psi^{-1} = (x^1, \dots, x^n)$ называется *локальной системой координат (ЛСК)* этой карты.

Теорема 2. (О карте на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^n$.) *Пусть* $M \in \mathfrak{M}^n_N$ *и* (ψ, U^M) *– карта на топологическом пространстве* M, $V = \psi^{-1}(U^M)$. *Следующие условия эквивалентны:*

(а) (ψ, U^M) *– карта на гладком многообразии* M, *т.е. эта карта совместима с естественной гладкой структурой на* M*;*

(б) $\psi \in C^\infty(V, \mathbb{R}^N)$ *и* $\operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x) = n \quad \forall x \in V$*;*

(в) *для любой точки* $P \in U^M$ *карта* (ψ, U^M) *в некоторой окрестности точки* P *порождена каноническим диффеоморфизмом.*

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть выполнено условие (а). Зафиксируем произвольную точку $x \in V$ и обозначим $p = \psi(x)$. Согласно теореме о гладком атласе на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^N$ существует карта (ψ_1, U_1^M), порожденная каноническим диффеоморфизмом для M такая, что $p \in U_1^M$. Обозначим $w := = \psi_1^{-1} \circ \psi$. Тогда $\psi = \psi_1 \circ w$. Поскольку отображения ψ_1 и w являются глакими, то отображение ψ является гладким в окрестности точки x. Так как $\mathcal{D}\,w = \mathcal{D}\,\psi_1^{-1} \cdot \mathcal{D}\,\psi$, то $n = \operatorname{rg} \mathcal{D}\,w(x) \le \operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x)$. Поэтому выполнено условие (б).

(б) $\Rightarrow$ (в) следует из теоремы о параметрическом способе задания гладкого подмногообразия.

(в) $\Rightarrow$ (а). Рассмотрим произвольную карту (ψ_1, U_1^M), порожденную каноническим диффеоморфизмом для M такую, что $U^M \cap U_1^M \neq \neq \emptyset$. Фиксируем произвольную точку $P \in U^M \cap U_1^M$. Согласно условию (в) найдется окрестность U_P^M точки P в топологическом пространстве M такая, что $U_P^M \subset U^M \cap U_1^M$ и карта (ψ, U_P^M) порождена каноническим диффеоморфизмом для M. В силу теоремы о гладком атласе на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^N$ отображение перехода от карты (ψ, U_P^M) к карте (ψ_1, U_1^M) является гладким. Поскольку точка $P \in U^M \cap U_1^M$ произвольна, то отображение перехода от карты (ψ, U^M) к карте (ψ_1, U_1^M) также является гладким. Аналогично, отображение обратного перехода является гладким. Поэтому отображение перехода от любой карты, порожденной каноническим диффеоморфизмом для M, к карте (ψ, U^M) является гладким диффеоморфизмом. Следовательно, карта (ψ, U^M) совместима с естественной гладкой структурой на M. $\square$

Определение классов $C^k(M_1, M_2)$. Пусть заданы два гладких многообразия M_1 и M_2, пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Через $C^k(M_1, M_2)$ обозначим класс *C^k-гладких* отображений $f : M_1 \to M_2$, т.е. таких отображений, что для любых двух карт (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2) на гладких многообразиях M_1 и M_2 соответственно, удовлетворяющих условию $f(U_1) \subset U_2$, отображение $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1$ является C^k-гладким отображением из $\psi_1^{-1}(U_1)$ в $\psi_2^{-1}(U_2)$ в смысле определения класса $C^k(V, Y)$, данного в § 2. При этом отображение $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1$ называется *координатным представлением* отображения f.

Замечание. Определение класса $C^k(M_1, M_2)$ не зависит от выбора карт на гладких многообразиях M_1 и M_2. Действительно, пусть на M_1 заданы две карты (ψ_1, U_1) и $(\tilde{\psi}_1, U_1)$ с общим районом действия U_1, а на M_2 заданы две карты (ψ_2, U_2) и $(\tilde{\psi}_2, U_2)$ с общим районом действия U_2, причем $f(U_1) \subset U_2$. Тогда включение $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1 \in \in C^k\Big(\psi_1^{-1}(U_1), \psi_2^{-1}(U_2)\Big)$ эквивалентно включению $\tilde{\psi}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\psi}_1 \in \in C^k\Big(\tilde{\psi}_1^{-1}(U_1), \tilde{\psi}_2^{-1}(U_2)\Big)$. Это следует из равенства

$$\tilde{\psi}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\psi}_1 = (\tilde{\psi}_2^{-1} \circ \psi_2) \circ (\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1) \circ (\psi_1^{-1} \circ \tilde{\psi}_1)$$

и того факта, что согласно определению гладкого атласа замены координат $\tilde{\psi}_2^{-1} \circ \psi_2$ и $\psi_1^{-1} \circ \tilde{\psi}_1$ являются гладкими диффеоморфизмами.

Замечание. Данное определение классов $C^k(M_1, M_2)$ обобщает определение классов $C^k(V, Y)$, данное в § 2, поскольку в качестве гомеоморфизмов карт на открытых подмножествах пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$ можно брать тождественное отображение.

Определение. Пусть M_1 и M_2 – гладкие многообразия. Отображение $f : M_1 \to M_2$ называется гладким диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно, $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ и $f^{-1} \in C^\infty(M_2, M_1)$. Гладкие многообразия M_1 и M_2 называются *диффеоморфными*, если между ними можно установить гладкий диффеоморфизм.

Замечание. Если (ψ, U) – карта на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, то гомеоморфизм ψ этой карты является гладким диффеоморфизмом. Действительно, пусть $V = \psi^{-1}(U)$ – область параметров этой карты. Тогда V – гладкое многообразие с атласом из одной карты (Id, V) (где Id – тождественное отображение из V в V. Поскольку отображения $\psi^{-1} \circ \psi \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$ и $(\mathrm{Id})^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{Id}$ являются C^∞-гладкими отображениями, то ψ – гладкий диффеоморфизм.

Согласно теореме о гладком атласе на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^N$ справедливо включение $\mathfrak{M}^n_N \subset \mathfrak{M}^n$. В связи с этим возникает обратный вопрос: верно ли, что любое гладкое многообразие M совпадает с точностью до гладкого диффеоморфизма с некоторым подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$ при достаточно большом N. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказательство которой выходит за рамки нашего курса.

Теорема 3. (Теорема Уитни). *Пусть M – гладкое n-мерное многообразие. Тогда M диффеоморфно n-мерному гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^{2n}$.*

Теорема 4. (О гладкости образа гладкого компактного многообразия.) *Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ компактно, отображение $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^N)$ инъективно и для любой карты (ψ, U) на гладком многообразии M выполнено условие полного ранга:*

$$\operatorname{rg} \mathcal{D}\,(\varphi \circ \psi)(x) = n \qquad \forall x \in \psi^{-1}(U).$$

Тогда $\varphi(M) \in \mathfrak{M}^n_N$.

Доказательство. Обозначим $M_1 := \varphi(M)$. В силу достаточного условия гомеоморфизма отображение $\varphi : M \to M_1$ является гомеоморфизмом из M в M_1.

Фиксируем произвольную точку $P_1 \in M_1$. Найдется точка $P \in M$ такая, что $P_1 = \varphi(P)$. Фиксируем карту (ψ, U) на гладком многообразии M такую, что $P \in U$. Множество $V := \psi^{-1}(U)$ является допустимой областью параметров. Отображение $\psi_1 := \varphi \circ \psi$ является гомеоморфизмом из V в U_1 как суперпозиция гомеморфизмов. Согласно лемме лемме 4 § 1 множество U_1 открыто в топологическом пространстве M_1. Поэтому пара (ψ_1, U_1) является n-мерной картой на топологическом пространстве M_1. При этом $\psi_1 \in C^\infty(V, \mathbb{R}^N)$ и $\operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi_1(x) = n$ для любого $x \in V$. Согласно теореме о параметрическом способе задания гладкого подмногообразия имеем $M_1 \in \in \mathfrak{M}^n_N(P_1)$. Поскольку P_1 – произвольная точка множества M_1, то $M_1 \in \mathfrak{M}^n_N$. $\square$

$\triangleright$

Определение. *Декартовым произведением топологических пространств M и N* называется топологическое пространство $M \times N$, база топологии которого состоит из декартовых произведений $U^M \times U^N$, где U^M – открытое подмножество пространства M, U^N – открытое подмножество пространства N.

Замечание. Если M и N – хаусдорфовы топологические пространства со счетными базами $\{U_i^M\}$ и $\{U_j^M\}$ соответственно, то $M \times N$ – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой $\{U_i^M \times U_j^N\}$.

Определение. Пусть M и N – гладкие многообразия с гладкими атласами $\{(\psi_i^M, U_i^M)\}$ и $\{(\psi_j^N, U_j^N)\}$. Будем предполагать, что области параметров карт этих атласов $V_i^M = (\psi_i^M)^{-1}(U_i^M)$ и $V_j^N = (\psi_j^N)^{-1}(U_j^N)$ являются открытыми подмножествами $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно (В соответствии с определением края многообразия, которое будет дано в § 6, это предположение означает, что M и N – многообразия без краев). Через (ψ_i^M, ψ_j^N) обозначим отображение из $V_i^M \times V_j^N$ в $U_i^M \times U_j^N$, которое паре параметров $(\beta, \gamma) \in V_i^M \times V_j^N$ ставит в соответствие пару $(\psi_i^M(\beta), \psi_j^N(\gamma)) \in U_i^M \times U_j^N$. *Декартовым произведением гладких многообразий M и N* называется топологическое пространство $M \times N$, гладкая структура на котором определяется гладким атласом $\left\{\Big((\psi_i^M, \psi_j^N), U_i^M \times U_j^N\Big)\right\}$.

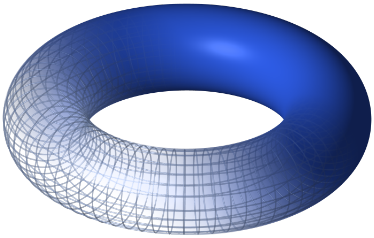
Определение. *Тором* (или *топологическим тором*) называется декартово произведение двух окружностей $S^1 \times S^1$.

Определение. *Тором в $\mathbb{R}^3$* называется множество

$$T = \{\tau(\beta, \gamma) : \ \beta \in [0, 2\pi), \ \gamma \in [0, 2\pi)\},$$

где

$$\tau(\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} x(\beta,\gamma) \\ y(\beta,\gamma) \\ z(\beta,\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a\cos\gamma)\cos\beta \\ (1+a\cos\gamma)\sin\beta \\ a\sin\gamma \end{pmatrix}, \quad a\in(0,1). \qquad (4)$$



Пример 3. Покажем, что тор в $\mathbb{R}^3$ является гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^3$ и диффеоморфен топологическому тору $S^1\times S^1$.

Обозначим

$$\psi(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix},$$

$$V_1 = (0,2\pi), \qquad V_2 = (\pi,3\pi), \qquad U_i = \psi(V_i),\ i=1,2.$$

Согласно примеру 2 набор из двух карт $\{(\psi,U_i)\}_{i=1,2}$ составляет гладкий атлас на окружности S^1. Полагая

$$\bar\psi(\beta,\gamma) = (\psi(\beta),\psi(\gamma)) \in S^1\times S^1,$$

согласно определению декартова произведения гладких многообразий, набор из четырех карт $\{(\bar\psi, U_i\times U_j)\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}$ составляет гладкий атлас на топологическом торе $S^1\times S^1$.

Рассмотрим отображение $\varphi : S^1\times S^1 \to T$, которое каждой точке $P\in$ $\in S^1\times S^1$ с координатами (β,γ) в ЛСК, соответствующей карте $(\bar\psi, U_i\times$ $\times U_j)$, сопоставляет точку $\varphi(P) := \tau(\beta,\gamma)\in T$. Значение отображения φ не зависит от карты, поскольку каждая из координат β и γ при переходе к другой карте либо не меняется, либо получает приращение $\pm 2\pi$, а это не меняет значение $\tau(\beta,\gamma)$.

Покажем, что отображение $\varphi : S^1\times S^1 \to T$ инъективно. Пусть $P_1, P_2\in$ $\in S^1\times S^1$ и $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$. Определим $\beta_i,\gamma_i\in[0,2\pi)$ из условий $P_i =$ $= \bar\psi(\beta_i,\gamma_i)$. Тогда

$$\tau(\beta_1,\gamma_1) = \varphi(P_1) = \varphi(P_2) = \tau(\beta_2,\gamma_2).$$

Отсюда согласно формуле (4) следует, что

$$\begin{pmatrix} \sqrt{x^2(\beta_1,\gamma_1)+y^2(\beta_1,\gamma_1)} \\ z(\beta_1,\gamma_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2(\beta_2,\gamma_2)+y^2(\beta_2,\gamma_2)} \\ z(\beta_2,\gamma_2) \end{pmatrix},$$

то есть,

$$\begin{pmatrix} 1+a\cos\gamma_1 \\ a\sin\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a\cos\gamma_2 \\ a\sin\gamma_2 \end{pmatrix},$$

а значит, $\gamma_1=\gamma_2$ и, еще раз используя формулу (4), получаем

$$\begin{pmatrix} \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_2 \\ \sin\beta_2 \end{pmatrix},$$

а значит, $\beta_1=\beta_2$. Следовательно, $P_1=\bar{\psi}(\beta_1,\gamma_1)=\bar{\psi}(\beta_2,\gamma_2)=P_2$. Это доказывает инъективность отображения $\varphi: S^1\times S^1\to T$.

Для любой карты атласа $\{(\bar{\psi},U_i\times U_j)\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}$ справедливо равенство $\varphi\circ\bar{\psi}=\tau$. Матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\mathcal{D}\,(\varphi\circ\bar{\psi})=\mathcal{D}\,\tau=\begin{pmatrix} -(1+a\cos\gamma)\sin\beta & -a\sin\gamma\cos\beta \\ (1+a\cos\gamma)\cos\beta & -a\sin\gamma\sin\beta \\ 0 & a\cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для этой матрицы в любой точке выполнено условие полного ранга:

$$\operatorname{rg}\mathcal{D}\,(\varphi\circ\bar{\psi})=2.$$

Согласно теореме о гладкости образа гладкого компактного многообразия тор в $\mathbb{R}^3$ $\quad T=\varphi(S^1\times S^1)$ является гладким двумерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^3$: $\quad T\in\mathfrak{M}^2_3$.

Набор карт $\{(\varphi\circ\bar{\psi},U_i\times U_j)\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}=\{(\tau,U_i\times U_j)\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}$ составляет гладкий атлас на T. Координатным представлением отображения φ для карты $(\bar{\psi},U_i\times U_j)$ на топологическом торе $S^1\times S^1$ и соответствующей карты $(\varphi\circ\bar{\psi},U_i\times U_j)$ на торе T в $\mathbb{R}^3$ является тождественное отображение. Поэтому φ является гладким диффеоморфизмом из $S^1\times S^1$ в T.

$\lhd$

§ 4. Касательный вектор к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$

Теорема 1. (О базисе в геометрическом касательном пространстве к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$.) *Пусть (ψ,U^M) – карта на $M\in\mathfrak{M}^n_N$, $P\in U^M$, $x_0=\psi^{-1}(P)$. Тогда*

1) множество геометрических касательных векторов $\widetilde{T}_P(M)$ совпадает с образом пространства $\mathbb{R}^n$ при линейном отображении

$d\psi(x_0)$:

$$\widetilde{T}_P(M) = d\psi(x_0)[\mathbb{R}^n] = \{d\psi(x_0)[\xi] : \ \xi \in \mathbb{R}^n\}; \tag{1}$$

2) набор векторов $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}(x_0)$ *составляет базис в* $\widetilde{T}_P(M)$*, который будем называть* базисом в $\widetilde{T}_P(M)$, соответствующим ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$.

Доказательство. 1) Согласно теореме о карте на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^n$ карта (ψ, U^M) в некоторой окрестности точки P порождена некоторым каноническим диффеоморфизмом f, т.е. в окрестности точки x_0

$$\psi(x^1, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0). \tag{2}$$

Обозначим $\overline{x}_0 = f^{-1}(P) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$. Согласно теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$

$$\widetilde{T}_P(M) = \{\mathcal{D} f(\overline{x}_0) \cdot \widehat{\xi} : \ \widehat{\xi} \in L_n\}.$$

Согласно формуле (1) § 2 главы 15 произвольный вектор $\widehat{\xi} \in L_n$ имеет вид $\widehat{\xi} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \xi$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Из равенства (2) следует, что $\mathcal{D} f(\overline{x}_0) \cdot \widehat{\xi} = \mathcal{D}\psi(x_0) \cdot \xi$. Поэтому

$$\widetilde{T}_P(M) = \{\mathcal{D} f(\overline{x}_0) \cdot \widehat{\xi} : \ \widehat{\xi} \in L_n\} =$$

$$= \{\mathcal{D}\psi(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \mathbb{R}^n\} =$$

$$= \{d\psi(x_0)[\xi] : \ \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

2) Пусть $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \ldots \\ \psi^N(x) \end{pmatrix}$, $\quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$d\psi(x_0)[\xi] = \mathcal{D}\psi(x_0) \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0)\xi^i, \tag{3}$$

где $\mathcal{D}\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\psi^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\psi^N}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\psi^N}{\partial x^n} \end{pmatrix}$ – матрица Якоби отображения ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi^1}{\partial x^i} \\ \dots \\ \frac{\partial\psi^N}{\partial x^i} \end{pmatrix}$ – столбец этой матрицы.

Из равенств (1), (3) следует, что касательное пространство $\widetilde{T}_P(M)$ является линейной оболочкой векторов $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}(x_0)$. Так как $\operatorname{rg}\mathcal{D}\psi(x_0) = n$, то векторы $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}(x_0)$ линейно независимы. Поэтому размерность пространства $\widetilde{T}_P(M)$ равна n и векторы $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}(x_0)$ составляют базис в $\widetilde{T}_P(M)$. $\square$

Будем рассматривать выражения, которые являются суммами или разностями одночленов. Здесь под одночленом понимается произведение и/или частное величин без индексов и величин, снабженных индексами.

Примем *соглашение Эйнштейна*: если некоторый верхний индекс и некоторый нижний индекс одночлена обозначены одинаковой буквой, то подразумевается суммирование по всем допустимым значениям этого индекса. С учетом этого соглашения формула (3) принимает вид

$$d\psi(x_0)[\xi] = \mathcal{D}\psi(x_0)\cdot\xi = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0)\xi^i.$$

Определение. Набор чисел $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ называется *координатами геометрического касательного вектора* $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$, если $v = d\psi(x_0)[\xi]$, где $x_0 = \psi^{-1}(P)$, т.е.

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0)\xi^i. \tag{4}$$

Таким образом, координаты геометрического касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$ – это координаты вектора v в базисе $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$.

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $U^M(P)$ – окрестность точки $P \in \in M$ в топологическом пространстве M. *Производной* функции $f \in \in C^1(U^M(P), \mathbb{R})$ в точке P *по геометрическому касательному вектору* $v \in \widetilde{T}_P(M)$ называется

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial (f \circ r)}{\partial t}(t_0), \tag{5}$$

где непрерывная функция $r : [a, b] \to U^M(P)$ и число $t_0 \in [a, b]$ удовлетворяют условиям

$$r(t_0) = P, \qquad r'(t_0) = v \tag{6}$$

(согласно определению геометрического касательного вектора такая функция существует.)

Лемма 1. *Пусть $U^M(P)$ – окрестность точки $P \in M$ в $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ – координаты касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. Тогда для любой функции $f \in C^1(U^M(P), \mathbb{R})$ имеем*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\xi^i, \tag{7}$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(P) := \frac{\partial (f \circ \psi)(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=\psi^{-1}(P)}.$$

Доказательство. Пусть функция $r : [a, b] \to U^M(P)$ и число $t_0 \in [a, b]$ удовлетворяют условиям (6). Рассмотрим вектор-функцию $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \ldots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = (\psi^{-1} \circ r)(t)$. Обозначим $x_0 = x(t_0)$. Тогда $r(t) = = (\psi \circ x)(t)$. Дифференцируя это равенство в точке t_0, получаем $r'(t_0) = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i)'(t_0)$. Это означает, что числа $(x^i)'(t_0)$ являются координатами касательного вектора $r'(t_0) = v$, т.е. $(x^i)'(t_0) = \xi^i$ при всех $i \in \overline{1, n}$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial (f \circ r)}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial (f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ r)}{\partial t}(t_0) =$$

$$= \frac{\partial (f \circ \psi \circ x)}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\xi^i.$$

$\square$

Замечание. Из леммы 1 следует корректность определения производной функции по касательному вектору, а именно, независимость $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ от конкретной функции $r : [a, b] \to U^M(P)$, удовлетворяющей условиям (6).

Замечание. Поскольку определение производной функции по касательному вектору, в отличие от формулы (7), не использует координаты, то $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ не зависит от ЛСК на M.

Замечание. Производная $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ обладает свойством локальности, т.е. зависит от поведения функции f лишь в сколь угодно малой окрестности точки P. Точнее, если функции f_1 и f_2 класса $C^1(U^M(P), \mathbb{R})$ совпадают в некоторой окрестности $U^M(P)$, то

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(P) = \frac{\partial f_2}{\partial v}(P) \qquad \forall v \in \widetilde{T}_P(M).$$

Это следует из того, что для любой непрерывной функции $r : [a, b] \to$ $\to U^M(P)$, удовлетворяющей условиям (6), значения функций $f_1 \circ r$ и $f_2 \circ r$ совпадают в некоторой окрестности точки t_0, а значит, $\frac{\partial (f_1 \circ r)}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial (f_2 \circ r)}{\partial t}(t_0)$.

Определение. *Стандартным базисом в* $\mathbb{R}^n$ называется базис $(e_1, \ldots, e_n)$, где $e_i = \begin{pmatrix} \delta_i^1 \\ \ldots \\ \delta_i^n \end{pmatrix}$, δ_i^j – *символ Кронекера*:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Покажем, что производная функции по касательному вектору соответствует определению производной функции по вектору, данному во втором семестре, в случае, когда функция f определена в окрестности точки $P \in \mathbb{R}^N$. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$ так, что гладкая функция f определена в $U_\delta(P)$ и рассмотрим подмногообразие $M = U_\delta(P) \in \mathfrak{M}_N^N$. В качестве гомеоморфизма карты рассмотрим тождественное отображение $\psi(x) = x$. Тогда $\widetilde{T}_P(M) = \mathbb{R}^N$; $\mathcal{D}\psi$ – единичная матрица; базис $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)$, соответствующий ЛСК $(x^1, \ldots, x^N)$ – это стандартный базис в $\mathbb{R}^N$, координаты ξ^i любого вектора $v = (\xi^1, \dots, \xi^N) \in \mathbb{R}^N$ являются координатами касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$. Поэтому производная функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ по касательному вектору $v \in \widetilde{T}_P(M)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\xi^i = df(P)[v].$$

соответствует определению производной функции по вектору, данному во втором семестре.

Определение. *Изоморфизмом* линейных пространств X и Y называется линейное взаимно однозначное отображение из X в Y.

Линейные пространства X и Y называются *изоморфными* (пишут $X \cong Y$), если между ними можно установить изоморфизм.

Замечание. Изоморфизм двух линейных конечномерных пространств является гладким диффеоморфизмом.

Определение касательного пространства $T_P(M)$ для подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$. Пусть $P \in M \in \mathfrak{M}_N^n$. Обозначим

$$T_P(M) = \left\{ \frac{\partial}{\partial v} : \ v \in \widetilde{T}_P(M) \right\},$$

где $\frac{\partial}{\partial v}$ – оператор дифференцирования, который каждой функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ ставит в соответствие ее производную $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ по вектору $v \in \widetilde{T}_P(M)$.

Обозначим через φ_P отображение из $\widetilde{T}_P(M)$ в $T_P(M)$, заданное формулой

$$\varphi_P(v) = \frac{\partial}{\partial v}, \qquad v \in \widetilde{T}_P(M).$$

Теорема 2. (Об изоморфизме касательного и геометрического касательного пространств.) *Пусть $P \in M \in \mathfrak{M}_N^n$. Отображение $\varphi_P : \widetilde{T}_P(M) \to T_P(M)$ является изоморфизмом линейных пространств $\widetilde{T}_P(M)$ и $T_P(M)$.*

Доказательство. Линейность отображения φ_P следует из формулы (7), поскольку правая часть этой формулы линейна относительно координат ξ касательного вектора v. Фиксируем карту $(\psi, U^M(P))$. Рассмотрим ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$. В силу формулы (7) имеем $\frac{\partial x^i}{\partial v} = \xi^i$ при всех $i \in \overline{1, n}$. Таким образом, если для двух геометрических касательных векторов $v, u \in \widetilde{T}_P(M)$ справедливо равенство $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}$, то все координаты векторов v и v совпадают, а значит, $v = u$. Это означает, что отображение $\varphi_P : \widetilde{T}_P(M) \to T_P(M)$ взаимно однозначно. $\square$

Теорема 2 показывает, что $T_P(M) \cong \widetilde{T}_P(M)$ и позволяет отождествить геометрический касательный вектор v к подмногообразию $M \in \mathfrak{M}_N^n$ пространства $\mathbb{R}^N$ с оператором взятия производной по вектору v. Имея в виду это отождествление, в дальнейшем производную по вектору будем называть касательным вектором, а пространство $T_P(M)$, состоящее из операторов дифференцирования по векторам, будем называть касательным пространством. В отличие от определения геометрического касательного вектора как элемента объемлющего пространства $\mathbb{R}^N$, которое имееет смысл только для подмногообразий пространства $\mathbb{R}^N$, новое определение касательного вектора будет иметь смысл для любого гладкого многообразия.

Лемма 2. *Пусть (ψ, U^M) – карта на $M \in \mathfrak{M}_N^n$, $P \in U^M$, $x_0 = \psi^{-1}(P)$, $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. Тогда*

(а) *базис $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}(x_0)\right)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$ при отображении φ_P переходит в базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$;*

(б) *координаты любого геометрического касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в базисе $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}(x_0)\right)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$ совпадают с координатами вектора $\frac{\partial}{\partial v}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$.*

Доказательство. (а). Фиксируем произвольный индекс $i \in \overline{1,n}$ и рассмотрим геометрический касательный вектор $v \in \widetilde{T}_P(M)$ с координатами $\xi^j = \delta_i^j$. Согласно формуле (4) имеем $v = \frac{\partial\psi}{\partial x^j}(x_0)\delta_i^j = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0)$. Из формулы (7) следует, что для любой функции $f \in C^1(U^M, \mathbb{R})$ справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(P)\delta_i^j = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)$, т.е. $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Поэтому

$$\varphi_P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0)\right) = \varphi_P(v) = \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Таким образом, базисный вектор $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$ при отображении φ_P переходит в вектор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ пространства $T_P(M)$. Согласно теореме 2 отображение φ_P является изморфизмом, а значит, переводит базис пространства $\widetilde{T}_P(M)$ в базис пространства $T_P(M)$. Следовательно, $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ – базис пространства $T_P(M)$.

Пункт (б) следует из пункта (а) и линейности отображения φ_P.

$\square$

§ 5. Касательный вектор к гладкому многообразию

Дадим общее определение касательного вектора к многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$, вообще говоря, не вложенному в линейное пространство.

Определение. *Касательным вектором* $\vec{v}$ к многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$ в точке $P \in M$ называется отображение $\vec{v} : C^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, которое каждой функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ ставит в соответствие число

$$\vec{v}(f) := \xi^i \, \frac{\partial f}{\partial x^i}(P), \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(P) := \frac{\partial (f \circ \psi)(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=\psi^{-1}(P)}, \tag{2}$$

$(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$ – ЛСК, соответствующая карте (ψ, U) на M, где $P \in U$. При этом число $\vec{v}(f)$ не зависит от карты, а набор чисел $(\xi^1, \dots, \xi^n)$, называемых *координатами вектора* $\vec{v}$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$, не зависит от функции f.

Множество всех касательных векторов к $M \in \mathfrak{M}^n$ в точке $P \in M$ называется *касательным пространством* $T_P(M)$. Значение $\vec{v}(f)$, определяемое формулой (1), называется *производной функции* f *по вектору* $\vec{v}$.

Замечание. Сравнивая данное определение с определением пространства $T_P(M)$ для подмногообразия M пространства $\mathbb{R}^N$ а формулу (1) с формулой (7) § 4, видим, что в случае $M \in \mathfrak{M}^n_N$ новое определение $T_P(M)$ совпадает с определением $T_P(M)$, данным в конце предыдущего параграфа.

Мы дали определение касательного вектора $\vec{v}$ с помощью ЛСК и при этом потребовали, чтобы его значение $\vec{v}(f)$ не зависело от ЛСК. Возникает вопрос о существовании касательных векторов, удовлетворяющих этим требованиям. В следующей теореме дан утвердительный ответ на этот вопрос и выяснена структура множества касательных векторов $T_P(M)$.

Теорема 1. (О структуре множества касательных векторов.) *Пусть* $P \in M \in \mathfrak{M}^n$.

(а) *Для любой ЛСК в окрестности точки* P *и любого набора чисел* $(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ *существует касательный вектор* $\vec{v} \in T_P(M)$ *с координатами* $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ *в этой ЛСК.*

(б) *Координаты* $(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ *касательного вектора* $\vec{v} \in T_P(M)$ *в ЛСК* $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ *следующим образом выражаются через его координаты* $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ *в ЛСК* $(x^1, \ldots, x^n)$*:*

$$\tilde{\xi}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\, \xi^i, \quad j \in \overline{1, n}. \tag{3}$$

(в) *Множество* $T_P(M)$ *является* n*-мерным линейным пространством. Координаты касательного вектора* $\vec{v} \in T_P(M)$ *в ЛСК* $(x^1, \ldots, x^n)$ *являются координатами вектора* $\vec{v}$ *в базисе* $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ *пространства* $T_P(M)$*, который будем называть* базисом в $T_P(M)$, соответствующем ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$.

Доказательство. Фиксируем ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки P и набор чисел $(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. Определим отображение $\vec{v} : C^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ формулой (1). Найдем координаты вектора $\vec{v}$ в произвольной ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ (в окрестности точки P) из условия, что значение $\vec{v}(f)$ не зависит от ЛСК:

$$\xi^i\, \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) = \tilde{\xi}^j\, \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}(P). \tag{4}$$

Согласно правилам дифференцирования сложной функции для любой функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\, \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} \qquad \forall i \in \overline{1, n}. \tag{5}$$

Поэтому равенство (4) принимает вид

$$\xi^i\, \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\, \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{\xi}^j\, \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}.$$

Последнее равенство справедливо для всех функций $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение (3). Таким образом, формула (1) определяет касательный вектор $\vec{v}$, значение которого не зависит от ЛСК, тогда и только тогда, когда координаты вектора $\vec{v}$ при изменении ЛСК меняются по закону (3). Это доказывает пункты (а) и (б).

Докажем пункт (в). Из формулы (1) следует, что любой касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$ является линейной комбинацией операций $\frac{\partial}{\partial x^i}$ дифференцирования по координатам x^i данной ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\vec{v} = \xi^i \, \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6}$$

Операции $\frac{\partial}{\partial x^i}$ линейно независимы (это можно увидеть, посмотрев на результат их применения к функциям $f^j = x^j$). Поэтому касательные векторы $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ составляют базис в n-мерном линейном пространстве $T_P(M)$. Согласно формуле (6) координаты вектора $\vec{v}$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ являются координатами вектора $\vec{v}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ линейного пространства $T_P(M)$. $\square$

Замечание. В терминах операций дифференцирования формулу (5) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \qquad \forall i \in \overline{1, n}. \tag{7}$$

Последняя формула представляет собой формулу замены базиса в касательном пространстве $T_P(M)$ при замене системы координат.

Замечание. Из формулы (7) и леммы леммы 2(б) § 4 следует, что формула замены базиса в $\widetilde{T}_P(M)$ для $M \in \mathfrak{M}^n_N$ имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \, \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^j} \qquad \forall i \in \overline{1, n}. \tag{8}$$

Замечание. Из леммы 2(б) § 4 и пункта (б) теоремы о структуре множества касательных векторов следует, что для $M \in \mathfrak{M}^n_N$ координаты $(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ геометрического касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ выражаются через его координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ по формуле (3).

Замечание. Непосредственно из определения следует, что операция дифференцирования по касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M)$ обладает следующими свойствами:

(i) свойство линейности

$$\vec{v}(\alpha f + \beta g) = \alpha\vec{v}(f) + \beta\vec{v}(g) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in C^1(M, \mathbb{R});$$

(ii) правило Лейбница

$$\vec{v}(fg) = f(P)\,\vec{v}(g) + g(P)\,\vec{v}(f) \qquad \forall f, g \in C^1(M, \mathbb{R}),$$

где функция fg – это произведение функций f и g, определяемое формулой $(fg)(p) = f(p)\,g(p)$ для любой точки $p \in M$.

Следующая теорема позволяет интерпретировать касательный вектор к многообразию как вектор скорости при движении по многообразию.

Теорема 2. *Пусть $P \in M \in \mathfrak{M}^n$.*

1) Для каждого касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ существует функция $r \in C^\infty([a, b], M)$ такая, что $P = r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ и

$$\vec{v}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ r)(t_0) \qquad \forall f \in C^1(M, \mathbb{R}). \tag{9}$$

2) Обратно, для любой функции $r \in C^1([a, b], M)$ такой, что $P = r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ существует касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$, удовлетворяющий соотношению (9).

Доказательство. 1) Фиксируем карту (ψ, U) на M, $P \in U$. Пусть задан касательный вектор $\vec{v} \in \mathrm{T}_P(M)$. Тогда заданы координаты $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ этого вектора в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. Обозначим $x_0 = \psi^{-1}(P)$. Поскольку область параметров $V = \psi^{-1}(U)$ – это открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$, то при достаточно малом $\delta > 0$ хотя бы один из отрезков $[x_0, x_0 + \delta\xi]$ или $[x_0, x_0 - \delta\xi]$ содержится во множестве V. Пусть для определенности $[x_0, x_0 + \delta\xi] \subset V$. Определим функцию $r \in C^\infty([0, \delta], M)$ как суперпозицию гомеоморфизма карты и функции $x : [0, \delta] \to V$, $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) = x_0 + t\xi$, $t \in [0, \delta]$: $r = \psi \circ x$. Тогда при $t_0 = 0$ по формуле производной сложной функции для любой $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ имеем

$$\frac{d}{dt}(f \circ r)(t_0) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi \circ x)(t_0) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i}\ \frac{dx^i(t_0)}{dt} =$$

$$= \xi^i\ \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i} = \vec{v}(f),$$

т.е. справедливо соотношение (9).

2) Пусть задана функция $r \in C^1([a,b],M)$ такая, что $P = r(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$. Отображение $\vec{v} : C^1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, заданное формулой (9) не зависит от ЛСК, поскольку эта формула не содержит ЛСК. Покажем, что это отображение имеет вид (1). Пусть (ψ, U) – карта на M, $P \in U$. Обозначим $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) = (\psi^{-1} \circ r)(t)$ – координатное представление функции r. Тогда согласно формуле (9) и формуле производной сложной функции имеем

$$\vec{v}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ r)(t_0) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi \circ x)(t_0) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i}\ \frac{dx^i(t_0)}{dt} =$$

$$= \xi^i\ \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i},$$

где $\xi^i = \frac{dx^i(t_0)}{dt}$. Поэтому отображение $\vec{v} : C^1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ имеет вид (1), т.е. является касательным вектором. $\square$

Замечание. Если функцию $r(t)$ из теоремы 2 интерпретировать как закон движения материальной точки по многообразию M, то для любой скалярной функции $f \in C^1(M,\mathbb{R})$, зависящей от положения материальной точки на многообразии M, значение $\vec{v}(f)$ имеет смысл скорости изменения физической величины f для этой материальной точки в момент прохождения через точку P.

Определение дифференциала функции, заданной на гладком многообразии. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $P \in M$, $f \in C^1(M,\mathbb{R})$. Линейная функция $df(P) : T_P(M) \to \mathbb{R}$, которая каждому касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M)$ ставит в соответствие производную $\vec{v}(f)$ функции f в точке P по вектору $\vec{v}$, называется *дифференциалом* в точке P функции f:

$$df(P)[\vec{v}\,] := \vec{v}(f).$$

Напомним некоторый материал из линейной алгебры. *Сопряженным пространством* к конечномерному линейному пространству V называется линейное пространство V^*, состоящее из линейных функций $l : V \to \mathbb{R}$. Базис $(e^1_*, \ldots, e^n_*)$ пространства V^* называется *взаимным* или *двойственным* базису $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ пространства V, если $e^i_*(\vec{e}_j) = \delta^i_j$ – символ Кронекера. Для полноты изложения выведем выражения для координат l_i линейной функции $l \in V^*$ во взаимном базисе $(e_*^1, \dots, e_*^n)$. По определению координат имеем

$$l = l_j \ e_*^j.$$

Поэтому

$$l(\vec{e}_i) = l_j \ e_*^j(\vec{e}_i) = l_j \delta_i^j = l_i. \tag{10}$$

Определение. *Кокасательным пространством* к $M \in \mathfrak{M}^n$ в точке $P \in M$ называется линейное n-мерное пространство $T_P^*(M)$, сопряженное к касательному пространству $T_P(M)$. Элемент кокасательного пространства $T_P^*(M)$ называется *ковектором.*

Замечание. Из определения дифференциала следует, что для любых $M \in \mathfrak{M}^n$, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ значение дифференциала $df(P)$ в фиксированной точке $P \in M$ является ковектором: $df(P) \in T_P^*(M)$.

Лемма 1. *Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ в окрестности точки $P \in M$. Тогда набор дифференциалов координатных функций $(dx^1(P), \dots, dx^n(P))$ составляет базис в $T_P^*(M)$, взаимный базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ касательного пространства $T_P(M)$.*

Доказательство. Согласно определениям дифференциала и производной по касательному вектору имеем

$$dx^i(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(P) = \delta_j^i \qquad \forall i, j \in \overline{1, n}.$$

$\square$

Лемма 2. *Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ в окрестности точки $P \in M$. Дифференциал произвольной функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ следующим образом выражается через дифференциалы координатных функций x^i:*

$$df(P) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\, dx^i(P). \tag{11}$$

Доказательство. Разложим произвольный касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$ по базису: $\vec{v} = \xi^i \ \frac{\partial}{\partial x^i}$. В силу определений дифференциала и производной по касательному вектору имеем

$$df(P)[\vec{v}] = \vec{v}(f) = \xi^i \ \frac{\partial f}{\partial x^i}(P).$$

Подставляя в эту формулу вместо функции f координатную функцию x^j, получаем $dx^j(P)[\vec{v}] = \xi^j$ для любого $j \in \overline{1,n}$. Отсюда и из предыдущей формулы следует, что

$$df(P)[\vec{v}] = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\ dx^i(P)[\vec{v}].$$

В силу произвольности касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ получаем доказываемое равенство. □

Замечание. Формула (11) напоминает хорошо нам известную формулу для дифференциала функции f в старом смысле, который, чтобы не путать с новым определением, будем сейчас обозначать через $d_{\text{стар}}f$. Выясним связь между новым и старым определениями дифференциала функции $f \in C^1(M,\mathbb{R})$. Поскольку ранее дифференциал рассматривался для функций, определенных на открытых подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$, то будем предполагать, что M – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Как известно, для любого вектора $\xi = (\xi^1,\ldots,\xi^n) \in \mathbb{R}^n$ справедлива формула

$$d_{\text{стар}}f(P)[\xi] = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(P).$$

Сравнивая эту формулу с новым определением производной функции f по касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M)$, видим, что

$$d_{\text{стар}}f(P)[\xi] = df(P)[\vec{v}] \quad \text{при} \quad \vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Таким образом, значение дифференциала (в новом смысле) функции f в точке P на касательном векторе $\vec{v}$ совпадает со значением дифференциала в старом смысле функции f в точке P на векторе ξ, который является координатным набором касательного вектора $\vec{v}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$. Ранее вместо ξ мы использовали обозначение dx, которое согласно формуле (11) можно использовать и в новом смысле.

Теорема 3. *При замене ЛСК координаты линейной функции $l \in T_P^*(M)$ меняются по закону*

$$\tilde{l}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\ l_i, \quad j \in \overline{1,n}, \tag{12}$$

а базисные векторы dx^j сопряженного пространства $T_P^*(M)$ – по закону

$$d\tilde{x}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} dx^i. \tag{13}$$

Доказательство. Используя равенства (7) и (10), получаем формулу (12):

$$\tilde{l}_j = l\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right) = l\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\; l\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\; l_i.$$

Закон изменения дифференциалов (13) следует из формулы (11). $\square$

Замечание. Сравнивая формулу (3) с формулой (12), видим, что при замене ЛСК законы изменения координат вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ и ковектора $l \in T_P^*(M)$ различны. В параграфе § 2 главы 18 мы увидим, что это связано с тем, что касательный вектор и ковектор – это тензоры разных типов.

§ 6. Край гладкого многообразия

Определение. *Краем* ∂V допустимой области параметров $V \subset \mathbb{R}^n$ называется множество всех точек $x \in V$, лежащих на границе множества V, где граница понимается в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Если V – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, то $\partial V = \emptyset$. Если V – открытое подмножество топологического пространства $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$, то $\partial V = V \cap \partial\mathbb{R}^n_- = V \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, где $\partial\mathbb{R}^n_- = \partial\mathbb{R}^n_+ = \{(0, x^2, \ldots, x^n) : \ (x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ – граница полупространств $\mathbb{R}^n_-$, $\mathbb{R}^n_+$ в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Поскольку граничные точки допустимого множества параметров V могут не принадлежать множеству V, то край V, вообще говоря, не совпадает с границей множества V в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение. Точка $P \in U$ называется *краевой точкой карты* (ψ, U) на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, если ее прообраз $\psi^{-1}(P)$ лежит на краю области параметров $V = \psi^{-1}(U)$ этой карты: $\psi^{-1}(P) \in \partial V$.

Теорема 1. (О независимости краевой точки от карты.) *Пусть* (ψ_1, U_1) *и* (ψ_2, U_2) *– две карты на гладком многообразии* M. *Если точка* $P \in U_1 \cap U_2$ *является краевой точкой карты* (ψ_1, U_1), *то эта точка – краевая точка карты* (ψ_2, U_2).

Доказательство. Предположим противное: P – краевая точка карты (ψ_1, U_1) и не является краевой точкой карты (ψ_2, U_2). Обозначим $U = U_1 \cap U_2$, $V_i = \psi_i^{-1}(U)$, $x_i = \psi_i^{-1}(P)$, где $i = 1, 2$. Поскольку P не является краевой точкой карты (ψ_2, U_2), то точка $x_2 \in \psi_2^{-1}(U_2)$ не лежит на границе множества $\psi_2^{-1}(U_2)$ в смысле пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x_2) \subset \psi_2^{-1}(U_2)$. Так как множество U открыто в топологическом пространстве M, $\psi_2(x_2) = P \in U$, а отображение ψ_2 непрерывно, то найдется число $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $\psi_2(U_\delta(x_2)) \subset U$. Поэтому $U_\delta(x_2) \subset \psi_2^{-1}(U) = V_2$. Следовательно, x_2 – внутренняя точка множества V_2 в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

По определению гладкого многообразия замена координат $w = \psi_1^{-1} \circ \psi_2$ является гладким диффеоморфизмом из V_2 в V_1. Согласно определению класса $C^k(V, Y)$, данному в § 2, отображение $w^{-1} : V_1 \to V_2$ можно продолжить до отображения $f \in C^\infty(\widetilde{V}_1, \mathbb{R}^n)$, где $\widetilde{V}_1$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. При этом $f(x) = w^{-1}(x)$ при $x \in V_1$ и, следовательно, $f \circ w = w^{-1} \circ w = \mathrm{Id}$ – тождественное отображение из V_2 в V_2. Дифферецируя это равенство в точке x_2, получаем равенство для матриц Якоби отображений f и w: $\mathcal{D} f(x_1) \cdot \mathcal{D} w(x_2) = E_n$. Поэтому якобиан отображения w не обращается в ноль в точке x_2, а значит, и в некоторой окрестности $U(x_2) \subset V_2$. По теореме 3 §5 главы «Теорема о неявной функции» эта окрестность перейдет в окрестность точки x_1 в пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как $w(U(x_2)) \subset w(V_2) = V_1 \subset \psi_1^{-1}(U_1)$, то множество $\psi_1^{-1}(U_1)$ содержит некоторую окрестность точки x_1, понимаемую в смысле пространства $\mathbb{R}^n$. Таким образом, точка x_1 не лежит на границе области параметров карты (ψ_1, U_1), что противоречит тому, что P – краевая точка этой карты. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Определение. *Краем* ∂M гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется множество всех краевых точек карт (ψ, U) на M.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что если M – гладкое многообразие, то множество краевых точек любой карты (ψ, U) на M совпадает с множеством

$$\partial U := U \cap \partial M$$

и не зависит от гомеоморфизма ψ этой карты. Поэтому если $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на M, то край M совпадает с объединением множеств краевых точек карт атласа и не зависит от гладкого атласа:

$$\partial M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \partial U_\lambda.$$

Замечание. Согласно определению краевой точки карты для любой карты (ψ, U) на гладком многообразии M имеем:

$$\partial U = \psi(\partial V),$$

где ∂V – край области параметров $V = \psi^{-1}(U)$ этой карты.

Теорема 2. (О гладком атласе на крае многообразия.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $\partial M \neq \emptyset$. Тогда $\partial M \in \mathfrak{M}^{n-1}$ и $\partial(\partial M) = \emptyset$, т.е. край гладкого n-мерного многообразия с непустым краем является гладким $(n - 1)$-мерным многообразием без края.*

Если $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на M, $V_\lambda = \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda$, то $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на ∂M.

Доказательство. Поскольку M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, то множество $\partial M \subset M$ с топологией, индуцированной топологией пространства M, составляет, как легко проверить, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Пусть (ψ, U) – карта на M, $V = \psi^{-1}(U)$ – область параметров этой карты, ∂V – ее край. Так как V – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$, то множество ∂V открыто в топологическом пространстве $\partial\mathbb{R}^n_- = \partial\mathbb{R}^n_+$ (изоморфном пространству $\mathbb{R}^{n-1}$) с топологией, индуцированной топологией пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому множество ∂U открыто в топологическом пространстве ∂M с топологией, индуцированной топологией пространства M. Сужение $\psi\big|_{\partial V}$ гомеоморфизма $\psi : V \to U$ на край ∂V является гомеоморфизмом из ∂V в ∂U.

Пусть $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на M, $V_\lambda = \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда для любой точки $P \in \partial M$ найдется индекс $\lambda \in \Lambda$ такой, что $P \in U_\lambda$, а значит, $P \in \partial U_\lambda$. Поэтому любая точка

$P \in \partial M$ имеет окрестность ∂U_λ, гомеоморфную открытому множеству в $\mathbb{R}^{n-1}$. Следовательно, ∂M является $(n-1)$-мерным многообразием без края и $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ – атлас на ∂M. Замена координат от карты $\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)$ к карте $\left(\psi_{\tilde\lambda}\big|_{\partial V_{\tilde\lambda}},\ \partial U_{\tilde\lambda}\right)$ является гладким отображением как сужение гладкого отображения замены координат от карты $(\psi_\lambda, U_\lambda)$ к карте $(\psi_{\tilde\lambda}, U_{\tilde\lambda})$. Поэтому атлас $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ является гладким и, следовательно, многообразие ∂M является гладким. $\square$

Задача 1. Пусть M – одномерное линейно-связное многообразие без края. Докажите, что M гомеоморфно прямой $\mathbb{R}^1$ или окружности S^1.

§ 7. Ориентация гладкого многообразия

Определение. Две карты (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2) на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называются *согласованными (по ориентации)*, если

1) их районы действия не пересекаются (т.е. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$) **или**

2) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ и якобиан замены координат $w = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ от карты (ψ_1, U_1) к карте (ψ_2, U_2) положителен на области определения этой замены координат.

Определение. *Ориентирующим* атласом многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется гладкий атлас, состоящий из попарно согласованных карт.

Определение. Многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ называется *ориентируемым*, если для него существует ориентирующий атлас. Иначе многообразие называется *неориентируемым*.

Определение. Два ориентирующих атласа многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называются *согласованными*, если их объединение является ориентирующим атласом (т.е. все карты одного и другого атласов попарно согласованы). *Ориентацией* многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется класс всех согласованных атласов, ориентирующих M. Многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ называется *ориентированным*, если задана его ориентация (т.е. задан ориентирующий атлас).

Определение. Карта (ψ, U) на M называются *согласованной* с ориентирующим атласом $\mathcal{A}$ многообразия M, если карта (ψ, U) согласована со всеми картами атласа $\mathcal{A}$. При этом будем говорить, что карта (ψ, U) и ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$ *соответствуют ориентации* или *согласованы с ориентацией* гладкого многообразия M, а $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – правый базис в $T_P(M)$.

Напомним, что матрица $S = \begin{pmatrix} s_1^1 & \dots & s_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1^n & \dots & s_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ линейного пространства L к базису $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ этого пространства, если

$$\tilde{e}_i = s_i^j e_j \qquad \forall i \in \overline{1, n},$$

т.е. i-ый столбец матрицы S является координатным столбцом базисного вектора $\tilde{e}_i$ нового базиса в старом базисе.

В соответствии с определением из линейной алгебры два базиса линейного пространства называются *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы перехода от одного базиса к другому положителен. Иначе эти базисы называются *противоположно ориентированными*.

Лемма 1. *Пусть* (ψ, U) *и* $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ *– две карты на* $M \in \mathfrak{M}^n$, $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$. *Пусть* $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$ *и* $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = \tilde{\psi}^{-1}$ *– ЛСК соответствующие этим картам. Карты* (ψ, U) *и* $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ *согласованы тогда и только тогда, когда для любой точки* $P \in U \cap \widetilde{U}$ *базисы* $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ *и* $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}\right)$ *касательного пространства* $T_P(M)$ *одинаково ориентированны.*

Доказательство. Согласно формуле (7) § 5

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Поэтому матрица перехода от базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ к базису $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}\right)$ совпадает с матрицей Якоби замены координат $w = \psi^{-1} \circ \tilde{\psi}$. Карты (ψ, U) и $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ согласованы тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in U \cap \widetilde{U}$ определитель этой матрицы положителен. $\square$

Теорема 1. (О двух ориентациях многообразия.) *Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ линейно-связно и ориентируемо. Тогда существует ровно две его ориентации.* Эти ориентации будем называть *противоположными*.

Доказательство. Так как многообразие M ориентируемо, то для M существует ориентирующий атлас $\mathcal{A} = \{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Изменив на противоположный знак первой координаты x^1 ЛСК этих карт, получим ориентирующий атлас $\mathcal{A}^- = \{(\psi_\lambda^-, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, несогласованный с атласом $\mathcal{A}$. Здесь мы используем тот факт, что при изменении знака первой координаты ЛСК допустимая область параметров переходит в допустимую область параметров. В частности, открытое подмножество топологического пространства $\mathbb{R}^n_+$ переходит открытое подмножество $\mathbb{R}^n_-$ и обратно. Таким образом, существуют по крайней мере две различные ориентации многообразия M, одна из которых – это класс всех атласов, согласованных с атласом $\mathcal{A}$, а другая – класс атласов, согласованных с атласом $\mathcal{A}^-$.

Покажем, что третьей ориентации многообразия M не существует, т.е. любой атлас $\mathcal{B}$, ориентирующий многообразие M, согласован либо с атласом $\mathcal{A}$, либо с атласом $\mathcal{A}^-$. Итак, фиксируем атлас $\mathcal{B}$, ориентирующий многообразие M. Для любой точки $P \in M$ через $s(P)$ обозначим знак якобиана замены координат от карты (ψ, U) атласа $\mathcal{A}$ к карте (φ, V) атласа $\mathcal{B}$, где $P \in U \cap V$. Величина $s(P)$ не зависит от конкретной карты (ψ, U) атласа $\mathcal{A}$ и конкретной карты (φ, V) атласа $\mathcal{B}$, поскольку якобиан замены координат от одной карты к другой карте внутри одного ориентирующего атласа положителен, а якобиан суперпозиции отображений равен произведению якобианов этих отображений. Покажем, что $s(P)$ непрерывно зависит от точки P. Зафиксируем точку $P_0 \in M$. Тогда найдутся карты $(\psi, U) \in \mathcal{A}$ и $(\varphi, V) \in \mathcal{B}$ такие, что $P_0 \in U \cap V$. Поскольку якобиан замены координат от (ψ, U) к (φ, V) непрерывно зависит от точки и не обращается в нуль, то его знак $s(P)$ также непрерывно зависит от точки P на множестве $U \cap V$, а значит, непрерывен в произвольной точке $P_0 \in M$. Если знак $s(P)$ меняется на линейно-связном множестве M, то по теореме о промежуточном значении для непрерывной функции найдется точка $P_* \in M$, где $s(P_*) = 0$, что невозможно, поскольку якобиан диффеоморфизма не обращается в нуль. Таким образом, либо $s(P) = 1$ для всех $P \in M$, либо $s(P) = -1$ для всех $P \in M$. В первом случае атлас $\mathcal{B}$ согласован с атласом $\mathcal{A}$, во втором

– с атласом $\mathcal{A}^-$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$ *– простая гладкая кривая, параметризованная вектор-функцией* $r \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^N)$ *такой, что* $r'(t) \neq \overline{0}$ *при всех* $t \in [a,b]$. *Тогда* Γ *– ориентируемое одномерное многообразие и имеет две ориентации: одна из этих ориентаций соответствует возрастанию параметра* t, *другая – убыванию параметра* t.

Доказательство. Рассмотрим на Γ атлас из двух карт $\{(\psi_1, U_1), (\psi_2, U_2)\}$, где

$$\psi_1(x) = r(a+x), \quad x \in V_1 = [0, b-a), \qquad U_1 = \psi_1(V_1),$$

$$\psi_2(x) = r(b+x), \quad x \in V_2 = (a-b, 0], \qquad U_2 = \psi_2(V_2).$$

Производная (якобиан) перехода от карты (ψ_1, U_1) к карте (ψ_2, U_2) равна 1. Поэтому данный атлас является ориентирующим и соответствует возрастанию параметра t. Изменяя на противоположный знаки параметров этих карт, получим ориентирующий атлас, соответствующий убыванию параметра t. $\square$

$\triangleright$

Определение. Конечный набор карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ гладкого атласа $\mathcal{A}$ на многообразии M называется *цепочкой карт*, если район действия U_i любой карты этой цепочки является линейно-связным множеством и районы действия любых двух карт этой цепочки с соседними номерами пересекаются:

$$U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset \qquad \forall i \in \overline{1, I-1}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– гладкий атлас на линейно-связном многообразии* M *и район действия любой карты атласа* $\mathcal{A}$ *является линейно-связным множеством. Тогда любые две карты* (ψ, U) *и* $(\widetilde{\psi}, \widetilde{U})$ *атласа* $\mathcal{A}$ *можно соединить цепочкой карт этого атласа, т.е. существует такая цепочка карт атласа* $\mathcal{A}$, *в которой* (ψ, U) *– первая карта, а* $(\widetilde{\psi}, \widetilde{U})$ *– последняя карта цепочки.*

Доказательство. Фиксируем точки $P \in U$ и $Q \in \widetilde{U}$. Поскольку многообразие M линейно-связно, то существует кривая $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\} \subset \subset M$, соединяющая точки P и Q, т.е. $r(a) = P$, $r(b) = Q$. Определим число $\hat{t}$ как супремум таких $t \in [a,b]$, что существует цепочка карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ атласа $\mathcal{A}$, соединяющая точки P и $r(t)$, т.е. такая, что $P \in U_1$, $r(t) \in U_I$.

Так как $r(\hat{t}\,) \in \Gamma \subset M$, то найдется карта (ψ^*, U^*) атласа $\mathcal{A}$ такая, что $r(\hat{t}\,) \in U^*$. Поскольку множество U^* открыто, а отображение r непрерывно, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $r(t) \in U^*$ при $t \in (\hat{t} - \varepsilon, \hat{t})$. По определению супремума найдется число $t^* \in (\hat{t}-\varepsilon, \hat{t}\,)$ такое, что точки P и $r(t^*)$ можно соединить цепочкой карт атласа $\mathcal{A}$. Добавляя карту (ψ^*, U^*) к этой цепочке, получаем цепочку карт, соединяющую точку P с точкой $r(t^*)$. Если $\hat{t} < b$, то найдется $t_+ \in (\hat{t}, b)$: $r(t_+) \in U^*$. При этом точки P и $r(t_+)$ можно соединить цепочкой карт атласа $\mathcal{A}$, что противоречит определению числа $\hat{t}$. Поэтому $\hat{t} = b$, а значит существует цепочка карт атласа $\mathcal{A}$, соединяющая точки P и Q, а значит, и карты (ψ, U) и $(\widetilde{\psi}, \widetilde{U})$. □

Определение. Цепочка карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^{I}$ называется *дезориентирующей*, если для любого индекса $i \in \overline{1, I-1}$ карты (ψ_i, U_i) и (ψ_{i+1}, U_{i+1}) согласованы, а карты (ψ_I, U_I) и (ψ_1, U_1) не согласованы.

Теорема 2. (О дезориентирующей цепочке карт.) *Гладкое многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем не существует дезориентирующей цепочки карт.*

Доказательство. Докажем «$\Rightarrow$». Пусть многообразие M ориентируемо, т.е. на M существует ориентирующий атлас $\mathcal{A}$. Предположим, что $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^{I}$ – дезориентирующая цепочка карт гладкого атласа $\mathcal{B}$.

Фиксируем произвольный индекс $i \in \overline{1, I}$ и покажем, что карта (ψ_i, U_i) либо согласована с атласом $\mathcal{A}$, либо согласована с атласом $\mathcal{A}^-$ противоположной ориентации. Для любой точки $P \in U_i$ через $s(P)$ обозначим знак якобиана замены координат от карты (ψ_i, U_i) к карте атласа $\mathcal{A}$, район действия которой содержит точку P. Рассуждая аналогично доказательству теоремы о двух ориентациях многообразия, получаем, что величина $s(P)$ не зависит от конкретной карты атласа $\mathcal{A}$ и непрерывна относительно точки P. Поскольку множество U_i линейно-связно и $s(P)$ не обращается в нуль, то $s(P)$ не меняет знак. В случае $s(P) = 1$ при $P \in U_i$ карта (ψ_i, U_i) согласована с атласом $\mathcal{A}$. В случае $s(P) = -1$ при $P \in U_i$ карта (ψ_i, U_i) согласована с атласом $\mathcal{A}^-$.

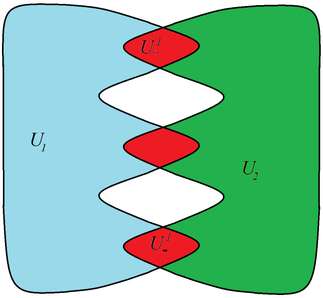
Пусть для определенности карта (ψ_1, U_1) согласована с атласом $\mathcal{A}$. Поскольку якобиан замены координат $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ положителен, то карта (ψ_2, U_2) согласована с атласом $\mathcal{A}$ и так далее. Получаем, что карта (ψ_I, U_I) согласована с атласом $\mathcal{A}$. Поэтому карты (ψ_I, U_I) и (ψ_1, U_1) согласованы и цепочка $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^{I}$ не является дезориентирующей.

Докажем «$\Leftarrow$». Пусть на M не существует дезориентирующей цепочки. Так как M – гладкое многообразие, то на M существует гладкий атлас. Разбивая районы действия карт этого атласа на линейно-связные компоненты, получим гладкий атлас $\mathcal{A}$, район действия любой карты которого является линейно-связным множеством. Пусть (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2)

– две карты этого атласа и $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Обозначим $\psi_2^-(x^1, \ldots, x^n) = \psi_2(-x^1, \ldots, x^n)$ при $(-x^1, \ldots, x^n) \in \psi_2^{-1}(U_2)$. Покажем, что карта (ψ_1, U_1) согласована с картой (ψ_2, U_2) или с картой (ψ_2^-, U_2). Обозначим через U_+ множество всех точек $P \in U_1 \cap U_2$, где якобиан замены координат $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ положителен, а через U_- множество всех точек $P \in U_1 \cap U_2$, где этот якобиан отрицателен. Предположим, что оба множества U_+ и U_- не пусты. Пусть U_+^1 и U_-^1 – некоторые линейно-связные компоненты множеств U_+ и U_- соответственно. Тогда цепочка карт

$$\{(\psi_1, U_1), (\psi_2, U_+^1), (\psi_2, U_2), (\psi_2, U_-^1)\}$$

является дезориентирующей, что противоречит условию. В случае, когда $U_- = \emptyset$ карта (ψ_1, U_1) согласована с картой (ψ_2, U_2), в случае $U_+ = \emptyset$ карта (ψ_1, U_1) согласована с картой (ψ_2^-, U_2).



Рассмотрим случай, когда многообразие M линейно-связно. Фиксируем карту (ψ_0, U_0) атласа $\mathcal{A}$. Для любой карты (ψ, U) этого атласа по лемме 3 существует цепочка карт атласа $\mathcal{A}$, в которой (ψ_0, U_0) – первая, а карта (ψ, U) – последняя. Двигаясь по этой цепочке от карты (ψ_0, U_0) к карте (ψ, U) будем при необходимости менять знак одной из координат ЛСК следующей карты так, чтобы она была согласована с предыдущей (это можно сделать, как показано в предыдущем абзаце). Поскольку на M нет дезориентирующей цепочки, то каждая карта данной цепочки будет согласована со всеми предыдущими картами этой цепочки. В таком случае будем говорить, что карта (ψ, U) *согласована по цепочке* с картой (ψ_0, U_0). Из отсутствия дезориентирующих цепочек следует, что если карта (ψ, U) согласована с картой (ψ_0, U_0) по одной цепочке, то эти карты согласованы и по любой другой цепочке. Атлас, полученный из атласа $\mathcal{A}$ путем описанного выше согласования каждой его карты с картой (ψ_0, U_0), является ориентирующим атласом многообразия M.

В случае, когда многообразие M не является линейно-связным, оно представимо в виде объединения своих линейно-связных компонент. Как показано выше, каждая линейно-связная компонента многообразия M является ориентируемым многообразием. Поэтому многообразие M ориентируемо. $\square$

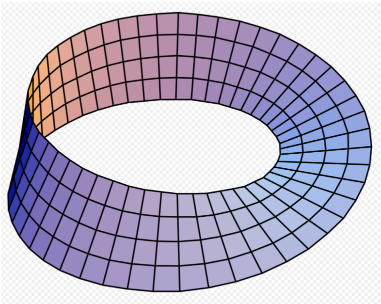
Пример 1. Множество

$$M = \{\psi(u,\varphi):\ u \in (-1,1),\ \varphi \in [0,2\pi)\},$$

где

$$\psi(u,\varphi) = \begin{pmatrix} x(u,\varphi) \\ y(u,\varphi) \\ z(u,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi \\ \left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi \\ \frac{u}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

называется *листом (лентой) Мебиуса.*



Матрица Якоби вектор-функции $\psi(u,\varphi)$ имеет вид

$$\mathcal{D}\,\psi(u,\varphi) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_\varphi \\ y'_u & y'_\varphi \\ z'_u & z'_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi & -\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi - \frac{u}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi & \left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi - \frac{u}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & \frac{u}{4}\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_\varphi \\ y'_u & y'_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0 \quad \text{при } \varphi \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ |u| < 1,$$

а при $\varphi = \pi + 2\pi k$ имеем

$$\begin{vmatrix} y'_u & y'_\varphi \\ z'_u & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \pm\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \neq 0,$$

то ранг матрицы Якоби $\mathcal{D}\psi(u,\varphi)$ равен 2 при всех $\varphi\in\mathbb{R}$, $u\in(-1,1)$.

Для определения области, в которой отображение ψ инъективно, решим уравнение

$$\psi(u_1,\varphi_1)=\psi(u_2,\varphi_2). \tag{1}$$

Обозначая $\varrho_i=1+\frac{u_i}{2}\cos\frac{\varphi_i}{2}$ при $i=1,2$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{cases}\varrho_1\cos\varphi_1=\varrho_2\cos\varphi_2\\ \varrho_1\sin\varphi_1=\varrho_2\sin\varphi_2\\ \frac{u_1}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}=\frac{u_2}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}\end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы следует, что $\varrho_1=\varrho_2$ и $\varphi_1=\varphi_2+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Из третьего уравнения системы следует, что если $\varphi_1=\varphi_2+4\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то $u_1=u_2$, а если $\varphi_1=\varphi_2+2\pi+4\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то $u_1=-u_2$.

Таким образом, в области $\{(u,\varphi):\ u\in(-1,1),\varphi\in(a,b)\}=(-1,1)\times\times(a,b)$, где $0<b-a\leq 2\pi$, отображение ψ инъективно. Рассмотрим, например, следующие три допустимые области параметров в $\mathbb{R}^2$:

$$V_1=(-1,1)\times\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right),\quad V_2=(-1,1)\times\left(0,\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$V_3=(-1,1)\times\left(\frac{2\pi}{3},2\pi\right).$$

Определим отображение ψ_i как сужение отображения ψ на множество V_i. По аналогии с примером 3 § 3 легко доказать, что ψ_i является гомеоморфизмом из V_i в $U_i:=\psi_i(V_i)$, $i=1,2,3$. Поскольку $M=\bigcup\limits_{i=1}^{3}U_i$, то набор карт $\{(\varphi_i,U_i)\}_{i=1}^3$ составляет атлас на M. В силу теоремы о параметрическом способе задания гладкого подмногообразия множество M является гладким двумерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^3$.

Найдем замены координат $w_{ij}=\psi_i^{-1}\circ\psi_j$. Согласно определению замены координат отображение w_{ij} действует из множества $\psi_j^{-1}(U_i\cap U_j)$ во множество $\psi_i^{-1}(U_i\cap U_j)$. Поэтому

$$w_{21}:(-1,1)\times\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\to(-1,1)\times\left(0,\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$w_{32}:(-1,1)\times\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\to(-1,1)\times\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$w_{13}:(-1,1)\times\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)\to(-1,1)\times\left(-\frac{2\pi}{3},0\right).$$

Используя полученные выше решения уравнения (1), находим замены координат:

$$w_{21}(u,\varphi) = (u,\varphi), \quad w_{32}(u,\varphi) = (u,\varphi), \quad w_{13}(u,\varphi) = (-u,\varphi + 2\pi).$$

Видим, что якобианы замен координат w_{21} и w_{32} положительны, а якобиан замены координат w_{13} отрицателен. Таким образом, цепочка карт $\{(\psi_1, U_1), (\psi_2, U_2), (\psi_3, U_3)\}$ является дезориентирующей. Согласно теореме о дезориентирующей цепочке карт лист Мебиуса является неориентируемым многообразием.

Рассмотрим способ ориентации $(N-1)$-мерного гладкого подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$, использующий нормаль к подмногообразию.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^N$ как многообразие, ориентированное стандартной декартовой системой координат $(x^1, \dots, x^N)$.

Определение. Вектор $\vartheta \in \mathbb{R}^N$ называется *единичным вектором нормали* к многообразию $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ в точке $P \in M$, если $|\vartheta| = 1$ и скалярное произведение (ϑ, u) равно нулю для любого касательного вектора $u \in \widetilde{T}_P(M)$.

Так как $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$, то размерность касательного подпространства $\widetilde{T}_P(M)$ равна $N-1$. Следовательно, размерность его ортогонального дополнения

$$\widetilde{T}_P(M)^\perp := \{\vartheta \in \mathbb{R}^N : \ (\vartheta, u) = 0 \ \forall u \in \widetilde{T}_P(M)\}$$

равна 1. Таким образом, для любой точки $P \in M$ существуют ровно два единичных вектора $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^\perp$, отличающихся знаком.

Определение. Будем говорить, что единичный вектор нормали $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^\perp$ и карта (ψ, U) на $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ *согласованы*, если $P \in U$ и для $x_0 = \psi^{-1}(P)$

$$\left(\vartheta, \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(x_0)\right) \text{ – правый базис в } \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Лемма 4. *Пусть единичный вектор нормали $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^\perp$ согласован с одной картой (ψ, U), соответствующей ориентации M. Тогда вектор ϑ согласован с любой картой $(\tilde\psi, \tilde U)$, соответствующей ориентации M и такой, что $P \in \tilde U$.*

Доказательство. Фиксируем карту $(\tilde\psi, \tilde U)$, соответствующую ориентации M и такую, что $P \in \tilde U$. Рассмотрим базисы $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ и $\left(\frac{\partial\tilde\psi}{\partial \tilde x^1}, \dots, \frac{\partial\tilde\psi}{\partial \tilde x^{N-1}}\right)$ в $\widetilde{T}_P(M)$, соответствующие ЛСК ψ^{-1} и $\tilde\psi^{-1}$. Поскольку карты (ψ, U) и $(\tilde\psi, \tilde U)$ ориентированы согласованно, то в силу леммы 1 эти базисы ориентированы одинаково. Поэтому $\left(\vartheta, \frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$

и $\left(\vartheta, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^{N-1}}\right)$ – одинаково ориентированные базисы в $\mathbb{R}^N$. Таким образом, согласно условию (2) вектор нормали ϑ согласован с картой $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$. $\square$

Определение. Будем говорить, что единичный вектор нормали $\vartheta \in \in \widetilde{T}_P(M)^\perp$ *согласован с ориентацией многообразия* $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$, если ϑ согласован с любой картой (ψ, U) на M, соответствующей ориентации M и такой, что $P \in U$.

Лемма 5. *Для любой точки $P \in M$ ориентированного многообразия $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ существует единственный единичный вектор нормали $\vartheta \in \in \widetilde{T}_P(M)^\perp$, согласованый с ориентацией M.*

Доказательство. Фиксируем карту (ψ, U) на M, соответствующую ориентации M и такую, что $P \in U$. Пусть ϑ – один из двух единичных векторов нормали к M в точке P. Если ϑ не согласован с картой (ψ, U), то изменим знак вектора ϑ. Получим единичный вектор нормали $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^\perp$, согласованный с картой (ψ, U). В силу леммы 4 вектор ϑ согласован с ориентацией M. Такой вектор ϑ единственен, т.к. единичных векторов нормалей к M в точке P всего два: ϑ и $-\vartheta$, причем вектор $-\vartheta$ не согласован с картой (ψ, U). $\square$

Теорема 3. (О непрерывной нормали.) *Подмногообразие $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ пространства $\mathbb{R}^N$ является ориентируемым тогда и только тогда, когда существует непрерывная на M функция $\vartheta : M \to \mathbb{R}^N$, значение которой $\vartheta(P)$ в каждой точке $P \in M$ является единичным вектором нормали к M в точке P.*

Доказательство. Докажем «$\Rightarrow$». Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ ориентируемо. Согласно лемме 5 для любой точки $P \in M$ существует единственный единичный вектор нормали $\vartheta(P) \in \widetilde{T}_P(M)^\perp$, согласованый с ориентацией M. Покажем, что функция $\vartheta : M \to \mathbb{R}^N$ непрерывна. Фиксируем точку $P_0 \in M$ и последовательность точек $P_k \in M$ таких, что $P_k \to P_0$ при $k \to \infty$. Поскольку последовательность $\{\vartheta(P_k)\}$ ограничена, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\vartheta(P_{k_j})\}$, сходящуюся к некоторому вектору $\hat{\vartheta} \in \mathbb{R}^N$. Покажем, что $\hat{\vartheta} = \vartheta(P_0)$.

Фиксируем карту (ψ, U) на M, соответствующую ориентации M и такую, что $P_0 \in U$. Этой карте соответствует базис $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ в $\widetilde{T}_P(M)$. Поскольку векторы $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P))$ непрерывно зависят от точки P, то, переходя к пределу при $j \to \infty$ в равенствах $\left(\vartheta(P_{k_j}), \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P_{k_j}))\right) = = 0$, получаем равенства $\left(\hat{\vartheta}, \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P_0))\right) = 0$ при всех $i \in \overline{1, N-1}$, т.е. $\hat{\vartheta} \in \widetilde{T}_{P_0}(M)^\perp$. Переходя к пределу при $j \to \infty$ в равенстве $|\vartheta(P_{k_j})| = 1$, получаем равенство $|\hat{\vartheta}| = 1$.

Условие (2) эквивалентно неравенству $\det\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P),\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P)\right) > 0$, где $\det(e_1,\ldots,e_N)$ – определитель матрицы, столбцами которой являются координаты векторов $(e_1,\ldots,e_N)$ в $\mathbb{R}^N$. Поскольку определитель матрицы непрерывно зависит от элементов матрицы, то, переходя к пределу при $j\to\infty$ в неравенстве $\det\left(\vartheta(P_{k_j}), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P_{k_j}),\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P_{k_j})\right) > 0$, получаем неравенство $\det\left(\hat{\vartheta}, \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P_0),\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P_0)\right) \geq 0$. Следовательно, $\hat{\vartheta}=\vartheta(P_0)$.

Таким образом, вектор $\vartheta(P_0)$ является единственным частичным пределом последовательности $\{\vartheta(P_k)\}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\vartheta(P_k) = \vartheta(P_0)$. Поэтому функция $\vartheta: M\to\mathbb{R}^N$ непрерывна в произвольной точке $P_0\in M$.

Докажем «$\Leftarrow$». Пусть существует непрерывная функция $\vartheta: M\to\mathbb{R}^N$, значение которой $\vartheta(P)$ в каждой точке $P\in M$ является единичным вектором нормали к M в точке P. Согласно определению гладкого многообразия для каждой точки $P\in M$ найдется карта $(\psi,U)=(\psi_P,U_P)$ такая, что $P\in U$. Можно считать, что множество U линейно-связно (иначе в качестве U возьмем линейно-связную его компоненту, содержащую P). Если базис $\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P)),\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P))\right)$ не является правым базисом в $\mathbb{R}^N$, то изменим знак первой координаты этой ЛСК. Тогда изменится знак $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}$, а остальные $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ не изменятся. Поэтому для каждой точки $P_0\in M$ найдется такая покрывающая ее карта $(\psi,U)=(\psi_{P_0},U_{P_0})$, что $\left(\vartheta(P_0), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P_0)),\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P_0))\right)$ – правый базис в $\mathbb{R}^N$. В силу непрерывности $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P))$ и $\vartheta(P)$, а также линейной связности $U = U_{P_0}$ получаем, что $\det\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P)),\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P))\right) > 0$, т.е. $\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P)),\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P))\right)$ – правый базис в $\mathbb{R}^N$ для любой точки $P\in U_{P_0}$.

Покажем, что атлас $\mathcal{A}=\{(\psi_P,U_P)\}_{P\in M}$ является ориентирующим для M. Рассмотрим любые две карты (ψ,U) и $(\tilde{\psi},\widetilde{U})$ этого атласа такие, что $U\cap\widetilde{U}\neq\emptyset$. Тогда в любой точке $P\in U\cap\widetilde{U}$ наборы векторов $\left(\vartheta, \frac{\partial\psi}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ и $\left(\vartheta, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^1},\ldots,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^{N-1}}\right)$ являются одинаково ориентированными (правыми) базисами в $\mathbb{R}^N$. Поэтому $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ и $\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^1},\ldots,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^{N-1}}\right)$ – одинаково ориентированные базисы в $\widetilde{T}_P(M)$. В силу леммы 1 карты (ψ,U) и $(\tilde{\psi},\widetilde{U})$ согласованы. Следовательно, $\mathcal{A}$ – ориентирующий атлас. $\square$

Пример 2. Сфера $M=\{P\in\mathbb{R}^N: \ |P|=r\}$ является ориентируемым многообразием. Это следует, например, из теоремы о непрерывной нормали, поскольку функция $\vartheta(P) = \frac{P}{r}$ является непрерывной на M и ее значение является единичным вектором нормали к M в точке P.

$\lhd$

§ 8. Согласование ориентаций многообразия и его края

Лемма 1. *Открытый шар $U_\varepsilon(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c| < \varepsilon\}$ диффеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Рассмотрим единичный шар

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Поскольку линейное отображение $g(x) = c + \varepsilon \cdot x$ является диффеоморфизмом из B^n в $U_\varepsilon(c)$, то достаточно построить диффеоморфизм $\varphi : B^n \to \mathbb{R}^n$. Таким диффеоморфизмом являтся, например, отображение

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}, \qquad x \in B^n,$$

которое, как видно из формулы, является C^∞-гладким и имеет C^∞-гладкое обратное отображение

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + |y|^2}}, \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому φ – C^∞-гладкий диффеоморфизм. $\square$

Лемма 2. *Для любого гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ существует такой гладкий атлас, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ или с полупространством $\mathbb{R}^n_-$.*

Доказательство. Фиксируем гладкий атлас $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ на M. Для любого $\lambda \in \Lambda$ множество $V_\lambda := \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ является допустимой областью параметров, т.е. открытым подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$ с топологией, индуцированной топологией $\mathbb{R}^n$. Поэтому для любой точки $x \in V_\lambda$ существует ее окрестность $V_\lambda(x) \subset V_\lambda$ такая, что $V_\lambda(x)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x или полушар (точнее – пересечение открытого шара с замкнутым полупространством $\mathbb{R}^n_-$, на границе которого лежит точка x – центр шара). Согласно лемме 1 открытый шар диффеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$. Аналогично, указанный выше полушар диффеоморфен полупространству $\mathbb{R}^n_-$. В любом случае существует диффеоморфизм $f_{\lambda,x}$, переводящий $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$ в $V_\lambda(x)$.

Для любых $\lambda \in \Lambda$, $x \in V_\lambda$ через $\psi_{\lambda,x}$ обозначим сужение отображения ψ_λ на множество $V_\lambda(x)$: $\psi_{\lambda,x} := \psi_\lambda\big|_{V_\lambda(x)}$, а через $U_{\lambda,x}$ – образ множества $V_\lambda(x)$ при отображении ψ_λ: $U_{\lambda,x} := \psi_\lambda(V_\lambda(x)) = \psi_{\lambda,x}(V_\lambda(x))$.

Так как $V_\lambda = \bigcup\limits_{x\in V_\lambda} V_\lambda(x)$, то $U_\lambda = \psi_\lambda(V_\lambda) = \bigcup\limits_{x\in V_\lambda} \psi_\lambda(V_\lambda(x)) = \bigcup\limits_{x\in V_\lambda} U_{\lambda,x}$. Поэтому набор карт

$$\Big\{(\psi_{\lambda,x}, U_{\lambda,x})\Big\}_{\substack{x\in V_\lambda\\ \lambda\in\Lambda}}$$

составляет гладкий атлас на M. Поскольку отображение $\psi_{\lambda,x} \circ f_{\lambda,x}$ является гомеоморфизмом из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$ в $U_{\lambda,x}$, то набор карт

$$\Big\{(\psi_{\lambda,x} \circ f_{\lambda,x},\ U_{\lambda,x})\Big\}_{\substack{x\in V_\lambda\\ \lambda\in\Lambda}}$$

составляет искомый атлас. □

Лемма 3. *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$ – ориентированное многообразие, $n \geq 2$. Тогда на M существует такой атлас заданной ориентации, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ или с полупространством $\mathbb{R}^n_-$.*

Доказательство. В силу леммы 2 существует такой гладкий атлас $\mathcal{A}$ на M, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$. Если карта (ψ, U) этого атласа не соответствует заданной ориентации M, то, изменив знак второй координаты x^2 ЛСК этой карты, получим карту, соответствующую ориентации M. Поскольку область параметров этой карты совпадает с $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$, то при изменении знака x^2 эта область не изменится. Выполняя эти действия для всех карт атласа $\mathcal{A}$, получим искомый атлас. □

Используя атлас, существование которого установлено в лемме 3, следующая теорема определяет ориентацию края ∂M многообразия M, согласованную с ориентацией M.

Теорема 1. (О построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия.) *Пусть ориентация многообразия* $M \in \mathfrak{M}^n$, $n \geq 2$ *задана ориентирующим атласом* $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda_1}$, *области параметров карт которого имеют вид*

$$\psi_\lambda^{-1}(U_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \lambda \in \Lambda_0, \\ \mathbb{R}^n_-, & \lambda \in \Lambda_1. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda \in \Lambda_1}$ *– ориентирующий атлас на* ∂M.

Доказательство. Так как $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$, то $\partial U_\lambda = \emptyset$ при $\lambda \in \Lambda_0$. Поэтому согласно теореме о гладком атласе на крае многообразия, $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda \in \Lambda_1}$ – гладкий атлас на ∂M. Покажем, что любые две карты этого атласа согласованы. Фиксируем два произвольных индекса $\lambda, \tilde\lambda \in \Lambda_1$. Поскольку карты $(\psi_\lambda, U_\lambda)$ и $(\psi_{\tilde\lambda}, U_{\tilde\lambda})$ согласованы, то якобиан замены координат $w = \psi_{\tilde\lambda}^{-1} \circ \psi_\lambda$ положителен на своей области определения $V := \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda \cap U_{\tilde\lambda})$. Поскольку множество $U_\lambda \cap$ $\cap\, U_{\tilde\lambda}$ открыто в топологическом пространстве M, то его прообраз V при непрерывном отображении ψ_λ является открытым подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}^n_-$. Это доказывается аналогично доказательству леммы 4 § 1. Следовательно, множество V является допустимой областью параметров. При этом $\partial V = V \cap \partial\mathbb{R}^n_-$ – край V. Отображение замены координат от карты $\left(\psi_\lambda\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_\lambda\right)$ к карте $\left(\psi_{\tilde\lambda}\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_{\tilde\lambda}\right)$ является сужением отображения w на ∂V. Требуется доказать, что якобиан этого сужения $w\big|_{\partial V}$ положителен на ∂V.

Пусть $w(x) = \begin{pmatrix} w^1(x) \\ \dots \\ w^n(x) \end{pmatrix}$ при $x \in V$. Фиксируем произвольную точку $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \partial V$. Так как $\partial V \subset \partial\mathbb{R}^n_-$, то $x_0^1 = 0$.

По теореме о независимости краевой точки от карты получаем, что $w(\partial V) \subset \partial\mathbb{R}^n_-$. Следовательно, $w^1(0, x^2, \dots, x^n) = 0$ при $(x^2, \dots, x^n)$ достаточно близких к $(x_0^2, \dots, x_0^n)$, а значит, $\frac{\partial w^1}{\partial x^i}(x_0) =$ $= 0$ при всех $i \in \overline{2, n}$.

Поскольку $w(V) \subset \mathbb{R}^n_-$, то $w^1(x^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \leq 0 = w^1(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ при всех $x^1 \leq 0$, достаточно близких к 0, а значит, $\frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) \geq 0$.

Используя обозначение

$$\frac{\partial(w^1, \ldots, w^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial w^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial w^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial w^n}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial w^n}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

получаем

$$\det \mathcal{D}\, w(x_0) = \frac{\partial(w^1, \ldots, w^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}(x_0) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial w^n}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial w^n}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial w^n}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) \cdot \frac{\partial(w^2, \ldots, w^n)}{\partial(x^2, \ldots, x^n)}(x_0).$$

Так как $\det \mathcal{D}\, w(x_0) > 0$, $\frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) \geq 0$, то $\frac{\partial(w^2,\ldots,w^n)}{\partial(x^2,\ldots,x^n)}(x_0) > 0$. Поскольку $\frac{\partial(w^2,\ldots,w^n)}{\partial(x^2,\ldots,x^n)}$ – это якобиан сужения $w_{|_{\partial V}}$, доказательство теоремы завершено. $\square$

Определение. Ориентацию ∂M, заданную атласом, указанным в теореме 1, будем называть *согласованной с ориентацией M.*

Определение. Пусть $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^n$ – ориентированные многообразия. Будем говорить, что диффеоморфизм φ из M_1 в M_2 *переносит ориентацию M_1 на ориентацию M_2*, если для любой карты (ψ, U) на M_1, соответствующей ориентации M_1, карта $(\varphi \circ \psi, \varphi(U))$ на M_2 соответствует ориентации M_2.

Лемма 4. *Пусть $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^n$ – ориентированные многообразия, $n \geq 2$. Пусть гладкий диффеоморфизм φ из M_1 в M_2 переносит ориентацию M_1 на ориентацию M_2. Пусть ориентация ∂M_1 согласована с ориентацией M_1, а сужение $\varphi_{|_{\partial M_1}}$ диффеоморфизма φ переносит ориентацию ∂M_1 на ориентацию ∂M_2. Тогда ориентация ∂M_2 согласована с ориентацией M_2.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $Q \in \partial M_2$. Обозначим $P := \varphi^{-1}(Q)$. Тогда $P \in \partial M_1$. По лемме 3 существует карта (ψ_1, U_1) на M_1, согласованная с ориентацией M_1 и такая, что $P \in U_1$, $\psi_1^{-1}(U_1) = \partial\mathbb{R}^n_-$.

Обозначим $\psi_2 := \varphi \circ \psi_1$, $U_2 := \varphi(U_1)$. Поскольку диффеоморфизм φ переносит ориентацию M_1 на ориентацию M_2, то карта (ψ_2, U_2) согласована с ориентацией M_2. При этом $\psi_2^{-1}(U_2) = \partial\mathbb{R}^n_-$. Поэтому карта $\left(\psi_2\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-}, \partial U_2\right)$ соответствует ориентации ∂M_2, согласованной с ориентацией M_2. Поскольку $\psi_2\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-} = \varphi\big|_{\partial M_1} \circ \psi_1\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-}$, $\quad \partial U_2 = \varphi(\partial U_1)$, то сужение $\varphi\big|_{\partial M_1}$ переносит ориентацию ∂M_1 на ориентацию ∂M_2, согласованную с ориентацией M_2. $\square$

Замечание. Лемма 4 позволяет проверять согласованность ориентаций многообразия и его края. Пусть $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda_1}$ – ориентирующий атлас на $M \in \mathfrak{M}^n$, области параметров карт которого имеют вид (1). Для того, чтобы проверить, что край ∂M ориентирован положительно относительно ориентации многообразия M достаточно правильно согласовать ориентации $\mathbb{R}^n_-$ и $\partial\mathbb{R}^n_-$ и следить за тем, чтобы отображение $\psi_\lambda\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-}$ при $\lambda \in \Lambda_1$ переносило ориентацию $\partial\mathbb{R}^n_-$ на ориентацию ∂M. Правильное согласование ориентаций $\mathbb{R}^n_-$ и $\partial\mathbb{R}^n_-$ означает, что если ориентация $\mathbb{R}^n_-$ задана стандартной декартовой системой координат $(x^1, \ldots, x^n)$, то ориентация $\partial\mathbb{R}^n_-$ задана системой координат $(x^2, \ldots, x^n)$.

$\triangleright$

Теорема 1 позволяет согласовать ориентации гладкого многообразия и его края в случае, когда размерность многообразия больше 1. Рассмотрим одномерный случай отдельно. Пусть M – одномерное гладкое ориентированное многообразие. Фиксируем точку $P \in \partial M$. В силу леммы 2 § 3 существует карта (ψ, U) на M, область параметров которой совпадает с $\mathbb{R}^1_- = (-\infty, 0]$ и $\psi^{-1}(P) = 0$. Этими условиями ориентация карты (ψ, U) определена однозначно. При этом карта (ψ, U) может соответствовать или не соответствовать ориентации многообразия M. Эти соображения приводят к следующему определению.

Определение. *Ориентацией края ∂M ориентированного многообразия $M \in \mathfrak{M}^1$, согласованной с ориентацией M,* называется функция $s : \partial M \to \{-1, +1\}$, которая точке $P \in \partial M$ ставит в соответствие число $s(P) = +1$, если точку P можно покрыть районом действия карты (ψ, U), согласованной с ориентацией M, область параметров которой $\psi^{-1}(U)$ совпадает с $(-\infty, 0]$. Иначе $s(P) = -1$.

Пример 1. Пусть $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$ – простая кривая в $\mathbb{R}^N$, соединяющая точки P и Q, т.е. $r(a) = P$, $r(b) = Q$, $r \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^N)$ и $r'(t) \neq \overline{0}$ при $t \in [a,b]$. Согласно лемме 2 § 7 многообразие Γ ориентируемо. Край Γ состоит из двух точек: начала P и конца Q кривой Γ: $\partial\Gamma = \{P, Q\}$. При этом ориентация $\partial\Gamma$, согласованная с ориентацией Γ в направлении возрастания параметра t – это функция $s : \partial\Gamma \to \{-1, +1\}$, заданная равенствами $s(P) = -1$, $s(Q) = 1$.

$\lhd$

Задача 1. Докажите, что если граница области $G \subset \mathbb{R}^2$ является простой замкнутой гладкой кривой Γ, а $M = \overline{G}$ – замыкание области G в $\mathbb{R}^2_{xy}$, то M – гладкое двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$, причем Γ – край многообразия M.

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_n$. Вектор $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ называется *единичным вектором внешней по отношению к M нормали* к ∂M в точке $P \in \partial M$, если

1) $|\vartheta| = 1$,

2) скалярное произведение (ϑ, u) равно нулю для любого касательного вектора $u \in \widetilde{T}_P(\partial M)$ и

3) при всех достаточно малых $t > 0$ точка $P + t\vartheta$ не лежит в M.

Лемма 5. *Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^n_n$ ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Пусть $\vartheta(P)$ – единичный вектор нормали к ∂M в точке $P \in \partial M$, согласованный с ориентацией ∂M. Ориентация края ∂M согласована с ориентацией M тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in \partial M$ вектор $\vartheta(P)$ является внешней по отношению к M нормалью к ∂M.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $P \in \partial M$. Согласно лемме 3 найдется карта (ψ, U) на M, согласованная с ориентацией M и такая, что $P \in U$ и $\psi^{-1}(U) = \mathbb{R}^n_-$. Обозначим $x_0 = \psi^{-1}(P)$. Тогда $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}\right)$ – правый базис в $\widetilde{T}_P(M) = \mathbb{R}^n$, т.е. $\det \mathcal{D}\,\psi(x_0) > 0$. Пусть ориентация края ∂M согласована с ориентацией M. Тогда карта $\left(\psi\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-}, \ \partial U\right)$ согласована с ориентацией края ∂M. По определению согласованности вектора нормали $\vartheta = \vartheta(P)$ с картой получаем, что $\left(\vartheta, \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)$ – правый базис в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим вектор $b = \mathcal{D}\psi^{-1}\vartheta$. Тогда $\vartheta = \mathcal{D}\psi \cdot b$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^2} = \mathcal{D}\psi \cdot e_2$, $\ldots$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^n} = \mathcal{D}\psi \cdot e_n$, где $(e_1, \ldots, e_n)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Поэтому $(b, e_2, \ldots, e_n)$ – правый базис в $\mathbb{R}^n$, т.е. $b_1 > 0$, где $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$. Поскольку $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_-, U)$, то по определению классов $C^k(V, Y)$ можно считать, что вектор функция ψ определена и является гладкой в некоторой окрестности точки x_0. Поскольку $\det \mathcal{D}\psi(x_0) \neq 0$, то по теореме об обратном отображении сужение ψ на некоторую окрестность точки x_0 является гладким диффеоморфизмом. Заметим, что

$$\psi^{-1}(P + t\vartheta) = \psi^{-1}(P) + t\mathcal{D}\psi^{-1}(P)\vartheta + o(t) = x_0 + tb + o(t), \quad t \to +0.$$

Отсюда и из соотношений $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_-$ и $b_1 > 0$ следует, что существует число $t_0 > 0$ такое, что $\psi^{-1}(P + t\vartheta) \notin \mathbb{R}^n_-$ при $t \in (0, t_0)$. Следовательно, $P + t\vartheta \notin \psi(\mathbb{R}^n_-) = U$ при $t \in (0, t_0)$. Поскольку U – открытое подмножество топологического пространства M, то при достаточно малых $t > 0$ получаем $P + t\vartheta \notin M$, т.е. $\vartheta = \vartheta(P)$ – внешняя по отношению к M нормаль к ∂M.

Если изменить ориентацию края ∂M, то направление вектора $\vartheta(P)$, согласованного с ориентацией ∂M, изменится на противоположное и вектор $\vartheta(P)$ станет вннутренней по отношению к M нормалью к ∂M. $\square$

Определение. Пусть M – гладкое двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$. Будем говорить, что при движении вдоль края ∂M в направлении его ориентации многообразие M *остается слева*, если для любой точки $P \in \partial M$ пара векторов (ϑ, τ) является правой в $\mathbb{R}^2_{xy}$, где ϑ – вектор единичной внешней по отношению к M нормали к ∂M в точке P, τ – вектор касательной к ∂M, соответствующий ориентации ∂M.

Замечание. Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^2_2$ ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^2_{xy}$. Из леммы 5 следует, что ориентация края ∂M согласована с ориентацией M тогда и только тогда, когда при движении вдоль края ∂M в направлении его ориентации многообразие M остается слева.

Рассмотрим практический метод согласования ориентаций гладкого двумерного многообразия (гладкой поверхности) $S \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ и ее края ∂S.

Фиксируем произвольную точку $P \in \partial S$ и карту (ψ, U) на S, соответствующую ориентации S. Пусть $(\alpha, \beta) = \psi^{-1}$ – соответствующая ЛСК. Тогда область параметров $V := \psi^{-1}(U)$ лежит в плоскости $\mathbb{R}^2_{\alpha\beta}$. Пусть ξ – вектор внешней по отношению к V номали к кривой ∂V; $x_0 := \psi^{-1}(P)$. Поскольку $x_0 - t\xi \in V$, то $\psi(x_0 - t\xi) \in \psi(V) = S$ при достаточно малых $t > 0$. Поэтому вектор

$$\eta := \frac{d}{dt}\psi(x_0 - t\xi)_{|t=0}$$

является вектором касательной плоскости $\widetilde{T}_P(S)$, направленным «в сторону» поверхности S.

Так как пара векторов $\psi'_\alpha(x_0)$, $\psi'_\beta(x_0)$ составляет базис пространства $\widetilde{T}_P(S)$, соответствующий ориентации S, то вектор $\vartheta := \frac{[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]}{|[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]|}$ является вектором единичной нормали к S в точке P, согласованным с картой (ψ, U), а значит, и с ориентацией S. Пусть τ – единичный вектор касательной к кривой ∂S в точке P, направленный в соответствии с ориентацией кривой ∂S.

Справедливо следующее правило «правой руки»: *ориентация края ∂S согласована с ориентацией поверхности S тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in \partial S$ тройка векторов τ, η, ϑ является правой тройкой в пространстве $\mathbb{R}^3_{xyz}$*. В силу леммы 3 это утверждение достаточно проверить для карты (ψ, U) такой, что $V = \psi^{-1}(U) = \mathbb{R}^2_- = \{(\alpha, \beta) : \alpha \le 0, \beta \in \mathbb{R}\}$. В этом случае $\partial V = \{(0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$, $\partial S = \psi(\partial V) = \{\psi(0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$, $\tau = \psi'_\beta$, $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta = -\psi'_\alpha$, $\vartheta := \frac{[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]}{|[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]|}$. Ориентации многообразий V и ∂V, заданные стандартными системами координат в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}$, согласованы. Отображение ψ переносит ориентацию V на ориентацию S, а ориентацию ∂V – на ориентацию ∂S. Поэтому ориентации S и ∂S также согласованы. Поскольку тройка векторов ϑ, τ, η является правой, то правило «правой руки» выполняется.

Менее строго правило «правой руки» можно сформулировать следующим образом: *край ∂S ориентирован согласовано с ориентацией поверхности S тогда и только тогда, когда при обходе края ∂S в* *направлении его ориентации поверхность S остается слева, если смотреть с той стороны, в которую направлен вектор нормали к поверхности S, согласованный с ориентацией поверхности S.*

Глава 18

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Тензоры как полилинейные функции

В этом параграфе через V будем обозначать некоторое конечномерное линейное пространство, а через V^* – сопряженное к V пространство, состоящее из линейных функций (ковекторов) $l : V \to \mathbb{R}$ (или $l : V \to \mathbb{C}$ в случае комплексных чисел).

Определение. *Тензором T типа (p, q) на пространстве V* называется полилинейная функция

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \to \mathbb{R}.$$

Значение этой полилинейной функции на ковекторах $l^1, \ldots, l^p \in \in V^*$ и векторах $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$ будем записывать в виде $T[l^1, \ldots, l^p, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$. *Полилинейность* этой функции означает ее линейность по каждому ковектору $l^1, \ldots, l^p$ и каждому вектору $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q$ при фиксированных значениях остальных ее аргументов.

Определение. Пусть $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – базис в V, пусть $(e_*^1, \ldots, e_*^n)$ – взаимный базис в V^*. Тогда числа

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T[e_*^{i_1}, \ldots, e_*^{i_p}, \vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_q}]$$

называются *компонентами* или *координатами тензора T* в этих базисах.

Замечание. Значение тензора T выражается через его компоненты по формуле

$$T[l^1, \ldots, l^p, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\ l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p}\ \xi_1^{j_1} \ldots \xi_q^{j_q}, \tag{1}$$

где $(l^i_1, \ldots, l^i_n)$ – координаты ковектора l^i, $(\xi_j^1, \ldots, \xi_j^n)$ – координаты вектора $\vec{v}_j$, суммирование производится по всем наборам индексов $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \overline{1, n}$. Это следует из полилинейности тензора.

Определение. Пусть S и T – тензоры типа (p,q) на пространстве V, α и β – числа. Линейной комбинацией $\alpha S+\beta T$ называется тензор типа (p,q) на V, определяемый для любых $l^1,\ldots,l^p\in V^*$ и $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q\in V$ естественным образом:

$$(\alpha S+\beta T)[l^1,\ldots,l^p,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q]=$$

$$=\alpha S[l^1,\ldots,l^p,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q]+\beta T[l^1,\ldots,l^p,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q].$$

Таким образом, множество тензоров типа (p,q) на пространстве V образует линейное пространство.

Определение. *Тензорным произведением* тензора S типа (p,q) и тензора T типа (r,s) называется тензор $S\otimes T$ типа $(p+r,q+s)$, значение которого для любых $l^1,\ldots,l^{p+r}\in V^*$ и $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{q+s}\in V$ определяется формулой

$$(S\otimes T)[l^1,\ldots,l^{p+r},\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{q+s}]=$$

$$=S[l^1,\ldots,l^p,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q]\cdot T[l^{p+1},\ldots,l^{p+r},\vec{v}_{q+1},\ldots,\vec{v}_{q+s}].$$

Замечание. Тензорное произведение, вообще говоря, не коммутативно. Например, $e^1_*\otimes e^2_*\neq e^2_*\otimes e^1_*$, т.к.

$$\Big(e^1_*\otimes e^2_*\Big)[\vec{e}_1,\vec{e}_2]=1\neq 0=\Big(e^2_*\otimes e^1_*\Big)[\vec{e}_1,\vec{e}_2].$$

Соглашение об отождествлении конечномерного линейного пространства и его второго сопряженного. Любому вектору $\vec{v}\in V$ сопоставим линейную функцию $\vec{v}^{**}:V^*\to\mathbb{R}$, определяемую формулой

$$\vec{v}^{**}(l)=l(v)\quad\forall l\in V^*.$$

Тогда $\vec{v}^{**}$ – элемент пространства V^{**}, сопряженного к V^*. При этом отображение $v\to\vec{v}^{**}$ из V в V^{**} является изоморфизмом линейных пространств. Имея в виду этот изоморфизм, будем отождествлять $\vec{v}^{**}$ и $\vec{v}$, а значит, будем отождествлять пространство V и его второе сопряженное V^{**}.

Теорема 1. (О выражении тензора через его компоненты и базисные векторы.) *Пусть $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ – базис в пространстве V, $(e^1_*,\ldots,e^n_*)$ – взаимный базис в V^*. Тогда тензор T на V следующим образом выражается через свои компоненты в этих базисах:*

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\ \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1}_* \otimes \dots \otimes e^{j_q}_*,$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \overline{1, n}$.

Доказательство. По определению тензорного произведения

$$\left(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1}_* \otimes \dots \otimes e^{j_q}_*\right)[l^1, \dots, l^p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q] =$$

$$= \vec{e}_{i_1}(l^1) \dots \vec{e}_{i_p}(l^p) \cdot e^{j_1}_*(\vec{v}_1) \dots e^{j_q}_*(\vec{v}_q).$$

Разложим векторы $\vec{v}_m$ и ковекторы l^m по базисам пространств V и V^* соответственно:

$$\vec{v}_m = \xi^k_m \vec{e}_k, \qquad l^m = l^m_k e^k_*.$$

Тогда $e^j_*(\vec{v}_m) = e^j_*(\xi^k_m \vec{e}_k) = \xi^k_m e^j_*(\vec{e}_k) = \xi^k_m \delta^j_k = \xi^j_m$, где равенство $e^j_*(\vec{e}_k) = \delta^j_k$ следует из определения взаимного базиса.

В силу соглашения об отождествлении пространств V и V^{**} имеем $\vec{e}_i(e^k_*) = e^k_*(\vec{e}_i) = \delta^k_i$. Поэтому

$$\vec{e}_i(l^m) = \vec{e}_i(l^m_k e^k_*) = l^m_k \vec{e}_i(e^k_*) = l^m_k \delta^k_i = l^m_i.$$

Следовательно,

$$\left(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1}_* \otimes \dots \otimes e^{j_q}_*\right)[l^1, \dots, l^p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q] =$$

$$= l^1_{i_1} \dots l^p_{i_p}\ \xi^{j_1}_1 \dots \xi^{j_q}_q.$$

Отсюда и из равенства (1) вытекает доказываемая формула. □

§ 2. Тензорные поля

Определение. *Векторным полем* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется отображение $\vec{v}$, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие касательный вектор $\vec{v}(P) \in T_P(M)$. *Ковекторным полем* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется отображение l, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие ковектор $l(P) \in T^*_P(M)$. *Скалярным полем* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется функция $f : M \to$ $\to \mathbb{R}$.

Определение. *Тензорным полем* t типа (s,q) на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется отображение, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие тензор $t(P)$ типа (s,q), заданный на касательном пространстве $T_P(M)$

$$t(P) : \underbrace{T_P^*(M) \times \ldots \times T_P^*(M)}_{s} \times \underbrace{T_P(M) \times \ldots \times T_P(M)}_{q} \to \mathbb{R}.$$

Значение этой полилинейной функции на ковекторах $l^1, \ldots, l^s \in T_P^*(M)$ и векторах $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in T_P(M)$ будем записывать в виде $t(P)[l^1, \ldots, l^s, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$.

Замечание. Согласно определению ковекторного поля оно является тензорным полем типа $(0,1)$. Согласно определению векторного поля и соглашению об отождествлении $T_P(M)$ и $T_P^{**}(M)$ векторное поле является тензорным полем типа $(1,0)$. Скалярное поле является тензорным полем типа $(0,0)$.

Определение. Пусть t – тензорное поле типа (s,q) на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Числа

$$t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q}(P) = t(P)\left[dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_s}, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_q}}\right]$$

называются *компонентами тензорного поля* t в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$.

Определение. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Если для каждой карты (ψ, U) на $M \in \mathfrak{M}^n$ компоненты тензорного поля t являются функциями класса $C^k(U, \mathbb{R})$, то тензорное поле называется C^k*-гладким.*

Замечание. Значение тензорного поля t однозначно выражается через его компоненты по формуле

$$t(P)[l^1, \ldots, l^s, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q}(P)\; l^1_{j_1} \ldots l^s_{j_s}\; \xi^{i_1}_1 \ldots \xi^{i_q}_q, \qquad (1)$$

где $(l^j_1, \ldots, l^j_n)$ – координаты ковектора l^j, т.е. $l^j = \sum\limits_{i=1}^{n} l^j_i dx^i$,

$(\xi^1_i, \ldots, \xi^n_i)$ – координаты вектора $\vec{v}_i$, т.е. $\vec{v}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j_i \frac{\partial}{\partial x^j}$,

все индексы суммирования $i_1, \ldots, i_q, j_1, \ldots, j_s$ пробегают $\overline{1,n}$.

Теорема 1. (О законе изменения компонент тензороного поля при замене ЛСК.) *Компоненты тензорного поля t при замене ЛСК изменяются по* тензорному закону

$$\tilde{t}^{\,j'_1\dots j'_s}_{\,i'_1\dots i'_q} = \frac{\partial\tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial\tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}}\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{i'_1}}\dots\frac{\partial x^{i_q}}{\partial\tilde{x}^{i'_q}}\;t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}, \tag{2}$$

где все индексы суммирования $i_1,\dots,i_q,j_1,\dots,j_s$ пробегают $\overline{1,n}$.

Доказательство. Согласно формулам (7), (13) § 5 имеем

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^{i'}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad d\tilde{x}^{j'} = \frac{\partial\tilde{x}^{j'}}{\partial x^j}dx^j.$$

Следовательно, используя полилинейность функции $t(P)$, получаем

$$\tilde{t}^{\,j'_1\dots j'_s}_{\,i'_1\dots i'_q}(P) = t(P)\left[d\tilde{x}^{j'_1},\dots,d\tilde{x}^{j'_s},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i'_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i'_q}}\right] =$$

$$= t(P)\left[\frac{\partial\tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}dx^{j_1},\dots,\frac{\partial\tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}}dx^{j_s},\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{i'_1}}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,\frac{\partial x^{i_q}}{\partial\tilde{x}^{i'_q}}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_q}}\right] =$$

$$= \frac{\partial\tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial\tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}}\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{i'_1}}\dots\frac{\partial x^{i_q}}{\partial\tilde{x}^{i'_q}}\;t(P)\left[dx^{j_1},\dots,dx^{j_s},\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{i_q}}\right] =$$

$$= \frac{\partial\tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial\tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}}\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{i'_1}}\dots\frac{\partial x^{i_q}}{\partial\tilde{x}^{i'_q}}\;t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P). \qquad \square$$

$\triangleright$

Теорема 2. *Пусть для каждой ЛСК $(x^1,\dots,x^n)$ на многообразии $M\in\in\mathfrak{M}^n$ и для каждого набора индексов $i_1,\dots,i_q,j_1,\dots,j_s\in\overline{1,n}$ заданы функции $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)$, $P\in M$. Следующие условия эквивалентны:*

1) существует тензорное поле t типа (s,q) на многообразии M такое, что в каждой ЛСК $(x^1,\dots,x^n)$ компоненты тензорного поля t равны функциям $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)$;

2) функции $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)$ при замене ЛСК меняются по тензорному закону (2).

Доказательство. В силу теоремы о законе изменения компонент тензороного поля при замене ЛСК из условия 1) следует условие 2). Докажем, что из условия 2) следует условие 1). Зафиксируем некоторую ЛСК

$(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки $P \in M$. Определим значение тензорного поля t в точке P формулой

$$t(P)[l^1, \dots, l^s, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q] = t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_q}(P)\ l^1_{j_1} \dots l^s_{j_s}\ \xi^{i_1}_1 \dots \xi^{i_q}_q,$$

где $(l^j_1, \dots, l^j_n)$ – координаты ковектора l^j, $(\xi^1_i, \dots, \xi^n_i)$ – координаты вектора $\vec{v}_i$. Из условия 2) и теоремы о законе изменения компонент тензороного поля при замене ЛСК следует, что для любой ЛСК $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ функции $\tilde{t}^{\,j'_1 \dots j'_s}_{i'_1 \dots i'_q}(P)$ являются компонентами тензорного поля t в этой ЛСК, т.е. выполнено условие 1). $\square$

Замечание. Имея в виду теорему 2, тензорное поле на многообразии M иногда определяют как набор скалярных полей $t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_q}(P)$, соответствующий каждой ЛСК на M и изменяющийся при замене ЛСК по тензорному закону (2).

Замечание. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Выясним, является ли набор функций $t_{ij}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(P)$ компонентами некоторого тензорного поля на M. Найдем закон преобразования функций $t_{ij}(P)$ при замене ЛСК. В силу теоремы о дифференцировании сложной функции (см. формулу (5) § 5) справедлива формула

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^{j'}} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}}.$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^{i'} \partial \tilde{x}^{j'}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i'}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\ \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i'}}\left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\ \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\ \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^{i'} \partial \tilde{x}^{j'}}.$$

Таким образом, набор функций $t_{ij}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(P)$ при замене ЛСК меняется по закону

$$\tilde{t}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}} t_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\ \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^{i'} \partial \tilde{x}^{j'}},$$

который не совпадает с тензорным законом (2) по причине наличия слагаемых $\frac{\partial f}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^{i'} \partial \tilde{x}^{j'}}$. В частном случае, если замена координат линейна, то $\frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^{i'} \partial \tilde{x}^{j'}} = 0$ и изменение функций $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(P)$ происходит по тензорному закону.

$\triangleleft$

Определение. *Суммой двух тензорных полей* t и τ одинакового типа (s,q) на многообразии M называется тензорное поле $t+\tau$ типа (s,q), значение которого в каждой точке $P \in M$ равно сумме значений $t(P)$ и $\tau(P)$: $\quad (t+\tau)(P) = t(P) + \tau(P)$.

Определение. *Произведением тензорного поля* t типа (s,q) на скалярное поле α на многообразии M называется тензорное поле αt типа (s,q), значение которого в каждой точке $P \in M$ равно произведению значений $t(P)$ и $\alpha(P)$: $\quad (\alpha t)(P) = \alpha(P) \cdot t(P)$.

Замечание. Множество тензорных полей фиксированного типа (s,q) на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ образует линейное пространство. Это следует из приведенных выше определений.

Определение. *Тензорным произведением* тензорного поля t и тензорного поля τ называется тензорное поле $t \otimes \tau$ типа $(s+r, q+s)$, значение которого в любой точке P многообразия M равно тензорному произведению тензоров $t(P)$ и $\tau(P)$:

$$(t \otimes \tau)(P) = t(P) \otimes \tau(P).$$

Непосредственно из теоремы о выражении тензора через его компоненты и базисные векторы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Любое тензорное поле* t *типа* (s,q) *следующим образом выражается через свои компоненты:*

$$t(P) = t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_q}(P) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}.$$

§ 3. Внешние формы

Как и в параграфе § 1 через V будем обозначать некоторое конечномерное линейное пространство, а через V^* – сопряженное к нему пространство.

Определение. *Внешней q-формой* на пространстве V называется кососимметрический тензор типа $(0,q)$, т.е. тензор T типа $(0,q)$ такой, что его значение $T[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q]$ меняет знак при перестановке $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_j$, где $1 \le i < j \le q$. Множество всех внешних q-форм на пространстве V будем обозначать через $\Lambda^q(V)$.

В частности, $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ (или $\Lambda^0(V) = \mathbb{C}$ в случае комплексных чисел); $\Lambda^1(V) = V^*$. Внешняя 2-форма – это тензор T типа $(0,2)$ такой, что

$$T[\vec{v}_2, \vec{v}_1] = -T[\vec{v}_1, \vec{v}_2] \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V.$$

Рассмотрим операцию альтернирования тензоров типа $(0,q)$, через которую затем введем операцию внешнего произведения внешних форм. Операция альтернирования определяется с использованием перестановок.

Определение. *Перестановкой* чисел $\overline{1,q}$ называется взаимно-однозначная функция $\sigma : \overline{1,q} \to \overline{1,q}$. Перестановка $\sigma : \overline{1,q} \to \overline{1,q}$ называется *транспозицией*, если она меняет местами два различных элемента из $\overline{1,q}$, а остальные не меняет. Известно, что любая перестановка может быть представлена в виде суперпозиции конечного числа транспозиций, причем четность этого числа не зависит от способа такого представления. Число

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ представима в виде четного числа транспозиций,} \\ -1, & \sigma \text{ представима в виде нечетного числа транспозиций.} \end{cases}$$

называется *знаком перестановки* σ.

Перестановкой набора элементов $(i_1, \ldots, i_q)$ называется набор $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(q)})$, где σ – перестановка чисел $\overline{1,q}$.

Напомним, что число перестановок q чисел равно $q!$.

Определение. *Альтернированием* тензора T типа $(0,q)$ на пространстве V называется тензор $\operatorname{Alt} T$, значение которого для любых $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$ задается формулой

$$(\operatorname{Alt} T)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ T\big[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)}\big]\,,$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma : \overline{1,q} \to$ $\to \overline{1,q}$.

Лемма 1. *Пусть T – тензор типа $(0,q)$ на пространстве V. Тогда*

1) $\operatorname{Alt} T \in \Lambda^q(V)$*;*

2) если $T \in \Lambda^q(V)$, то $\operatorname{Alt} T = T$*;*

3) если тензор T симметричен относительно $\vec{v}_i, \vec{v}_j$, т.е. значение $T[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$ не меняется при перестановке $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_j$, $i \neq j$, то $\operatorname{Alt} T = 0$.

$\triangleright$

Доказательство. 1) Пусть $\alpha : \overline{1,q} \to \overline{1,q}$ – транспозиция. Тогда $\operatorname{sign}(\alpha) = -1$. Следовательно,

$$(\operatorname{Alt} T)\big[\vec{v}_{\alpha(1)}, \ldots, \vec{v}_{\alpha(q)}\big] = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ T\big[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma\circ\alpha(q)}\big]\,,$$

где σ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$. Тогда $\beta = \sigma\circ\alpha$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$. При этом $\operatorname{sign}(\beta) = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\operatorname{sign}(\alpha) = -\operatorname{sign}(\sigma)$. Поэтому

$$(\operatorname{Alt} T)\big[\vec{v}_{\alpha(1)}, \ldots, \vec{v}_{\alpha(q)}\big] = -\frac{1}{q!}\sum_{\beta} \operatorname{sign}(\beta)\ T\big[\vec{v}_{\beta(1)}, \ldots, \vec{v}_{\beta(q)}\big] =$$

$$= -(\operatorname{Alt} T)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q].$$

То есть, тензор $\operatorname{Alt} T$ кососимметричен.

2) Пусть теперь $T \in \Lambda^q(T)$, т.е. T – кососимметричный тензор типа $(0,q)$. Тогда $T\big[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)}\big] = \operatorname{sign}(\sigma)\ T[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$. Следовательно,

$$(\operatorname{Alt} T)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma} T[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = T[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q],$$

то есть $\operatorname{Alt} T = T$.

3) Пусть перестановка $\alpha : \overline{1,q} \to \overline{1,q}$ меняет местами индексы i и j и не меняет остальные индексы. Если σ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$, то $\beta = \alpha\circ\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$. При этом $\sigma = \alpha\circ\beta$ и

$$T\big[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)}\big] = T\big[\vec{v}_{\alpha\circ\beta(1)}, \ldots, \vec{v}_{\alpha\circ\beta(q)}\big] = T\big[\vec{v}_{\beta(1)}, \ldots, \vec{v}_{\beta(q)}\big]\,,$$

где последнее равенство следует из симметричности T относительно транспозиции α. Поэтому

$$(\operatorname{Alt} T)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ T\big[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)}\big] =$$

$$= -\frac{1}{q!}\sum_{\beta} \operatorname{sign}(\beta)\ T\big[\vec{v}_{\beta(1)}, \ldots, \vec{v}_{\beta(q)}\big] = -(\operatorname{Alt} T)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q].$$

Следовательно, $(\operatorname{Alt} T)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = 0$. $\square\triangleleft$

Лемма 2. *Пусть P – тензор типа $(0,p)$, Q – тензор типа $(0,q)$. Тогда*

$$\operatorname{Alt}(P\otimes Q) = \operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P)\otimes Q) = \operatorname{Alt}(P\otimes(\operatorname{Alt} Q)).$$

▷ **Доказательство.** Для каждой перестановки $\alpha : \overline{1,p} \to \overline{1,p}$ рассмотрим перестановку $\alpha' : \overline{1,p+q} \to \overline{1,p+q}$ такую, что

$$\alpha'(i) = \begin{cases} \alpha(i), & i \in \overline{1,p}, \\ i, & i \in \overline{p+1,p+q} \end{cases} \tag{1}$$

Тогда

$$\Big((\operatorname{Alt} P) \otimes Q\Big)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\alpha} \operatorname{sign}(\alpha)\ (P \otimes Q)[\vec{v}_{\alpha(1)}, \ldots, \vec{v}_{\alpha(p)}, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\alpha'} \operatorname{sign}(\alpha')\ (P \otimes Q)[\vec{v}_{\alpha'(1)}, \ldots, \vec{v}_{\alpha'(p+q)}],$$

где α пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p}$, а α' пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$ вида (1). Следовательно,

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P) \otimes Q)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \frac{1}{p!} \sum_{\alpha'} \operatorname{sign}(\alpha')\ (P \otimes Q)[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(p+q)}],$$

где σ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P) \otimes Q)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\alpha'} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\alpha')\ (P \otimes Q)[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(p+q)}].$$

Если σ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$, то при фиксированной перестановке α' перестановка $\beta = \sigma \circ \alpha'$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$, при этом $\operatorname{sign}(\beta) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\alpha')$. Поэтому

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P) \otimes Q)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\alpha'} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\beta} \operatorname{sign}(\beta)\ (P \otimes Q)[\vec{v}_{\beta(1)}, \ldots, \vec{v}_{\beta(p+q)}] =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\alpha'} \Big(\operatorname{Alt}(P \otimes Q)\Big)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] = \Big(\operatorname{Alt}(P \otimes Q)\Big)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}].$$

Последнее равенство следует из того, что количество перестановок α' вида (1) равно $p!$. Таким образом, равенство $\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P) \otimes Q) = \operatorname{Alt}(P \otimes Q)$ доказано. Равенство $\operatorname{Alt}(P \otimes (\operatorname{Alt} Q)) = \operatorname{Alt}(P \otimes Q)$ доказывается аналогично. □

◁

Определение. *Внешним произведением* внешних форм $P \in \Lambda^p(V)$ и $Q \in \Lambda^q(V)$ называется следующая внешняя $(p+q)$-форма:

$$P \wedge Q = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\mathrm{Alt}(P \otimes Q).$$

Замечание. Поскольку операция альтернирования тензоров линейна, а операция тензорного произведения линейна по каждому сомножителю, то операция внешнего произведения линейна по каждому сомножителю, а значит, справедливо правило дистрибутивности.

Лемма 3. *Для любых внешних форм $P \in \Lambda^p(V)$, $Q \in \Lambda^q(V)$, $R \in \in \Lambda^r(V)$ справедливо правило ассоциативности*

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R).$$

$\triangleright$

Доказательство. Согласно определению внешнего произведения

$$(P \wedge Q) \wedge R = \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!\,r!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(P \otimes Q) \otimes R).$$

Используя лемму 2, получаем

$$(P \wedge Q) \wedge R = \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\,\mathrm{Alt}(P \otimes Q \otimes R).$$

Аналогично,

$$P \wedge (Q \wedge R) = \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\,\mathrm{Alt}(P \otimes Q \otimes R).$$

$\square$

$\triangleleft$

Лемма 4. *Для любых внешних форм $P \in \Lambda^p(V)$, $Q \in \Lambda^q(V)$ справедливо равенство*

$$Q \wedge P = (-1)^{pq}\ P \wedge Q.$$

$\triangleright$

Доказательство. По определению операций внешнего произведения и альтернирования имеем

$$(Q \wedge P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\; Q[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)}]\; P[\vec{v}_{\sigma(q+1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(p+q)}],$$

где σ пробегает все перестановки чисел $\overline{1, p+q}$. Рассмотрим перестановку α чисел $\overline{1, p+q}$:

$$\alpha(i) = \begin{cases} i+q, & i \in \overline{1, p}, \\ i-p, & i \in \overline{p+1, p+q}. \end{cases}$$

Заметим, что $\operatorname{sign}(\alpha) = (-1)^{pq}$. Используя перестановку α, перепишем предыдущую формулу в виде

$$(Q \wedge P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\; P[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma\circ\alpha(p)}]\; Q[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha(p+1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma\circ\alpha(p+q)}].$$

Если σ пробегает все перестановки чисел $\overline{1, p+q}$, то $\beta := \sigma \circ \alpha$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1, p+q}$. При этом $\operatorname{sign}(\beta) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\alpha) = (-$ $-1)^{pq} \operatorname{sign}(\sigma)$. Следовательно,

$$(Q \wedge P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{(-1)^{pq}}{p!\,q!} \sum_{\beta} \operatorname{sign}(\beta)\; P[\vec{v}_{\beta(1)}, \ldots, \vec{v}_{\beta(p)}]\; Q[\vec{v}_{\beta(p+1)}, \ldots, \vec{v}_{\beta(p+q)}] =$$

$$= (-1)^{pq} \cdot (P \wedge Q)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}].$$

$\square$

$\triangleleft$

Замечание. Для любой внешней формы $Q \in \Lambda^q(V)$ при нечетном q справедливо равенство

$$Q \wedge Q = 0. \tag{2}$$

Это следует из леммы 4.

Задача 1. Приведите пример внешней формы $Q \in \Lambda^2(V)$, для которой $Q \wedge Q \neq 0$.

Теорема 1. (О представлении внешней формы через ее компоненты и векторы взаимного базиса.) *Пусть $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – базис в пространстве V, $(e_*^1, \ldots, e_*^n)$ – взаимный базис в V^*. Тогда для любой внешней формы $T \in \Lambda^q(V)$ справедливо следующее представление через ее компоненты:*

$$T = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} T_{j_1 \ldots j_q} e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_q}, \tag{3}$$

где в отличие от соглашения Эйнштейна суммирование производится по всем наборам индексов $(j_1, \ldots, j_q)$ *таким, что* $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$.

$\triangleright$

Доказательство. Покажем индукцией по q, что

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_q} = q!\ \mathrm{Alt}(e_*^{j_1} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_q}). \tag{4}$$

При $q = 2$ равенство (4) следует непосредственно из определения внешнего произведения. Пусть равенство (4) справедливо для $q = k - 1$. По определению внешнего произведения

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_k} = \frac{k!}{(k-1)!}\,\mathrm{Alt}(e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_{k-1}} \otimes e_*^{j_k}).$$

Используя предположение индукции, получаем

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_k} = k!\ \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(e_*^{j_1} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{k-1}}) \otimes e_*^{j_k}).$$

Отсюда в силу леммы 2 получаем равенство (4) для $q = k$. Таким образом, равенство (4) доказано.

Из равенства (4) и определения операции альтернирования следует равенство

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_k} = \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)\ e_*^{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{\sigma(q)}},$$

где суммирование производится по всем перестановкам чисел $\overline{1,q}$. Обозначим правую часть формулы (3) через T':

$$T' := \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} T_{j_1 \ldots j_q} e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_q}.$$

Требуется доказать равенство $T' = T$. Подставляя в предыдущую формулу, получаем

$$T' = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} T_{j_1 \ldots j_q} \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)\ e_*^{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{\sigma(q)}}.$$

В силу кососимметричности тензора T имеем $T_{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(q)}} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{j_1 \ldots j_q}$. Поэтому

$$T' = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \sum_\sigma T_{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(q)}}\ e_*^{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{\sigma(q)}}.$$

Если наборы индексов $(j_1, \ldots, j_q)$ пробегают все такие наборы, что $1 \leq \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, а σ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$, то наборы $(i_1, \ldots, i_q) = (j_{\sigma(1)}, \ldots, j_{\sigma(q)})$ пробегают все возможные наборы различных $i_s \in \overline{1,n}$. Следовательно,

$$T' = \sum_{i_1,\ldots,i_q} T_{i_1\ldots i_q}\, e_*^{i_1} \otimes \ldots \otimes e_*^{i_q}, \tag{5}$$

где суммирование производится по всем наборам различных индексов $i_s \in \in \overline{1,n}$. В случае, если в наборе $(i_1, \ldots, i_q)$ есть совпадающие индексы, то $T_{i_1\ldots i_q} = 0$ в силу кососимметричности тензора T. Поэтому формула (5) останется справедливой, если суммирование производить по всем (не обязательно различным) наборам индексов $i_s \in \overline{1,n}$. Отсюда и из теоремы о выражении тензора через его компоненты и базисные векторы получаем равенство $T' = T$. □

Следствие. *1) Если $T \in \Lambda^q(V)$ и $q > \dim V$ ($\dim V$ – размерность пространства V), то $T = 0$.*

2) Если $T \in \Lambda^n(V)$ и $n = \dim V$, то сумма (3) состоит из одного слагаемого:

$$T = T_{1\ldots n}\, e_*^1 \wedge \ldots \wedge e_*^n,$$

где по n суммирование не производится.

◁

§ 4. Дифференциальные формы

Определение. *Дифференциальной формой* степени $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется тензорное поле на многообразии M, значение которого в каждой точке $P \in M$ является внешней q-формой на касательном пространстве $T_P(M)$. Дифференциальная форма ω называется C^k-гладкой дифференциальной формой при $k \in \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, если тензорное поле ω является C^k-гладким. Множество C^k-гладких дифференциальных форм ω степени q на многообразии M будем обозначать через $\Omega^q_k(M)$. Множество $\Omega^q(M) := \Omega^q_\infty(M)$ будем называть множеством *гладких* дифференциальных форм.

Замечание. Поскольку при $k_1 < k_2$ справедливо включение $C^{k_2}(M, \mathbb{R}) \subset C^{k_1}(M, \mathbb{R})$, то $\Omega^q_{k_2}(M) \subset \Omega^q_{k_1}(M)$.

Замечание. В частности, $\Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ – множество гладких скалярных полей на многообразии M; $\Omega^1(M)$ – множество гладких ковекторных полей на M. Например, если $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, то дифференциал df является гладким ковекторным полем, а значит, – дифференциальной формой степени 1. Далее мы увидим, что не всякая дифференциальная форма степени 1 является дифференциалом некоторой функции на M.

Определение. *Внешним произведением* дифференциальных форм $\alpha \in \Omega^p_k(M)$ и $\beta \in \Omega^q_k(M)$ называется дифференциальная форма $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}_k(M)$, значение которой в каждой точке $P \in M$ равно внешнему произведению внешних форм $\alpha(P)$ и $\beta(P)$:

$$(\alpha \wedge \beta)(P) = \alpha(P) \wedge \beta(P).$$

Теорема 1. (О представлении дифференциальной формы через ее компоненты.)) *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega^q_0(M)$ следующим образом представима через свои компоненты $\omega_{j_1 \ldots j_q}$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$:*

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \ldots j_q}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \tag{1}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 § 5 набор дифференциалов $(dx^1(P), \ldots, dx^n(P))$ составляет базис в сопряженном пространстве $T^*_P(M)$, взаимный базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ касательного пространства $T_P(M)$. Применяя теорему о представлении внешней формы через ее компоненты и векторы взаимного базиса, для любой точки $P \in M$, в окрестности которой $(x^1, \ldots, x^n)$ является ЛСК, получаем

$$\omega(P) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \ldots j_q}(P)\, dx^{j_1}(P) \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}(P).$$

□

Определение. Каждое слагаемое суммы (1) называется *мономом.*

Следствие. *1) Если $\omega \in \Omega^q_0(M)$, $M \in \mathfrak{M}^n$ и $q > n$, то $\omega = 0$.*

2) Если $\omega \in \Omega^q_0(M)$, $M \in \mathfrak{M}^n$ и $q = n$, то дифференциальная форма ω состоит из одного монома:

$$\omega = \omega_{1 \ldots n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $k \geq 1$ и пусть дифференциальная форма $\omega \in \Omega^q_k(M)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \ldots j_q} \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Внешним дифференциалом дифференциальной формы ω называется дифференциальная форма $d\omega \in \Omega^{q+1}_{k-1}(M)$, определяемая равенством

$$d\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} d\omega_{j_1 \ldots j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q},$$

где $d\omega_{j_1 \ldots j_q}(P)$ – дифференциал соответствующей компоненты $\omega_{j_1 \ldots j_q}$ тензорного поля ω в точке $P \in M$.

Замечание. Если $q = 0$, то дифференциальная форма $\omega \in \Omega^q_1(M)$ является C^1-гладким скалярным полем (непрерывно дифференцируемой функцией) на многообразии M. Тогда внешний дифференциал $d\omega$ дифференциальной формы ω совпадает с дифференциалом функции ω.

Поскольку определение внешнего дифференциала дано с использованием системы координат, то для обоснования корректности этого определения требуется доказать следующую теорему.

Теорема 2. (Об инвариантности внешнего дифференциала формы относительно ЛСК.) *Внешний дифференциал $d\omega$ дифференциальной формы $\omega \in \Omega^q_1(M)$ не зависит от ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$.*

Доказательство. Если $q = 0$, то $d\omega[\vec{v}] = \vec{v}(\omega)$ не зависит от ЛСК.

Рассмотрим случай $q = 1$.

Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ – две ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ в окрестности точки $P \in M$. Пусть ω_j и $\tilde{\omega}_i$ – компоненты дифференциальной формы ω в этих ЛСК, т.е.

$$\omega = \omega_j dx^j = \tilde{\omega}_i d\tilde{x}^i.$$

Требуется доказать, что

$$d\omega_j \wedge dx^j = d\tilde{\omega}_i \wedge d\tilde{x}^i. \tag{2}$$

Согласно теореме о законе изменения компонент тензороного поля при замене ЛСК эти компоненты связаны равенством

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\,\omega_j.$$

Поэтому

$$d\tilde{\omega}_i = \omega_j\; d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} + \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\; d\omega_j,$$

а значит,

$$d\tilde{\omega}_i \wedge d\tilde{x}^i = \omega_j\; d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \wedge d\tilde{x}^i + \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\; d\omega_j \wedge d\tilde{x}^i$$

Поскольку $\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\; d\tilde{x}^i = dx^j$, то

$$d\tilde{\omega}_i \wedge d\tilde{x}^i = \omega_j\; d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \wedge d\tilde{x}^i + d\omega_j \wedge dx^j.$$

Таким образом, для доказательства равенства (2) достаточно проверить, что для любого $j \in \overline{1,n}$ справедливо равенство

$$A^j := d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \wedge d\tilde{x}^i = 0. \tag{3}$$

Так как $d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^k$, то

$$A^j = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^i.$$

Переобозначая индексы суммирования $i \leftrightarrow k$, получаем

$$A^j = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^k.$$

Поскольку $\frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^i}$ и $d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^k = -d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^i$, то $A^j = -A^j$. Следовательно, $A^j = 0$, т.е. равенство (3) справедливо. Таким образом, в случае $q = 1$ теорема 2 доказана.

Случай $q > 1$ рассматривается аналогично. □

Замечание. Из определения внешнего дифференциала и линейности дифференциала скалярного поля следует линейность внешнего дифференциала формы.

Теорема 3. (Правило Лейбница для внешнего дифференциала.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. Для любых дифференциальных форм $\alpha \in \Omega_1^s(M)$ и $\beta \in \Omega_1^q(M)$ справедливо правило Лейбница:*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge d\beta.$$

Доказательство. В силу теоремы о представлении дифференциальной формы через ее компоненты имеют место следующие представления дифференциальных форм:

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_s} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s},$$

$$\beta = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} \beta_{j_1 \ldots j_q} \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Поскольку операция внешнего дифференцирования линейна, а операция внешнего произведения линейна по каждому аргументу, то достаточно рассмотреть случай, когда каждая из приведенных выше сумм состоит лишь из одного слагаемого:

$$\alpha = a \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}, \qquad \beta = b \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q},$$

где $a, b \in C^1(M, \mathbb{R})$. Тогда

$$\alpha \wedge \beta = ab \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$$

и, следовательно, по определению внешнего дифференциала

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(ab) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Используя правило Лейбница для скалярных полей (которое следует из леммы 2 § 5 главы 17), получаем

$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db.$$

Поэтому

$$d(\alpha \wedge \beta) = A + B,$$

где

$$A = da \cdot b \ \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} =$$
$$= \Big(da \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \Big) \wedge \Big(b \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \Big) =$$

$$= d\alpha \wedge \beta,$$

$$B = a \cdot db \ \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} =$$

$$= (-1)^s \Big(a \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \Big) \Big(db \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \Big) =$$

$$= (-1)^s \alpha \wedge d\beta.$$

Таким образом, $d(\alpha \wedge \beta) = A + B = d\alpha \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge d\beta$. □

Лемма 1. *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. Внешний дифференциал второго порядка $d^2\omega = d(d\omega)$ любой дифференциальной формы $\omega \in \Omega_2^q(M)$ равен нулю:*

$$d^2\omega = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме о представлении дифференциальной формы через ее компоненты справедливо представление дифференциальной формы ω через ее коэффициенты

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} \omega_{j_1 \ldots j_q} \ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

В силу линейности дифференциала достаточно получить доказываемему формулу для одного монома

$$\omega = f \ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q},$$

где $f = \omega_{j_1 \ldots j_q}$ – гладкое скалярное поле на M. Тогда по определению внешнего дифференциала

$$d\omega = df \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Поскольку согласно определению внешнего дифференциала имеем $d^2x^j = 0$ для любого $j \in \overline{1,n}$, то в силу правила Лейбница имеем

$$d^2\omega = d^2 f \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что любое C^2-гладкое скалярное поле f удовлетворяет равенству $d^2 f = 0$. Так как

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i$$

(где индекс суммирования i пробегает $\overline{1,n}$), то в силу определения внешнего дифференциала

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\, dx^j \wedge dx^i.$$

Согласно теореме о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$. С другой стороны, по лемме 4 § 3 имеем $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$. Поэтому при изменении порядка суммирования величина $d^2 f$ изменит знак, но, с другой стороны, не должна измениться. Следовательно, $d^2 f = 0$. $\square$

§ 5. Перенос касательных векторов и дифференциальных форм

Определение. Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$, $P \in M_1$. *Прямым переносом (pushforward)* касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M_1)$ при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ называется отображение $\varphi_*(\vec{v}\,) : C^1(M_2, \mathbb{R}) \to$ $\to \mathbb{R}$, определяемое формулой

$$\varphi_*(\vec{v}\,)(f) := \vec{v}(f \circ \varphi) \qquad \forall f \in C^1(M_2, \mathbb{R}).$$

Замечание. Из формулы производной сложной функции следует, что для любого касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M_1)$ отображение $\varphi_*(\vec{v}\,) : C^1(M_2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет определению касательного вектора, точнее $\varphi_*(\vec{v}\,) \in T_Q(M_2)$, где $Q = \varphi(P)$.

Замечание. Прямой перенос касательных векторов φ_* при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ является линейным отображением из $T_P(M_1)$ в $T_Q(M_2)$. Действительно, для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M_1)$, $f \in C^1(M_2, \mathbb{R})$ имеем

$$\varphi_*(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2)(f) = (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2)(f \circ \varphi) = (\alpha_1\varphi_*(\vec{v}_1) + \alpha_2\varphi_*(\vec{v}_2))\,(f).$$

Теорема 1. (Выражение для прямого переноса базисного вектора касательного пространства через частные производные координатных функций отображения.) *Пусть (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2) – карты на многообразиях $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$ и $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$ соответственно, пусть $(x^1, \dots, x^{n_1}) = \psi_1^{-1}$ и $(y^1, \dots, y^{n_2}) = \psi_2^{-1}$ – соответствующие ЛСК. Пусть $\varphi \in C^1(U_1, U_2)$, $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1)(x)$ – координатное представление отображения φ. Пусть $P \in U_1$, $Q = \varphi(P)$. Тогда результат прямого переноса базисного касательного вектора $\frac{\partial}{\partial x^i}$ при отображении φ определяется формулой*

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial y^j} \qquad \forall i \in \overline{1,n_1},$$

где индекс суммирования j пробегает $\overline{1,n_2}$.

Доказательство. Так как $y(x) = (\psi_2^{-1}\circ\varphi\circ\psi_1)(x)$, то $(\varphi\circ\psi_1)(x) = (\psi_2\circ y)(x)$ при $x \in \psi_1^{-1}(U_1)$. Поэтому для любой функции $f \in C^1(M_2,\mathbb{R})$ имеем

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f\circ\varphi) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f\circ\varphi\circ\psi_1) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f\circ\psi_2\circ y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^j}(f\circ\psi_2)\,\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}(f).$$

где первое равенство следует из определения прямого переноса касательного вектора, второе и пятое равенства – из формулы (2) § 5, четвертое – из формулы производной сложной функции.

Определение. Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$. *Дифференциалом отображения* $\varphi \in C^1(M_1,M_2)$ в точке $P \in M_1$ называется отображение φ_*, которое каждому касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M_1)$ ставит в соответствие его прямой перенос $\varphi_*(\vec{v}\,) \in T_Q(M_2)$, где $Q = \varphi(P)$: $d\varphi(P)[\vec{v}\,] = \varphi_*(\vec{v}\,)$. Дифференциал отображения $\varphi \in C^1(M_1,M_2)$ также называется *касательным отображением.*

Замечание. Данное определение обобщает определение дифференциала скалярной функции $f \in C^1(M,\mathbb{R})$, если касательное пространство $T_Q(\mathbb{R})$ отождествить с $\mathbb{R}$, а базисный вектор $\frac{\partial}{\partial x}$ в $T_Q(\mathbb{R})$ отождествить с базисным вектором 1 в $\mathbb{R}$.

Замечание. Из теоремы о выражении для прямого переноса базисного вектора касательного пространства через частные производные координатных функций отображения следует, что в обозначениях этой теоремы матрицей линейного отображения $d\varphi(P) : T_P(M_1) \to T_Q(M_2)$ является матрица Якоби $\mathcal{D}\,y(x_0)$ координатного представления $y(x)$ отображения φ в точке $x_0 = \psi_1^{-1}(P)$, если в качестве базисов в пространствах $T_P(M_1)$ и $T_Q(M_2)$ выбраны базисы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{n_1}}\right)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^{n_2}}\right)$ соответственно. Этот результат обобщает известный факт для отображений из $\mathbb{R}^{n_1}$ в $\mathbb{R}^{n_2}$.

Определение. Пусть заданы многообразия $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$. *Обратным переносом (pullback)* дифференциальной формы $\omega \in \Omega^q_k(M_2)$ при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ называется дифференциальная форма $\varphi^*\omega$, определяемая формулой

$$(\varphi^*\omega)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega(\varphi(P))[\varphi_*(\vec{v}_1), \ldots, \varphi_*(\vec{v}_q)]$$

$$\forall P \in M_1, \qquad \forall \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in T_P(M_1),$$

где $\varphi_*(\vec{v}_i)$ – прямой перенос касательного вектора $\vec{v}_i$.

Из линейности отображения прямого переноса касательных векторов следует полилинейность функции $(\varphi^*\omega)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$ относительно касательных векторов $\vec{v}_i$. Из кососимметричности тензора $\omega(\varphi(P))[u_1, \ldots, u_q]$ следует кососимметричность тензора $(\varphi^*\omega)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$.

Сделаем следующие 3 замечания, вытекающие непосредственно из определения обратного переноса дифференциальных форм.

Замечание. Обратный перенос дифференциальных форм φ^* при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ является линейным отображением:

$$\varphi^*(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1\varphi^*\omega_1 + \lambda_2\varphi^*\omega_2 \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega^q(M_2).$$

Замечание. Если $\omega \in \Omega^0_k(M)$, т.е. ω – скалярное поле на многоообразии M, то обратный перенос дифференциальной формы φ^* при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ – это суперпозиция поля ω и отображения φ:

$$\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$, $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$, $\alpha \in \Omega^p(M_2)$, $\beta \in \Omega^q(M_2)$. Тогда*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $P \in M_1$ и обозначим $Q = \varphi(P)$. В силу определений внешнего произведения дифференциальных форм и операции альтернирования для любых векторов $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q} \in T_Q(M_2)$ в точке Q имеем

$$(\alpha \wedge \beta)[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q}] = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\ \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ (\alpha \otimes \beta)[\vec{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{u}_{\sigma(p+q)}],$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma : \overline{1, p+q} \to \to \overline{1, p+q}$.

Поэтому для любых векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q} \in T_P(M_1)$ в точке P имеем

$$(\varphi^*(\alpha \wedge \beta))[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] = (\alpha \wedge \beta)[\varphi_*\vec{v}_1, \ldots, \varphi_*\vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ (\alpha \otimes \beta)[\varphi_*\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_*\vec{v}_{\sigma(p+q)}] =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ (\varphi^*(\alpha) \otimes \varphi^*(\beta))[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(p+q)}] =$$

$$= \Big(\varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)\Big)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}].$$

$\square$

Теорема 2. (Выражение для обратного переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения.) *Пусть ЛСК $(x^1, \ldots, x^{n_1}) = \psi_1^{-1}$ определена картой (ψ_1, U_1) на $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$; ЛСК $(y^1, \ldots, y^{n_2}) = \psi_2^{-1}$ определена картой (ψ_2, U_2) на $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$. Пусть $\varphi \in C^1(U_1, U_2)$. Тогда выражение обратного переноса дифференциальной формы dy^j через dx^k получается формальным дифференцированием координатного представления $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1)(x)$ отображения φ:*

$$\varphi^*(dy^j) = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k \qquad \forall j \in \overline{1, n_2},$$

где индекс суммирования k пробегает $\overline{1, n_1}$.

Доказательство. В силу выражения для прямого переноса базисного вектора касательного пространства через частные производные координатных функций отображения и линейности тензора dy^j имеем для любого $i \in \overline{1, n_1}$

$$\varphi^*(dy^j)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = dy^j\left[\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] =$$

$$= dy^j \left[\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \; \frac{\partial}{\partial y^k}\right] = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \; dy^j \left[\frac{\partial}{\partial y^k}\right].$$

Поскольку согласно лемме 1 § 5 $(dy^1, \dots, dy^{n_2})$ – взаимный базис к базису $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n_2}}\right)$, то $dy^j \left[\frac{\partial}{\partial y^k}\right] = \delta^j_k$ – символ Кронекера. Следовательно,

$$\varphi^*(dy^j) \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \; \delta^j_k = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Поэтому для любого $i \in \overline{1, n_1}$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \delta^k_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \varphi^*(dy^j) \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right].$$

Поскольку любой вектор $\vec{v} \in T_P(M_1)$ можно разложить по базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n_1}}\right)$, то

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k [\vec{v}\,] = \varphi^*(dy^j)[\vec{v}\,].$$

$\square$

Замечание. Пусть заданы многообразия $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$, $\omega \in \Omega^q_k(M_2)$, $\varphi \in C^{k+1}(M_1, M_2)$. Тогда согласно выражению для обратного переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения обратный перенос $\varphi^*\omega$ является C^k-гладкой дифференциальной формой степени q на M_1: $\quad \omega \in \Omega^q_k(M_1)$.

Напомним, что определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}$$

можно вычислять по формуле полного разложения

$$\det A = \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) \; a^1_{\sigma(1)} a^2_{\sigma(2)} \dots a^n_{\sigma(n)},$$

где суммирование производится по всем перестановкам σ чисел $\overline{1, n}$.

Пусть задана дифференцируемая вектор-функция $y(x) = (y^1(x), \ldots, y^n(x))$, где $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Тогда якобиан $\det \mathcal{D}\, y(x)$ будем также обозначать через $\frac{\partial(y^1,\ldots,y^n)}{\partial(x^1,\ldots,x^n)}$. В силу формулы полного разложения определителя имеем

$$\frac{\partial(y^1,\ldots,y^n)}{\partial(x^1,\ldots,x^n)} = \det \mathcal{D}\, y(x) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\, \frac{\partial y^1}{\partial x^{\sigma(1)}} \ \ldots\ \frac{\partial y^n}{\partial x^{\sigma(n)}}, \tag{2}$$

где суммирование производится по всем перестановкам σ чисел $\overline{1,n}$.

Теорема 3. (О координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы.) *Пусть* (ψ_1, U_1) *и* (ψ_2, U_2) *– карты на многообразиях* $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$ *и* $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$ *соответственно. Пусть* $\varphi \in C^1(U_1, U_2)$, $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1)(x)$ *– координатное представление отображения* φ. *Тогда для любого набора индексов* $j_1, \ldots, j_q \in \overline{1, n_2}$

$$\varphi^*\Big(dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}\Big) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n_1} \frac{\partial(y^{j_1},\ldots,y^{j_q})}{\partial(x^{i_1},\ldots,x^{i_q})}\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Доказательство. В силу выражения для обратного переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения для любого $j \in \overline{1, n_2}$

$$\varphi^*(dy^j) = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k.$$

Обозначим

$$\omega = dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dy^{j_q}) =$$

$$= \left(\sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{k_1}} dx^{k_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{k_q=1}^{n_1} \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{k_q}} dx^{k_q}\right) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_q} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{k_q}}\ dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q},$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $k_1, \ldots, k_q \in \overline{1, n_1}$. Из кососимметричности дифференциальной формы следует, что если в наборе $(k_1, \ldots, k_q)$ есть совпадающие индексы, то $dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q} = 0$. Поэтому можно считать, что суммирование производится по всем наборам попарно несовпадающих индексов $k_1, \ldots, k_q \in \overline{1, n_1}$. Поскольку любой набор попарно несовпадающих индексов $(k_1, \ldots, k_q)$ является перестановкой набора $(i_1, \ldots, i_q)$, где $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1$, то набор $(k_1, \ldots, k_q)$ можно представить как набор $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(q)})$, где $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1$, σ – перестановка чисел $\overline{1, q}$. Таким образом,

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1} \sum_{\sigma} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_{\sigma(q)}}} \, dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{\sigma(q)}}.$$

Из леммы 4 § 3 следует, что

$$dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{\sigma(q)}} = \operatorname{sign}(\sigma) \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Поэтому

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_{\sigma(q)}}} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

В силу равенства (2) получаем

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_{\sigma(q)}}} = \frac{\partial(y^{j_1}, \ldots, y^{j_q})}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_q})}.$$

Следовательно,

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1} \frac{\partial(y^{j_1}, \ldots, y^{j_q})}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_q})} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

□

Замечание. Если в условиях теоремы 3 имеем $q = n_1 = n_2 = n$ и дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n_k(M_2)$ имеет вид

$$\omega = a(y) \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n,$$

то

$$\varphi^* \omega = a(y(x)) \, \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Лемма 2. *Пусть заданы многообразия* $M_i \in \mathfrak{M}^{n_i}$, $i = 1, 2, 3$ *и отображения* $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ *и* $\psi \in C^1(M_2, M_3)$. *Тогда*

(1). $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ *и*

(2). $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Доказательство. (1). Используя определение прямого переноса касательных векторов для любого вектора $\vec{v} \in T_P(M_1)$ и любой функции $f \in C^1(M_3, \mathbb{R})$ получаем

$$(\psi \circ \varphi)_*(\vec{v}\,)(f) = \vec{v}(f \circ \psi \circ \varphi) = \varphi_*(\vec{v}\,)(f \circ \psi) = \psi_*(\varphi_*(\vec{v}\,))(f),$$

то есть $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

(2). Фиксируем произвольную дифференциальную форму $\omega \in \in \Omega_k^q(M_3)$. Тогда по определению обратного переноса дифференциальной формы для любых $P \in M_1$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in T_P(M_1)$ имеем

$$\Big((\psi \circ \varphi)^* \omega\Big)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega(\psi(\varphi(P)))[(\psi \circ \varphi)_*(\vec{v}_1), \ldots, (\psi \circ \varphi)_*(\vec{v}_q)].$$

Используя пункт (1), получаем

$$\Big((\psi \circ \varphi)^* \omega\Big)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega(\psi(\varphi(P)))[\psi_*(\varphi_*(\vec{v}_1)), \ldots, \psi_*(\varphi_*(\vec{v}_q))] =$$

$$= \alpha(\varphi(P))[\varphi_*(\vec{v}_1), \ldots, \varphi_*(\vec{v}_q)],$$

где

$$\alpha(Q)[u_1, \ldots, u_q] := \omega(\psi(Q))[\psi_*(u_1), \ldots, \psi_*(u_q)] = (\psi^* \omega)(Q)[u_1, \ldots, u_q].$$

Следовательно, $\alpha = \psi^* \omega$,

$$(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* \alpha = \varphi^*(\psi^* \omega) = (\varphi^* \circ \psi^*)\omega.$$

В силу произвольности $\omega \in \Omega_k^q(M_3)$ получаем доказываемое равенство. $\square$

Теорема 4. (О коммутативности внешнего дифференцирования и отображения обратного переноса.) *Пусть* $M_1 \in \mathfrak{M}^n$, $M_2 \in \mathfrak{M}^k$, $\varphi \in \in C^2(M_1, M_2)$, $\omega \in \Omega_1^q(M_2)$. *Тогда*

$$d\varphi^* \omega = \varphi^* d\omega, \tag{3}$$

т.е. операции внешнего дифференцирования и обратного переноса дифференциальной формы перестановочны.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\omega \in \Omega_1^0(M_2)$, т.е. дифференциальная форма ω является скалярной функцией. В этом случае согласно равенству (1) имеем $\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi$. Тогда в силу определения дифференциала отображения и леммы 2(1) получаем

$$d\varphi^*\omega = d(\omega \circ \varphi) = (\omega \circ \varphi)_* = \omega_* \circ \varphi_* = (d\omega) \circ \varphi_* = \varphi^* d\omega. \tag{4}$$

Пусть теперь $\omega \in \Omega_1^q(M_2)$, $q \geq 1$. В силу линейности внешнего дифференциала и обратного переноса дифференциальной формы равенство (3) достаточно доказать для одного монома

$$\omega = a(y)\ dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q} = a \wedge dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q},$$

где $a \in C^1(M_2, \mathbb{R})$, т.е. $a \in \Omega_1^0(M_2)$. Используя лемму 1, получаем

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(a) \wedge \varphi^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dy^{j_q}).$$

Используя доказанную формулу (4) для $\omega = y^j$, имеем $\varphi^*(dy^j) = d\varphi^*(y^j)$. Следовательно,

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(a) \wedge d(\varphi^* y^{j_1}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^* y^{j_q}).$$

Применяя правило Лейбница для внешнего дифференциала и равенство $d^2 = 0$ имеем

$$d\varphi^*\omega = d\varphi^*(a) \wedge d(\varphi^* y^{j_1}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^* y^{j_q}),$$

$$d\omega = da \wedge dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

Поэтому

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(da) \wedge \varphi^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dy^{j_q}) =$$

$$= d\varphi^*(a) \wedge d(\varphi^* y^{j_1}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^* y^{j_q}) = d\varphi^*\omega.$$

$\square$

§ 6. Дифференциальные формы на подмногообразии

Определение. Подмножество $M_1 \subset M$ гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется *гладким подмногообразием* размерности k (без собственного края), если для любой точки $P \in M_1$ существует ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на M такая, что в некоторой окрестности точки P множество M_1 определяется системой уравнений $x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^n = 0$. Эта ЛСК называется *канонической ЛСК* для пары (M, M_1).

Замечание. Гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ без края, определенное в § 2 главы 15, является частным случаем подмногообразия.

Лемма 1. *Край ∂M гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ является $(n-1)$-мерным подмногообразием многообразия M.*

Доказательство. Фиксируем любую точку $P \in \partial M$. Пусть (ψ, U) – карта на M и $P \in U$. Согласно определению края допустимой области параметров край ∂V допустимой области параметров $V := \psi^{-1}(U)$ имеет вид $\partial V = \{(x^1, \ldots, x^n) \in V : \ x^1 = 0\}$. Поэтому в окрестности U точки P множество ∂M в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ определяется уравнением $x^1 = 0$. При этом ЛСК $(x^n, \ldots, x^1)$ является канонической для пары (M, M_1). $\square$

Замечание. Гладкое k-мерное подмногообразие M_1 гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ само является гладким многообразием. При этом топология M_1 индуцирована топологией M. Если $(x^1, \ldots, x^n)$ – каноническая ЛСК для пары (M, M_1), то $(x^1, \ldots, x^k)$ – ЛСК на M_1. Атлас карт на M_1, соответствующих таким ЛСК, является гладким атласом на M_1.

Замечание. Если M_1 – гладкое подмногообразие многообразия M, то многообразие M_1 может иметь краевые точки, лежащие на краю M, но не может иметь «собственных» краевых точек, не лежащих на краю M.

Замечание. Если M_1 – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$, то в каждой точке $P \in M_1$ касательное пространство $T_P(M_1)$ является линейным подпространством касательного пространства $T_P(M)$. Для того, чтобы убедиться в этом достаточно перейти в каноническую ЛСК для пары (M, M_1).

Определение. Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^k$ – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть задано тензорное поле t типа $(0, q)$ на многообразии M. *Сужением тензорного поля t* на подмногообразие M_1

называется тензорное поле $t_{|_{M_1}}$ типа $(0,q)$ на многообразии M_1, заданное формулой

$$t_{|_{M_1}}(P)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q] = t(P)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q] \qquad \forall\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q \in T_P(M_1).$$

Лемма 2. *Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^k$ – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть $(x_1,\ldots,x_n)$ – каноническая ЛСК для пары (M,M_1). Пусть дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^q(M)$ следующим образом выражается через свои компоненты в ЛСК $(x_1,\ldots,x_n)$:*

$$\omega = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le n} \omega_{j_1\ldots j_q}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.$$

Тогда сужение ω на M_1 имеет вид

$$\omega_{|_{M_1}} = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le k} \omega_{j_1\ldots j_q}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.$$

В отличие от выражения для ω, где суммирование производится по всем упорядоченным наборам индексов $j_1,\ldots,j_q$, не превосходящих n, в выражении для $\omega_{|_{M_1}}$ суммирование производится по всем упорядоченным наборам индексов $j_1,\ldots,j_q$, не превосходящих k.

Доказательство. По теореме о представлении дифференциальной формы через ее компоненты дифференциальная форма $\alpha = \omega_{|_{M_1}}$ может быть записана через свои компоненты $\alpha_{j_1\ldots j_q}$ в ЛСК $(x_1,\ldots,x_k)$ на M_1:

$$\alpha = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le k} \alpha_{j_1\ldots j_q}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}. \tag{1}$$

Используя определение компонент тензора и определение сужения тензорного поля, получаем при $j_s \in \overline{1,k}$

$$\alpha_{j_1\ldots j_q} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_q}}\right] = \omega\left[\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_q}}\right] = \omega_{j_1\ldots j_q}.$$

Подставляя эти компоненты в равенство (1), получаем доказываемое равенство. $\square$

Пример 1. Пусть на многообразии $M = \mathbb{R}^3_{xyz}$ задана дифференциальная форма степени 1

$$\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz.$$

Тогда сужением ω на подмногообразие $M_1 = \{(x, y, 1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2_{xy}\}$ будет

$$\omega_{|_{M_1}} = (y+1)dx + (x+1)dy.$$

Лемма 3. *Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^k$ – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть отображение $\varphi : M_1 \to M$ является стандартным вложением M_1 в M, т.е. $\varphi(P) = P \ \forall P \in M_1$. Тогда обратный перенос $\varphi^*\omega$ любой дифференциальной формы $\omega \in \Omega^q_0(M)$ является сужением ω на M_1:*

$$\varphi^*\omega = \omega_{|_{M_1}}.$$

Доказательство. По определению обратного переноса и сужения дифференциальных форм $\varphi^*\omega$ и $\omega_{|_{M_1}}$ являются дифференциальными формами на M_1. Поскольку $\varphi_*(\vec{v}) = \vec{v}$ для любого $\vec{v} \in T_P(M_1)$, то для любых $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in T_P(M_1)$ имеем

$$\varphi^*\omega[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega[\varphi_*(\vec{v}_1), \ldots, \varphi_*(\vec{v}_q)] = \omega[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega_{|_{M_1}}[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q].$$

$\square$

§ 7. Разбиение единицы на многообразии

Определение. *Носителем* функции $\beta : M \to \mathbb{R}$, заданной на многообразии M называется множество

$$\operatorname{supp} \beta = \overline{\{P \in M : \ \beta(P) \neq 0\}},$$

где замыкание понимается в смысле топологического пространства M.

Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *компактным*, если из любого открытого покрытия X (т.е. покрытия X открытыми множествами) можно выделить конечное подпокрытие. Множество $A \subset X$ называется *компактным* или *компактом*, если топологическое пространство A с топологией, индуцированной топологией τ, является компактным. Многообразие называется *компактным*, если соответствующее топологическое пространство является компактным.

Лемма 1. *Пусть* (ψ, U) *– карта на многообразии* $M \in \mathfrak{M}^n$, $P \in U$. *Тогда существует окрестность* $\widetilde{U} \subset U$ *точки* P *и гладкая функция* $\beta \in C^\infty(M, [0,1])$ *такие, что* $\operatorname{supp} \beta \subset U$ *и* $\beta(P') = 1$ *при* $P' \in \widetilde{U}$.

Доказательство. По определению карты множество $V := = \psi^{-1}(U)$ является допустимой областью параметров, т.е. открытым подмножеством топологического пространства H, где H – это одно из множеств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$. Обозначим $x_0 := \psi^{-1}(P)$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x_0) \cap H \subset V$, где $U_\varepsilon(x_0)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром x_0 и радиусом ε. Положим

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \widetilde{V}_\delta := U_\delta(x_0) \cap H.$$

Согласно лемме 1 § 2 главы 17 существует функция $\widetilde{\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ такая, что $\operatorname{supp} \widetilde{\beta} \subset U_\varepsilon(x_0)$ и $\widetilde{\beta}(x) = 1$ при $x \in U_\delta(x_0)$. Полагая

$$\widetilde{U} := \psi(\widetilde{V}_\delta), \qquad \beta(P') := \begin{cases} \widetilde{\beta} \circ \psi^{-1}(P'), & P' \in U, \\ 0, & P' \notin U, \end{cases}$$

получаем утверждение леммы. □

Теорема 1. (О разбиении единицы на многообразии.) *Пусть* $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ *– конечный набор карт на многообразии* $M \in \mathfrak{M}^n$, *районы действия которых покрывают компакт* $K \subset M$. *Тогда на* M *существует гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, т.е. набор гладких функций* $\varrho_i : M \to [0,1]$, $i \in \overline{1, I}$ *такой, что* $\operatorname{supp} \varrho_i \subset U_i$ *при всех* $i \in \overline{1, I}$ *и*

$$\sum_{i=1}^I \varrho_i(P) = 1 \qquad \forall P \in K.$$

Доказательство. Для любой точки $P \in K$ выберем индекс $i(P) \in \overline{1, I}$ так, что $P \in U_{i(P)}$. В силу леммы 1 найдутся окрестность $\widetilde{U}(P) \subset U_{i(P)}$ точки P и функция $\beta_P \in C^\infty(M, [0,1])$ такие, что $\operatorname{supp} \beta_P \subset U_{i(P)}$ и $\beta_P(P') = 1 \quad \forall P' \in \widetilde{U}(P)$. Выделим из открытого покрытия $\{\widetilde{U}(P)\}_{P \in K}$ компакта K конечное подпокрытие $\{\widetilde{U}(P_j)\}_{j=1}^J$. Тогда

$$\forall j \in \overline{1, J} \ \exists i \in \overline{1, I} : \ \operatorname{supp} \beta_{P_j} \subset U_i \tag{1}$$

и

$$\forall P' \in K \ \exists j \in \overline{1,J}: \ \beta_{P_j}(P') = 1 \tag{2}$$

Определим гладкие функции $\gamma_j : M \to [0,1]$, $j \in \overline{1,J}$:

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_1(P) & := & \beta_{P_1}(P), \\
\gamma_2(P) & := & \Big(1-\beta_{P_1}(P)\Big)\beta_{P_2}(P), \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\gamma_J(P) & := & \Big(1-\beta_{P_1}(P)\Big)\ldots\Big(1-\beta_{P_{J-1}}(P)\Big)\beta_{P_J}(P), \quad P \in M.
\end{array}$$

Тогда $\operatorname{supp}\,\gamma_j \subset \operatorname{supp}\,\beta_{P_j}$. Заметим, что для любой точки $P \in M$

$$\begin{array}{rcl}
1-\gamma_1(P)-\gamma_2(P) & = & \Big(1-\beta_{P_1}(P)\Big)\Big(1-\beta_{P_2}(P)\Big), \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
1-\gamma_1(P)-\ldots-\gamma_J(P) & = & \Big(1-\beta_{P_1}(P)\Big)\ldots\Big(1-\beta_{P_J}(P)\Big).
\end{array}$$

Поэтому в силу соотношения (2) имеем

$$\sum_{j=1}^{J}\gamma_j(P) = 1 \quad \forall P \in K. \tag{3}$$

Для каждого индекса $i \in \overline{1,I}$ через S_i обозначим набор индексов $j \in \in \overline{1,J}$ таких, что $\operatorname{supp}\,\gamma_j \subset U_i$ и $\operatorname{supp}\,\gamma_j \not\subset U_k$ при всех $k \in \overline{1,i-1}$. Тогда $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Из соотношений (1) и $\operatorname{supp}\,\gamma_j \subset \operatorname{supp}\,\beta_{P_j}$ следует, что $\bigcup\limits_{i\in\overline{1,I}} S_i = \overline{1,J}$. Определим

$$\varrho_i(P) := \sum_{j\in S_i}\gamma_j(P).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{I}\varrho_i(P) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j\in S_i}\gamma_j(P) = \sum_{j=1}^{J}\gamma_j(P) = 1 \qquad \forall P \in K,$$

где последнее равенство следует из равенства (3). При этом $\operatorname{supp}\,\varrho_i \subset \bigcup\limits_{j\in S_i}\operatorname{supp}\,\gamma_j \subset U_i$ при всех $i \in \overline{1,I}$. Следовательно, $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$ – искомое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^{I}$ компакта K. $\square$

§ 8. Интеграл от дифференциальной формы по многообразию

Определение. *Носителем* дифференциальной формы $\omega \in \Omega_k^q(M)$ называется замыкание множества точек, в которых ω не равна нулю:

$$\operatorname{supp}\omega = \overline{\{P \in M : \ \omega(P) \neq 0\}},$$

где замыкание понимается как замыкание в топологическом пространстве M.

Определение. Дифференциальная форма $\omega \in \Omega_k^q(M)$ называется *финитной*, если ее носитель $\operatorname{supp}\omega$ является компактом.

Замечание. Если M – компактное многообразие, то любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega_k^q(M)$ является финитной, поскольку замкнутое подмножество компактного топологического пространства является компактом.

Далее определим интеграл от финитной непрерывной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_0^n(M)$ по гладкому многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$. При этом степень формы ω должна совпадать с размерностью многообразия M. В этом случае согласно следствию из теоремы о представлении дифференциальной формы через ее компоненты дифференциальная форма ω имеет вид

$$\omega = a(x)\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{1}$$

Сначала определим интеграл от диффереციальной формы по многообразию, которое является допустимой областью параметров, т.е. является открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^n$ или открытым подмножеством полупространства $\mathbb{R}^n_-$.

Определение 1. Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ является допустимой областью параметров и ориентация M соответствует стандартной декартовой системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть финитная дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^n(M)$ имеет вид (1). Тогда *интегралом* $\int\limits_M \omega$ называется интеграл (Лебега) функции $a(x)$ по множеству M:

$$\int\limits_M \omega := \int\limits_M a(x)\, dx = \int\limits_{\operatorname{supp}\omega} a(x)\, dx$$

Если ориентация M противоположна, то

$$\int_M \omega := -\int_M a(x)\,dx.$$

Этот интеграл существует как интеграл непрерывной функции $a(x)$ по компакту $\operatorname{supp}\omega \subset \mathbb{R}^n$.

Дадим определение интеграла от дифференциальной формы, носитель которой содержится в районе действия одной карты.

Определение 2. Пусть (ψ, U) – карта на n-мерном многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, соответствующая ориентации многообразия M. Пусть $\omega \in \Omega_0^n(M)$ – финитная дифференциальная форма степени n с носителем $\operatorname{supp}\omega \subset U$. Тогда *интегралом* $\int\limits_M \omega$ называется интеграл (в смысле определения 1) от обратного переноса $\psi^*\omega$ дифференциальной формы по допустимой области параметров $\psi^{-1}(U)$, ориентация которой соответствует ориентации стандартной декартовой системы координат $(x^1, \dots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\int_M \omega := \int_{\psi^{-1}(U)} \psi^*\omega.$$

Корректность этого определения, т.е. независимость $\int\limits_M \omega$ от гомеоморфизма карты на M, вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2) – две согласованные (в смысле ориентации) карты на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть $\omega \in \Omega_0^n(M)$,* $\operatorname{supp}\omega \subset U_1 \cap U_2$. *Тогда*

$$\int_{\psi_1^{-1}(U_1)} \psi_1^*\omega = \int_{\psi_2^{-1}(U_2)} \psi_2^*\omega.$$

Доказательство. Обозначим $U := U_1 \bigcap U_2$, $V = \psi_1^{-1}(U)$, $\alpha = \psi_2^*\omega$, $\varphi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$. Тогда $\psi_2^{-1}(U) = \varphi(V)$, $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$. В силу леммы 2(2) § 5 имеем $\psi_1^* = \varphi^* \circ \psi_2^*$, а значит, $\psi_1^*\omega = \varphi^*\alpha$. Поскольку

$$\int_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^*\omega = \int_{\psi_i^{-1}(U)} \psi_i^*\omega,$$

то требуется доказать равенство

$$\int_V \varphi^* \alpha = \int_{\varphi(V)} \alpha. \tag{2}$$

Так как $\omega \in \Omega_0^n(M)$ и $\operatorname{supp} \omega \subset U_2$, то $\alpha \in \Omega_0^n(\psi_2^{-1}(U_2))$ и, следовательно, дифференциальная форма α в ЛСК $(y^1, \dots, y^n) = \psi_2^{-1}$ имеет вид

$$\alpha = a(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

В силу теоремы о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы

$$\varphi^* \alpha = a(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= a(\varphi(x)) \cdot \det \mathcal{D}\, \varphi(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Поскольку карты (ψ_1, U_1) и (ψ_2, U_2) согласованы, то $\det \mathcal{D}\, \varphi(x) > 0$, а значит,

$$\varphi^* \alpha = a(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Поэтому согласно определению 1 формула (2) принимает вид

$$\int_V a(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(V)} a(y)\, dy.$$

Последняя формула следует из теоремы о замене переменных в кратном интеграле. $\square$

Замечание. Если многообразие M удовлетворяет условиям определения 1, то интегралы $\int\limits_M \omega$ в смысле определения 1 и в смысле определения 2 совпадают. Это следует из леммы 1 и того факта, что в этом случае в качестве ЛСК на M можно взять стандартную декартову систему координат в $\mathbb{R}^n$.

Дадим теперь общее определение интеграла от дифференциальной формы по гладкому многообразию.

Определение 3. Пусть $\omega \in \Omega_0^n(M)$ – финитная дифференциальная форма степени n на n-мерном ориентированном многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ – конечный набор карт, согласованных с ориентацией M, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp} \omega$. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Тогда

$$\int\limits_M \omega := \sum_{i=1}^I \int\limits_M \varrho_i\, \omega, \tag{3}$$

где интегралы в правой части равенства (3) понимаются в смысле определения 2 (это возможно, поскольку $\operatorname{supp} \varrho_i\, \omega \subset \operatorname{supp} \varrho_i \subset U_i$).

Корректность этого определения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Интеграл от финитной дифференциальной формы $\omega \in \in \Omega_0^n(M)$ по ориентированному многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$ существует и не зависит ни от набора карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$, ни от разбиения единицы.*

Доказательство. Существование интеграла следует из теоремы о разбиении единицы на многообразии и существования интегралов в правой части равенства (3). Докажем независимость интеграла от набора карт и от разбиения единицы. Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ и $\{(\widetilde{\psi}_j, \widetilde{U}_j)\}_{j=1}^J$ – два набора карт, согласованных с ориентацией M, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp} \omega$. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$ и $\{\widetilde{\varrho}_j\}_{j=1}^J$ – разбиения единицы, подчиненные этим покрытиям. Требуется доказать равенство

$$\sum_{i=1}^I \int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^*(\varrho_i \omega) = \sum_{j=1}^J \int\limits_{\widetilde{\psi}_j^{-1}(\widetilde{U}_j)} \widetilde{\psi}_j^*(\widetilde{\varrho}_j \omega). \tag{4}$$

Для любых $i \in \overline{1, I}$, $j \in \overline{1, J}$ обозначим $\varrho_{ij} = \varrho_i \widetilde{\varrho}_j$. Так как $\operatorname{supp}(\varrho_{ij}\omega) \subset U_i \cap \widetilde{U}_j$, то согласно лемме 1

$$\int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^*(\varrho_{ij}\omega) = \int\limits_{\widetilde{\psi}_j^{-1}(\widetilde{U}_j)} \widetilde{\psi}_j^*(\varrho_{ij}\omega).$$

Суммируя эти равенства по всем $i \in \overline{1, I}$ и $j \in \overline{1, J}$, используя линейность обратного переноса дифференциальных форм, линейность кратного интеграла и равенства $\sum_{j=1}^{J} \varrho_{ij} = \varrho_i$, $\sum_{i=1}^{I} \varrho_{ij} = \varrho_j$, получаем равенство (4). $\square$

Замечание. Если дифференциальная форма ω и многообразие M удовлетворяют условиям определения 2, то интегралы $\int\limits_M \omega$ в смысле определения 2 и в смысле определения 3 совпадают. Это следует из теоремы 1 и того факта, что в случае $\operatorname{supp} \omega \subset U$ в качестве набора карт, районы действия которых покрывают $\operatorname{supp} \omega$, можно взять одну карту (ψ, ω).

§ 9. Свойства интеграла от дифференциальной формы

Замечание. Из линейности кратного интеграла и линейности обратного переноса дифференциальных форм следует свойство линейности интеграла от дифференциальных форм.

Замечание. Согласно определению при изменении ориентации многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ интеграл $\int\limits_M \omega$ меняет знак.

Лемма 1. (Свойство аддитивности интеграла по множествам интегрирования.) *Пусть ориентированное многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ является дизъюнктным объединением многообразий $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^n$, ориентация которых соответствует ориентации M. Пусть $\omega \in \in \Omega_0^n(M)$ – финитная непрерывная дифференциальная форма. Тогда*

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{M_1} \omega + \int\limits_{M_2} \omega.$$

Доказательство. Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ – конечный набор карт, согласованных с ориентацией M, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp} \omega$. Для всех $i \in \overline{1, I}$, $j \in \overline{1, 2}$ определим $U_{ij} := = U_i \cap M_j$, $V_{ij} := \psi_i^{-1}(U_{ij})$, $\psi_{ij} := \psi_i{}_{\big|V_{ij}}$. Если $U_{ij} \neq \emptyset$, то (ψ_{ij}, U_{ij}) – карта на M_j. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^I$ компакта $\operatorname{supp} \omega$. Тогда

$$\int\limits_{M} \varrho_i\omega = \int\limits_{U_i} \varrho_i\omega = \int\limits_{V_i} \psi_i^*(\varrho_i\omega). \tag{1}$$

Поскольку допустимая область параметров V_i является дизъюнктным объединением допустимых областей параметров V_{i1} и V_{i2}, то в силу аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int\limits_{V_i} \psi_i^*(\varrho_i\omega) = \int\limits_{V_{i1}} \psi_i^*(\varrho_i\omega) + \int\limits_{V_{i2}} \psi_i^*(\varrho_i\omega) = \int\limits_{V_{i1}} \psi_{i1}^*(\varrho_i\omega) + \int\limits_{V_{i2}} \psi_{i2}^*(\varrho_i\omega).$$

Отсюда и из равенства (1) следует, что

$$\int\limits_{M} \varrho_i\omega = \int\limits_{M_1} \varrho_i\omega + \int\limits_{M_2} \varrho_i\omega.$$

Суммируя эти равенства по всем $i \in \overline{1, I}$ в силу линейности интеграла получаем доказываемое равенство. $\square$

Теорема 1. (О замене переменных в интеграле от дифференциальной формы.) *Пусть диффеоморфизм $\varphi : M_1 \to M_2$ из ориентированного многообразия $M_1 \in \mathfrak{M}^n$ в ориентированное многообразие $M_2 \in \mathfrak{M}^n$ переносит ориентацию M_1 на ориентацию M_2. Тогда для любой финитной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_0^n(M_2)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{M_1} \varphi^*\omega. \tag{2}$$

Доказательство. Общее определение интеграла дифференциальной формы с помощью разбиения единицы сводит общий случай к случаю, когда $\operatorname{supp} \varphi^*\omega$ содержится в районе действия U одной карты (ψ, U) на M_1. При этом $\operatorname{supp} \omega$ содержится в районе действия $\varphi(U)$ соответствующей карты $(\varphi \circ \psi, \varphi(U))$ на M_2. В этом случае

$$\int\limits_{M_1} \varphi^*\omega = \int\limits_{U} \varphi^*\omega = \int\limits_{\psi^{-1}(U)} \psi^*\varphi^*\omega,$$

$$\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{\varphi(U)} \omega = \int\limits_{(\varphi\circ\psi)^{-1}(\varphi(U))} (\varphi \circ \psi)^*\omega = \int\limits_{\psi^{-1}(U)} \psi^*\varphi^*\omega = \int\limits_{M_1} \varphi^*\omega.$$

$\square$

Замечание. Согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы если $q = n_1 = n_2 = n$, $y(x)$ – координатное представление отображения φ и дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^n(M_2)$ имеет вид

$$\omega = f(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n,$$

то

$$\varphi^*\omega = f(y(x))\, \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

В этом случае формула (2) принимает вид

$$\int\limits_{M_2} f(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \int\limits_{M_1} f(y(x))\, \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

и совпадает с формулой замены переменных в кратном интеграле. Поскольку диффеоморфизм φ переносит ориентацию M_1 на ориентацию M_2, то $\frac{\partial(y^1,\ldots,y^n)}{\partial(x^1,\ldots,x^n)} > 0$ и модуль якобиана раскрывается со знаком плюс.

Следующая лемма показывает, что определение 1 интеграла от дифференциальной формы остается справедливым не только в случае, когда M является допустимой областью параметров, но и в случае, когда M является гладким n-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2. *Пусть n-мерное подмногообразие $M \in \mathfrak{M}_n^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ ориентировано стандартной декартовой системой координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть финитная дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^n(M)$ имеет вид*

$$\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{3}$$

Тогда интеграл дифференциальной формы ω следующим образом выражается через кратный интеграл функции $a(x)$:

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_M a(x)\, dx.$$

Доказательство. С помощью разбиения единицы общий случай сводится к случаю, когда $\operatorname{supp}\omega$ содержится в районе действия одной карты (ψ, U) на M. Обозначим $V = \psi^{-1}(U)$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n_y$, $(y^1, \ldots, y^n)$ – стандартная декартова система координат в $\mathbb{R}^n_y$. Тогда вектор функция $\psi(y) = \begin{pmatrix} x^1(y) \\ \ldots \\ x^n(y) \end{pmatrix}$ является координатным представлением отображения $\psi : V \to U$ в ЛСК $(y^1, \ldots, y^n)$ на V и $(x^1, \ldots, x^n)$ на U.

Из равенства (3) и теоремы о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы следует, что

$$\psi^*\omega = a(\psi(y))\, \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\omega \subset U$, то согласно определению 2 интеграла от дифференциальной формы имеем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_U \omega = \int\limits_V \psi^*\omega.$$

Применяя определение 1 интеграла от дифференциальной формы, получаем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_V a(\psi(y))\, \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)}\, dy.$$

Так как карта (ψ, U) согласованна с ориентацией M, то $\frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(y^1,\ldots,y^n)} > 0$. Применяя теорему о замене переменных в кратном интеграле, получаем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_U a(x)\, dx = \int\limits_M a(x)\, dx,$$

где последнее равенство вытекает из включения $\operatorname{supp} a \subset U$. $\square$

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. *Интегралом* финитной дифференциальной формы $\omega \in \Omega^q_0(M)$ *по ориентированному подмногообразию* $M_1 \in \mathfrak{M}^q$ многообразия M называется интеграл по M_1 от сужения $\omega_{|M_1}$:

$$\int\limits_{M_1} \omega := \int\limits_{M_1} \omega_{|_{M_1}}.$$

Замечание. Согласно лемме 3 § 5 сужение дифференциальной формы $\omega \in \Omega_0^q(M)$ на подмногообразие M_1 совпадает с обратным переносом ω при отображении вложения $\varphi : M_1 \to M$, где $\varphi(P) = P$ при всех $P \in M_1$. Следовательно,

$$\int\limits_{M_1} \omega = \int\limits_{M_1} \varphi^* \omega. \tag{4}$$

Криволинейный интеграл второго рода. Пусть $\Gamma = \{r(t) : t \in [a, b]\}$ – простая кривая в $\mathbb{R}^n$, $r \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ и $r'(t) \neq \overline{0} \quad \forall t \in \in [a, b]$. Как показано в примере 1 § 7, многообразие $\Gamma \in \mathfrak{M}_n^1$ ориентировано в направлении возрастания параметра t. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей кривую Γ, задана дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^1(G)$ (т.е. непрерывное ковекторное поле). Поскольку множество $\operatorname{supp} \omega$ компактно как замкнутое подмножество компакта $\Gamma \subset \subset \mathbb{R}^n$, то дифференциальная форма ω финитна.

Определение. Интеграл $\int\limits_\Gamma \omega$ называется *криволинейным интегралом второго рода.*

Пример 1. Получим формулу, выражающую криволинейный интеграл второго рода через интеграл функции по отрезку. Согласно формуле (4) имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma} \varphi^* \omega,$$

где $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ – отображение вложения: $\varphi(P) = P \; \forall P \in \Gamma$. Рассмотрим гладкий диффеоморфизм $\psi : [a, b] \to \Gamma$ из $[a, b] \in \mathfrak{M}_1^1$ в $\Gamma \in \mathfrak{M}_n^1$, заданный формулой $\psi(t) = r(t)$ при всех $t \in [a, b]$. Тогда отображение $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ можно записать в виде $r = \varphi \circ \psi$. В силу теоремы о замене переменных в интеграле от дифференциальной формы имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma} \varphi^* \omega = \int\limits_{[a,b]} \psi^*(\varphi^* \omega) = \int\limits_{[a,b]} (\varphi \circ \psi)^* \omega = \int\limits_{[a,b]} r^* \omega. \tag{5}$$

Пусть в стандартной декартовой системе координат пространства $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма ω имеет вид

$$\omega = \omega_i \, dx^i, \tag{6}$$

где индекс суммирования i пробегает $\overline{1,n}$. Обозначим компоненты вектор-функции $r(t)$, параметризующей кривую Γ через $x^i(t)$: $r(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$. Согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы имеем

$$r^*(dx^i) = \frac{dx^i}{dt} \, dt.$$

Поэтому $r^*\omega = \omega_i \frac{dx^i}{dt} dt$ и, используя равенства (5) и лемму 2, получаем формулу, выражающую криволинейный интеграл второго рода через интеграл функции по отрезку

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_a^b \left(\omega_i \frac{dx^i}{dt} \right) dt. \tag{7}$$

Поверхностный интеграл второго рода. Пусть S – ориентированное гладкое двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$, содержащей подмногообразие S, задана финитная дифференциальная форма $\omega \in \Omega^2_0(G)$.

Определение. Подмногообразие $S \in \mathfrak{M}^2_3$ называется *поверхностью*, а интеграл $\int\limits_S \omega$ называется *поверхностным интегралом второго рода*.

Пример 2. Пусть многообразие $D \in \mathfrak{M}^2_2$ ориентировано и диффеоморфизм $\psi : D \to S$ переносит ориентацию многообразия D на ориентацию S. Получим формулу, выражающую поверхностный интеграл второго рода $\int\limits_S \omega$ через кратный интеграл по множеству D.

Пусть

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D.$$

Пусть $\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$, где коэффициенты P, Q, R являются функциями, непрерывно завиящими от (x, y, z).

Согласно формуле (4) имеем

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S \varphi^*\omega,$$

где $\varphi : S \to \mathbb{R}^3_{xyz}$ – отображение вложения: $\varphi(p) = p\ \forall p \in S$. В силу теоремы о замене переменных в интеграле от дифференциальной формы имеем

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S \varphi^*\omega = \int\limits_D \psi^*(\varphi^*\omega) = \int\limits_D \Psi^*\omega, \tag{8}$$

где $\Psi := \varphi \circ \psi$ действует из D в $\mathbb{R}^3_{xyz}$.

Согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы имеем

$$\Psi^*(dy\wedge dz) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\wedge dv, \qquad \Psi^*(dz\wedge dx) = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du\wedge dv,$$

$$\Psi^*(dx\wedge dy) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\wedge dv.$$

Поэтому

$$\Psi^*\omega = \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du\wedge dv =$$

$$= \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\wedge dv.$$

Отсюда и из равенств (8) получаем следующую формулу, выражающую поверхностный интеграл второго рода через кратный интеграл:

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\wedge dv = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv, \tag{9}$$

где последнее равенство следует из леммы 2.

▷

Для единообразия записи формулы Стокса, которую мы докажем в следующем параграфе, введем понятия компактного нульмерного многообразия.

Определение. *Компактным нульмерным многообразием* называется конечный набор точек $M = \{P_i\}_{i=1}^{I}$. Если задана функция $s : M \to \{-1, +1\}$, то компактное нульмерное многообразие M называется *ориентированным*. *Интегралом* функции (т.е. дифференциальной формы степени 0) $\omega : M \to \mathbb{R}$ по M называется

$$\int\limits_{M} \omega := \sum_{i=1}^{I} s(P_i)\omega(P_i).$$

◁

§ 10. Теорема Стокса

Теорема 1. (Теорема Стокса.) *Для любой финитной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$ на ориентированном гладком n-мерном многообразии M, ориентация края которого согласована с ориентацией M, справедлива* формула Стокса

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega. \tag{1}$$

Доказательство теоремы при $n \geq 2$ проведем за два шага. На шаге 1 докажем формулу Стокса в случаях $M = \mathbb{R}^n_-$ и $M = \mathbb{R}^n$, на шаге 2 общий случай сведем к этим случаям. Затем рассмотрим случай $n = 1$.

Пусть $n \geq 2$.

Шаг 1. Поскольку степень дифференциальной формы ω равна $(n-1)$, то согласно теореме о представлении дифференциальной формы через ее компоненты дифференциальная форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

В силу линейности интеграла и дифференциала формулу Стокса достаточно доказать для монома

$$\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{2}$$

В этом случае по определению внешнего дифференциала

$$d\omega = da(x) \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Подставляя в эту формулу выражение $da = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^j}\, dx^j$, получаем $d\omega = \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$, остальные слагаемые суммы равны нулю. Таким образом,

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Случай $M = \mathbb{R}^n_-$. Будем считать, что ориентация многообразия $M = \mathbb{R}^n_-$ соответствует системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда согласованная с ориентацией M ориентация края $\partial M = \partial \mathbb{R}^n_-$ будет соответствовать системе координат $(x^2, \ldots, x^n)$. Согласно определению 1 интеграла от дифференциальной формы интеграл от дифференциальной формы равен интегралу Лебега:

$$\int\limits_M d\omega = (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx.$$

Если $i = 1$, то по теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^n \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^2 \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1.$$

В силу финитности дифференциальной формы ω (а значит, и функции a) найдется такое достаточно большое число $R > 0$, что $a(x) = 0$ при $|x| \geq R$. Используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1 = \int\limits_{-R}^{0} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1 = a\Big|_{x^1=-R}^{x^1=0} = a(0, x^2, \ldots, x^n).$$

Следовательно,

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^n \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 =$$

$$= \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} a(x)\ dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int\limits_{\partial M} \omega,$$

где предпоследнее равенство следует из теоремы Фубини, определения 1 интеграла от дифференциальной формы и определения согласованной ориентации многообразия и его края. Таким образом, в случае $M = \mathbb{R}^n_-$ при $i = 1$ формула Стокса для дифференциальной формы (2) справедлива.

Докажем теперь формулу Стокса в случае $M = \mathbb{R}^n_-$ для дифференциальной формы (2) при $i > 1$. В этом случае согласно теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\ dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^n \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^{i+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^{i-1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{0} dx^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x^i}\ dx^i.$$

Снова выбирая $R > 0$ так, что $a(x) = 0$ при $|x| \geq R$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x^i}\ dx^i = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial a}{\partial x^i}\ dx^i = a\Big|_{x^i=-R}^{x^i=R} = 0.$$

Поэтому в данном случае

$$\int\limits_{M} d\omega = (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\ dx = 0. \tag{3}$$

Для вычисления $\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega$ рассмотрим отображение вложения $\varphi : \partial \mathbb{R}^n_- \to \mathbb{R}^n_-$, т. е. $\varphi(x) = x\ \forall x \in \partial \mathbb{R}^n_-$. Тогда по определению интеграла по подмногообразию и в силу леммы 3 § 5 имеем

$$\int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega = \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega_{|\partial \mathbb{R}^n_-} = \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \varphi^* \omega.$$

Из равенства (2) и леммы 1 § 5 следует, что

$$\varphi^* \omega = \varphi^*(a) \wedge \varphi^*(dx^1) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i-1}) \wedge \varphi^*(dx^{i+1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^n).$$

Так как $(x^2, \ldots, x^n)$ – ЛСК на $\partial\mathbb{R}^n_-$ и $\frac{\partial x^1}{\partial x^i} = 0$ при $i > 1$, то согласно выражению для обратного переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения $\varphi^*(dx^1) = \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\partial x^1}{\partial x^i} dx^i = 0$. Следовательно, $\varphi^*\omega = 0$, а значит, в данном случае

$$\int\limits_{\partial M} \omega = 0,$$

что вместе с равенством (3) доказывает формулу Стокса в этом случае.

Случай $M = \mathbb{R}^n$. Поскольку в данном случае $\partial M = \emptyset$, то

$$\int\limits_{\partial M} \omega = 0.$$

Аналогично предыдущему случаю из равенства $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i = 0$ по теореме Фубини следует, что

$$\int\limits_{M} d\omega = (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx = 0.$$

Поэтому формула Стокса справедлива и в этом случае.

Шаг 2. Согласно лемме 3 § 7 существует атлас $\mathcal{A}$, соответствующий ориентации M и такой, что область параметров каждой карты атласа $\mathcal{A}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ или с полупространством $\mathbb{R}^n_-$. В силу компактности $\operatorname{supp}\omega$ существует конечный набор $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^{I}$ карт атласа $\mathcal{A}$ такой, что $\operatorname{supp}\omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} U_i$. По теореме о существовании разбиения единицы на многообразии найдется разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^{I}$ компакта $\operatorname{supp}\omega$. Обозначим $\omega_i = \varrho_i\omega$. Тогда $\omega = \sum\limits_{i=1}^{I} \omega_i$ и в силу линейности интеграла и дифференциала достаточно доказать, что для любого $i \in \overline{1, I}$ справедлива формула

$$\int\limits_{\partial M} \omega_i = \int\limits_{M} d\omega_i.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\omega_i \subset U_i$, то эта формула принимает вид

$$\int\limits_{\partial U_i} \omega_i = \int\limits_{U_i} d\omega_i.$$

Используя определение 2 интеграла от дифференциальной формы, перепишем последнее равенство в виде

$$\int\limits_{\psi_i^{-1}(\partial U_i)} \psi_i^*\omega_i = \int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^* d\omega_i.$$

Положим $\alpha_i = \psi_i^*\omega_i$ и $V_i = \psi_i^{-1}(U_i)$. В силу теоремы о коммутативности внешнего дифференцирования и отображения обратного переноса справедливо равенство $\psi_i^* d\omega_i = d\psi_i^*\omega_i$. По определению краевой точки карты имеем $\partial V_i = \psi_i^{-1}(\partial U_i)$. Таким, образом доказываемая формула принимает вид

$$\int\limits_{\partial V_i} \alpha_i = \int\limits_{V_i} d\alpha_i.$$

Поскольку область параметров V_i совпадает с $\mathbb{R}^n$ или с $\mathbb{R}^n_-$, то последнее равенство доказано на шаге 1. $\square$

$\triangleright$

Пусть $n = 1$.

Согласно лемме 2 § 3 существует такой гладкий (не обязательно ориентирующий) атлас $\mathcal{A}$ на M, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^1_-$. В силу компактности $\operatorname{supp}\omega$ существует конечный набор $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ карт атласа $\mathcal{A}$ такой, что $\operatorname{supp}\omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} U_i$. По теореме о существовании разбиения единицы на многообразии найдется разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^I$ компакта $\operatorname{supp}\omega$. Обозначим $\omega_i = \varrho_i\omega$, $\alpha_i = \psi_i^*\omega_i$.

Поскольку край области параметров $\mathbb{R}^1_- = (-\infty, 0]$ состоит из одной точки 0, то край $\partial U_i = \psi(\mathbb{R}^1_-)$ состоит из одной точки $P_i = \psi_i(0)$. Согласно определению ориентации края одномерного многообразия, согласованной с ориентацией самого многообразия получаем, что согласованная ориентация ∂M задается функцией $s : \partial M \to \{-1, +1\}$, где $s(P_i) = 1$, если карта (ψ_i, U_i) согласована с ориентацией M, иначе $s(P_i) = -1$. Согласно определению интеграла от нульмерного компактного многообразия получаем

$$\int\limits_{\partial M} \omega_i = s(P_i)\omega_i(P_i).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{M} d\omega_i = s(P_i) \int\limits_{U_i} d\omega_i,$$

$$\int\limits_{U_i} d\omega_i = \int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^* d\omega_i = \int\limits_{(-\infty,0]} d\alpha_i = \alpha_i(0) = \omega_i(P_i),$$

где предпоследнее неравенство следует из формулы Ньютона–Лейбница. Таким образом,

$$\int\limits_{\partial M} \omega_i = s(P_i)\omega_i(P_i) = \int\limits_{M} d\omega_i.$$

Суммируя эти равенства по $i \in \overline{1, I}$, получаем формулу Стокса при $n = 1$. $\square$

$\triangleleft$

Замечание. Используя свойство аддитивности интеграла по множествам интегрирования, формулу Стокса можно обобщить на «кусочно гладкие» многообразия.

§ 11. Частные случаи формулы Стокса

Формула Грина

Пусть $M \in \mathfrak{M}_2^2$ – гладкое компактное двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$, ориентированное стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^2_{xy}$, дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^1(M)$ имеет вид

$$\omega = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

где P и Q – гладкие функции на M. Тогда по определению внешнего дифференциала

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy =$$

$$= (P'_x dx + P'_y dy) \wedge dx + (Q'_x dx + Q'_y dy) \wedge dy = (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy.$$

В этом случае формула Стокса принимает вид

$$\int\limits_{\partial M} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{M} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Из леммы 5 § 8 главы 17 следует, что ориентации ∂M и M должны быть согласованы таким образом, что если многообразие M ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^2_{xy}$, то при движении вдоль ∂M в направлении ориентации ∂M многообразие M остается слева. Эта формула называется *формулой Грина.*

Формула Гаусса–Остроградского

Пусть $G \in \mathfrak{M}^3_3$ – гладкое компактное трехмерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$, ориентированное стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Любую дифференциальную форму $\omega \in \in \Omega^2_1(G)$ можно записать в виде

$$\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy,$$

где P, Q и R – это C^1-гладкие функции на G. Вычисляя внешний дифференциал, получаем

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Тогда формула Стокса принимает вид

$$\int\limits_{\partial G} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \int\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz.$$

Согласно лемме 5 § 8 главы 17 ориентации ∂G и G должны быть согласованы таким образом, что если многообразие G ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, то нормаль к ∂G, согласованная с ориентацией ∂G, должна быть внешней по отношению к G. Эта формула называется *формулой Гаусса–Остроградского.*

Формула Стокса в узком смысле

Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, содержащее гладкое компактное двумерное ориентированное многообразие $S \in \mathfrak{M}^2_3$. Любую дифференциальную форму $\omega \in \Omega^1_1(U)$ можно записать в виде

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где $P, Q, R \in C^1(U, \mathbb{R})$. Вычисляя внешний дифференциал, получаем

$$d\omega = (R'_y - Q'_z)dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)dx \wedge dy.$$

Формула Стокса для финитной дифференциальной формы ω принимает вид

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \int\limits_{S} (R'_y - Q'_z)dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)dx \wedge dy,$$

где ориентация края ∂S согласована с ориентацией S по правилу «правой руки». Эта формула называется *формулой Стокса в узком смысле*.

§ 12. Точные и замкнутые дифференциальные формы

Определение. Дифференциальная форма $\omega \in \Omega^q_0(M)$ называется *точной* на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, если существует такая дифференциальная форма $\varphi \in \Omega^{q-1}_1(M)$, что $\omega = d\varphi$. При этом дифференциальная форма φ называется *обобщенным потенциалом* дифференциальной формы ω.

В случае $q = 1$ точная форма $\omega \in \Omega^q_0(M)$ называется также *потенциальным ковекторным полем*, а функция $\varphi \in \Omega^0_1(M) = C^1(M, \mathbb{R})$ называется *скалярным потенциалом* ковекторного поля ω.

Теорема 1. (Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.) *Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1_0(U)$ (т.е. непрерывное ковекторное поле). Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$ не зависит от пути интегрирования $\Gamma \subset U$, т.е. для любых двух кусочно гладких кривых*[1] $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$, *имеющих*

[1]Интеграл по кусочно гладкой кривой определеяется как сумма интегралов по гладким кускам.

общее начало и общий конец, справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega.$$

(2) *Для любой замкнутой кусочно гладкой кривой* $\Gamma \subset U$ *справедливо равенство*

$$\int_{\Gamma} \omega = 0.$$

(3) *Дифференциальная форма* ω *точна, т.е. имеет скалярный потенциал в области* U.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i dx^i = d\varphi$ и пусть кривая $\Gamma = \{r(t) :\ t \in [a, b]\}$ задана гладкой параметризацией $r(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$. Тогда согласно формуле (7) § 9

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{dx^i}{dt} \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(r(t))\, dt = \varphi(r(b)) - \varphi(r(a)).$$

Таким образом, в случае, если ω – точная дифференциальная форма, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$ по гладкой кривой равен разности потенциалов в концевых точках кривой. Суммируя эти равенства по гладким кускам, получаем этот же результат для кусочно гладкой кривой. При этом, если кривая замкнута, то концевые точки у нее совпадают и, следовательно, $\int\limits_{\Gamma} \omega = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть кусочно гладкие кривые $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ имеют общее начало и общий конец. Обозначим через Γ_2^- кривую, полученную изменением ориентации кривой Γ_2, а через Γ – замкнутую кривую, составленную из кривых Γ_1 и Γ_2^-. Тогда

$$\int_{\Gamma_1} \omega - \int_{\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2^-} \omega = \int_{\Gamma} \omega = 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (3). Фиксируем произвольную точку $P_0 \in U$. Для любой точки $P \in U$ определим $\varphi(P)$ как интеграл $\int\limits_\Gamma \omega$ по кусочно гладкой кривой $\Gamma \subset U$, началом которой является точка P_0, а концом – точка P. Такая кривая существует, т.к. область является линейно-связным множеством. В силу условия (1) значение $\varphi(P)$ не зависит от выбора кривой Γ.

Пусть заданы произвольные точки $P_1, P_2 \in U$. Пусть Γ – произвольная кусочно гладкая кривая с началом в P_1 и концом в P_2, Γ_1 – произвольная кусочно гладкая кривая с началом в P_0 и концом в P_1, Γ_2 составлена из кривых Γ_1 и Γ. Тогда

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \int\limits_{\Gamma_2} \omega - \int\limits_{\Gamma_1} \omega = \int\limits_{\Gamma} \omega. \tag{1}$$

Зафиксируем произвольную точку $P \in U$ и покажем, что $\omega(P) = d\varphi(P)$. Поскольку область U – открытое множество, то существует окрестность $U_{2\delta}(P) \subset U$. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, рассматривая отрезок $\Gamma_i = [P, P + \delta e_i] \subset U$ в силу формулы (1) получаем

$$\varphi(P + \delta e_i) - \varphi(P) = \int\limits_{\Gamma_i} \omega = \int\limits_0^\delta \omega_i(P + te_i)\, dt = \omega_i(P)\delta + o(\delta), \quad \delta \to 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(P) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(P + \delta e_i) - \varphi(P)}{\delta} = \omega_i(P).$$

Следовательно,

$$d\varphi(P) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(P)\, dx^i = \sum_{i=1}^n \omega_i(P)\, dx^i = \omega(P).$$

$\square$

Замечание. Условие потенциальности (или точности) дифференциальной формы является важным для многих физических приложений. Проверить это условие бывает не очень просто. Далее сформулируем необходимое легко проверяемое условие точности дифференциальной формы и рассмотрим дополнительные свойства многообразия, при которых это необходимое условие является и достаточным.

Определение. Дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ называется *замкнутой* на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, если $d\omega = 0$ на M.

Лемма 1. *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. Условие замкнутости дифференциальной формы $\omega \in \Omega_1^q(M)$ необходимо, но не достаточно для ее точности.*

Доказательство. Если дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ точна, т.е. $\omega = d\varphi$, то $\varphi \in \Omega_2^{q-1}(M)$ и по лемме 1 § 4 имеем $d\omega = d^2\varphi = 0$. Поэтому условие замкнутости дифференциальной формы необходимо для ее точности. Покажем, что оно недостаточно. Рассмотим дифференциальную форму

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

на гладком двумерном подмногообразии $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ пространства $\mathbb{R}^2$. Прямые вычисления показывают, что $d\omega = 0$ на M, однако, например, для замкнутой кривой $\Gamma = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ имеем $\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0$. Поэтому согласно теореме 1 дифференциальная форма ω не является точной на M. $\square$

§ 13. Лемма Пуанкаре

Лемма 1. (О цепном равенстве.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, пусть отображения $\pi_0, \pi_1 : M \to M \times [0,1]$ заданы формулами*

$$\pi_0(x) = (x, 0), \quad \pi_1(x) = (x, 1) \quad \forall x \in M.$$

Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение $J_q : \Omega_1^q(M \times [0,1]) \to \Omega_1^{q-1}(M)$, удовлетворяющее цепному равенству

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = \pi_1^*\beta - \pi_0^*\beta \qquad \forall \beta \in \Omega_1^q(M \times [0,1]).$$

Доказательство. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на M, $t \in [0,1]$. Тогда $(x^1, \ldots, x^n, t)$ – ЛСК на многообразии $M \times [0,1]$. Любая дифференциальная форма $\beta \in \Omega_1^q(M \times [0,1])$ является суммой конечного числа слагаемых вида

$$b(x,t)\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \tag{1}$$

или

$$b(x,t)\,dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}. \tag{2}$$

Для дифференциальных форм β вида (1) положим $J_q(\beta) = 0$, для дифференциальных форм вида (2) определим

$$J_q\Big(b(x,t)\,dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}\Big) := \left(\int\limits_0^1 b(x,t)\,dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}.$$

Для дифференциальных форм, представимых как сумма конечного числа слагаемых β_i вида (1) или (2), определим $J_q\left(\sum\limits_i \beta_i\right) = \sum\limits_i J_q(\beta_i)$. Тогда J_q является линейным отображением из $\Omega_1^q(M \times [0,1])$ в $\Omega_1^{q-1}(M)$.

Если дифференциальная форма β имеет вид (2)

$$\beta = b(x,t)\,dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}},$$

то $\pi_1^*\beta = \pi_0^*\beta = 0$,

$$d\beta = \sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}}\, dx^{i_0} \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}} =$$

$$= -\sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}}\, dt \wedge dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}$$

и, следовательно,

$$J_{q+1}(d\beta) = -\sum_{i_0=1}^{n} \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}} dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}.$$

С другой стороны, дифференцируя интеграл Лебега по параметру, получаем $\frac{\partial}{\partial x^i} \int\limits_0^1 b(x,t)\,dt = \int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial x^i}\,dt$. Поэтому

$$dJ_q(\beta) = \left(d\int\limits_0^1 b(x,t)\,dt\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}} =$$

$$= \sum_{i_0=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}} dt \right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}} = -J_{q+1}(d\beta).$$

Таким образом, для дифференциальной формы β вида (2) цепное равенство справедливо.

Пусть теперь дифференциальная форма β имеет вид (1):

$$\beta = b(x, t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Тогда $J_q(\beta) = 0$, а значит, $dJ_q(\beta) = 0$,

$$d\beta = \frac{\partial b}{\partial t}\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} + \text{слагаемые без } dt.$$

Следовательно,

$$J_{q+1}(d\beta) = \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial t}\, dt \right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = J_{q+1}(d\beta) =$$

$$= (b(x, 1) - b(x, 0))\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} = \pi_1^* \beta - \pi_0^* \beta.$$

Таким образом, для дифференциальной формы β вида (1) цепное равенство также справедливо. В силу линейности отображений J, d, π_0^*, π_1^* и представимости любой дифференциальной формы $\beta \in \Omega_1^q(M \times [0, 1])$ в виде суммы конечного числа слагаемых вида (1) и (2) получаем цепное равенство для любой такой дифференциальной формы. $\square$

Определение. Многообразие M называется *стягиваемым в точку* $x_0 \in M$, если существует отображение $h \in C^1(M \times [0, 1], M)$ такое, что

$$h(x, 0) = x_0, \quad h(x, 1) = x \quad \forall x \in M. \tag{3}$$

Определение. Множество A в линейном пространтсве называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ отрезок $[x_0, x_1] := = \{(1 - t)x_0 + tx_1 : \ t \in [0, 1]\}$ содержится в A.

Лемма 2. *Если подмногообразие M пространства $\mathbb{R}^N$ выпукло, то оно стягиваемо.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in M$ и определим отображение $h : M \times [0,1] \to M$: $\quad h(x,t) = (1-t)x_0 + tx$. Тогда $h \in C^\infty(M \times [0,1], M)$ и справедливы равенства (3). $\square$

Замечание. Стягиваемое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ может не быть выпуклым множеством. Например, множество $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x < 0$ или $y < 0\}$.

Теорема 1. *(Лемма Пуанкаре.) Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$ – стягиваемое многообразие, $q \in \mathbb{N}$. Дифференциальная форма $\omega \in \Omega^q_1(M)$ точна на M тогда и только тогда, когда ω замкнута на M.*

Доказательство. Согласно лемме 1 § 12 из потенциальности ω следует замкнутость ω. Пусть ω – замкнутая дифференциальная форма на M. Докажем, что ω точна. Поскольку многообразие M стягиваемо, то существует отображение $h \in C^1(M \times [0,1], M)$, удовлетворяющее равенствам (3). Рассмотрим дифференциальную форму $\beta = h^*\omega \in \Omega^q_1(M \times [0,1])$. Согласно теореме о коммутативности внешнего дифференцирования и отображения обратного переноса имеем $d\beta = h^* d\omega = 0$. В силу леммы о цепном равенстве существует линейное отображение $J_q : \Omega^q_1(M \times [0,1]) \to \Omega^{q-1}_1(M)$, удовлетворяющее цепному равенству

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = \pi_1^*\beta - \pi_0^*\beta.$$

Поскольку $d\beta = 0$, $\beta = h^*\omega$, то

$$dJ_q(\beta) = \pi_1^*(h^*\omega) - \pi_0^*(h^*\omega) = (h \circ \pi_1)^*\omega - (h \circ \pi_0)^*\omega,$$

где последнее равенство следует из леммы 2(2) § 5. Поскольку

$$(h \circ \pi_1)(x) = h(x,1) = x, \quad (h \circ \pi_0)(x) = h(x,0) = x_0 \quad \forall x \in M,$$

то $h \circ \pi_1 = Id$, $\; h \circ \pi_0 = \mathrm{const}$. Следовательно, $(h \circ \pi_1)^*\omega = \omega$, $(h \circ \pi_0)^*\omega = 0$. Таким образом, $dJ_q(\beta) = \omega$, т.е. дифференциальная форма ω точна. $\square$

Замечание. Поскольку любая точка P на гладком многообразии M имеет стягиваемую окрестность, то в силу леммы Пуанкаре любая замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ локально точна, т.е. точна в некоторой окрестности точки P. Как показано в лемме 1 § 12, эта дифференциальная форма может не быть точной на всем M.

$\triangleright$

§ 14. Гомотопическая эквивалентность

Определение. Пусть заданы многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$. Два непрерывных отображения $f_0 : M \to N$ и $f_1 : M \to N$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение (называемое *гомотопией*) $h : M \times [0,1] \to N$ такое, что

$$h(x,0) = f_0(x), \quad h(x,1) = f_1(x) \quad \forall x \in M. \tag{1}$$

Если непрерывные отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гомотопны, будем писать $f_0 \sim f_1$.

Задача 1. Проверьте, что $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений из $M \in \mathfrak{M}^n$ в $N \in \mathfrak{M}^p$.

Определение. Многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$ называются *гомотопически эквивалентными*, если существует пара непрерывных отображений $f : M \to N$ и $g : N \to M$ такая, что отображение $f \circ g$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_N : N \to N$, а отображение $g \circ f$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_M : M \to M$.

Задача 2. Проверьте, что гомотопическая эквивалентность многообразий является отношением эквивалентности.

Замечание. Если многообразия M и N гомеоморфны, то они гомотопически эквивалентны. Это следует непосредственно из определений. Обратное неверно. Например, отрезок $[0,1]$ топологически эквивалентен, но не гомеоморфен точке.

Определение. Свойство многообразий, которое совпадает у гомотопически эквивалентных многообразий, называется *гомотопическим инвариантом*.

К гомотопическим инвариантам относятся, например, стягиваемость и линейная связность.

Замечание. Поскольку гомеоморфные многообразия гомотопически эквивалентны, то любой гомотопический инвариант является топологическим инвариантом. Обратное неверно. Например, размерность многообразия является топологическим инвариантом, но не является гомотопическим инвариантом.

Замечание. Непосредственно из определений следует, что многообразие M является стягиваемым тогда и только тогда, когда M *гомотопически тривиально*, т.е. гомотопически эквивалентно точке.

Гипотеза Пуанкаре. *n-мерное многообразие M гомотопически эквивалентно n-мерной сфере S^n тогда и только тогда, когда M гомеоморфно S^n.*

В случаях $n = 1, 2$ гипотеза Пуанкаре была доказана самим Пуанкаре (эти случаи и породили гипотезу, окончательная формулировка которой появилась в 1904г.). В случае $n \geq 5$ гипотеза Пуанкаре была доказана в 1960-70гг. С.Смейлом и Дж.Столлинсом. В случае $n = 4$ гипотеза Пуанкаре была доказана в 1982г. М.Фридманом. Доказательство в самом сложном случае $n = 3$ было получено Г.Перельманом в 2002г.

Определение. Множество всех классов эквивалентности для заданного отношения эквивалентности $\sim$ на множестве X, называется *фактормножеством* и обозначается $X/\sim$.

Пример 1. Пусть L – линейное пространство над полем F (например, $F = \mathbb{R}$ – поле действительных чисел или $F = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел). Пусть L_1 – линейное подпространство L. Для элементов $x, y \in$ $\in L$ будем писать $x \sim y$, если $x - y \in L_1$. Проверьте, что $\sim$ является отношением эквивалентности на L. На фактормножестве $L/L_1 := L/\sim$ введем операции сложения элементов и умножения элемента на число из F:

$$[x] + [y] := [x + y] \qquad \forall x, y \in L,$$
$$\lambda[x] := [\lambda x] \qquad \forall x \in L, \quad \lambda \in F.$$

Проверьте, что эти операции определены корректно, т.е. $[x] + [y]$ и $\lambda[x]$ не зависят от конкретных представителей x и y классов $[x]$ и $[y]$. Проверьте, что фактормножество L/L_1 с введенными операциями является линейным пространством, т.е. эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства.

Следующая лемма во многих случаях позволяет установить взаимно однозначное соответствие между фактормножеством и другим множеством.

Лемма 1. *Пусть X, Y – произвольные множества, $f : X \to Y$ – функция. Для элементов $x, x' \in X$ будем писать $x \sim x'$, если $f(x) = f(x')$. Тогда $\sim$ является отношением эквивалентности на X. Пусть отображение $F : (X/\sim) \to f(X)$ определяется равенством $F([x]) = f(x)$ при всех $x \in X$. Тогда F является взаимно однозначным соответствием между фактормножеством $X/\sim$ и множеством $f(X)$.*

Если дополнительно $f : X \to Y$ – линейное отображение линейных пространств X и Y, то F – изоморфизм линейных пространств $X/\sim$ и $\operatorname{Im} f := f(X)$.

Доказательство. Непосредственно из определений получаем, что $\sim$ является отношением эквивалентности на X. Заметим, что отображение $F : (X/\sim) \to f(X)$ определено корректно, т.к. $F([x])$ зависит лишь от класса эквивалентности $[x]$, а не от его конкретного представителя $x \in X$. Фиксируем произвольный элемент $y \in f(X)$. Тогда найдется элемент $x \in$ $\in X$ такой, что $f(x) = y$. Следовательно, $F([x]) = y$. Если $F([x']) = y$ для некоторого $x' \in X$, то $f(x) = f(x')$, а значит, $[x'] = [x]$.

Если дополнительно $f : X \to Y$ – линейное отображение линейных пространств X и Y, то отображение F линейно и, следовательно, является изоморфизмом линейных пространств. □

§ 15. Когомологии де Рама

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через d_q^M обозначим отображение из $\Omega^q(M)$ в $\Omega^{q+1}(M)$, которое каждой дифференциальной форме $\omega \in \Omega^q(M)$ сопоставляет ее внешний дифференциал $d\omega \in \Omega^{q+1}(M)$. Тогда *ядро* $\operatorname{Ker} d_q^M$ линейного отображения d_q^M совпадает с пространством замкнутых форм $\omega \in \Omega^q(M)$, а *образ* $\operatorname{Im} d_{q-1}^M$ линейного отображения d_{q-1}^M совпадает с пространством точных форм $\omega \in \Omega^q(M)$, т.е. таких, что существует дифференциальная форма $\varphi \in \Omega^{q-1}(M)$ такая, что $\omega = d\varphi$.

Факторпространство $\operatorname{Ker} d_q^M / \operatorname{Im} d_{q-1}^M$ называется *группой q-мерных когомологий де Рама* и обозначается $H_{DR}^q(M)$:

$$H_{DR}^q(M) := \operatorname{Ker} d_q^M / \operatorname{Im} d_{q-1}^M.$$

При $q = 0$ естественно считать, что $\operatorname{Im} d_{q-1}^M = 0$ и поэтому полагают $H_{DR}^0(M) := \operatorname{Ker} d_0^M$.

Если две замкнутые дифференциальные формы $\omega_1, \omega_2 \in \operatorname{Ker} d_q^M$ отличаются на точную форму, т.е. $\omega_1 - \omega_2 \in \operatorname{Im} d_{q-1}^M$, то дифференциальные формы ω_1 и ω_2 называются *когомологичными*. Элемент факторпространства $H_{DR}^q(M)$, т.е. класс когомологичных форм называется *когомологическим классом*.

Замечание. Если $M \in \mathfrak{M}^n$, $q > n$, то $H^q_{DR}(M) = 0$. Это следует из того, что $\Omega^q(M) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Ker} d^M_q = 0$.

Лемма 1. *Если многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ линейно-связно, то $H^0_{DR}(M) \cong \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in \operatorname{Ker} d^M_0$, т.е. $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ и $d\omega = 0$. В силу теоремы Лагранжа о среднем функция ω постоянна в районе действия любой карты на M. Отсюда в силу линейной связности M получаем постоянство ω на M. Таким образом, пространство $H^0_{DR}(M) = \operatorname{Ker} d^M_0$ состоит из постоянных вещественнозначных функций, а значит, изоморфно множеству $\mathbb{R}$. $\square$

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$. *Обратным переносом когомологических классов* при отображении $f \in \mathbb{C}^\infty(M, N)$ называется отображение $f^* : H^q_{DR}(N) \to H^q_{DR}(M)$, которое каждому классу форм, когомологичных дифференциальной форме $\omega \in \operatorname{Ker} d^N_q$ ставит в соответствие класс форм, когомологичных обратному переносу $f^*\omega$ дифференциальной формы ω:

$$f^*[\omega] := [f^*\omega] \quad \forall \omega \in \operatorname{Ker} d^N_q.$$

Проверим корректность этого определения. Во-первых нужно проверить, что

$$f^*\omega \in \operatorname{Ker} d^M_q \quad \forall \omega \in \operatorname{Ker} d^N_q. \tag{1}$$

Условие (1) выполнено, т.к. если $d\omega = 0$, то согласно теореме о коммутативности внешнего дифференцирования и отображения обратного переноса имеем $df^*\omega = f^*d\omega = f^*0 = 0$.

Во-вторых нужно проверить, что когомологический класс $[f^*\omega] \in H^q_{DR}(M)$ зависит только от когомологического класса $[\omega] \in H^q_{DR}(N)$, а не от его конкретного представителя $\omega \in \operatorname{Ker} d^N_q$. Пусть $\omega \in \operatorname{Ker} d^N_q$, $\omega_1 \in [\omega]$, т.е. $\omega_1 - \omega \in \operatorname{Im} d^N_{q-1}$. Это означает, что $\omega_1 - \omega = d\varphi$ для некоторой дифференциальной формы $\varphi \in \Omega^{q-1}(N)$. Тогда согласно теореме о коммутативности внешнего дифференцирования и отображения обратного переноса получаем

$$f^*\omega_1 - f^*\omega = f^*d\varphi = d\, f^*\varphi \in \operatorname{Im} d^M_{q-1},$$

а значит, $[f^*\omega_1] = [f^*\omega]$.

Примем без доказательства следующую лемму.

Лемма 2. *Если $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и отображения $f_0, f_1 \in C^k(M, N)$ гомотопны, то существует гомотопия $h \in C^k(M \times [0,1], N)$, удовлетворяющая равенствам (1).*

Теорема 1. (О цепной гомотопии.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$, отображения $f_0, f_1 \in C^\infty(M, N)$ гомотопны. Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ существует такое линейное отображение $H_q : \Omega^q(N) \to \Omega^{q-1}(M)$, что*

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = H_{q+1}(d\omega) + dH_q(\omega) \qquad \forall q \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega_1^q(N).$$

Доказательство. Так как отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гомотопны, то согласно лемме 2 существует гладкая гомотопия $h \in C^\infty(M \times [0,1], N)$, удовлетворяющая равенствам (1), т.е. $f_0 = h \circ \pi_0$, $f_1 = h \circ \pi_1$, где

$$\pi_0(x) = (x, 0), \quad \pi_1(x) = (x, 1) \quad \forall x \in M.$$

В силу леммы о цепном равенстве для любого $q \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение $J_q : \Omega_1^q(M \times [0,1]) \to \Omega_1^{q-1}(M)$, удовлетворяющее цепному равенству

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = \pi_1^*\beta - \pi_0^*\beta \qquad \forall \beta \in \Omega_1^q(M \times [0,1]). \tag{2}$$

Заметим, что отображение J_q, построенное в лемме о цепном равенстве, гладкую дифференциальную форму переводит в гладкую, т.е. является отображением из $\Omega^q(M \times [0,1])$ в $\Omega^{q-1}(M)$.

Для любого $q \in \mathbb{N}$ определим $H_q := J_q \circ h^*$. Тогда H_q является линейным отображением из $\Omega^q(N)$ в $\Omega^{q-1}(M)$. Пусть $\omega \in \Omega^q(N)$. Обозначим $\beta := h^*\omega$. Согласно теореме о коммутативности внешнего дифференцирования и отображения обратного переноса имеем $d\beta = h^*d\omega$. Применяя равенство (2) для $\beta \in \Omega^q(M \times [0,1])$, получаем

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = (h \circ \pi_1)^*\omega - (h \circ \pi_0)^*\omega = (\pi_1^* \circ h^*)\omega - (\pi_0^* \circ h^*)\omega =$$

$$\overset{(2)}{=} J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = J_{q+1}(h^*d\omega) + dJ_q(h^*\omega) = H_{q+1}(d\omega) + dH_q(\omega).$$

$\square$

Лемма 3. *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$, $f_0, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(M, N)$, $q \in \mathbb{N}$, $f_0^*, f_1^* : H_{DR}^q(N) \to H_{DR}^q(M)$ – соответствующие обратные переносы когомологичных классов. Если отображения f_0 и f_1 гомотопны, то $f_0^* = f_1^*$.*

Доказательство. По теореме о цепной гомотопии существует линейное отображение $H_q : \Omega^q(N) \to \Omega^{q-1}(M)$ такое, что

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = H_{q+1}(d\omega) + dH_q(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega^q(N).$$

Следовательно, для любой замкнутой формы $\omega \in \operatorname{Ker} d_q^N$ имеем

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = dH_q(\omega) \in \operatorname{Im} d_{q-1}^M,$$

а значит, $f_1^*[\omega] = f_0^*[\omega]$. $\square$

Примем без доказательства следующую лемму, которая в определении гомотопической эквивалентности позволяет вместо непрерывных отображений рассматривать гладкие отображения.

Лемма 4. *Если гладкие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$ гомотопически эквивалентны, то существует пара гладких отображений $f \in C^\infty(M, N)$ и $g \in C^\infty(N, M)$ такая, что отображение $f \circ g$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_N : N \to N$, а отображение $g \circ f$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_M : M \to M$.*

Теорема 2. *Если многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$ гомотопически эквивалентны, то группы когомологий этих многообразий изоморфны:*

$$H^q_{DR}(M) \cong H^q_{DR}(N) \qquad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $f \in C^\infty(M, N)$ и $g \in C^\infty(N, M)$ – отображения, о которых говорится в лемме 4. Согласно лемме 3 отображения $(f \circ g)^* : H^q_{DR}(M) \to H^q_{DR}(M)$ и $(g \circ f)^* : H^q_{DR}(N) \to H^q_{DR}(N)$ в точности являются тождественными отображениями когомологичных классов. Поскольку $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, то отображения $f^* : H^q_{DR}(N) \to H^q_{DR}(M)$ и $g^* : H^q_{DR}(M) \to H^q_{DR}(N)$ взаимно обратные. Отсюда и из линейности обратных переносов следует, что f^* – изоморфизм линейных пространств $H^q_{DR}(N)$ и $H^q_{DR}(M)$. $\square$

Следствие 1. *Если многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ стягиваемо и $q \in \mathbb{N}$, то $H^q_{DR}(M) = 0$.*

Доказательство. Так как многообразие M гомотопически эквивалентно точке P и $q > 0 = \dim P$, то по теореме 2 имеем $H^q_{DR}(M) = H^q_{DR}(P) = 0$. $\square$

Следствие 1, как и эквивалентная ей теорема 1 § 13 называются леммой Пуанкаре.

Определение. Многообразие M называется *односвязным*, если оно линейно-связно и любую замкнутую кривую $\Gamma = \{r(t) : \; t \in S^1\} \subset M$ можно *непрерывно стянуть в точку по* M, т.е. любое непрерывное отображение $r : S^1 \to M$ гомотопно некоторому постоянному отображению $r_0 : S^1 \to \{x_0\}$, где $x_0 \in M$.

Лемма 5. *Если многообразие M стягиваемо, то оно односвязно.*

Доказательство. Пусть многообразие M стягиваемо. Тогда существует гомотопия $h : M \times [0,1] \to M$ тождественного отображения $Id : M \to M$ и постоянного отображения $r_0 : M \to \{x_0\}$. Пусть задано непрерывное отображение $r : S^1 \to M$. Тогда отображение $\tilde{h} : S^1 \times [0,1] \to \to M$, заданное формулой

$$\tilde{h}(y,t) = h(r(y),t), \quad y \in S^1,\ t \in [0,1],$$

является гомотопией отображения r и постоянного отображения $r_0 : S^1 \to \to \{x_0\}$. Поэтому M односвязно. $\square$

Замечание. Односвязное многообразие может не быть стягиваемым. Например, $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{\,\overline{0}\,\}$.

Теорема 3. *Пусть G – односвязная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда $H^1_{DR}(G) = 0$, т.е. если дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(G)$ замкнута, то ω – потенциальное ковекторное поле в G.*

Доказательство. Пусть дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(G)$ замкнута. Покажем, что ковекторное поле ω потенциально в G. Согласно теореме 1 § 12 достаточно доказать, что для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \subset G$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\gamma} \omega = 0. \tag{3}$$

Используя теорему о замене переменных в интеграле от дифференциальной формы, получаем

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{S^1} r^*\omega.$$

Поскольку область G односвязна, то отображение $r : S^1 \to G$ гомотопно некоторому постоянному отображению $r_0 : S^1 \to \{x_0\}$, где $x_0 \in G$. В силу леммы 3 имеем $[r^*\omega] = [r_0^*\omega]$. Так как отображение r_0 постоянно, а степень дифференциальной формы равна 1, то $r_0^*\omega = 0$. Поэтому дифференциальная форма $r^*\omega \in \Omega^1(S^1)$ когомологична нулевой, т.е. точна на S^1. Следовательно, $\int\limits_{S^1} r^*\omega = 0$, а значит, справедливо равенство (3). $\square$

Пример 1. Найти (с точностью до изоморфизма) $H^1_{DR}\Big(\mathbb{R}^2 \setminus \{\,\overline{0}\,\}\Big)$.

Решение. Покажем, что область $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{\,\overline{0}\,\}$ гомотопически эквивалентна окружности S^1. Рассмотрим отображения

$$f : G \to S^1, \qquad f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x \in G$$

и
$$g : S^1 \to G, \qquad g(y) = y, \quad y \in S^1.$$
Тогда $f \circ g = \mathrm{Id}_{S^1}$, $g \circ f = f$. Поскольку отображение
$$h : G \times [0,1] \to G, \qquad h(x,t) = \left(\frac{t}{|x|} + 1 - t\right) x, \quad x \in G,\ t \in [0,1]$$
является гладким и $h(x,0) = x$, $h(x,1) = f(x)$ для любого $x \in G$, то отображение $g \circ f = f$ гомотопно тождественному отображению Id_G. Поэтому область G гомотопически эквивалентна окружности S^1.

В силу теоремы 2 имеем $H^1_{DR}(G) \cong H^1_{DR}(S^1)$.

Пусть $\omega \in \Omega^1(S^1)$. В качестве координаты на окружности S^1 будем использовать полярный угол $\varphi \in \mathbb{R}$. Тогда ω имеет вид $\omega = a(\varphi)\, d\varphi$, где $a \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$, поскольку углам φ и $\varphi + 2\pi$ соответствует одна и та же точка окружности S^1. Заметим, что $d\omega = 0$, т.е. любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(S^1)$ замкнута. Форма $\omega = a(\varphi)\, d\varphi$ точна тогда и только тогда, когда $a(\varphi)\, d\varphi = dF(\varphi)$ для некоторой 2π-периодической функции $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Отсюда получаем, что $F(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} a(t)\, dt$ и форма $\omega = a(\varphi)\, d\varphi$ точна тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^{2\pi} a(t)\, dt = 0$, т.е. $\int\limits_{S^1} \omega = 0$. Рассмотрим линейное отображение $I : \Omega^1(S^1) \to$ $\to \mathbb{R}$, заданное равенством
$$I(\omega) := \int\limits_{S^1} \omega, \quad \omega \in \Omega^1(S^1).$$

Таким образом, дифференциальные формы $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(S^1) = \mathrm{Ker}\, d_1^{S^1}$ когомологичны тогда и только тогда, когда $I(\omega_1) = I(\omega_2)$. В силу леммы 1 § 14 факторпространство $H^1_{DR}(S^1) = \mathrm{Ker}\, d_1^{S^1} / \mathrm{Im}\, d_0^{S^1}$ изоморфно образу $\mathrm{Im}\, I$. Поскольку $\mathrm{Im}\, I \subset \mathbb{R}$ и $\mathrm{Im}\, I \neq 0$, т.к., например, для $\omega = d\varphi$ имеем $I(\omega) \neq 0$, то $\mathrm{Im}\, I = \mathbb{R}$. Итак,
$$H^1_{DR}(G) \cong H^1_{DR}(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

Задача 1. Пусть $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{\,\overline{0}\,\}$. При каких $q \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $H^q_{DR}(G) = 0$?

$\triangleleft$

Глава 19

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Риманова метрика

Определение. *Римановой метрикой* или (ковариантным) *метрическим тензором* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется гладкое тензорное поле g типа $(0, 2)$, обладающее свойствами

симметричности:

$$g(P)[\vec{v}_2, \vec{v}_1] = g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M) \quad \forall P \in M$$

и положительной определенности:

$$g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,] > 0 \qquad \forall \vec{v} \in T_P(M) \setminus \{\vec{0}\,\} \quad \forall P \in M.$$

Пара (M, g), состоящая из многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и римановой метрики g на M, называется *римановым многообразием.*

Замечание. С учетом того, что тензор – это полилинейная функция, риманова метрика $g(P)$ удовлетворяет аксиомам скалярного произведения на касательном пространстве $T_P(M)$.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторных полей $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных на римановом многообразии (M, g), называется скалярное поле $(\vec{a}, \vec{b}\,)$ на M, значение которого в каждой точке $P \in M$ равно $g(P)[\vec{a}(P), \vec{b}(P)]$.

Определение. *Длиной* касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ называется число $|\vec{v}| = \sqrt{g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,]}$. Угол $\varphi \in [0, \pi]$ называется *углом между касательными векторами* $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in T_P(M) \setminus \{\vec{0}\}$, если

$$\cos\varphi = \frac{g(P)[\vec{v_1}, \vec{v_2}]}{|\vec{v_1}| \cdot |\vec{v_2}|}.$$

Замечание. Значение метрического тензора выражается через его компоненты

$$g_{ij}(P) := g(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]$$

в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$ следующим образом:

$$g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = g_{ij}(P)\, \xi_1^i\, \xi_2^j, \tag{1}$$

где $\xi_k := \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \ldots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ – координатный столбец касательного вектора $\vec{v}_k$ в этом базисе, и в соответствии с соглашением Эйнштейна индексы суммирования i, j пробегают $\overline{1, n}$.

Определение. *Матрицей Грама на римановом многообразии* (M, g) в точке $P \in M$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ называется матрица Грама скалярного произведения в $T_P(M)$, заданного метрическим тензором, т.е. матрица

$$G = G(P) = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из компонент метрического тензора $g_{ij}(P)$.

Из формулы (1) следует, что значение метрического тензора следующим образом выражается через матрицу Грама и координатные столбцы касательных векторов $\vec{v}_k$:

$$g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \xi_1^T\, G(P)\, \xi_2.$$

В соответствии с теоремой 3 § 2 главы 18 метрический тензор следующим образом выражается через свои компоненты:

$$g(P) = g_{ij}(P)\, dx^i \otimes dx^j.$$

Пример 1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является римановым многообразием. При этом касательное пространство $T_P(\mathbb{R}^n)$ обычно отождествляют с пространством $\mathbb{R}^n$, а базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ в $T_P(\mathbb{R}^n)$ – со стандартным базисом в $\mathbb{R}^n$. Компоненты метрического тензора в этом базисе равны символам Кронекера:

$$g_{ij}(P) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Используя стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, определим индуцированную метрику на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^N$.

Пусть (ψ, U^M) – карта на $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $P \in U^M$, $(x_1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$.

Определение. *Индуцированной метрикой* на $M \in \mathfrak{M}^n_N$ называется метрический тензор g на M, следующим образом определяемый через скалярное произведение (v_1, v_2) в $\mathbb{R}^N$:

$$g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] := (v_1, v_2) \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M),$$

где $v_1, v_2 \in \widetilde{T}_P(M) \subset \mathbb{R}^N$ – векторы касательного пространства $\widetilde{T}_P(M)$, соответствующие векторам $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M)$, т.е. координатный столбец $\xi_k = \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \dots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ вектора $\vec{v}_k = \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$ совпадает с координатным столбцом вектора $v_k = \xi_k^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ в базисе $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$.

Легко видеть, что индуцированная метрика симметрична и положительно определена. Таким образом, индуцированная метрика на подмногообразии $M \in \mathfrak{M}^n_N$ действительно является римановой метрикой на M.

Проводя аналогию с обратным переносом дифференциальной формы, можно сказать, что индуцированная метрика – это результат обратного переноса скалярного произведения в $\mathbb{R}^N$ при отображении ψ.

По определению дифференциала отображения имеем

$$d\psi(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(P).$$

Следовательно, компоненты тензора индуцированной метрики равны

$$g_{ij}(P) = g(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] =$$

$$= \left(d\psi(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right], d\psi(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \frac{\partial \psi}{\partial x^j}\right).$$

Если гомеоморфизм карты имеет вид $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \dots \\ \psi^N(x) \end{pmatrix}$, то

$$g_{ij}(P) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i}(x)\ \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j}(x), \qquad x = \psi^{-1}(P).$$

Поэтому матрица Грама индуцированной метрики следующим образом определяется через матрицу Якоби гомеоморфизма карты:

$$G(P) = (\mathcal{D}\,\psi(x))^T\,\mathcal{D}\,\psi(x)\big|_{x=\psi^{-1}(P)}. \tag{2}$$

Поскольку криволинейную систему координат можно рассматривать как гомеоморфизм карты, то формула (2) также справедлива для матрицы Грама стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^N$, выраженной в криволинейных координатах $(x^1, \ldots, x^N) = \psi^{-1}$.

Вычислим матрицы Грама некоторых часто используемых метрик.

1. <u>Полярная система координат на плоскости.</u>

$$\psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби имеет вид

$$\mathcal{D}\,\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (2) матрица Грама евклидовой метрики в полярной системе координат равна

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

2. <u>Сферическая система координат в трехмерном пространстве.</u>

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби имеет вид

$$\mathcal{D}\,\psi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (2) матрица Грама евклидовой метрики в сферической системе координат равна

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

3. Сферические координаты на двумерной сфере радиуса R.

$$\psi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{D}\,\psi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi & -R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (2) матрица Грама индуцированной метрики на сфере равна

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

Определение. В случае, когда $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, квадратичная форма

$$I(v) := \xi^T G(P)\,\xi = g_{ij}(P)\xi^i\xi^j$$

называется *первой квадратичной формой (гипер)поверхности* M. Здесь ξ – координатный столбец касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$: $v = \xi^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i}$.

Поскольку первая квадратичная форма $I(v)$ является значением тензора, то она не зависит от ЛСК на поверхности M.

§ 2. Кривизна поверхности

Пусть $(\psi, U^M(p_0))$ – карта на многообразии (гиперповерхности) $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, согласованная с ориентацией M. Пусть $\vartheta \in \mathbb{R}^{n+1}$ – единичный вектор нормали к M в точке $p_0 \in M \setminus \partial M$, согласованный с ориентацией M, т.е. $(\vartheta, e_1, \ldots, e_n)$ – правый базис в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $e_i = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ – векторы базиса в $\widetilde{T}_{p_0}(M)$, соответствующего ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$.

Обозначим $x_0 := \psi^{-1}(p_0)$. Заметим, что расстояние от точки $\psi(x)$ на многообразии M до касательной гиперплоскости

$$p_0 + \widetilde{T}_{p_0}(M) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (p - p_0, \vartheta) = 0\}$$

равно скалярному произведению $(\psi(x) - \psi(x_0), \vartheta)$. Величина этого скалярного произведения показывает, насколько гиперповерхность M отличается от касательной гиперплоскости.

В силу формулы Тейлора имеем

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i - x_0^i) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o(|x - x_0|^2), \quad x \to x_0.$$

Согласно соглашению Эйнштейна индексы суммирвания i, j пробегают $\overline{1,n}$. Поскольку $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0), \vartheta\right) = 0$, то при $x \to x_0$

$$\Big(\psi(x) - \psi(x_0), \vartheta\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o(|x - x_0|^2).$$

Определение. Квадратичная форма

$$II(v) := \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \ \xi^i \xi^j$$

называется *второй квадратичной формой* (гипер)поверхности M. Здесь ξ – координатный столбец касательного вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M)$: $v = \xi^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i}$.

В отличие от первой квадратичной формы, которая определяет внутреннюю геометрию поверхности M, вторая квадратичная форма определяет внешнюю геометрию M в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Лемма 1. *Вторая квадратичная форма поверхности не зависит от ЛСК на этой поверхности.*

Доказательство. Пусть на поверхности M в окрестности точки p_0 заданы две ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) = \tilde{\psi}^{-1}$. Тогда согласно формуле (8) § 5 главы 17

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^j} = \frac{\partial\psi}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^m}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j} + \frac{\partial\psi}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}.$$

Поскольку $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^m}, \vartheta\right) = 0$, то

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}, \vartheta\right) = \left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^k\partial x^m}, \vartheta\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}.$$

Согласно теореме о структуре множества касательных векторов имеем $\xi^k = \tilde{\xi}^i\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}, \vartheta\right)\ \tilde{\xi}^i\tilde{\xi}^j = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^m}, \vartheta\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}\ \tilde{\xi}^i\tilde{\xi}^j =$$

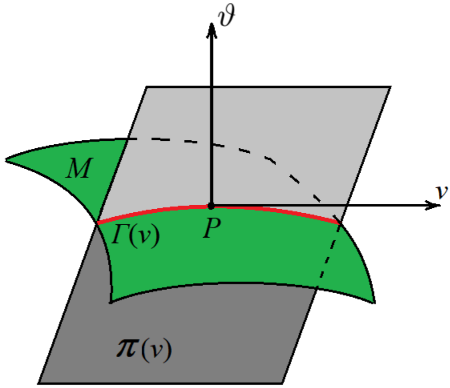
$$= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^m}, \vartheta\right)\xi^k\xi^m.$$

□

Определение. *Нормальным сечением* поверхности $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$ в точке $p_0 \in M$ вдоль вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$, называется множество $\Gamma(v) := M \cap \pi(v)$, где

$$\pi(v) := \{p_0 + tv + \tau\vartheta : (t, \tau) \in \mathbb{R}^2\}$$

– плоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через точку p_0 и параллельная касательному вектору v и нормальному вектору ϑ.



Лемма 2. *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, $n \geq 2$. Для любого касательного вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$ нормальное сечение $\Gamma(v)$ поверхности M в точке $p_0 \in M \setminus \partial M$ в некоторой окрестности точки p_0 представляет собой гладкую кривую.*

Доказательство. Фиксируем $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$. По определению гладкого подмногообразия пространства $\mathbb{R}^{n+1}_p$ существует криволинейная система координат $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ в окрестности $U(p_0)$ точки p_0, в которой множество M имеет вид n-мерного подпространства, т.е. задается уравнением $x^{n+1}(p) = 0$. Здесь мы учитываем, что точка p_0 не является краевой точкой многообразия M и поэтому случай, когда M имеет вид полуподпространства, не рассматриваем. Обозначим $x_0 = (x^1(p_0), \ldots, x^{n+1}(p_0))$, $g(p) = x^{n+1}(p)$. Тогда

$$M \cap U(p_0) = \{p \in U(p_0) : \ g(p) = 0\}.$$

Поэтому в окрестности $U(p_0)$ нормальное сечение $\Gamma(v)$ состоит из векторов вида $p_0 + tv + \tau\vartheta$, удовлетворяющих уравнению $g(p_0 + tv + + \tau\vartheta) = 0$. Обозначим $h(t, \tau) = g(p_0 + tv + \tau\vartheta)$ и решим уравнение $h(t, \tau) = 0$ относительно τ.

Заметим, что $h(0, 0) = g(p_0) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial \tau}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial p^i}(p_0)\vartheta^i = = (\operatorname{grad} g(p_0), \vartheta)$.

Поскольку $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ – криволинейная система координат, то якобиан вектор-функции с компонентами $x^i(p)$ не равен нулю. Следовательно, $\operatorname{grad} g(p_0) \neq \overline{0}$. Согласно теореме 2 § 2 главы 16

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ dg(p_0)[\xi] = 0\},$$

то есть геометрическое касательное пространство $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ задается уравнением $(\operatorname{grad} g(p_0), \xi) = 0$. Поэтому вектор $\operatorname{grad} g(p_0)$ ортогонален касательной гиперплоскости, а значит, коллинеарен вектору нормали ϑ, т.е. найдется число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\operatorname{grad} g(p_0) = \lambda\vartheta$. Поскольку $\operatorname{grad} g(p_0) \neq \overline{0}$, то $\lambda \neq 0$.

Следовательно, $\frac{\partial h}{\partial \tau}(0,0) = (\operatorname{grad} g(p_0), \vartheta) = \lambda(\vartheta, \vartheta) = \lambda \neq 0$. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(t_0, \tau_0) = (0,0)$ уравнение $h(t,\tau) = 0$ имеет единственное решение $\tau = \tau(t)$, причем $\tau(t)$ – гладкая функция.

Поэтому в некоторой окрестности точки p_0 нормальное сечение $\Gamma(v)$ состоит из векторов вида $r(t) = p_0 + tv + \tau(t)\vartheta$. При этом $r'(t) = v + \tau'(t)\vartheta \neq \overline{0}$, поскольку векторы v и ϑ ортогональны. Таким образом, в некоторой окрестности точки p_0 нормальное сечение $\Gamma(v)$ представляет собой гладкую кривую. $\square$

Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, $p_0 \in M \setminus \partial M$, $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$. Пусть $r(s)$ – натуральная параметризация нормального сечения $\Gamma(v) = M \cap \pi(v)$, $r(s_0) = p_0$. Так как нормальное сечение $\Gamma(v)$ лежит в плоскости $\pi(v)$, то вектор $r''(s)$ параллелен этой плоскости. Дифференцируя тождество $(r'(s), r'(s)) = 1$, получаем перпендикулярность векторов $r''(s)$ и $r'(s)$, последний из которых коллинеарен касательному вектору v. Отсюда следует, что вектор $r''(s_0)$ коллинеарен вектору нормали ϑ:

$$r''(s_0) \parallel \vartheta.$$

Ранее мы определяли кривизну кривой, заданной в натуральной параметризации $r(s)$, как $|r''(s_0)|$. Определим кривизну нормального сечения с учетом знака.

Определение. Число $k(v)$ называется *кривизной нормального сечения* $\Gamma(v)$, если для его натуральной параметризации $r(s)$ справедливо равенство

$$r''(s_0) = k(v)\vartheta, \tag{1}$$

где $r(s_0) = p_0$, $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$.

Таким образом, $k(v) = \pm|r''(s_0)|$. Знак кривизны нормального сечения зависит от ориентации поверхности M, определяемой направлением вектора нормали ϑ.

Теорема 1. *Кривизна нормального сечения* $\Gamma(v)$ *в точке* p_0 *равна частному второй и первой квадратичных форм поверхности* M*:*

$$k(v) = \frac{II(v)}{I(v)}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть нормальное сечение $\Gamma(v)$ имеет натуральную параметризацию $r(s)$, причем $r(s_0) = p_0$. Из формулы (1) следует, что $k(v) = (r''(s_0), \vartheta)$. Обозначим $x(s) := \psi^{-1}(r(s))$. Пусть $x(s) = \begin{pmatrix} x^1(s) \\ \dots \\ x^n(s) \end{pmatrix}$. Тогда $r(s) = \psi(x(s))$. Дифференцируя это равенство, получаем

$$r'(s) = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x(s)) \cdot (x^i)'(s), \tag{3}$$

$$r''(s) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x(s)) \cdot (x^i)'(s) \cdot (x^j)'(s) + \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x(s)) \cdot (x^i)''(s).$$

Поскольку $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0), \vartheta\right) = 0$, то

$$k(v) = (r''(s_0), \vartheta) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \cdot (x^i)'(s_0) \cdot (x^j)'(s_0). \tag{4}$$

Так как $r'(s_0) \parallel v$, $|r'(s_0)| = 1$, $v \neq \overline{0}$, то существует число λ такое, что $r'(s_0) = \lambda v$, $|\lambda| = \frac{1}{|v|}$. Используя равенство (3) и определение координат касательного вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M)$, приходим к равенствам

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i)'(s_0) = r'(s_0) = \lambda v = \lambda \xi^i \ \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0).$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ получаем равенства $(x^i)'(s_0) = \lambda \xi^i$. Таким образом,

$$k(v) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \cdot \lambda^2 \xi^i \xi^j = \lambda^2 \ II(v) = \frac{II(v)}{|v|^2} = \frac{II(v)}{I(v)}.$$

$\square$

Согласно доказанной в курсе линейной алгебры теореме об одновременном приведении двух квадратичных форм к каноническому виду (с учетом положительной определенности первой квадратичной формы) в $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ существует ортонормированный (в смысле индуцированной метрики) базис $(e_1, \dots, e_n)$ такой, что в этом базисе первая квадратичная форма имеет канонический вид, а вторая квадратичная форма – диагональный вид:

$$I(v) = \sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2, \qquad II(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi^i)^2, \tag{5}$$

где $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i e_i$.

При этом векторы e_i называются *главными направлениями* поверхности M в точке p_0.

Как известно из линейной алгебры, числа λ_i определяются из уравнения

$$\det(Q - \lambda G) = 0,$$

где G – матрица первой квадратичной формы $I(v)$, Q – матрица второй квадратичной формы $II(v)$ в исходном базисе касательного пространства $\widetilde{T}_{p_0}(M)$. Координатные столбцы η_i главных направлений e_i в исходном базисе касательного пространства $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ определяются равенствами

$$G^{-1} Q \eta_i = \lambda_i \eta_i, \qquad \eta_i^T G \eta_i = 1 \qquad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Обозначим через φ_i угол (в смысле индуцированной метрики) между касательным вектором $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M)$ и главным направлением e_i:

$$\cos\varphi_i = \frac{g(p_0)[v, e_i]}{|v| \cdot |e_i|} = \frac{(v, e_i)}{|v| \cdot |e_i|}.$$

Поскольку $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i e_i$, $g(p_0)[e_i, e_j] = \delta_{ij}$, $|v| = \sqrt{I(v)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}$, $|e_i| = 1$, то

$$\cos\varphi_i = \frac{\xi^i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}}.$$

Используя равенства (5), формулу (2) можно переписать в виде

$$k(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$

Последняя формула называется *формулой Эйлера кривизны нормального сечения.*

В случае двумерной поверхности $M \in \mathfrak{M}_3^2$ числа λ_1 и λ_2 называются *главными кривизнами*, $\lambda_1 + \lambda_2$ – *средней кривизной*, $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ – *гауссовой кривизной* поверхности M в точке p_0.

§ 3. Риманов объем

Выразим объем паралеллепипеда

$$\Pi(e_1, \ldots, e_n) := \left\{ t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n : \ t_i \in [0,1] \ \forall i \in \overline{1,n} \ \right\}, \qquad (1)$$

построенного на векторах $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ через матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_n, e_1) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

системы векторов $e_1, \ldots, e_n$. Поскольку паралеллепипед $\Pi(e_1, \ldots, e_n)$ является образом единичного куба $K = \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{n \text{ раз}}$ при линейном отображении

$$F(t_1, \ldots, t_n) = t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n,$$

то по теореме о замене переменных в кратном интеграле мера в $\mathbb{R}^n$ множества $\Pi(e_1, \ldots, e_n)$ равна

$$\mu_n(\Pi(e_1, \ldots, e_n)) = \int\limits_K |\det \mathcal{D} F(t_1, \ldots, t_n)| \, dt. \qquad (2)$$

Пусть векторы $e_i \in \mathbb{R}^n$ имеют вид $e_i = \begin{pmatrix} e_i^1 \\ \ldots \\ e_i^n \end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathcal{D} F = \begin{pmatrix} e_1^1 & \ldots & e_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_1^n & \ldots & e_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как $(e_i, e_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} e_i^k \, e_j^k$, то $G = (\mathcal{D} F)^T \cdot \mathcal{D} F$. Следовательно, $\det G = |\det \mathcal{D} F|^2$, а значит, $|\det \mathcal{D} F| = \sqrt{\det G}$. Поэтому в силу формулы (2) и поскольку $\mu_n(K) = 1$ получаем

$$\mu_n(\Pi(e_1, \ldots, e_n)) = \sqrt{\det G}. \tag{3}$$

Если $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^N$ при $N > n$, то паралеллепипед (1) будем называть *n-мерным паралеллепипедом в пространстве* $\mathbb{R}^N$, а величину (3) – его *n-мерным объемом.*

Пусть (ψ, U^M) – карта на $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $P \in U^M$. Пусть $V := = \psi^{-1}(U^M)$ – область параметров этой карты, $x_0 = \psi^{-1}(P)$. Обозначим $K^\delta := [0,\delta]^n = [0,\delta] \times \ldots \times [0,\delta]$. Пусть число $\delta > 0$ столь мало, что куб $x_0 + K^\delta$ содержится в V. Поскольку

$$\psi(x) - \psi(x_0) = d\psi(x_0)[x - x_0] + \bar{o}(|x - x_0|), \quad x \to x_0,$$

то образ $\psi(x_0 + K^\delta)$ куба $x_0 + K^\delta$ достаточно близок к его образу $d\psi(x_0)[K^\delta]$ при линейном отображении $d\psi(x_0)$, сдвинутому на вектор $P = \psi(x_0)$. Поскольку $d\psi(x_0)[K^\delta]$ – это n-мерный паралеллепипед, построенный на векторах $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\delta, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}\delta$, то согласно формуле (3) его n-мерный объем равен

$$\mu_n(d\psi(x_0)[K^\delta]) = \sqrt{\det G(P)}\ \delta^n = \sqrt{\det G(P)}\ \mu_n(K^\delta), \tag{4}$$

где $G(P) = (\mathcal{D}\psi(x_0))^T \mathcal{D}\psi(x_0)$ – матрица Грама индуцированной метрики.

Приблизим область параметров V дизъюнктным объединением кубов $K_i^\delta := x_i + K^\delta$, лежащих в области параметров V; образы $\psi(K_i^\delta)$ этих кубов приблизим n-мерными паралеллепипедами $\psi(x_i) + d\psi(x_i)[K^\delta]$. Согласно формуле (4) n-мерный объем паралеллепипеда $\psi(x_i) + d\psi(x_i)[K^\delta]$ равен $\sqrt{\det G(P_i)}\ \mu_n(K_i^\delta)$, где $P_i = \psi(x_i)$. Поэтому суммарный n-мерный объем этих паралеллепипедов

$$\sum_{i=1}^{I} \mu_n\left(d\psi(x_i)[K^\delta]\right) = \sum_{i=1}^{I} \sqrt{\det G(P_i)}\ \mu_n(K_i^\delta)$$

при $\delta \to +0$ стремится к интегралу $\int\limits_V \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Эти соображения мотивируют следующее определение.

Определение. Пусть (M, g) – риманово многообразие, $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на M, G – матрица Грама скалярного произведения в $T_P(M)$, заданного римановой метрикой g. Выражение

$$\mathrm{Vol}_g := \sqrt{\det G}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{5}$$

называется *формой риманова объема* для риманова многообразия (M, g).

Для ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на ориентированном многообразии $M \in \in \mathfrak{M}^n$ определим $\mathrm{sign}(x^1, \ldots, x^n) = 1$, если ориентация ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ соответствует ориентации M и $\mathrm{sign}(x^1, \ldots, x^n) = -1$, если эти ориентации различны.

Определение. Выражение

$$\epsilon := \mathrm{sign}(x^1, \ldots, x^n) \cdot \mathrm{Vol}_g \tag{6}$$

называется *тензором Леви-Чивиты.*

Теорема 1. (О тензоре Леви–Чивиты.) *Пусть (M, g) – ориентированное риманово многообразие. Тензор Леви-Чивиты является дифференциальной формой: $\epsilon \in \Omega^n(M)$, где n – размерность многообразия M.*

Доказательство. Покажем, что при замене ЛСК на M значение ϵ не меняется. Поскольку метрический тензор g является тензорным полем типа $(0, 2)$, то его компоненты $\widetilde{g}_{ij}$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ следующим образом выражаются через его компоненты g_{ij} в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\widetilde{g}_{i'j'} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}}\;\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}}\; g_{ij}.$$

Так как компоненты метрического тензора являются элементами матрицы Грама, то определитель матрицы Грама $\widetilde{G}$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ выражается через определитель матрицы Грама G в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ по формуле

$$\det \widetilde{G} = \det G \cdot \left(\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}\right)^2.$$

Поскольку $d\tilde{x}^{i'} = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^i} dx^i$, то $d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n = \frac{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Следовательно, значение ϵ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$

$$\epsilon = \mathrm{sign}(\tilde{x}^1, \ldots \tilde{x}^n) \cdot \sqrt{\det \widetilde{G}}\; d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n =$$

$$= \operatorname{sign}(\tilde{x}^1, \dots \tilde{x}^n) \cdot \sqrt{\det G} \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)} \right| \cdot \frac{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= \operatorname{sign}(x^1, \dots, x^n) \cdot \sqrt{\det G} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

совпадает со значением ϵ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$.

Отсюда и из формул (5), (6) следует, что ϵ – полилинейная кососимметричная функция на $T_P(M) \times \dots \times T_P(M)$, т.е. является дифференциальной формой. □

Определение. Компоненты тензора Леви-Чивиты называются *символами Леви-Чивиты* $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$:

$$\epsilon = \epsilon_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n}, \tag{7}$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $i_1, \dots, i_n \in \overline{1, n}$.

Получим явные выражения для символов Леви-Чивиты. Пусть ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ соответствует ориентации многообразия M. Сравнивая выражения (5), (6) и (7), в силу теоремы о представлении дифференциальной формы через ее компоненты получаем

$$\epsilon_{1 \dots n} = \sqrt{\det G}.$$

Отсюда и из антисимметричности тензора Леви-Чивиты следует, что если ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ соответствует ориентации многообразия M, то

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n) \sqrt{\det G}, \tag{8}$$

где

$$\operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (i_1, \dots, i_n) \text{ получается из набора } (1, \dots, n) \text{ в результате четного числа транспозиций;} \\ -1, & \text{если набор } (i_1, \dots, i_n) \text{ получается из набора } (1, \dots, n) \text{ в результате нечетного числа транспозиций;} \\ 0, & \text{если набор } (i_1, \dots, i_n) \text{ не является перестановкой набора } (1, \dots, n). \end{cases}$$

Согласно формуле (6) при изменении ориентации многообразия M тензор Леви-Чивиты меняет знак. Поэтому в случае, когда ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ не соответствует ориентации многообразия M справедлива формула

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = -\operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n)\sqrt{\det G}.$$

Замечание. Если $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – правый *ортонормированный базис* пространства $T_P(M)$, т.е. ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ соответствует ориентации многообразия M и матрица Грама $G(P)$ является единичной, то справедливо равенство

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n). \tag{9}$$

Определение. Пусть G – матрица Грама на римановом многообразии (M, g) в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$, соответствующей карте (ψ, U). Пусть $f \in C(M, \mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset U$. ***Интегралом первого рода*** функции f по риманову многообразию называется интеграл Лебега функции $h := f \cdot \sqrt{\det G}$ по множеству параметров $\psi^{-1}(U)$:

$$\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g := \int\limits_{\psi^{-1}(U)} f \cdot \sqrt{\det G}\, dx. \tag{10}$$

В общем случае интеграл первого рода функции $f \in C(M, \mathbb{R})$ с компактным носителем по риманову многообразию (M, g) определяется через разбиение единицы. Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ – конечный набор карт, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp} f$. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Тогда

$$\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g := \sum_{i=1}^I \int\limits_M \varrho_i f \cdot \mathrm{Vol}_g,$$

где интегралы в правой части равенства определены формулой (10), поскольку $\operatorname{supp}(\varrho_i f) \subset U_i$.

Замечание. Непосредственно из данного определения следует, что интеграл первого рода не зависит от ориентации многообразия M.

Замечание. Формула (10) соответствует определению интеграла от дифференциальной формы $\omega = f \cdot \epsilon$ за исключением того, что интеграл в формуле (10) не зависит от ориентации многообразия M, а интеграл от дифференциальной формы меняет знак при изменении ориентации M. Действительно, по определению 2 интеграла от дифференциальной формы в случае $\operatorname{supp} f \subset U$ имеем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{\psi^{-1}(U)} \psi^*\omega.$$

Рассматривая карту (ψ, U) на U и карту (Id, V) на $V := \psi^{-1}(U)$, получаем, что координатное представление диффеоморфизма $\psi : V \to$ $\to U$ в этих картах $\psi^{-1} \circ \psi \circ \mathrm{Id}$ является тождественным отображением. Поэтому согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы обратный перенос дифференциальной формы $\omega = f \cdot \epsilon = f \cdot \operatorname{sign}(x^1, \ldots, x^n) \cdot \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ имеет вид

$$\psi^*\omega = f \cdot \operatorname{sign}(x^1, \ldots, x^n) \cdot \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Если карта (ψ, U) соответствует ориентации многообразия M, то $\operatorname{sign}(x^1, \ldots, x^n) = 1$ и согласно определению 1 интеграла от дифференциальной формы интеграл $\int\limits_V f \cdot \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ совпадает с кратным интегралом $\int\limits_V f \cdot \sqrt{\det G}\, dx$, что соответствует формуле (10).

Если изменить ориентацию многообразия M на противоположную, то интеграл $\int\limits_M \omega$ поменяет знак, в то время, как интеграл первого рода $\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g$ не изменится.

Определение. При $f = 1$ интеграл первого рода $\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g = \int\limits_M \mathrm{Vol}_g$ называется *римановым объемом* риманова многообразия (M, g). В случае, если M – двумерное гладкое многообразие, то риманов объем многообразия M называется *площадью поверхности* M.

Замечание. Если $\Gamma = \{r(t) :\ t \in [a, b]\}$ – гладкое одномерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ с индуцированной метрикой, то риманов объем Γ совпадает с длиной кривой Γ.

Замечание. Если M – открытое множество в $\mathbb{R}^N$ с индуцированной метрикой, то риманов объем M совпадает с мерой множества M.

Пример 1. Пусть $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a, b]\}$ – гладкое одномерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$. Тогда индуцированная метрика на Γ имеет вид $g = (r'(t), r'(t))\, dt^2$. Форма риманова объема равна $ds := = \mathrm{Vol}_g = |r'(t)|\, dt$. Интеграл первого рода непрерывной функции $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ по Γ равен

$$\int\limits_{\Gamma} f\, ds = \int\limits_{[a,b]} f(r(t)) \cdot |r'(t)|\, dt.$$

Пример 2. Пусть M – гладкое двумерное ориентированное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть (ψ, U) – карта на M, согласованная с ориентацией M, $D = \psi^{-1}(U)$ – допустимая область параметров в $\mathbb{R}^2_{uv}$, пусть ориентация D соответствует системе координат (u, v). Тогда матрица Грама индуцированной метрики g имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (\psi'_u, \psi'_u) & (\psi'_u, \psi'_v) \\ (\psi'_v, \psi'_u) & (\psi'_v, \psi'_v) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det G = |\psi'_u|^2 \cdot |\psi'_v|^2 - (\psi'_u, \psi'_v)^2 = |[\psi'_u, \psi'_v]|^2$. Форма риманова объема равна $dS := \mathrm{Vol}_g = |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv$. Интеграл первого рода непрерывной функции $f : M \to \mathbb{R}$ по M равен

$$\int\limits_{M} f\, dS = \int\limits_{M} f \cdot \mathrm{Vol}_g = \int\limits_{D} f(\psi(u, v)) \cdot |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv. \tag{11}$$

В частности, полагая $f = 1$, получаем формулу для площади поверхности M:

$$\int\limits_{M} dS = \int\limits_{D} |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv.$$

Задача 1. Пусть V – открытое множество в $\mathbb{R}^n_x$, подмногообразие M пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ является графиком гладкой функции $f : V \to \mathbb{R}$ и ориентация M соответствует ориентации стандартной декартовой системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n_x$. Покажите, что форма риманова объема для многообразия M с индуцированной метрикой g имеет вид:

$$\mathrm{Vol}_g = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)^2}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

§ 4. Свертки тензоров, опускание и поднятие индексов

Определение. Пусть T – тензор типа (p,q) на линейном n-мерном пространстве V. *Сверткой тензора* T по паре индексов (s,r), где $s \in \overline{1,p}$, $r \in \overline{1,q}$ называется тензор S типа $(p-1,q-1)$, компоненты которого в базисе $(e_1,\ldots,e_n)$ пространства V определяются формулой

$$S^{i_1\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{r-1}j_{r+1}\ldots j_q} := T^{i_1\ldots i_{s-1}k i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{r-1}k j_{r+1}\ldots j_q},$$

где в соответствии с соглашением Эйнштейна индекс суммирования k пробегает $\overline{1,n}$.

В частности, для тензора типа $(1,1)$ свертка равна сумме диагональных элементов матрицы компонент этого тензора и называется *следом тензора.*

Определение. *Сверткой тензорного поля* T типа (p,q), заданного на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, называется тензорное поле типа $(p-1,q-1)$, значение которого в каждой точке $P \in M$ равно соответствующей свертке тензора $T(P)$.

Поскольку свертка тензора, а значит, и тензорного поля определена через его компоненты, то требуется проверить корректность данного определения, т.е. доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Свертка тензорного поля типа (p,q) является тензорным полем типа $(p-1,q-1)$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$ и в окрестности точки $P \in M$ на M заданы ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$ и $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$. Пусть T – тензорное поле на M типа (p,q). Для упрощения обозначений будем рассматривать свертку тензоного поля T по паре последних индексов (p,q). Свертка по другой паре индексов рассматривается аналогично. Обозначим через $S^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}}$ результат свертки T в ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$, а через $\tilde{S}^{i'_1\ldots i'_{p-1}}_{j'_1\ldots j'_{q-1}}$ результат свертки T в ЛСК $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$. Тогда

$$S^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}} = T^{i_1\ldots i_{p-1}k}_{j_1\ldots j_{q-1}k},$$

$$\tilde{S}^{i'_1\ldots i'_{p-1}}_{j'_1\ldots j'_{q-1}} = \tilde{T}^{i'_1\ldots i'_{p-1}k}_{j'_1\ldots j'_{q-1}k},$$

где $T^{i_1\dots i_{p-1}i_p}_{j_1\dots j_{q-1}j_q}$ и $\tilde{T}^{i'_1\dots i'_{p-1}i'_p}_{j'_1\dots j'_{q-1}j'_q}$ – компоненты тензорного поля T в ЛСК $(x^1,\dots,x^n)$ и $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ соответственно.

По теореме о законе изменения компонент тензороного поля при замене ЛСК

$$\tilde{T}^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial\tilde{x}^{j'_q}}.$$

Поэтому

$$\tilde{S}^{i'_1\dots i'_{p-1}}_{j'_1\dots j'_{q-1}} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}\frac{\partial\tilde{x}^{k}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_{q-1}}}{\partial\tilde{x}^{j'_{q-1}}}\frac{\partial x^{j_q}}{\partial\tilde{x}^{k}}.$$

Поскольку $\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_q}}{\partial\tilde{x}^k} = \delta^{j_q}_{i_p}$, то

$$\tilde{S}^{i'_1\dots i'_{p-1}}_{j'_1\dots j'_{q-1}} = T^{i_1\dots i_{p-1}k}_{j_1\dots j_{q-1}k}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_{q-1}}}{\partial\tilde{x}^{j'_{q-1}}} =$$

$$= S^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_{q-1}}}{\partial\tilde{x}^{j'_{q-1}}}.$$

Таким образом, функции $S^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}}(P)$ при замене ЛСК меняются по тензорному закону. Согласно теореме 2 § 2 главы 18 это означает, что свертка тензорного поля является тензорным полем. □

Определение. *Сверткой тензоров (или тензорных полей)* $T_1,\dots,T_k$ называется свертка тензорного произведения $T_1\otimes\dots\otimes T_k$.

Пример 1. Пусть $(e^1_*,\dots,e^n_*)$ – базис пространства V^*, взаимный базису $(e_1,\dots,e_n)$ пространства V. Разложим ковектор (линейную функцию) $l\in V^*$ и вектор $\vec{v}\in V$ по этим базисам:

$$l = l_i e^i_*,\qquad \vec{v} = \xi^i e_i.$$

Тогда значение ковектора l на векторе $\vec{v}$ выражается формулой

$$l(\vec{v}) = l_i\xi^i$$

и является сверткой ковектора l и вектора $\vec{v}$.

Определение. Пусть на линейном n-мерном пространстве V задана билинейная форма g (т.е. тензор типа $(0,2)$). Операция, которая каждому тензору T типа (p,q) ставит в соответствие тензор типа $(p-1,q+1)$, равный свертке тензоров T и g, называется *операцией опускания индекса*.

Например, при опускании первого индекса тензора T получается тензор S, компоненты которого выражаются через компоненты тензоров T и g формулой

$$S^{i_2\dots i_p}_{i_1 j_1\dots j_q} = T^{k i_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q} g_{i_1 k},$$

где индекс суммирования k пробегает $\overline{1,n}$.

Если матрица билинейной формы g невырождена, то существует тензор h типа $(2,0)$, компоненты которого составляют обратную матрицу к матрицы билинейной формы g, т.е.

$$g_{ij}h^{jk} = g_{ji}h^{kj} = \delta_i^k \qquad \forall i,k \in \overline{1,n}, \tag{1}$$

где δ_k^i – символы Кронекера. Тогда свертка тензоров S и h называется *операцией поднятия индекса* тензора S. Например, при поднятии первого индекса тензора S типа $(p-1, q+1)$ получается тензор T типа (p,q), компоненты которого равны

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = S^{i_2\dots i_p}_{k j_1\dots j_q} h^{i_1 k}.$$

Задача 1. Покажите, что если выполнены соотношения (1), то операции поднятия и опускания индекса являются взаимно обратными.

Определение. *Контравариантным метрическим тензором* на римановом многообразии (M,g), где $M \in \mathfrak{M}^n$, называется тензорное поле g_{contr} типа $(2,0)$, компоненты которого $g^{ij}(P)$ являются компонентами матрицы, обратной к матрице, составленной из компонент $g_{ij}(P)$ ковариантного метрического тензора g.

Согласно данному определению справедливы равенства

$$g^{ij}(P)\, g_{jk}(P) = \delta_k^i \qquad \forall i,k \in \overline{1,n},$$

индекс суммирования j пробегает $\overline{1,n}$.

Лемма 2. *Контравариантный метрический тензор на римановом многообразии* (M,g) *действительно является тензорным полем типа* $(2,0)$.

Доказательство. Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ и $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ – две ЛСК на M. Пусть g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ – компоненты метрического тензора g в этих ЛСК, а g^{ij} и $\tilde{g}^{ij}$ – компоненты контравариантного метрического тензора

g_{contr} в этих ЛСК. В соответствии с законом изменения компонент тензорного поля типа $(2,0)$ имеем

$$\tilde{g}_{ij} = g_{km} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \tag{2}$$

Рассмотрим матрицы

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix}.$$

В матричных обозначениях формула (2) принимает вид

$$\tilde{G} = S^T G S.$$

Следовательно,

$$\tilde{G}^{-1} = S^{-1} G^{-1} (S^{-1})^T.$$

Последняя формула означает, что

$$\tilde{g}^{ij} = g^{km} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m}.$$

Таким образом, компоненты контравариантного метрического тензора меняются по закону изменения компонент тензорного поля типа $(2,0)$. $\square$

На римановом многообразии (M,g) из тензорного поля типа (p,q), то в результате опускания некоторого верхнего индекса при помощи метрического тензора g получается тензорное поле типа $(p-1,q+1)$, а в результате поднятия нижнего индекса при помощи контравариантного метрического тензора g_{contr} получается тензорное поле типа $(p+1,q-1)$.

Определение. Пусть $\vec{a}$ – векторное поле на римановом многообразии (M,g). Обозначим через $\vec{a}^{\downarrow}$ дифференциальную форму степени

1 (ковекторное поле), полученную путем опускания индекса векторного поля $\vec{a}$ при помощи метрического тензора g. Компоненты a_j ковекторного поля $\vec{a}^{\downarrow}$ в базисе $(dx^1, \ldots, dx^n)$ кокасательного пространства $T_P^*(M)$ называются ***ковариантными компонентами векторного поля*** $\vec{a}$. Они выражаются через контравариантные компоненты a^i векторного поля $\vec{a}$ (т.е. координаты $\vec{a}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ касательного пространства $T_P(M)$) формулой

$$a_j = g_{ij} a^i.$$

Определение. Пусть $\omega \in \Omega^1(M)$ – ковекторное поле на римановом многообразии (M, g). Обозначим через $\omega_{\uparrow}$ векторное поле, полученное путем поднятия индекса ковекторного поля ω при помощи контравариантного метрического тензора g_{contr}. Компоненты ω^j векторного поля $\omega_{\uparrow}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ выражаются через компоненты ω_i ковекторного поля ω в базисе $(dx^1, \ldots, dx^n)$ формулой

$$\omega^j = g^{ij} \omega_i.$$

Замечание. Из определения контравариантного метрического тензора следует, что операции опускания и поднятия индекса взаимно обратны, т.е. для любого векторного поля $\vec{a}$ и любого ковекторного поля ω на римановом многообразии (M, g) справедливы равенства

$$(\vec{a}^{\downarrow})_{\uparrow} = \vec{a}, \qquad (\omega_{\uparrow})^{\downarrow} = \omega.$$

Отсюда и из линейности операций опускания и поднятия индекса следует, что эти операции задают изоморфизм между пространствами векторных и ковекторных полей на римановом многообразии (M, g).

Определение. Пусть (Γ, g) – ориентированное риманово многообразие размерности 1. *Интегралом второго рода* векторного поля $\vec{a}$ по Γ называется интеграл $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}^{\downarrow}$ от дифференциальной формы $\vec{a}^{\downarrow} \in$ $\in \Omega^1(\Gamma)$.

Замечание. Пусть (M, g) – риманово многообразие и пусть ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на M такова, что $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – ортонормированный базис в $T_P(M)$. Тогда операция поднятия индекса переводит базисные векторы $\frac{\partial}{\partial x^i}$ пространства $T_P(M)$ в базисные векторы dx^i пространства $T_P^*(M)$.

§ 5. Градиент, дивергенция и ротор в $\mathbb{R}^3$

Пусть U – область (открытое линейно-связное множество) в $\mathbb{R}^3$. Будем рассматривать U как риманово многообразие с индуцированной метрикой g. В качестве ЛСК на многообразии $U \in \mathfrak{M}_3^3$ будем рассматривать стандартную декартову систему координат $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ в $\mathbb{R}^3$.

Тогда матрица Грама на римановом многообразии (U, g) является единичной матрицей и ее элементы g_{ij} совпадают с символами Кронекера: $g_{ij} = \delta_{ij}$.

При этом коваринтные компоненты любого векторного поля $\vec{a} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ совпадают с его контравариантными компонентами:

$$a_i = g_{ij} a^j = \delta_{ij} a^j = a^i.$$

В частности, совпадают ковариантные и контраваринатные компоненты векторного поля радиус-векторов $\vec{r} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$: $\quad x_i = x^i$.

Согласно формуле (9) § 3 символы Леви-Чивиты имеют вид:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (i,j,k) \text{ получается из набора } (1,2,3) \text{ в результате циклической перестановки;} \\ -1, & \text{если набор } (i,j,k) \text{ получается из набора } (1,2,3) \text{ в результате нециклической перестановки;} \\ 0, & \text{если набор } (i,j,k) \text{ не является перестановкой набора } (1,2,3). \end{cases}$$

Имея в виду изоморфизм касательного пространства $T_P(U)$ и геометрического касательного пространства $\widetilde{T}_P(U) = \mathbb{R}^3$, будем отождествлять векторное поле $\vec{a} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ и вектор-функцию $\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$. Наряду со *скалярным произведением векторных полей* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = g[\vec{a}, \vec{b}] = a^i g_{ij} b^j = a^i \delta_{ij} b^j = a^i b_i = a_i b^i$$

определим *смешанное произведение векторных полей* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k \tag{1}$$

и *векторное произведение векторных полей* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ как векторное поле $[\vec{a} \times \vec{b}]$, ковариантные компоненты которого определяются формулами

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k. \tag{2}$$

Замечание. Данные определения смешанного и векторного произведений соответствуют стандартным определениям этих понятий в $\mathbb{R}^3$. Действительно, рассмотрим стандартный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$, где $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_i^1 \\ \delta_i^2 \\ \delta_i^3 \end{pmatrix}$. Поскольку этот базис является правым ортонормированным базисом, то смешанное произведение $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ равно 1. Отсюда и из свойства кососимметричности смешанного произведения следует, что

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \epsilon_{ijk} \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Используя свойство линейности смешанного произведения по каждому вектору и равенства $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$, $\vec{b} = b^i \vec{e}_i$, $\vec{c} = c^i \vec{e}_i$, получаем равенство (1).

Поскольку $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, [\vec{a} \times \vec{b}])$, то, подставляя в эту формулу $\vec{c} = \vec{e}_i$, получаем

$$(\vec{e}_i, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{e}_i, [\vec{a} \times \vec{b}]) = \delta_i^j [\vec{a} \times \vec{b}]_j = [\vec{a} \times \vec{b}]_i.$$

Отсюда и из формулы (1) следует, что

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = (\vec{e}_i, \vec{a}, \vec{b}) = \epsilon_{ljk} \delta_i^l a^j b^k = \epsilon_{ijk} a^j b^k,$$

т.е. равенство (2).

Определение. *Градиентом* C^1-гладкого скалярного поля φ в области U называется векторное поле, ковариантные компоненты которого определяются формулами

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad i \in \{1,2,3\}.$$

Определение. *Дивергенцией* C^1-гладкого векторного поля $\vec{a}$ в области U называется скалярное поле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

где в соответствии с соглашением Эйнштейна подразумевается суммирование по $i \in \{1,2,3\}$.

Определение. *Ротором (вихрем)* C^1-гладкого векторного поля $\vec{a}$ в области U называется векторное поле $\operatorname{rot}\vec{a}$, ковариантные компоненты которого определяются формулами

$$(\operatorname{rot}\vec{a}\,)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial a^k}{\partial x_j}, \qquad i \in \{1,2,3\},$$

где в соответствии с соглашением Эйнштейна подразумевается суммирование по $j, k \in \{1,2,3\}$.

Иными словами, ротором векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ является векторное поле

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Пусть заданы C^1-гладкие скалярные поля φ, ψ и векторное поле $\vec{a}$ в области U. Тогда*

(1). $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$;

(2). $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}\,)$;

(3). $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}\,]$.

Доказательство. Используя правило Лейбница для производной произведения двух скалярных функций, получаем:

(1). $(\operatorname{grad}(\varphi\psi))_i = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x^i} = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$;

(2). $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \frac{\partial(\varphi a^i)}{\partial x^i} = \varphi\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}\,)$;

(3). $(\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}))_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial(\varphi a^k)}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\varphi\frac{\partial a^k}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}a^k = \varphi(\operatorname{rot}\vec{a})_i +$ $+ [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}\,]_i$. $\square$

Лемма 2. *Пусть заданы C^2-гладкие скалярное поле φ и векторное поле $\vec{a}$ в области U. Тогда*

(1). $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \overline{0}$*;*

(2). $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$*;*

(3). $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$*, где* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа*.*

Доказательство. (1). $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\operatorname{grad}\varphi)^k =$ $= \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} = -\epsilon_{ikj}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_j}$, где последнее равенство справедливо в силу косимметричности символов Леви-Чивиты и независимости частных производных от порядка дифференцирования. Переобозначая индексы суммирования $j \leftrightarrow k$, получаем $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i =$ $= -\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} = -(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i$. Следовательно, $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = 0$ для любого $i \in \{1, 2, 3\}$.

(2). $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{rot}\vec{a})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial a^j}{\partial x_k}\right) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a^j}{\partial x_i\partial x_k}$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, приходим к равенству $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} =$ $= 0$.

(3). $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$. $\square$

Лемма 3.

$$(1).\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \qquad \forall i,j,k,l,m,n \in \{1,2,3\};$$

$$(2).\quad \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad \forall i,j,l,m \in \{1,2,3\};$$

$$(3).\quad \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \forall i,j \in \{1,2,3\};$$

$$(4).\quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

Доказательство. (1). Заметим, что определитель произвольной матрицы 3×3 следующим образом выражается через символ Леви-Чивиты

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon^{pqr} a_p b_q c_r,$$

где $\varepsilon^{pqr} = \varepsilon_{pqr}$. Поскольку при перестановке двух строк определитель матрицы меняет знак, то для любой матрицы 3×3 и для любых индексов $i, j, k \in \{1,2,3\}$ справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{pqr} a_p b_q c_r.$$

Подставляя в эту формулу $a_s = \delta_{sl}$, $b_s = \delta_{sm}$, $c_s = \delta_{sn}$, где $s \in$ $\in \{1,2,3\}$, получаем

$$\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{pqr}\delta_{pl}\delta_{qm}\delta_{rn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}.$$

(2). Согласно пункту (1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} \quad = \quad & \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \\ & -\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \sum_{k=1}^{3}\Big(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kk}+\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km}-\\ &\quad -\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kk}-\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl}\Big)=\\ &= 3\delta_{il}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jl}+\delta_{im}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jm}-3\delta_{im}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jm}=\\ &= \delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}.\end{aligned}$$

(3). Используя пункт (2), получаем

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=\sum_{j=1}^{3}\Big(\delta_{il}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jl}\Big)=2\delta_{il}.$$

(4). Используя пункт (3), получаем $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\sum\limits_{i=1}^{3}\delta_{ii}=$ $=6.$ □

Пример 1. Пусть $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ – векторное поле радиус-вектора, $\vec{\omega}=\begin{pmatrix}\omega^1\\\omega^2\\\omega^3\end{pmatrix}$ – постоянный вектор. Найти $\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}]$.

Решение. Так как $[\vec{\omega}\times\vec{r}]_s=\epsilon_{slm}\omega^l x^m$, то для любого $i\in\{1,2,3\}$ имеем

$$(\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}])_i=\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{\omega}\times\vec{r}]^k=\epsilon_{ijk}\delta^{sk}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{\omega}\times\vec{r}]_s=$$

$$=\epsilon_{ijk}\delta^{sk}\epsilon_{slm}\omega^l\frac{\partial x^m}{\partial x_j}=\epsilon_{ijk}\epsilon_{lms}\delta^{sk}\delta^{mj}\omega^l=\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk}\right)\omega^l.$$

Применяя пункт (3) леммы 3, получаем

$$(\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}])_i=2\delta_{il}\omega^l=2\omega_i\quad\forall i\in\{1,2,3\}.$$

Поэтому $\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}]=2\vec{\omega}$. □

Замечание. Пример 1 показывает, что ротор поля скоростей $\vec{v}=$ $=[\vec{\omega}\times\vec{r}]$ тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, равен $2\vec{\omega}$ в каждой точке этого тела.

Пример 2. Доказать тождество для C^2-гладкого векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}.$$

Решение. Так как ковариантные компоненты векторного поля $\vec{b} = \operatorname{rot}\vec{a}$ определяются формулами $b_l = \epsilon_{lmn}\frac{\partial a^n}{\partial x_m}$, то

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})_i = (\operatorname{rot}\vec{b})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial b^k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\frac{\partial b_l}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\epsilon_{lmn}\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m} =$$

$$= \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\epsilon_{mnl}\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m} = \left(\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}\right)\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m}.$$

Согласно пункту (2) леммы 3 получаем

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})_i = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m} = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x^i} - \delta_{jm}\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{\partial a_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x^i}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta a_i = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a})_i - (\Delta\vec{a})_i.$$

□

Определение. Оператором ∇ (набла) называется следующий векторный оператор

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Далее мы увидим, что градиент, дивергенцию, ротор и производную по вектору можно выразить, используя векторные операции с оператором ∇.

Определение. (Операции с вектором ∇.) Пусть в области G заданы C^1-гладкие скалярное поле φ и векторное поле $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$.

Определим

- произведение вектора ∇ на скаляр φ: $(\nabla\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$;
- скалярное произведение векторов ∇ и $\vec{a}$: $(\nabla, \vec{a}\,) = \frac{\partial a^i}{\partial x^i}$;
- векторное произведение векторов ∇ и $\vec{a}$: $[\nabla \times \vec{a}\,]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a^k}{\partial x_j}$,

где $(\nabla\varphi)_i$ и $[\nabla \times \vec{a}\,]_i$ – ковариантные компоненты векторов $\nabla\varphi$ и $[\nabla \times \vec{a}\,]$ соответственно.

Замечание. Данные выше определения могут быть получены формальной подстановкой компонет $\frac{\partial}{\partial x^i}$ вектора ∇ вместо ковариантных компонент b_i вектора $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ в известные формулы

$$(\vec{b}\varphi)_i = b_i\varphi, \qquad (\vec{b}, \vec{a}\,) = b_i a^i, \qquad [\vec{b} \times \vec{a}\,]_i = \varepsilon_{ijk} b^j a^k$$

за исключением того, что компоненты вектора ∇ нельзя переставлять с другими сомножителями. Последнее обстоятельство связано с тем, что оператор ∇ и его компоненты действуют на функции, стоящие от них справа и не действуют на функции, стоящие от них слева (здесь имеются в виду функции, которые входят как сомножители в произведение, содержащее оператор ∇ или его компоненты).

Сравнивая определения градиента, дивергенции и ротора с определением операций с вектором ∇, получаем

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi, \qquad (\nabla, \vec{a}\,) = \operatorname{div}\vec{a}, \qquad [\nabla \times \vec{a}\,] = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

§ 6. Поток векторного поля через поверхность

Определение. Пусть S – компактное гладкое двумерное ориентированное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть для любой точки $p \in S$ вектор $\vec{\vartheta}(p)$ является единичным вектором нормали к S в точке p, согласованным с ориентацией S. Пусть $dS = \mathrm{Vol}_g$ – форма риманова объема, индуцированной метрики на S. Пусть вектор-функция $\vec{a} : S \to \mathbb{R}^3_{xyz}$ непрерывна. Интеграл первого рода скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)$

$$\int\limits_S (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS$$

называется *потоком* векторного поля $\vec{a}$ через поверхность $S \in \mathfrak{M}^2_3$.

Теорема 1. (О выражении потока векторного поля через интеграл от дифференциальной формы.) *Пусть в обозначениях предыдущего определения* $\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$. *Тогда поток* $\int\limits_S (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS$ *равен интегралу по* S *от дифференциальной формы* $\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$:

$$\int\limits_S (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS = \int\limits_S \omega. \tag{1}$$

Доказательство. В силу теоремы о разбиении единицы на многообразии достаточно рассмотреть случай, когда носитель $\operatorname{supp} \omega$ содержится в районе действия одной карты (ψ, U) на S: $\operatorname{supp} \omega \subset U$. Пусть $D = \psi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2_{uv}$,

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D.$$

Будем считать, что карта (ψ, U) согласована с ориентацией S. Тогда $\vec{\vartheta} = \frac{[\psi'_u, \psi'_v]}{|[\psi'_u, \psi'_v]|}$.

В силу формулы (9) § 9 главы 18

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv =$$

$$= \int\limits_D (\vec{a}, [\psi'_u, \psi'_v])\, du \wedge dv = \int\limits_D (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,) \cdot |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv.$$

Используя равенство (11) § 3, получаем равенство (1). □

Теорема 2. (Теорема Гаусса–Остроградского.) *Пусть* $G \in \mathfrak{M}^3_3$ *– гладкое компактное трехмерное подмногообразие пространства* $\mathbb{R}^3_{xyz}$*, ориентированное стандартной декартовой системой координат в* $\mathbb{R}^3_{xyz}$*. Пусть в области* $U \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$*, содержащей* G*, задано* C^1*-гладкое векторное поле* $\vec{a}$*. Тогда поток векторного поля* $\vec{a}$ *через поверхность* ∂G*, ориентированную полем внешних по отношению к* G *единичных нормалей* $\vec{\vartheta}$ *совпадает с интегралом скалярного поля*

$\operatorname{div}\vec{a}$ *по многообразию* G*:*

$$\int\limits_{\partial G} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS = \int\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\, dV,$$

где $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ *– форма объема в* $\mathbb{R}^3_{xyz}$*.*

Доказательство. Обозначим компоненты векторного поля $\vec{a}$ через P, Q, R: $\quad \vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$. Применяя формулу Стокса к дифференциальной форме

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy,$$

получаем формулу

$$\int\limits_{\partial G} \omega = \int\limits_G d\omega = \int\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\, dV.$$

Отсюда и из теоремы о выражении потока векторного поля через интеграл от дифференциальной формы вытекает доказываемое равенство. □

Теорема 3. (Теорема Стокса в узком смысле.) *Пусть* U *– область в* $\mathbb{R}^3_{xyz}$*, содержащяя гладкое компактное двумерное ориентированное многообразие* $S \in \mathfrak{M}^2_3$*. Пусть в области* U *задано* C^1*-гладкое векторное поле* $\vec{a}$*. Пусть ориентация края* ∂S *согласована с ориентацией* S *по правилу «правой руки». Тогда интеграл второго рода векторного поля* $\vec{a}$ *по краю* ∂S *равен потоку векторного поля* $\operatorname{rot}\vec{a}$ *через поверхность* S*:*

$$\int\limits_{\partial S} \vec{a}^{\downarrow} = \int\limits_S (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS.$$

Доказательство. Пусть $\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$. Поскольку внешний дифференциал дифференциальной формы $\omega = \vec{a}^{\downarrow} = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ равен

$$d\omega = b^1\,dy \wedge dz + b^2\,dz \wedge dx + b^3\,dx \wedge dy,$$

где $\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a}$, то в силу формулы Стокса и теоремы о выражении потока векторного поля через интеграл от дифференциальной формы имеем

$$\int\limits_{\partial S} \vec{a}^{\downarrow} = \int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{S} d\omega = \int\limits_{S} b^1\,dy \wedge dz + b^2\,dz \wedge dx + b^3\,dx \wedge dy =$$

$$= \int\limits_{S} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\,dS.$$

□

§ 7. Геометрический смысл дивергенции и ротора

Теорема 1. (Геометрическое определение дивергенции.) *Пусть в окрестности $U(p_0)$ точки $p_0 \in \mathbb{R}^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{a} : U(p_0) \to \mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\operatorname{div}\vec{a}(p_0) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\mu_\delta} \int\limits_{S_\delta} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\,dS,$$

где S_δ – сфера радиуса δ с центром в точке p_0, $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}(p)$ – единичный вектор внешней нормали к сфере S_δ в точке $p \in S_\delta$, $\mu_\delta = \mu(U_\delta(p_0)) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ – объем шара $U_\delta(p_0)$, dS – форма риманова объема на S_δ.

Доказательство. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$ так, чтобы $U_\delta(p_0) \subset U(p_0)$. В силу теоремы Гаусса–Остроградского имеем

$$\int\limits_{U_\delta(p_0)} \operatorname{div}\vec{a}\;dx \wedge dy \wedge dz = \int\limits_{S_\delta} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\,dS, \tag{1}$$

где последнее равенство следует из теоремы о выражении потока векторного поля через интеграл от дифференциальной формы.

Поскольку вектор-функция $\vec{a}$ непрерывно дифференцируема, то

$$\varepsilon(\delta) := \sup_{p\in U_\delta(p_0)} |\operatorname{div}\vec{a}(p) - \operatorname{div}\vec{a}(p_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно,

$$\left| \int\limits_{U_\delta(p_0)} \operatorname{div}\vec{a}(p)\; dx\wedge dy\wedge dz - \mu_\delta \cdot \operatorname{div}\vec{a}(p_0) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{U_\delta(p_0)} (\operatorname{div}\vec{a}(p) - \operatorname{div}\vec{a}(p_0))\; dx\wedge dy\wedge dz \right| \le$$

$$\le \int\limits_{U_\delta(p_0)} \varepsilon(\delta)\, dx\wedge dy\wedge dz = \mu_\delta \cdot \varepsilon(\delta).$$

Используя равенство (1), получаем

$$\left| \frac{1}{\mu_\delta} \int\limits_{S_\delta} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS - \operatorname{div}\vec{a}(p_0) \right| \le \varepsilon(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

□

Теорема 2. (Геометрическое определение ротора.) *Пусть в окрестности $U(p_0)$ точки $p_0 \in \mathbb{R}^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{a} : U(p_0) \to \mathbb{R}^3$. Тогда для любого единичного вектора $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$*

$$(\operatorname{rot}\vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,) = \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow},$$

где S_δ – круг радиуса δ с центром в точке p_0, лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\vartheta}$, ∂S_δ – край круга S_δ, ориентированный согласованно с направлением вектора $\vec{\vartheta}$ по правилу «правой руки».

Доказательство. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$ так, чтобы $U_\delta(p_0) \subset U(p_0)$. В силу формулы Стокса в узком смысле

$$\int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow} = \int\limits_{S_\delta} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS, \tag{2}$$

где последнее равенство следует из теоремы о выражении потока векторного поля через интеграл от дифференциальной формы.

Поскольку вектор-функция $\vec{a}$ непрерывно дифференцируема, то

$$\varepsilon(\delta) := \sup_{p\in U_\delta(p_0)} |(\operatorname{rot}\vec{a}(p), \vec{\vartheta}\,) - (\operatorname{rot}\vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{S_\delta} (\operatorname{rot}\vec{a}(p), \vec{\vartheta}\,)\, dS - \int\limits_{S_\delta} (\operatorname{rot}\vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)\, dS\right| \leq \int\limits_{S_\delta} \varepsilon(\delta)\, dS = \pi\delta^2\varepsilon(\delta),$$

то есть, согласно равенству (2)

$$\left|\int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow} - \pi\delta^2 \cdot (\operatorname{rot}\vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)\right| \leq \pi\delta^2\varepsilon(\delta).$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow} - (\operatorname{rot}\vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)\right| \leq \varepsilon(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

□

§ 8. Скалярный и векторный потенциалы векторного поля

В этом параграфе U – область в $\mathbb{R}^3_{xyz}$.

Определение. Скалярное поле φ называется ***скалярным потенциалом*** векторного поля $\vec{a}$ в области U, если в области U справедливо равенство

$$\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi.$$

Как обычно, имея в виду изоморфизм касательного пространства $T_P(U)$ и геометрического касательного пространства $\widetilde{T}_P(U) = \mathbb{R}^3$, будем отождествлять векторное поле $\vec{a} = a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ и вектор-функцию $\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$.

Замечание. Скалярное поле φ является скалярным потенциалом векторного поля $\vec{a}$ в области U тогда и только тогда, когда φ является скалярным потенциалом ковекторного поля $\vec{a}^{\downarrow}$, т.е. $\vec{a}^{\downarrow} = d\varphi$ в области U. Это следует из того, что согласно определению градиента равенство $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ эквивалентно равенству $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$, которое в свою очередь эквивалентно равенству

$$\vec{a}^{\downarrow} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

т.е. $\vec{a}^{\downarrow} = d\varphi$.

Определение. Векторное поле $\vec{a}$ называется *безвихревым* в области U, если $\operatorname{rot}\vec{a} = \overline{0}$ в U.

Теорема 1. (О существовании скалярного потенциала.) *Для того, чтобы C^1-гладкое векторное поле $\vec{a}$ имело скалярный потенциал в области U необходимо, а в случае стягиваемости области U и достаточно, чтобы поле $\vec{a}$ было безвихревым в области U.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторное поле $\vec{a}$ имеет скалярный потенциал φ в области U, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Тогда согласно лемме 2 § 5 в области U имеем $\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \overline{0}$.

Достаточность. Пусть $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ – безвихревое векторное поле в стягиваемой области U. Тогда внешний дифференциал дифференциальной формы $\omega = \vec{a}^{\downarrow} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ равен

$$d\omega = b^1\,dy \wedge dz + b^2\,dz \wedge dx + b^3\,dx \wedge dy,$$

где $\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a} = \overline{0}$. Поэтому дифференциальная форма ω замкнута в области U. В силу леммы Пуанкаре ω точна в U, т.е. ковекторное поле $\omega = \vec{a}^{\downarrow}$ имеет скалярный потенциал в U, а значит, векторное поле $\vec{a}$ имеет скалярный потенциал в области U. $\square$

Замечание. В общем случае из безвихревости векторного поля $\vec{a}$ в области U не следует существование скалярного потенциала поля $\vec{a}$ в U. Действительно, рассмотрим *магнитное поле прямого провода с током*, расположенного на оси Oz:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления показывают, что $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ в области $U = \mathbb{R}^3_{xyz} \setminus \{(0,0,z) : \ z \in \mathbb{R}\}$, т.е. дифференциальная форма

$$\vec{a}^{\downarrow} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

замкнута в области U. Рассмотрим замкнутую кривую $S^1 = \{(\cos t, \sin t, 0) : \ t \in [0, 2\pi)\} \subset U$. Используя формулу вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$\int\limits_{S^1} \omega = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Поэтому согласно теореме 1 § 12 дифференциальная форма ω не является точной в области U, т.е. векторное поле $\vec{a}$ не имеет скалярного потенциала в U.

Определение. Векторное поле $\vec{b}$ называется *векторным потенциалом* векторного поля $\vec{a}$ в области U, если в области U справедливо равенство

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}.$$

Определение. Векторное поле $\vec{a}$ называется *бездивергентным* в области U, если $\operatorname{div}\vec{a} = \overline{0}$ в U.

Теорема 2. (О существовании векторного потенциала.) *Для того, чтобы C^1-гладкое векторное поле $\vec{a}$ имело векторный потенциал в области U необходимо, а в случае стягиваемости области U и достаточно, чтобы поле $\vec{a}$ было бездивергентным в области U.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторное поле $\vec{a}$ имеет векторный потенциал $\vec{b}$ в области U, т.е. $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$. Тогда согласно лемме 2 § 5 в области U имеем $\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b} = 0$.

Достаточность. Пусть $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ – бездивергентное векторное поле в стягиваемой области U.

Тогда внешний дифференциал дифференциальной формы $\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$ равен

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz = \operatorname{div}\vec{a}\,dx\wedge dy\wedge dz = 0.$$

Поэтому дифференциальная форма ω замкнута в области U. В силу леммы Пуанкаре ω точна в U, т.е. существует дифференциальная форма $\beta = b^1\,dx + b^2\,dy + b^3\,dz$ такая, что $\omega = d\beta$ в области U, т.е. в области U справедливо равенство

$$\omega = \left(\frac{\partial b^3}{\partial y} - \frac{\partial b^2}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial b^1}{\partial z} - \frac{\partial b^3}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial b^2}{\partial x} - \frac{\partial b^1}{\partial y}\right) dx\wedge dy,$$

которое можно записать в виде $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$, где $\vec{b} = \beta_{\uparrow}$. □

Замечание. В общем случае из бездивергентности векторного поля $\vec{a}$ в области U не следует существование векторного потенциала поля $\vec{a}$ в U. Действительно, рассмотрим *электрическое поле точечного заряда*, находящегося в начале координат

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad \text{где} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

в области $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. Прямые вычисления показывают, что поле $\vec{a}$ бездиверегентно в области U.

Предположим, что векторное поле $\vec{a}$ имеет векторный потенциал $\vec{b}$ в области U. Вычислим поток поля $\vec{a}$ через сферу $S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset U$, ориентированную полем внешних нормалей $\vec{\vartheta} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. Поскольку на сфере S^2 скалярное произведение $(\vec{a},\vec{\vartheta})$ равно 1, то поток $\int\limits_{S^2} (\vec{a},\vec{\vartheta}\,)\,dS$ равен площади сферы, т.е. 4π. С другой стороны, в силу теоремы Стокса в узком смысле

$$\int\limits_{S^2} (\operatorname{rot} \vec{b}, \vec{\vartheta}\,)\, dS = \int\limits_{\partial S^2} \vec{b}^{\downarrow} = 0,$$

поскольку сфера S^2 не имеет края. Следовательно,

$$4\pi = \int\limits_{S^2} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS = \int\limits_{S^2} (\operatorname{rot} \vec{b}, \vec{\vartheta}\,)\, dS = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что поле $\vec{a}$ не имеет векторного потенциала в области U.

$\triangleright$

§ 9. Звездочка Ходжа

Определение. Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности n. *Звездочкой Ходжа* называется оператор, который дифференциальной форме $\omega \in \Omega^k(M)$ ставит в соответствие дифференциальную форму $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$ по формуле

$$(*\omega)_{i_{k+1}\dots i_n} = \frac{1}{k!} \epsilon_{i_1\dots i_k i_{k+1}\dots i_n}\ \omega^{i_1\dots i_k},$$

где $\omega^{i_1\dots i_k}$ – компоненты тензора $\omega_\uparrow$ типа $(k, 0)$, полученного путем поднятия всех индексов дифференциальной формы ω при помощи метрического контравариантного тензора g:

$$\omega^{i_1\dots i_k} = \omega_{j_1\dots j_k} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k}.$$

Таким образом, звездочка Ходжа определяется через свертку тензорного поля, полученного путем поднятия индексов у исходной дифференциальной формы с тензором Леви-Чивиты.

Замечание. Поскольку свертка тензоров является тензором соответствующего типа, то значение $*\omega$ в точке является тензором типа $(0, n - k)$. Из кососимметричности тезора Леви-Чивиты следует кососимметричность тензора $*\omega$. Легко видеть, что для гладкой дифференциальной формы ω коэффициенты $(*\omega)_{i_{k+1}\dots i_n}$ являются гладкими функциями. Поэтому звездочка Ходжа действительно переводит дифференциальную форму $\omega \in \Omega^k(M)$ в дифференциальную форму $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$.

Замечание. Непосредственно из определения следует, что звездочка Ходжа обладает следующим свойством линейности. Для любых дифференциальных форм $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$ и для любых функций $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ справедливо равенство

$$*(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) = \alpha_1(*\omega_1) + \alpha_2(*\omega_2). \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть (M, g) – ориентированное риманово многообразие и пусть ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на M такова, что $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – правый ортонормированный базис в $T_P(M)$. Тогда*

(1) *для дифференциальной формы $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ справедливо равенство*

$$*\omega = dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

(2) *если набор $(i_1, \ldots, i_n)$ получен перестановкой набора $(1, \ldots, n)$, то для дифференциальной формы $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ справедливо равенство*

$$*\omega = \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n) \cdot dx^{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}. \tag{2}$$

Доказательство. (1). В силу замечания § 3 символы Леви-Чивиты для ортонормированного базиса имеют вид $\epsilon_{i_1 \ldots i_n} = \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n)$. Компонеты тензора ω равны $\omega_{j_1 \ldots j_k} = \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_k)$. Поскольку матрица Грамма для ортонормированного базиса единичная, то в результате поднятия индексов получаем $\omega^{i_1 \ldots i_k} = \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_k)$. Следовательно,

$$(*\omega)_{i_{k+1} \ldots i_n} = \frac{1}{k!} \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n) \cdot \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_k), \tag{3}$$

где суммирование происходит по всем наборам $(i_1, \ldots, i_k)$ индексов $i_j \in \in \overline{1, n}$.

Можно считать, что суммирование происходит только по таким наборам $(i_1, \ldots, i_k)$, что эти наборы являются перестановками набора $(1, \ldots, k)$ и набор $(i_1, \ldots, i_n)$ является перестановкой набора $(1, \ldots, n)$. Иначе $\operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_k) = 0$ или $\operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n) = 0$. Тогда набор $(i_{k+1}, \ldots, i_n)$ является перестановкой набора $(k+1, \ldots, n)$ и

$$\operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n) \cdot \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_k) = s(i_{k+1}, \ldots, i_n),$$

где

$$s(i_{k+1}, \ldots, i_n) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (i_{k+1}, \ldots, i_n) \text{ получается из набора } (k+1, \ldots, n) \text{ в результате четного числа транспозиций;} \\ -1, & \text{если набор } (i_{k+1}, \ldots, i_n) \text{ получается из набора } (k+1, \ldots, n) \text{ в результате нечетного числа транспозиций;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, если $s(i_{k+1}, \ldots, i_n) \neq 0$, то сумма (3) содержит $k!$ ненулевых слагаемых, все эти слагаемые одинаковы и равны $s(i_{k+1}, \ldots, i_n)$. Таким образом,

$$(*\omega)_{i_{k+1}\ldots i_n} = s(i_{k+1},\ldots,i_n) = \left(dx^{k+1}\wedge\ldots\ \wedge dx^n\right)_{i_{k+1}\ldots i_n}. \tag{4}$$

Если $s(i_{k+1},\ldots,i_n) = 0$, то равенства (4) также справедливы. Поэтому $*\omega = dx^{k+1}\wedge\ldots\ \wedge dx^n$.

(2). Если $\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n) = 1$, то $\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_n}}\right)$ – правый ортонормированный базис в $T_P(M)$. Применяя утверждение пункта (1) к этому базису, получаем равенство

$$*\omega = dx^{i_{k+1}}\wedge\ldots\ \wedge dx^{i_n}. \tag{5}$$

Если $\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n) = -1$, то $\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_n}}\right)$ – правый ортонормированный базис в $T_P(M^-)$ для многообразия M^-, полученного из M изменением ориентации. Поэтому для многообразия ориентированного риманова многообразия (M^-,g) справедлива формула (5). Поскольку при изменении ориентации многообразия M меняется знак тензора Леви-Чивиты, то при изменении ориентации M дифференциальная форма $*\omega$ изменит знак. Поэтому в случае $\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n) = -1$ для ориентированного риманова многообразия (M,g) получаем равенство

$$*\omega = -dx^{i_{k+1}}\wedge\ldots\ \wedge dx^{i_n}.$$

Таким образом, в любом случае справедлива формула (2). $\square$

Лемма 2. *Пусть (M,g) – n-мерное ориентированное риманово многообразие, $\omega\in\Omega^k(M)$. Тогда*

$$*(*\omega) = (-1)^{k(n-k)}\omega.$$

Доказательство. Поскольку звездочка Ходжа обладает свойством линейности, то доказываемое равенство достаточно проверить для монома $\omega = dx^{i_1}\wedge\ldots\ \wedge dx^{i_k}$. В силу леммы 1 имеем

$$*\omega = \mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)\cdot dx^{i_{k+1}}\wedge\ldots\ \wedge dx^{i_n},$$

$$*(*\omega) = \mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)\cdot\mathrm{sign}(i_{k+1},\ldots,i_n,i_1,\ldots,i_k)\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\ \wedge dx^{i_k}.$$

Поскольку $\mathrm{sign}(i_1,\ldots,i_n)\cdot\mathrm{sign}(i_{k+1},\ldots,i_n,i_1,\ldots,i_k) = \mathrm{sign}(k+1,\ldots,n,1,\ldots,k) = (-1)^{k(n-k)}$, то $*(*\omega) = (-1)^{k(n-k)}\omega$. $\square$

Замечание. Из леммы 2 следует, что звездочка Ходжа является взаимно однозначным отображением из $\Omega^k(M)$ в $\Omega^{n-k}(M)$. Отсюда и из линейности звездочки Ходжа вытекает, что это отображение является изоморфизмом.

§ 10. Градиент, дивергенция и ротор на многообразиях

Во втором семестре для функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ было определено понятие градиента: $\operatorname{grad}\varphi$. В § 5 главы 18 для векторного поля $\vec{a}$ в $\mathbb{R}^3$ были определены скалярное поле $\operatorname{div}\vec{a}$ и векторное поле $\operatorname{rot}\vec{a}$. В данном параграфе мы хотим распространить введенные ранее понятия градиента, дивергенции и ротора с пространства $\mathbb{R}^3$ на многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$. Для этого воспользуемся оператором внешнего дифференциала, который определен для дифференциальных форм $\omega \in \Omega^n(M)$.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ как риманово многообразие, ориентированное стандартной декартовой системой координат. При $k = 1, 2, 3$ через d_k обозначим внешний дифференциал, действующий из $\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^3)$ в $\Omega^k(\mathbb{R}^3)$:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \overset{d_1}{\to} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \overset{d_2}{\to} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \overset{d_3}{\to} \Omega^3(\mathbb{R}^3).$$

Теорема 1. *Если наряду с отождествлением $T_P(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{R}^3$, принятым при определении оператора гамильтона отождествить*

а) векторные и ковекторные поля в $\mathbb{R}^3$ с помощью операций опускания и поднятия индексов;

б) дифференциальные формы классов $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ и $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ с помощью операции звездочки Ходжа;

в) дифференциальные формы классов $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ и $\Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ также с помощью операции звездочки Ходжа,

то будут справедливы равенства

$$\operatorname{grad} = d_1, \qquad \operatorname{rot} = d_2, \qquad \operatorname{div} = d_3.$$

Доказательство. Указанные отождествления возможны постольку, поскольку операции поднятия и опускания индексов задают изоморфизм векторных и ковекторных полей, а звездочка Ходжа задает изоморфизм $\Omega^k(\mathbb{R}^3)$ и $\Omega^{3-k}(\mathbb{R}^3)$.

1) Для любой гладкой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ ее дифференциал

$$d_1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz$$

путем поднятия индекса превращается в векторное поле

$$(d_1\varphi)_\uparrow = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z},$$

которое в результате отождествления $T_P(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{R}^3$ превращается в вектор-функцию $\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\varphi$. Поэтому $\operatorname{grad} = d_1$.

2) Любое гладкое векторное поле

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = P\,\frac{\partial}{\partial x} + Q\,\frac{\partial}{\partial y} + R\,\frac{\partial}{\partial z}$$

путем опускания индекса превращается в ковекторное поле

$$\vec{a}^{\downarrow} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

дифференциал которого равен

$$d_2(\vec{a}^{\downarrow}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy.$$

Звездочка Ходжа переводит эту дифференциальную форму в ковекторное поле

$$*d_2(\vec{a}^{\downarrow}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dz,$$

которая путем поднятия индекса превращается в векторное поле

$$(*d_2(\vec{a}^{\downarrow}))_{\uparrow} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

Следовательно, с учетом принятых отождествлений $\operatorname{rot} = d_2$.

3) Снова превратим произвольное гладкое векторное поле

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = P\,\frac{\partial}{\partial x} + Q\,\frac{\partial}{\partial y} + R\,\frac{\partial}{\partial z}$$

в ковекторное поле

$$\vec{a}^{\downarrow} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Действуя на ковекторное поле $\vec{a}^{\downarrow}$ звездочкой Ходжа, получаем дифференциальную форму

$$*\vec{a}^{\downarrow} = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy,$$

дифференциал которой равен

$$d_3(*\vec{a}^{\downarrow}) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Действуя на полученную дифференциальную форму еще раз звездочкой Ходжа, имеем

$$*d_3(*\vec{a}^{\downarrow}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}.$$

Таким образом, с учетом принятых отождествлений div $= d_3$. □

Замечание. В ходе доказательства теоремы 1 фактически доказано, что без учета принятых в этой лемме отождествлений для ориентированного риманова многообразия $\mathbb{R}^3$ справедливы равенства

$$\operatorname{grad} \varphi = (d_1\varphi)_{\uparrow}, \qquad \operatorname{rot} \vec{a} = (*d_2(\vec{a}^{\downarrow}))_{\uparrow}, \qquad \operatorname{div} \vec{a} = *d_3(*\vec{a}^{\downarrow}). \tag{1}$$

Эти равенства позволяют распространить понятия градиента, ротора и дивергенции на римановы многообразия.

Определение. Пусть (M, g) – риманово многообразие. *Градиентом* функции $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R})$ называется векторное поле

$$\operatorname{grad} \varphi = (d\varphi)_{\uparrow}.$$

Замечание. Поскольку $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R}) = \Omega_1^0(M)$, то $d\varphi \in \Omega_0^1(M)$. В результате поднятия индекса получаем векторное поле $\operatorname{grad} \varphi = (d\varphi)_{\uparrow}$. Гладкость векторного поля $\operatorname{grad} \varphi$ на 1 меньше, чем гладкость функции φ. Для C^∞-гладкой функции φ векторное поле $\operatorname{grad} \varphi$ также будет C^∞-гладким. В силу первого из равенств (1) в случае $M = \mathbb{R}^3$ новое определение градиента совпадает с ранее данным его определением.

Определение. *Дивергенцией* C^1-гладкого векторного поля $\vec{a}$ на ориентированном римановом многообразии (M, g) называется скалярная функция

$$\operatorname{div} \vec{a} = *d(*\vec{a}^{\downarrow}).$$

Замечание. В результате опускания индекса у C^1-гладкого векторного поля $\vec{a}$ получаем ковекторное поле $\vec{a}^{\downarrow} \in \Omega_1^1(M)$. Применяя к нему звездочку Ходжа, получаем дифференциальную форму $*\vec{a}^{\downarrow} \in \Omega_1^{n-1}(M)$, внешний дифференциал которой $d(*\vec{a}^{\downarrow}) \in \Omega_0^n(M)$. Еще раз применяя звездочку Ходжа, получаем $\operatorname{div} \vec{a} = *d(*\vec{a}^{\downarrow}) \in \Omega_0^0(M)$, т.е. $\operatorname{div} \vec{a}$ – скалярное поле. Легко видеть, что гладкость поля $\operatorname{div} \vec{a}$ на 1 меньше гладкости векторного поля $\vec{a}$. В силу второго из равенств (1) в случае $M = \mathbb{R}^3$ новое определение дивергенции совпадает с ранее данным ее определением.

Определение. *Ротором* C^1-гладкого векторного поля $\vec{a}$ на n-мерном ориентированном римановом многообразии (M, g) при $n \geq 2$ называется кососимметрическое тензорное поле типа $(n-2, 0)$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = (*d(\vec{a}^{\downarrow}))_{\uparrow}.$$

Замечание. В результате опускания индекса у C^1-гладкого векторного поля $\vec{a}$ получаем ковекторное поле $\vec{a}^{\downarrow} \in \Omega_1^1(M)$, дифференциал которого является дифференциальной формой $d(\vec{a}^{\downarrow}) \in \Omega_0^2(M)$. Применяя к нему звездочку Ходжа, получаем дифференциальную форму $*d(\vec{a}^{\downarrow}) \in \Omega_0^{n-2}(M)$. В результате поднятия всех индексов, получаем, что $\operatorname{rot} \vec{a} = (*d(\vec{a}^{\downarrow}))_{\uparrow}$ является кососимметричным тензорным полем типа $(n-2, 0)$. Только в случае $n = 3$ оно является векторным полем. В силу третьего из равенств (1) в случае $M = \mathbb{R}^3$ новое определение ротора совпадает с ранее данным его определением.

$\triangleleft$

§ 11. Псевдориманова метрика

Напомним, что для любой квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$ в линейном пространстве найдется базис этого пространства, в котором эта форма имеет канонический вид, т.е. $g_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, где $\lambda_i \in \{-1, 1, 0\}$. Если λ_i не обращаются в 0, то квадратичная форма называется *невырожденной.*

Определение. *Псевдоримановой* или *индефинитной* метрикой на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется гладкое тензорное поле g типа $(0, 2)$, обладающее свойствами симметричности и невырждённости.

Таким образом, псевдориманова метрика отличается от римановой метрики тем, что свойство положительной определенности заменяется свойством невырожденности.

Пара (M, g), состоящая из многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и псевдоримановой метрики g на M, называется *псевдоримановым многообразием.*

Определение. Пусть (M, g) – псевдориманово многообразие, $P \in M$. Длиной касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ называется

$$|\vec{v}| := \sqrt{g(P)[\vec{v}, \vec{v}]}.$$

Если $g(P)[\vec{v}, \vec{v}] > 0$, то вектор $\vec{v}$ называется *пространственно-подобным*; если $g(P)[\vec{v}, \vec{v}] < 0$ (и, следовательно, длина вектора $\vec{v}$ чисто мнимая), вектор $\vec{v}$ называется *времени-подобным*; если $g(P)[\vec{v}, \vec{v}] = 0$, то вектор $\vec{v}$ называется *световым.*

Кривая $M \in \mathfrak{M}^1$ называется *световым лучом*, если для любой точки $P \in M$ любой касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$ является световым.

Определение. Пусть M_1 – гладкое подмногообразие псевдориманова многообразия (M, g). *Индуцированной метрикой* на M_1 называется сужение тензорного поля g на M_1.

Определение. Метрика

$$g = -\sum_{i=1}^{s} dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=s+1}^{n} dx^i \otimes dx^i$$

на многообразии $M = \mathbb{R}^n$ называется *псевдоевклидовой.* Псевдориманово простарнство $(\mathbb{R}^n, g)$ с этой метрикой называется *псевдоевклидовым* пространством $\mathbb{R}^n_s$.

Псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^4_1$ называется *пространством Минковского.* Координаты точки в этом пространстве принято обозначать (t, x, y, z). В этих обозначениях метрика пространства Минковского имеет вид

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Глава 20

ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ

§ 1. Скобка Ли

В этом и следующем параграфах любое гладкое векторное поле на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ будем рассматривать как оператор, действующий из пространства $C^\infty(M, \mathbb{R})$ в $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Замечание. Суперпозиция двух векторных полей не является тензорным полем. Действительно, рассмотрим, например, векторные поля $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, которые в ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ имеют вид $\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x^j}$ и $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Суперпозиция этих векторных полей является оператором взятия второй производной $\vec{u} \circ \vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$. Посмотрим, как вид этого оператора изменяется при переходе к ЛСК $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$. По формуле производной сложной функции для любой гладкой функции f имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \, \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^k} \, \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^j} \, \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \, \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^j \partial x^i},$$

т.е.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^k} \, \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^j} \, \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \, \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Видим, что при изменении ЛСК компоненты оператора $\vec{u} \circ \vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$ меняется не по тензорному закону, т.е. этот оператор не является тензором.

Определение. *Скобкой Ли* или *коммутатором* векторных полей $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется дифференциальный оператор

$$[\vec{u}, \vec{v}\,] := \vec{u} \circ \vec{v} - \vec{v} \circ \vec{u}.$$

Лемма 1. *Коммутатор двух гладких векторных полей $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ является гладким векторным полем на M и выражается через компоненты векторных полей*

$$\vec{u} = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \vec{v} = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ *пространства* $T_P(M)$ *формулой*

$$[\vec{u}, \vec{v}\,] = \left(\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Доказательство. По определению коммутатора имеем

$$[\vec{u}, \vec{v}\,] = \vec{u}\circ\vec{v} - \vec{v}\circ\vec{u} = \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i \xi^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} - \xi^j \eta^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} =$$

$$= \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $\beta^i = \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}$ – гладкие скалярные функции. Таким образом, значение коммутатора $[\vec{u}, \vec{v}\,]$ на любой функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ представляется в виде

$$[\vec{u}, \vec{v}\,](f) = \beta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Это значение не зависит от ЛСК, поскольку согласно определению касательного вектора значения $\vec{u}(\vec{v}(f))$ и $\vec{v}(\vec{u}(f))$ не зависят от ЛСК. Таким образом, для любой точки $P \in M$ коммутатор $[\vec{u}, \vec{v}\,]$ удовлетворяет определению касательного вектора, т.е. $[\vec{u}(P), \vec{v}(P)] \in T_P(M)$. Отсюда и из гладкости функций β^i следует, что $[\vec{u}, \vec{v}\,]$ – гладкое векторное поле на M. □

Замечание. Пусть в некоторой ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ векторные поля $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеют вид $\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^2}$. Тогда $[\vec{u}, \vec{v}\,] = \vec{0}$.

§ 2. Алгебры Ли

Определение. *Алгеброй Ли* называется линейное пространство $\mathfrak{L}$, на котором задана операция $[\ ,\ ]$, переводящая любую пару $(x, y) \in$ $\in \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ в элемент $[x, y] \in \mathfrak{L}$ и обладающая свойствами:

(1) $[y, x] = -[x, y] \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}$ (кососимметричность);

(2) $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] = \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y] \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathfrak{L} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in$ $\in \mathbb{R}$ (линейность по первому аргументу);

(3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = \vec{0}$ (тождество Якоби).

Заметим, что из свойств (1), (2) следует линейность по второму аргументу.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^3$ является алгеброй Ли относительного операции векторного произведения $[a, b]$. Действительно, свойства (1) и (2) для векторного произведения хорошо известны. Тождество Якоби для векторного произведения следует из известного равенства

$$[a, [b, c]] = b\,(a, c) - c\,(a, b).$$

Пример 2. Пусть X – линейное пространство, $\mathfrak{L}(X)$ – пространство линейных отображений (операторов) $A : X \to X$. Тогда $\mathfrak{L}(X)$ является алгеброй Ли относительно коммутатора

$$[A, B] := A \circ B - B \circ A.$$

Действительно, свойства кососимметричности и линейности по первому аргументу для коммутаторов линейных операторов проверяются устно. Проверим тождество Якоби. Пусть $A, B, C \in \mathfrak{L}(X)$. Тогда

$$[A, [B, C]] = A \circ B \circ C - A \circ C \circ B - B \circ C \circ A + C \circ B \circ A,$$

$$[B, [C, A]] = B \circ C \circ A - B \circ A \circ C - C \circ A \circ B + A \circ C \circ B,$$

$$[C, [A, B]] = C \circ A \circ B - C \circ B \circ A - A \circ B \circ C + B \circ A \circ C.$$

Складывая эти равенства, получаем тождество Якоби.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{L}$ – линейное пространство гладких векторных полей на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда $\mathfrak{L}$ является алгеброй Ли относительно скобки Ли. Это следует из леммы 1 § 1 и предыдущего примера.

$\triangleright$

§ 3. Гамильтоновы системы и скобка Пуассона

Пусть задана гладкая функция $L(t,x,v)$, где $t \in [a,b]$, $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Функцию $L(t,x,v)$ называют *лагранжианом.*

Определение. *Функционалом действия* для функции $x \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ называется

$$S(x) := \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt. \tag{1}$$

Поскольку в функционал действия в качестве v подставляется $\dot{x}(t)$, то v можно интерпретировать как скорость движения по траектории $x(t)$.

Определение. *Простейшей задачей вариационного исчисления* называется задача минимизации (максимизации) функционала действия (1) по всем функциям $x \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям $x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается, что необходимым условием в простейшей задаче вариационного исчисления является следующая система *уравнений Эйлера*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(t,x(t),\dot{x}(t))}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L(t,x(t),\dot{x}(t))}{\partial x^i} = 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Зафиксируем точку $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ и обозначим $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, где $p_i^0 = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t_0, x_0, v_0)$. Будем предполагать, что в точке (t_0, x_0, v_0) матрица вторых производных $\frac{\partial^2 L(t,x,v)}{\partial v^i \partial v^j}$ невырождена. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (t_0, x_0, p^0) определена гладкая функция $v(t,x,p)$ такая, что для точек (t,x,v,p), лежащих в достаточно малой окрестности (t_0, x_0, v_0, p^0)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)\ \forall i \in \overline{1,n} \qquad \Leftrightarrow \qquad v^i = v^i(t,x,p)\ \forall i \in \overline{1,n}. \tag{3}$$

Определение. Пусть функция $v(t,x,p)$ определена соотношением (3). Тогда функция

$$H(t,x,p) := p_j v^j(t,x,p) - L(t,x,v(t,x,p)), \tag{4}$$

называется *гамильтонианом*, а переход от $L(t,x,v)$ к $H(t,x,p)$ называется *преобразованием Лежандра.*

Теорема 1. (О гамильтоновом формализме.) *Для любой пары функций $x \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ и $p \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ система уравнений Эйлера (2) вместе с системой уравнений*

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \ \forall i \in \overline{1,n} \tag{5}$$

эквивалентна гамильтоновой системе

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, x(t), p(t)), \quad i \in \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(t, x(t), p(t)), \quad i \in \overline{1,n}. \tag{7}$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v) \ \forall i \in \overline{1,n} \qquad \Leftrightarrow \qquad v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t,x,p) \ \forall i \in \overline{1,n}. \tag{8}$$

Действительно, дифференцируя (4) по p_i и опуская аргументы, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v^i + \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial v^j}\right)\frac{\partial v^j}{\partial p_i} \quad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{9}$$

Поэтому из равенств $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ следуют равенства $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Обратно, пусть $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Тогда согласно формуле (9) справедливы равенства

$$\left(p_j - \frac{\partial L}{\partial v^j}\right)\frac{\partial v^j}{\partial p_i} = 0 \quad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{10}$$

В силу (3) имеем $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v(t,x,p))$ $\forall i \in \overline{1,n}$. Дифференцируя эти равенства по p_k, получаем

$$\delta_i^k = \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\frac{\partial v^j}{\partial p^k} \qquad \forall i,k \in \overline{1,n}.$$

Поэтому матрица, составленная из частных производных $\frac{\partial v^j}{\partial p_i}$, невырождена. Отсюда и из равенств (10) следуют равенства $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$. Таким образом, соотношение (8) доказано.

Дифференцируя (4) по x^i, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = p_j\frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial x^i}.$$

Поэтому

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial v^j} \ \forall j \in \overline{1,n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{\partial L}{\partial x^i} \ \forall i \in \overline{1,n}. \tag{11}$$

Теперь докажем теорему.

Пусть функции $x(t)$, $p(t)$ удовлетворяют уравнениям (2), (5). Применяя соотношение (8) для $v = \dot{x}(t)$, получаем уравнения (6). Поскольку

$$\dot{p}_i(t) \overset{(5)}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \overset{(2)}{=} \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \overset{(11)}{=} -\frac{\partial H}{\partial x^i}(t, x(t), p(t)),$$

то уравнения (7) также справедливы.

Докажем обратное: из гамильтоновой системы уравнений (6), (7) следует система уравнений (2), (5). Пусть имеет место гамильтонова система. Применяя соотношение (8) для $v = \dot{x}(t)$, получаем систему (5). Поскольку

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \overset{(5)}{=} \dot{p}_i(t) \overset{(7)}{=} -\frac{\partial H}{\partial x^i}(t, x(t), p(t)) \overset{(11)}{=} \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

т.е. справедлива система уравнений Эйлера (2). □

Определение. *Скобкой Пуассона* непрерывно дифференцируемых функций $f(t, x, p)$ и $h(t, x, p)$ называется функция

$$\{h, f\} := \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial x^i}.$$

Замечание. Гамильтонову систему (6), (7) можно следующим образом записать в терминах скобки Пуассона:

$$\begin{cases} \dot{x}^i(t) = \{H, x^i\}, \\ \dot{p}_i(t) = \{H, p_i\}. \end{cases}$$

Определение. *Производной* функции $f(t, x, p)$ *в силу гамильтоновой системы* (6), (7) в точке (t_0, x_0, p^0) называется

$$\frac{df}{dt}(t_0, x_0, p^0) := \left.\frac{df(t, x(t), p(t))}{dt}\right|_{t=t_0},$$

где $x(t)$ и $p(t)$ – решения гамильтоновой системы (6), (7) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = p^0$.

Выразим производную в силу системы через скобку Пуассона. Согласно формуле производной сложной функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

Итак,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \tag{12}$$

Определение. Функция $f(t,x,p)$ называется *первым интегралом* гамильтоновой системы (6), (7), если $f(t,x(t),p(t)) = \mathrm{const}$ для любого решения $x(t)$, $p(t)$ этой системы.

Замечание. Из формулы (12) следует, что уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0$$

– это необходимое и достаточное условие того, что непрерывно дифференцируемая функция $f(t,x,p)$ является первым интегралом гамильтоновой системы.

Лемма 1. *Пространство гладких функций $f(t,x,p)$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона.*

Доказательство. Свойства линейности и кососимметричности скобки Пуассона следуют непросредственно из ее определения. Тождество Якоби

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

проверяется прямым вычислением. □

Определение. *Симплектической формой* на фазовом пространстве $\mathbb{R}^n_x \times$ $\times\, \mathbb{R}^n_p$ называется следующая дифференциальная форма степени 2

$$\omega = dx^i \wedge dp_i.$$

Так как $\omega = dx^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dx^i$, то матрица компонент симплектической формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},$$

где E_n – единичная матрица размера $n \times n$.

Найдем значение симплектической формы на паре касательных векторов

$$\vec{u} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad \vec{v} = c^i \frac{\partial}{\partial x^i} + d_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Поскольку $dx^i\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \delta^i_j$, $dx^i\left[\frac{\partial}{\partial p_j}\right] = 0$, $dp_i\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$, $dp_i\left[\frac{\partial}{\partial p_j}\right] = \delta^j_i$, то

$$\omega[\vec{u},\vec{v}] = a^i d_i - b_i c^i.$$

Определение. *Гамильтоновым полем* для функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ называется векторное поле $\vec{f}$ на $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$, определяемое формулой

$$\omega\left[\vec{f}(x,p), \vec{v}\right] = df(x,p)[\vec{v}\,] \qquad \forall \vec{v} \in T_{x,p}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p). \tag{13}$$

Лемма 2. *1) Каждой функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ соответствует единственное гамильтоново поле $\vec{f}$. Это векторное поле имеет вид*

$$\vec{f} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{14}$$

2) Значение гамильтонова поля $\vec{f}$ на функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ равно скобке Пуассона:

$$\vec{f}(\varphi) = \{f, \varphi\}.$$

Доказательство. 1) Разложим векторные поля $\vec{f}$ и $\vec{v}$ по базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}\right)$ касательного пространства $T_{x,p}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p)$:

$$\vec{f} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad \vec{v} = c^i \frac{\partial}{\partial x^i} + d_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Поскольку $\omega[\vec{f}, \vec{v}\,] = a^i d_i - b_i c^i$, $df[\vec{v}\,] = \frac{\partial f}{\partial x^i}c^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}d_i$, то формула (13) эквивалентна соотношению

$$a^i d_i - b_i c^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}c^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}d_i \qquad \forall c^i, d_i \in \mathbb{R},$$

которое, в свою очередь, эквивалентно системе уравнений

$$a^i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad b_i = -\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Таким образом, гамильтоново поле $\vec{f}$ однозначно определяется по функции $f(x,p)$ и имеет вид (14).

2) Равенство $\vec{f}(\varphi) = \{f, \varphi\}$ следует непосредственно из формулы (14) и определения скобки Пуассона. □

Теорема 2. (О связи скобки Пуассона и скобки Ли.) *Пусть $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$. Тогда гамильтоново поле для скобки Пуассона $\{f, g\}$ совпадает со скобкой Ли гамильтоновых полей $\vec{g}$ и $\vec{f}$:*

$$\overrightarrow{\{f, g\}} = \left[\vec{f}, \vec{g}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим результат применения гамильтонова поля $\overrightarrow{\{f,g\}}$ к функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$. Согласно лемме 2(2) имеем

$$\overrightarrow{\{f,g\}}(\varphi) = \{\{f,g\},\varphi\}.$$

Используя тождество Якоби и кососимметричность скобки Пуассона, приходим к равенствам

$$\overrightarrow{\{f,g\}}(\varphi) = \{f,\{g,\varphi\}\} - \{g,\{f,\varphi\}\}.$$

Еще раз применяя лемму 2(2), получаем $\{g,\varphi\} = \vec{g}(\varphi)$, $\{f,\{g,\varphi\}\} = \vec{f}(\vec{g}(\varphi)) = (\vec{f}\circ\vec{g})(\varphi)$. Аналогично, $\{g,\{f,\varphi\}\} = (\vec{g}\circ\vec{f})(\varphi)$. Таким образом, используя определение скобки Ли, приходим к равенствам

$$\overrightarrow{\{f,g\}}(\varphi) = (\vec{f}\circ\vec{g})(\varphi) - (\vec{g}\circ\vec{f})(\varphi) = \left[\vec{f},\vec{g}\right](\varphi).$$

В силу произвольности функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ получаем доказываемое равенство. $\square$

$\lhd$

§ 4. Интегральные кривые и фазовый поток векторного поля

Определение. Кривая $\Gamma = \{r(t):\ t\in[a,b]\}$, лежащая на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, называется *интегральной кривой* или *интегральной траекторией* векторного поля $\vec{v}$ на M, если для любого $t\in[a,b]$ и любой карты (ψ,U) на M такой, что $r(t)\in U$, выполнена система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = \xi(r(t)), \tag{1}$$

где $x(t) = (\psi^{-1}\circ r)(t)$ – координатное представление функции $r(t)$, $\xi(r(t))$ – координаты значения векторного поля $\vec{v}$ в точке $r(t)$ в ЛСК ψ^{-1}. При этом функция $r:[a,b]\to M$ называется *законом движения по интегральной кривой.*

Лемма 1. *Интегральная траектория и закон движения по ней не зависят от карты на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$. То есть, если система уравнений (1) выполнена для карты (ψ,U), то эта система выполнена для любой карты $(\tilde{\psi},\tilde{U})$ такой, что $r(t)\in\tilde{U}$.*

Доказательство. Пусть система уравнений (1) выполнена для карты (ψ, U) и пусть задана карта $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$ такая, что $r(t) \in \tilde{U}$. Пусть $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) = \tilde{\psi}^{-1}$ – соответствующие ЛСК, $w = \tilde{\psi}^{-1} \circ \psi$ – отображение замены системы координат. Согласно теореме о структуре множества касательных векторов координаты касательного вектора $\vec{v}_{\big|r(t)}$ меняются по закону $\tilde{\xi}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\, \xi^i$. Обозначим координатные представления закона движения $r(t)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ через $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \ldots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$ и $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1(t) \\ \ldots \\ \tilde{x}^n(t) \end{pmatrix}$ соответственно: $x(t) := (\psi^{-1} \circ r)(t)$, $\tilde{x}(t) := (\tilde{\psi}^{-1} \circ r)(t)$. Тогда $\tilde{x}(t) = (w \circ x)(t)$,

$$\frac{d\tilde{x}^i(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\, \frac{dx^j(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\, \xi^j(r(t)) = \tilde{\xi}^i(r(t)).$$

Поэтому система (1) выполнена для карты $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$. □

Лемма 2. *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $v : M \to \mathbb{R}^N$ – поле геометрических касательных векторов на M, т.е. $v(P) \in \widetilde{T}_P(M)$ для любой точки $P \in M$. Пусть $\vec{v}$ – соответствующее векторное поле, т.е. в любой точке $P \in M$ справедливо равенство $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial v}$. Тогда для любой функции $r \in C^1([a, b], M)$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *функция $r(t)$ является законом движения по некоторой интегральной кривой векторного поля $\vec{v}$;*

(б) $\frac{d}{dt} r(t) = v(r(t)) \qquad \forall t \in [a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем карту (ψ, U) на M и для всех $t \in [a, b]$ таких, что $r(t) \in U$, обозначим через $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \ldots \\ x^n(t) \end{pmatrix} := (\psi^{-1} \circ x)(t)$ координатное представление отображения $r(t)$. Дифференцируя равенство $r(t) = (\psi \circ x)(t)$, получаем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i(t)}{dt}.$$

Пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\vec{v}_{\big|r(t)}$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. Тогда $v(r(t)) = \xi^i\, \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$. Поэтому уравнение (б) эквивалентно уравнению

$$\frac{dx^i(t)}{dt}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=\xi^i\,\frac{\partial\psi}{\partial x^i}.$$

Поскольку векторы $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ линейно независимы, то последнее уравнение эквивалентно системе уравнений $\frac{dx^i(t)}{dt}=\xi^i$, т.е. системе уравнений (1). Таким образом, уравнение (б) эквивалентно условию (а).

Замечание. Из леммы 2 следует, что если Γ – интегральная кривая векторного поля $\vec{v}$ на $M\in\mathfrak{M}^n_N$, то для любой точки $P\in\Gamma$ геометрический касательный вектор $v=v(P)\in\widetilde{T}_P(M)$, соответствующий касательному вектору $\vec{v}_{|_P}=\frac{\partial}{\partial v}\in T_P(M)$, является геометрическим касательным вектором к кривой Γ:

$$v(P)\in\widetilde{T}_P(\Gamma).$$

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи Коши, из которой следует, что для гладкого векторного поля $\vec{v}$ в области $M\subset\mathbb{R}^n$ через каждую точку $P\in M$ проходит единственная интегральная кривая. Аналогичный результат справедлив и для гладкого многообразия $M\in\mathfrak{M}^n$.

Лемма 3. *Пусть $\Gamma=\{r(t)\ :\ \ t\in[a,b]\}$ – интегральная кривая векторного поля $\vec{v}$ на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$. Тогда*

$$\frac{d}{dt}(f\circ r)(t)=\vec{v}_{|_{r(t)}}(f)\qquad\forall f\in C^1(M,\mathbb{R}).$$

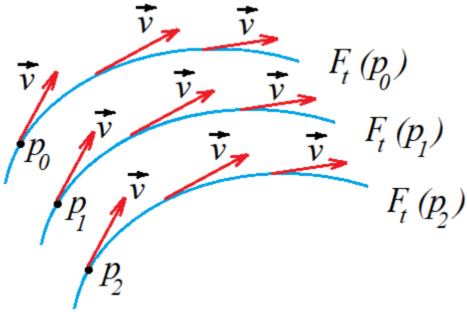
Доказательство. Пусть $x(t)=(x^1(t),\ldots,x^n(t))=(\psi^{-1}\circ r)(t)$ – координатное представление функции $r(t)$ в карте (ψ,U), где $r(t)\in$ $\in U$. Поскольку $f\circ r=f\circ\psi\circ x$, то по формуле производной сложной функции

$$\frac{d}{dt}(f\circ r)(t)=\frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial x^i}\,\frac{dx^i(t)}{dt}=\frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial x^i}\,\xi^i(r(t))=\vec{v}_{|_{r(t)}}(f),$$

где второе равенство следует из определения интегральной кривой, а третье равенство – из определения касательного вектора. □

Замечание. Лемма 3 позволяет интерпретировать значение векторного поля $\vec{v}$ в точке $r(t)$ на функции $f\in C^1(M,\mathbb{R})$ как скорость изменения физической величины f для материальной точки, движущейся по интегральной кривой векторного поля $\vec{v}$ (см. замечание после теоремы 2 § 5 главы 17).

Определение. Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $r(t, p_0) = r(t)$ – закон движения по интегральной кривой векторного поля $\vec{v}$, удовлетворяющий начальному условию $r(0, p_0) = p_0$ (т.е. решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (1) с этим начальным условием). Тогда отображение $F_t : M \to M$, заданное равенством $F_t(p_0) := r(t, p_0)$, $p_0 \in M$, $t \in \mathbb{R}$, называется ***фазовым потоком*** векторного поля $\vec{v}$.



На рисунке для многообразия $M = \mathbb{R}^2$ изображены интегральные кривые векторного поля $\vec{v}$, значения которого показаны как геометрические касательные векторы к интегральным кривым.

Лемма 4. *Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \in \mathfrak{M}^n$. Тогда фазовый поток F_t векторного поля $\vec{v}$ является локальной группой гладких диффеоморфизмов, т.е. для любой точки $p_0 \in \in M$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при всех $t \in (-\delta, \delta)$ сужение отображения F_t на некоторую окрестность точки p_0 является гладким диффеоморфизмом, удовлетворяющим групповому свойству*

$$F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1 + t_2} \qquad \forall t_1, t_2 \in (-\delta, \delta). \tag{2}$$

Доказательство. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для любой точки $p_0 \in M$ найдется число $\delta > 0$ такое, что решение $r(t, p)$ задачи Коши (1) с начальным условием $r(0, p) = p$ существует, единственно и гладким образом зависит от t и p, если $t \in (-2\delta, 2\delta)$ и p лежит в некоторой окрестности точки p_0. Фиксируем точку p из этой окрестности и $t_1, t_2 \in (-\delta, \delta)$. Обозначим $p_1 = r(t_1, p)$. Тогда функции $r(t, p_1)$ и $r(t_1 + t, p)$ являются решениями задачи Коши для системы (1) с начальным условием

$$r(t, p_1)\big|_{t=0} = r(t_1 + t, p)\big|_{t=0} = p_1.$$

В силу единственности решения задачи Коши $r(t_1 + t_2, p) = r(t_2, p_1) = r(t_2, r(t_1, p))$, т.е. в точке p имеет место групповое свойство (2). Из этого свойства следует, что $F_{-t} = (F_t)^{-1}$ при $t \in (-\delta, \delta)$. В силу гладкой зависимости решения задачи Коши $r(t, p)$ от p отображение F_t и обратное к нему $(F_t)^{-1} = F_{-t}$ являются гладкими отображениями, поэтому отображение F_t (точнее, его сужение на некоторую окрестность точки p_0) является гладким диффеоморфизмом. $\square$

§ 5. Перенос тензорных полей

Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^n$, $M_2 \in \mathfrak{M}^n$, $F \in C^1(M_1, M_2)$. Фиксируем точку $P \in M_1$ и карту (ψ_1, U_1) на M_1 такую, что $P \in U_1$. Обозначим $Q := F(P)$ и зафиксируем карту (ψ_2, U_2) на M_2 такую, что $Q \in U_2$. Пусть $(x^1, \ldots, x^n) = \psi_1^{-1}$ и $(y^1, \ldots, y^n) = \psi_2^{-1}$ – соответствующие ЛСК. Обозначим через $y(x) := (\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1)(x)$ координатное представление отображения F.

Согласно выражению для прямого переноса базисного вектора касательного пространства через частные производные координатных функций отображения любой касательный вектор $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_P(M_1)$ при отображении F переходит в касательный вектор

$$F_*(\vec{v}) = dF(P)[\vec{v}] = \xi^i\, \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\, \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{1}$$

Если отображение F не взаимно однозначно, то при этом отображении векторное поле $\vec{v}$ на M_1 не переходит в векторное поле $F_*(\vec{v})$ на M_2, поскольку заданной точке $Q \in M_2$ могут соответствовать различные точки $P, P' \in M_1$ такие, что $F(P) = F(P') = Q$ и при этом значения векторного поля $\vec{v}$ в точках P и P' могут быть различными, что не позволяет однозначно определить значение векторного поля $F_*(\vec{v})$ в точке Q. В случае, когда отображение $F : M_1 \to M_2$ является гладким диффеоморфизмом, формула (1) гладкому векторному полю $\vec{v}$ на M_1 сопоставляет гладкое векторное поле $F_*(\vec{v})$ на M_2, называемое *прямым переносом* векторного поля $\vec{v}$. *Обратный перенос* $F^* := (F^{-1})_*$ гладкому векторному полю $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ на M_2 сопоставляет гладкое векторное поле

$$F^*(\vec{v}) = \xi^i \ \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \ \frac{\partial}{\partial x^j}$$

на M_1, где $\frac{\partial x^j}{\partial y^i}$ – элементы матрицы Якоби функции $x(y) = (\psi_1^{-1} \circ F^{-1} \circ \psi_2)(y)$, обратной к функции $y(x)$.

Согласно выражению для обратного переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения любой ковектор $\omega = \omega_i dy^i \in T^*_Q(M_2)$ обратным переносом переводится в ковектор

$$F^*(\omega) = \omega_i \ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \ dx^j \in T^*_P(M_1).$$

Обобщая эти определения, дадим общее определение обратного переноса тензорного поля.

Определение. Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^n$, $M_2 \in \mathfrak{M}^n$, $F : M_1 \to M_2$ – гладкий диффеоморфизм. *Обратным переносом* тензорного поля T типа (s, q), заданного на M_2, называется тензорное поле F^*T типа (s, q) на M_1, компоненты $(F^*T)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_q}$ которого в точке $P \in M_1$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi_1^{-1}$ выражаются через компоненты тензорного поля T в точке $Q = F(P) \in M_2$ в ЛСК $(y^1, \ldots, y^n) = \psi_2^{-1}$ формулой

$$(F^*T)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_q}(P) = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{j'_s}} \ \frac{\partial y^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{i'_q}}{\partial x^{i_q}} \ T^{j'_1 \ldots j'_s}_{i'_1 \ldots i'_q}(Q), \qquad (2)$$

где $\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i}$ – элементы матрицы Якоби координатного представления $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1)(x)$ диффеоморфизма F, $\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}}$ – элементы обратной матрицы.

Замечание. Формула (2) совпадает с формулой изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК. Это вполне естественно, т.к. в случае тождественного отображения F формула (2) и является формулой изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК.

Замечание. Из формулы (2) видно, что обратный перенос гладкого тензорного поля T при гладком диффеоморфизме F является гладким тензорным полем.

§ 6. Производная Ли

Определение. Пусть $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ – семейство тензорных полей типа (s,q) на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$. Производной $\frac{d}{dt}T_t$ в точке $t_0\in\mathbb{R}$ называется тензорное поле типа (s,q) на M, значение которого в любой точке $P\in M$ на любых ковекторах $l^1,\dots,l^s\in T^*_P(M)$ и векторах $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q\in T_P(M)$ определяется следующим естественным образом:

$$\left(\frac{d}{dt}T_t\right)\bigg|_{t=t_0}(P)[l^1,\dots,l^s,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q]:=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(T_t(P)[l^1,\dots,l^s,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q]\right)\bigg|_{t=t_0}.$$

Производная правой части этого равенства – это производная скалярной функции $T_t(P)[l^1,\dots,l^s,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q]$ по скалярной переменной t.

Замечание. Подставляя в предыдущую формулу базисные векторы $\vec{v}_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$ пространства $T_P(M)$ и базисные ковекторы $l^j=dx^j$, получаем формулу, выражающую компоненты тензорного поля $\frac{d}{dt}T_t$ в ЛСК $(x^1,\dots,x^n)$ через производные компонент тензорного поля T_t:

$$\left(\frac{d}{dt}T_t\right)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}=\frac{d}{dt}\,(T_t)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}\,.$$

Определение. Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$; $F_t:M\to M$ – фазовый поток векторного поля $\vec{v}$. Пусть T является C^1-гладким тензорным полем типа (s,q) на M. *Производной Ли* $L_{\vec{v}}T$ тензорного поля T вдоль векторного поля $\vec{v}$ называется производная по t в точке $t=0$ обратного переноса тензорного поля T фазовым потоком F_t:

$$L_{\vec{v}}T:=\frac{d}{dt}(F_t^*T)\bigg|_{t=0}.$$

Замечание. Производная Ли $L_{\vec{v}}T$ показывает скорость изменения тензора T при деформации пространства, задаваемой фазовым потоком F_t векторного поля $\vec{v}$.

Замечание. Поскольку F_t^*T – тензор того же типа, что и тензор T, то $L_{\vec{v}}T$ – тензор того же типа.

Следующая лемма дает явную формулу для производной Ли.

Лемма 1. *Компоненты тензора $L_{\vec{v}}T$ следующим образом выражаются через производные компонент тензора T и координат ξ^i векторного поля $\vec{v}$:*

$$(L_{\vec{v}}T)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q} = \xi^k \, \frac{\partial T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}}{\partial x^k} +$$

$$-T^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_q} \, \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^k} - \ldots - T^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_q} \, \frac{\partial \xi^{j_s}}{\partial x^k} +$$

$$+T^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_q} \, \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i_1}} + \ldots + T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{q-1}k} \, \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i_q}}.$$

Доказательство. Фиксируем карту (ψ, U) на M. По определению фазового потока F_t имеем

$$\frac{d}{dt}(\psi^{-1} \circ F_t(p)) = \xi(F_t(p)), \qquad F_0(p) = p.$$

Обозначим $y_t(x) := (\psi^{-1} \circ F_t \circ \psi)(x)$ – координатное представление фазового потока. Тогда

$$\frac{d}{dt} y_t(x) = \xi(\psi \circ y_t)(x), \qquad y_0(x) = x.$$

Следовательно,

$$y_t(x) = x + t\xi(\psi(x)) + o(t), \quad t \to 0, \tag{1}$$

где $o(t)$ – такая гладкая функция относительно x и t, что $\frac{o(t)}{t} \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому

$$(T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q} \circ \psi)(y_t(x)) = (T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q} \circ \psi)(x) + t\xi^k \, \frac{\partial T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}}{\partial x^k} + o(t), \quad t \to 0,$$

а значит,

$$T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}(F_t(P)) = T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}(P) + t\xi^k \, \frac{\partial T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}}{\partial x^k} + o(t), \quad t \to 0.$$

Дифференцируя равенство (1), получаем следующие выражения для производных компонент вектор-функции $y(x) = y_t(x)$ по компонентам вектора $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i} = \delta^{i'}_i + t\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^i} + o(t), \quad t \to 0.$$

Компоненты обратной матрицы равны

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}} = \delta^j_{j'} - t\frac{\partial \xi^j}{\partial x^{j'}} + o(t), \quad t \to 0.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2) § 5, получаем

$$(F_t^* T)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q} = \left(\delta^{j_1}_{j'_1} - t\frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\right)\ldots\left(\delta^{j_s}_{j'_s} - t\frac{\partial \xi^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}\right)\times$$

$$\times\left(\delta^{i'_1}_{i_1} + t\frac{\partial \xi^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\right)\ldots\left(\delta^{i'_q}_{i_q} + t\frac{\partial \xi^{i'_q}}{\partial x^{i_q}}\right)\left(T^{j'_1\ldots j'_s}_{i'_1\ldots i'_q} + t\xi^k\,\frac{\partial T^{j'_1\ldots j'_s}_{i'_1\ldots i'_q}}{\partial x^k}\right) + o(t) =$$

$$= T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q} + t\left(\xi^k\,\frac{\partial T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} T^{j'_1 j_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q} - \ldots - \frac{\partial \xi^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} T^{j_1\ldots j_{s-1} j'_s}_{i_1\ldots i_q} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \xi^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} T^{j_1\ldots j_s}_{i'_1 i_2\ldots i_q} + \ldots + \frac{\partial \xi^{i'_q}}{\partial x^{i_q}} T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{q-1} i'_q}\right) + o(t), \quad t \to 0.$$

Отсюда вытекает доказываемое равенство. □

Замечание. Из леммы 1 следует линейность производной Ли $L_{\vec{v}}T$ как относительно тензорного поля T, так и относительно векторного поля $\vec{v}$.

Рассмотрим производные Ли конкретных типов тензоров.

Пример 1. Для скалярного поля $f \in C^1(M, \mathbb{R})$, т.е. тензорного поля типа $(0, 0)$ лемма 1 дает формулу

$$L_{\vec{v}} f = \xi^k\,\frac{\partial f}{\partial x^k} = \vec{v}(f).$$

Таким образом, *производная Ли скалярного поля f по векторному полю $\vec{v}$ – это производная функции f по вектору $\vec{v}$.*

Определение. Функция $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ называется *первым интегралом* векторного поля $\vec{v}$, если $L_{\vec{v}} f = 0$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$.

Знание первого интеграла векторного поля $\vec{v}$ позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений (1) § 4.

Пример 2. Компоненты производной Ли векторного поля $\vec{u} = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ на $M \in \mathfrak{M}^n$ вдоль векторного поля $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ согласно лемме 1 имеют вид

$$(L_{\vec{v}}\vec{u})^j = \xi^k \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k}.$$

Сравнивая это выражение с формулой, доказанной в лемме 1 § 1, видим, что *производная Ли векторного поля $\vec{u}$ вдоль векторного поля $\vec{v}$ совпадает со скобкой Ли (коммутатором)* $[\vec{v}, \vec{u}]$:

$$L_{\vec{v}}\vec{u} = [\vec{v}, \vec{u}].$$

Поскольку $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$, то $L_{\vec{u}}\vec{v} = -L_{\vec{v}}\vec{u}$.

Пример 3. Пусть $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, $\omega \in \Omega^1_1(M)$ – ковекторное поле, $\omega = \omega_j dx^j$. Тогда согласно лемме 1 производная Ли ковекторного поля ω имеет вид:

$$L_{\vec{v}}\omega = \left(\xi^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) dx^j. \tag{2}$$

Лемма 2. *Для дифференциальных форм $\alpha \in \Omega^p_1(M)$, $\beta \in \Omega^q_1(M)$ и гладкого векторного поля $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ справедлива формула Лейбница*

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta).$$

Доказательство. Согласно определению производной Ли

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = \frac{d}{dt} F_t^*(\alpha \wedge \beta)\bigg|_{t=0}.$$

Поскольку обратный перенос внешнего произведения дифференциальных форм совпадает с внешним произведением обратных переносов этих дифференциальных форм, то

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = \frac{d}{dt}(F_t^*\alpha) \wedge (F_t^*\beta)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\alpha_t \wedge \beta_t)\bigg|_{t=0}, \tag{3}$$

где введены обозначения $\alpha_t := F_t^*\alpha, \quad \beta_t := F_t^*\beta$.

Покажем, что

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t \wedge \beta_t) = \left(\frac{d}{dt}\alpha_t\right) \wedge \beta_t + \alpha_t \wedge \left(\frac{d}{dt}\beta_t\right). \tag{4}$$

В силу линейности производной и внешнего произведения равенство (4) достаточно проверить для мономов

$$\alpha_t = a_t\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \qquad \beta_t = b_t\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Поскольку $\alpha_t \wedge \beta_t = a_t \cdot b_t\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$, то

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t \wedge \beta_t) = \frac{d(a_t \cdot b_t)}{dt}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Используя формулу Лейбница дифференцирования произведения скалярных функций

$$\frac{d(a_t \cdot b_t)}{dt} = \frac{da_t}{dt}\, b_t + a_t\, \frac{db_t}{dt},$$

получаем равенство (4).

Из равенств (3), (4) следует, что

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = \frac{d}{dt}\alpha_t\Big|_{t=0} \wedge \beta_0 + \alpha_0 \wedge \frac{d}{dt}\beta_t\Big|_{t=0}. \tag{5}$$

Поскольку согласно определению фазового потока $F_0 = \mathrm{Id}$, то $F_0^* = \mathrm{Id}$ и $\alpha_0 = F_0^*\alpha = \alpha$, аналогично, $\beta_0 = \beta$. Согласно определению производной Ли $\frac{d}{dt}\alpha_t\big|_{t=0} = L_{\vec{v}}\alpha$ и, аналогично, $\frac{d}{dt}\beta_t\big|_{t=0} = L_{\vec{v}}\beta$. Подставляя эти выражения в формулу (5), получаем доказываемое равенство. □

Теорема 1. (О коммутативности производной Ли и внешнего дифференцирования.) *Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда производная Ли $L_{\vec{v}}$ и внешний дифференциал d перестановочны, если они применяются к C^2-гладким дифференциальным формам:*

$$L_{\vec{v}}d\omega = dL_{\vec{v}}\omega \qquad \forall \omega \in \Omega_2^q(M).$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $q = 0$, т.е. $\omega = f \in C^2(M, \mathbb{R})$. Пусть $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Поскольку $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$, то согласно формуле (2) имеем

$$L_{\vec{v}} df = \left(\xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) dx^j.$$

С другой стороны, $L_{\vec{v}} f = \vec{v}(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Следовательно,

$$dL_{\vec{v}} f = \left(\xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) dx^j = L_{\vec{v}} df.$$

Таким образом, в случае $q = 0$ доказываемая формула справедлива.

Шаг 2. Пусть $\omega = dx^i$ – дифференциал i-ой координатной функции. Используя шаг 1, получаем $L_{\vec{v}}\omega = L_{\vec{v}} dx^i = dL_{\vec{v}} x^i$. Поэтому

$$dL_{\vec{v}}\omega = d^2 L_{\vec{v}} x^i = 0 = L_{\vec{v}} d\omega,$$

где последнее равенство следует из того, что $d\omega = d^2 x^i = 0$. Итак, в случае $\omega = dx^i$ доказываемая формула также справедлива.

Шаг 3. Покажем, что если $\omega = \alpha \wedge \beta$ и для дифференциальных форм $\alpha \in \Omega_2^s(M)$ и $\beta \in \Omega_2^p(M)$ доказываемое равенство справедливо, т.е.

$$L_{\vec{v}} d\alpha = dL_{\vec{v}}\alpha, \qquad L_{\vec{v}} d\beta = dL_{\vec{v}}\beta, \tag{6}$$

то $L_{\vec{v}} d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$.

Действительно, в силу правила Лейбница для внешнего дифференциала

$$d\omega = d\alpha \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge d\beta.$$

Используя формулу Лейбница для производной Ли, получаем

$$L_{\vec{v}} d\omega = (L_{\vec{v}} d\alpha) \wedge \beta + d\alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge d\beta + (-1)^s \alpha \wedge (L_{\vec{v}} d\beta).$$

Учитывая равенства (6), приходим к равенству

$$L_{\vec{v}} d\omega = (dL_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + d\alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge d\beta + (-1)^s \alpha \wedge (dL_{\vec{v}}\beta). \tag{7}$$

С другой стороны, формула Лейбница для производной Ли дает равенство

$$L_{\vec{v}}\omega = (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta),$$

откуда в силу правила Лейбница для внешнего дифференциала следует, что

$$dL_{\vec{v}}\omega = (dL_{\vec{v}}\alpha)\wedge\beta + (-1)^s(L_{\vec{v}}\alpha)\wedge d\beta + d\alpha\wedge(L_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s\alpha\wedge(dL_{\vec{v}}\beta).$$

Сравнивая полученное выражение с равенством (7), получаем равенство $L_{\vec{v}}d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$.

Шаг 4. Завершим доказательство теоремы. В силу линейности операций производной Ли и внешнего дифференцирования формулу $L_{\vec{v}}d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$ достаточно доказать для одного монома

$$\omega = f\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_q},$$

где $f \in C^2(M,\mathbb{R})$. Заметим, что $\omega = f\alpha = f\wedge\alpha$, где $\alpha = dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_q}$. В силу утверждений, доказанных на шагах 1 и 2, имеем $dL_{\vec{v}}f = L_{\vec{v}}df$ и $dL_{\vec{v}}dx^i = L_{\vec{v}}d(dx^i)$. Отсюда в силу шага 3 получаем равенство $L_{\vec{v}}d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$. □

§ 7. Внутреннее произведение векторного поля на дифференциальную форму, тождество Картана

Определение. Пусть $\vec{v}$ – векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. *Внутренним произведением* векторного поля $\vec{v}$ на дифференциальную форму $\omega \in \Omega_0^q(M)$ при $q \geq 1$ называется дифференциальная форма $i_{\vec{v}}\omega$, значение которой равно

$$(i_{\vec{v}}\omega)(P)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{q-1}] := \omega(P)[\vec{v},\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{q-1}]$$
$$\forall P \in M\ \forall \vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{q-1} \in T_P(M).$$

Если $\omega \in \Omega_0^0(M)$, т.е. ω – функция из M в $\mathbb{R}$, то положим $i_{\vec{v}}\omega = 0$.

Замечание. Операция внутреннего умножения $i_{\vec{v}}$ на гладкое векторное поле $\vec{v}$ каждой дифференциальной форме $\omega \in \Omega_k^q(M)$ степени q ставит в соответствие дифференциальную форму $i_{\vec{v}}\omega \in \Omega_k^{q-1}(M)$ степени $q-1$ (кососимметричность тензора $(i_{\vec{v}}\omega)(P)$ следует из кососимметричности тензора $\omega(P)$).

Замечание. Непосредственно из определения следует, что внутреннее произведение $i_{\vec{v}}\omega$ обладает свойством линейности как по дифференциальной форме ω, так и по векторному полю $\vec{v}$.

Замечание. Значение внутреннего произведения $i_{\vec{v}}\omega$ в точке $P \in \in M$ зависит лишь от значений векторного поля $\vec{v}$ и дифференциальной формы ω в точке P, в отличие, например, от производной Ли $L_{\vec{v}}\omega$ или внешнего дифференциала $d\omega$, значения которых в точке P зависят от значений $\vec{v}$ и ω не только в точке P, но и в окрестности этой точки.

При умножении векторного поля $\vec{v}$ или дифференциальной формы ω на функцию $f : M \to \mathbb{R}$ значение функции можно вынести за знак внутреннего умножения:

$$i_{f\vec{v}}\omega = f\, i_{\vec{v}}\omega, \qquad i_{\vec{v}}(f\omega) = f\, i_{\vec{v}}\omega. \tag{1}$$

Замечание. Пусть $\omega_{i_0 i_1 \ldots i_{q-1}}$ – компоненты дифференциальной формы ω, ξ^k – координаты вектора $\vec{v}(P)$ в некоторой ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Непосредственно из определения внутреннего произведения вытекает следующая формула для компонент дифференциальной формы $\alpha := i_{\vec{v}}\omega$:

$$\alpha_{i_1 \ldots i_{q-1}} = \xi^k \omega_{k i_1 \ldots i_{q-1}}. \tag{2}$$

Поэтому внутренее произведение $i_{\vec{v}}\omega$ является сверткой тензорных полей $\vec{v}$ и ω.

Замечание. Если $f \in C^1(M, \mathbb{R})$, то по определению внутреннего умножения

$$i_{\vec{v}} df(P) = df(P)[\vec{v}\,] = \vec{v}(f). \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Внутреннее произведение векторного поля $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^1}$ на дифференциальную форму $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}$ при $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$ имеет вид*

$$i_{\vec{v}}\omega = \begin{cases} 0, & i_1 > 1, \\ dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}, & i_1 = 1. \end{cases}$$

Доказательство. По теореме о представлении дифференциальной формы через ее компоненты дифференциальную форму $\alpha := i_{\vec{v}}\omega$ можно следующим образом представить через ее компоненты:

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_2 < \ldots < j_q \leq n} \alpha_{j_2 \ldots j_q}\, dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \tag{4}$$

Поскольку координаты векторного поля $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^1}$ равны $\xi^i = \delta^i_1$, то согласно равенству (2) имеем

$$\alpha_{j_2\ldots j_q} = \delta_1^k \omega_{kj_2\ldots j_q} = \omega_{1j_2\ldots j_q}.$$

Используя теорему о представлении дифференциальной формы через ее компоненты, получаем, что при $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$ компоненты $\omega_{j_1\ldots j_q}$ дифференциальной формы $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}$ имеют вид:

$$\omega_{j_1\ldots j_q} = \begin{cases} 1, & (j_1,\ldots,j_q) = (i_1,\ldots,i_q), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\alpha_{j_2\ldots j_q} = \begin{cases} 1, & (1, j_2,\ldots,j_q) = (i_1,\ldots,i_q), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда и из равенства (4) следует доказываемое равенство. □

Теорема 1. (Правило Лейбница для внутреннего умножения.) *Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда взаимодействие внутреннего умножения с внешним описывается правилом Лейбница:*

$$i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta) \qquad \forall \alpha \in \Omega_0^s(M),\ \beta \in \Omega_0^p(M).$$

Доказательство. Фиксируем некоторую ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$ на M. Поскольку внутреннее произведение $i_{\vec{v}}\omega$ обладает свойством линейности как по дифференциальной форме ω, так и по векторному полю $\vec{v}$, а также с учетом равенств (1) достаточно доказать, что равенство

$$i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta) \tag{5}$$

справедливо для векторного поля $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^k}$ и дифференциальных форм

$$\alpha = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}, \qquad \beta = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}. \tag{6}$$

Перенумеровывая при необходимости координатные функции $x^1,\ldots,x^n$, без потери общности будем предполагать, что $k = 1$, т.е. $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Поскольку при изменении порядка сомножителей во внешних произведениях (6) все слагаемые формулы (5) одновременно меняют или не меняют знак (в зависимости от четности перестановки), то можно считать, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$.

Рассмотрим 4 случая.

Случай 1. $i_1 > 1$, $j_1 > 1$.

В этом случае согласно лемме 1 имеем $i_{\vec{v}}\alpha = i_{\vec{v}}\beta = i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = 0$. Поэтому формула (5) в данном случае справедлива.

Случай 2. $i_1 = 1$, $j_1 > 1$.

В силу леммы 1 имеем $i_{\vec{v}}\alpha = dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}$, $i_{\vec{v}}\beta = 0$, $i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge \beta = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta$. В этом случае формула (5) также верна.

Случай 3. $i_1 > 1$, $j_1 = 1$.

В этом случае согласно лемме 1 получаем $i_{\vec{v}}\alpha = 0$, $i_{\vec{v}}\beta = dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}$. Поскольку

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge dx^1 \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} = (-1)^s dx^1 \wedge \alpha \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p},$$

то

$$i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (-1)^s \alpha \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} = (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta).$$

Формула (5) снова справедлива.

Случай 4. $i_1 = 1$, $j_1 = 1$.

В этом случае $\alpha \wedge \beta = 0$. Согласно лемме 1 имеем

$$i_{\vec{v}}\alpha = dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}, \qquad i_{\vec{v}}\beta = dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}.$$

Поэтому

$$(i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta) = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge dx^1 \wedge (i_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s dx^1 \wedge (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge (i_{\vec{v}}\beta) = 0,$$

т.к. $(i_{\vec{v}}\alpha) \wedge dx^1 = (-1)^{s-1} dx^1 \wedge (i_{\vec{v}}\alpha)$. Формула (5) опять справедлива.

Итак, во всех случаях формула (5) справедлива. $\square$

Теорема 2. (Тождество Картана.) Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, пусть $\omega \in \Omega_1^q(M)$. Тогда справедливо следующее *магическое тождество Картана* (*формула гомотопии*), выражающее производную Ли $L_{\vec{v}}$ через операции внутреннего умножения и внешнего дифференциала:

$$L_{\vec{v}}\omega = i_{\vec{v}}d\omega + d\, i_{\vec{v}}\omega.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $q = 0$, т.е. $\omega = f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Тогда, как показано в примере 1 § 6 $L_{\vec{v}} f = \vec{v}(f) = i_{\vec{v}} df$, где последнее равенство следует из формулы (3). Поскольку $i_{\vec{v}} f = 0$, то в этом случае тождество Картана справедливо.

Шаг 2. Пусть $\omega = dx^i$ – дифференциал i-ой координатной функции. В силу теоремы о коммутативности производной Ли и внешнего дифференцирования имеем $L_{\vec{v}} dx^i = dL_{\vec{v}} x^i$. Как показано на предыдущем шаге, $L_{\vec{v}} x^i = i_{\vec{v}} dx^i$. Поэтому в данном случае

$$L_{\vec{v}}\omega = L_{\vec{v}} dx^i = dL_{\vec{v}} x^i = d\ i_{\vec{v}} dx^i = d\ i_{\vec{v}}\omega.$$

Поскольку $d\omega = d^2 x^i = 0$, то в данном случае тождество Картана снова выполнено.

Шаг 3. Покажем, что если тождество Картана справедливо для дифференциальных форм $\alpha \in \Omega_1^s(M)$ и $\beta \in \Omega_1^p(M)$, т.е.

$$L_{\vec{v}}\alpha = i_{\vec{v}} d\alpha + d\ i_{\vec{v}}\alpha, \qquad L_{\vec{v}}\beta = i_{\vec{v}} d\beta + d\ i_{\vec{v}}\beta, \tag{7}$$

то это тождество справедливо для дифференциальной формы $\omega = \alpha \wedge \beta$.

Согласно правилу Лейбница для внешнего дифференциала имеем $d\omega = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (d\beta)$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем

$$i_{\vec{v}} d\omega = i_{\vec{v}}\Big((d\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (d\beta)\Big) =$$

$$= (i_{\vec{v}} d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{s-1}(d\alpha) \wedge (i_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge (d\beta) + \alpha \wedge (i_{\vec{v}} d\beta).$$

С другой стороны, согласно теореме 1 имеем $i_{\vec{v}}\omega = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta)$. Отсюда по правилу Лейбница для внешнего дифференциала получаем

$$d\ i_{\vec{v}}\omega = d\Big((i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta)\Big) =$$

$$= (d\ i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{s-1}(i_{\vec{v}}\alpha) \wedge (d\beta) + (-1)^s (d\alpha) \wedge (i_{\vec{v}}\beta) + \alpha \wedge (d\ i_{\vec{v}}\beta).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$i_{\vec{v}} d\omega + d\ i_{\vec{v}}\omega =$$

$$= (i_{\vec{v}} d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (i_{\vec{v}} d\beta) + (d\ i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (d\ i_{\vec{v}}\beta) =$$

$$= (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta) = L_{\vec{v}}\omega,$$

где предпоследнее равенство следует из равенств (7), а последнее – из формулы Лейбница для производной Ли.

Шаг 4. Завершим доказательство теоремы. В силу линейности операций производной Ли и внешнего дифференцирования тождество Картана достаточно доказать для одного монома

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q},$$

где $f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Заметим, что $\omega = f\alpha = f \wedge \alpha$, где $\alpha = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}$. В силу утверждений, доказанных на шагах 1 и 2, тождество Картана справедливо для дифференциальных форм f и dx^i. Отсюда в силу шага 3 получаем тождество Картана для дифференциальной формы ω. $\square$

Глава 21

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского

Лемма 1. (Неравенство Юнга.) *Для любых чисел* $a, b \geq 0$ *и чисел* $p, q > 1$ *таких, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *справедливо неравенство Юнга:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство. Поскольку функция $f(x) = \ln x$ выпукла вверх на множестве $(0, +\infty)$ (это следует из неравенства $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ при $x > 0$), то

$$\lambda \ln x_1 + (1-\lambda)\ln x_2 \leq \ln(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \qquad \forall \lambda \in [0,1] \quad \forall x_1, x_2 > 0.$$

Применяя это неравенство для $\lambda = \frac{1}{p}$, $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$ и замечая, что $1 - \lambda = \frac{1}{q}$, получаем

$$\ln(ab) = \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right),$$

откуда следует доказываемое неравенство. □

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{C}$ называется *измеримой*, если функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ измеримы.

Лемма 2. (Неравенство Гельдера.) *Пусть* X *– измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$*; числа* $p, q > 1$ *таковы, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*; измеримые функции* $f : X \to \mathbb{C}$ *и* $g : X \to \mathbb{C}$ *таковы, что* $\int\limits_X |f(x)|^p\,dx < +\infty$ *и* $\int\limits_X |g(x)|^q\,dx < +\infty$*. Тогда справедливо неравенство Гельдера:*

$$\int\limits_X |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Положим

$$I_f := \int\limits_X |f(x)|^p\,dx, \qquad I_g := \int\limits_X |g(x)|^q\,dx.$$

Если $I_f = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на X и неравенство Гельдера тривиально выполнено. Аналогично при $I_g = 0$. Поэтому будем предполагать, что $I_f > 0$ и $I_g > 0$. Применяя неравенство Юнга для $a = \frac{|f(x)|}{I_f^{1/p}}$, $b = \frac{|g(x)|}{I_g^{1/q}}$, имеем

$$\frac{|f(x)\,g(x)|}{I_f^{1/p}\cdot I_g^{1/q}} \le \frac{|f(x)|^p}{I_f\cdot p} + \frac{|g(x)|^q}{I_g\cdot q} \qquad \forall x\in X.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\frac{1}{I_f^{1/p}\cdot I_g^{1/q}}\int\limits_X |f(x)\,g(x)|\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{I_f\cdot p}\int\limits_X |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{I_g\cdot q}\int\limits_X |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство. □

Замечание. Если $|f(x)|^p = |g(x)|^q$, то неравенство Гельдера обращается в равенство. Действительно, пусть $|f(x)|^p = |g(x)|^q = h(x)$. Тогда левая и правая части неравенства Гельдера равны $\int\limits_X h(x)\,dx$.

Замечание. В следующем параграфе будет определена норма

$$\|f\|_{L_p(X)} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

В терминах этой нормы неравенство Гельдера принимает вид

$$\int\limits_X |f(x)\,g(x)|\,dx \le \|f\|_{L_p(X)}\cdot\|g\|_{L_q(X)}.$$

Замечание. В случае $p = 2$ из равенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ следует, что $q = 2$. В этом случае неравенство Гельдера принимает вид

$$\int\limits_X |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \sqrt{\int\limits_X |f(x)|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_X |g(x)|^2\, dx}.$$

Следовательно, для любых измеримых функций $f, g : X \to \mathbb{C}$ таких, что $\int\limits_X |f(x)|^2\, dx < +\infty$ и $\int\limits_X |g(x)|^2\, dx < +\infty$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_X f(x)\, \overline{g(x)}\, dx\right| \leq \sqrt{\int\limits_X |f(x)|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_X |g(x)|^2\, dx}.$$

Это неравенство совпадает с неравенством Коши–Буняковского (теорема 1 §2 главы 4)

$$|(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}$$

для унитарного пространства $L_2(X)$ со скалярным произведением

$$(f, g) := \int\limits_X f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Теорема 1. (Неравенство Минковского.) *Пусть X – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$; число $p \geq 1$ и измеримые функции $f, g : X \to \mathbb{C}$ таковы, что $\int\limits_X |f(x)|^p\, dx < +\infty$ и $\int\limits_X |g(x)|^p\, dx < +\infty$. Тогда справедливо неравенство Минковского:*

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Доказательство. В случае $p = 1$ неравенство Минковского получается путем интегрирования неравенства $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Будем предполагать, что $p > 1$.

Покажем сначала, что

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,dx < +\infty. \tag{1}$$

Определим множества $X_1 := \{x \in X : \ |f(x)| \le |g(x)|\}$, $X_2 := X \setminus X_1$. Тогда для любого $x \in X_1$ имеем $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le$ $\le 2|g(x)|$. Поэтому

$$\int\limits_{X_1} |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int\limits_{X_1} 2^p|g(x)|^p\,dx < +\infty.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{X_2} |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int\limits_{X_2} 2^p|f(x)|^p\,dx < +\infty.$$

Отсюда и из равенства

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int\limits_{X_1} |f(x)+g(x)|^p\,dx + \int\limits_{X_2} |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

следует неравенство (1).

Заметим, что

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int\limits_X |f(x)+g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \le$$

$$\le \int\limits_X |f(x)|\cdot\Big|f(x)+g(x)\Big|^{p-1}dx + \int\limits_X |g(x)|\cdot\Big|f(x)+g(x)\Big|^{p-1}dx.$$

Определим число q из условия $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_X |f(x)|\cdot\Big|f(x)+g(x)\Big|^{p-1}dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/q}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_X |g(x)| \cdot \Big| f(x)+g(x) \Big|^{p-1} dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_X |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/q}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \le$$

$$\le \left(\left(\int\limits_X |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \right) \cdot \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/q}.$$

Отсюда следует неравенство Минковского. $\square$

§ 2. Пространства L_p

В этом параграфе через X обозначим некоторое измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Функции $f : X \to \mathbb{C}$ и $g : X \to \mathbb{C}$ называются *эквивалентными* (пишут $f \sim g$), если $f(x) = g(x)$ почти всюду на X.

Заметим, что это отношение является отношением эквивалентности, т.к. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Определение. Пусть $p \in [1, +\infty)$. Через $L_p(X) = L_p(X, \mathbb{C})$ обозначим множество измеримых функций $f : X \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int\limits_X |f(x)|^p \, dx < +\infty. \tag{1}$$

Через $L_p(X, \mathbb{R})$ обозначим множество измеримых функций $f : X \to \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству (1).

Примем соглашение об отождествлении эквивалентных функций, т.е. будем считать, что эквивалентные функции $f, g \in L_p(X)$ соответствуют одному и тому же элементу пространства $L_p(X)$. В более строгой терминологии это означает, что элементами пространства $L_p(X)$ являются классы эквивалентности измеримых функций $f : X \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству (1).

Заметим, что если функции $f, g : X \to \mathbb{C}$ эквивалентны и $\int\limits_X f(x)\,dx$ существует, то $\int\limits_X g(x)\,dx$ существует и $\int\limits_X g(x)\,dx = \int\limits_X f(x)\,dx$. Поэтому интеграл $\int\limits_X f(x)\,dx$ корректно определен на классах эквивалентных функций, т.е. не зависит от конкретного представителя этого класса.

Для любой функции $f \in L_p(X)$ определим

$$\|f\|_{L_p(X)} := \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p}, \tag{2}$$

Теорема 1. *Пространство $L_p(X)$ с нормой (2) является нормированным пространством.*

Доказательство. Пространство $L_p(X)$ является линейным пространством с естественными операциями сложения функций и умножения функций на числа. Соглашение об отождествлении эквивалентных функций (или, что тоже самое, переход к классам эквивалентности) не нарушает корректности линейных операций, т.к. если $f_i \sim g_i$ при $i = 1, 2$, то для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \sim \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$.

Проверим аксиомы нормы:

(1) $\forall f \in L_p(X) \hookrightarrow \ \|f\|_{L_p(X)} \geq 0$;

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall f \in L_p(X) \hookrightarrow \ \|\alpha f\|_{L_p(X)} = |\alpha| \cdot \|f\|_{L_p(X)}$;

(3) $\forall f, g \in L_p(X) \hookrightarrow \ \|f + g\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}$;

(4) $\forall f \in L_p(X) : \|f\|_{L_p(X)} = 0 \hookrightarrow \ f = \overline{0}$.

Аксиомы (1), (2) следуют непосредственно из формулы (2). Аксиома (3) вытекает из неравенства Минковского. Аксиома (4) выполняется в силу соглашения об отождествлении эквивалентных функций. $\square$

Лемма 1. *Если* $1 \leq p_1 < p_2$, X *конечно измеримо, то* $L_{p_2}(X) \subset$ $\subset L_{p_1}(X)$ *и*

$$\|f\|_{L_{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L_{p_2}(X)} \cdot \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \qquad \forall f \in L_{p_2}(X). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_{p_2}(X)$. Заметим, что функция f измерима. Обозначим $p = \frac{p_2}{p_1}$. Тогда $p > 1$. Число q определим из равенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, т.е. $q = \frac{p}{p-1} = \frac{p_2}{p_2-p_1}$. Положим $h(x) = |f(x)|^{p_1}$, $g(x) = 1$. Тогда $\int\limits_X |h(x)|^p\,dx = \int\limits_X |f(x)|^{p_2}\,dx < +\infty$ и $\int\limits_X |g(x)|^q\,dx =$ $= \mu(X) < +\infty$. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_X |h(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int\limits_X |h(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q},$$

т.е.

$$\int\limits_X |f(x)|^{p_1}\,dx \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^{p_2}\,dx\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} < +\infty.$$

Поэтому $f \in L_{p_1}(X)$ и справедливо неравенство (3). $\square$

Замечание. Пусть $1 \leq p_1 < p_2$. Условие конечной измеримости множества X для включения $L_{p_2}(X) \subset L_{p_1}(X)$ существенно. Пусть, например, $X = [1,+\infty)$, $p_1 < p < p_2$, $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$. Тогда функция f измерима, $\int\limits_X |f(x)|^{p_1}dx = +\infty$, $\int\limits_X |f(x)|^{p_2}dx < +\infty$. Поэтому $f \in$ $\in L_{p_2}(X) \setminus L_{p_1}(X)$ и, следовательно, $L_{p_2}(X) \not\subset L_{p_1}(X)$.

Задача 1. Пусть $1 \leq p_1 < p_2$ и функция $f \in L_{p_1}(X)$ ограничена. Докажите, что $f \in L_{p_2}(X)$.

Задача 2. Пусть $1 \leq p_1 < p_2$ и $\mu(X) > 0$. Докажите, что $L_{p_1}(X) \not\subset L_{p_2}(X)$.

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{C}$ называется *интегрируемой*, если функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ интегрируемы на X. Интегралом интегрируемой функции $f : X \to \mathbb{C}$ называется

$$\int\limits_X f(x)\,dx := \int\limits_X \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int\limits_X \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Лемма 2. *Функция $f : X \to \mathbb{C}$ является интегрируемой $\Leftrightarrow$ $f \in L_1(X)$.*

Доказательство. "$\Rightarrow$". Пусть функция $f : X \to \mathbb{C}$ интегрируема. Тогда функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ измеримы на X. Так как

$$|f(x)| = \sqrt{(\operatorname{Re} f(x))^2 + (\operatorname{Im} f(x))^2} \leq |\operatorname{Re} f(x)| + |\operatorname{Im} f(x)|,$$

то $\int\limits_X |f(x)|\,dx < +\infty$. Следовательно, $f \in L_1(X)$.

"$\Leftarrow$". Пусть $f \in L_1(X)$. Тогда функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ измеримы на X. Поскольку $|\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)|$, то $\int\limits_X |\operatorname{Re} f(x)|\,dx < +\infty$. Отсюда согласно теореме о связи интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля получаем интегрируемость функции $\operatorname{Re} f(x)$ на X. Аналогично, функция $\operatorname{Im} f(x)$ интегрируема на X. Следовательно, функция f интегрируема на X. $\square$

Теорема 2. *1) Пространство $L_2(X) = L_2(X, \mathbb{C})$ является унитарным пространством ($L_2(X, \mathbb{R})$ – евклидовым пространством), где скалярное произведение функций $f, g \in L_2(X)$ определяется формулой*

$$(f, g) = \int\limits_X f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \tag{4}$$

где $\overline{g(x)}$ – комплексно сопряженное к числу $g(x)$. При этом норма пространства $L_2(X)$ является евклидовой, т.е.

$$\|f\|_{L_2(X)} = \sqrt{(f, f)} \quad \forall f \in L_2(X). \tag{5}$$

2) В пространстве $L_p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$, $p \neq 2$, $\mu(X) > 0$ нельзя ввести скалярное произведение так, чтобы $\|f\|_{L_p(X)} = \sqrt{(f, f)}$.

Доказательство. 1) Пусть $f, g \in L_2(X)$. Так как $|f(x)\,\overline{g(x)}| \leq$ $\leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}$, то $\int\limits_X |f(x)\,\overline{g(x)}|\,dx < +\infty$. Следовательно, функция $f(x)\,\overline{g(x)}$ интегрируема на X.

Проверим, что скалярное произведение (4) удовлетворяет аксиомам унитарного пространства:

(1) $\forall f \in L_2(X) \hookrightarrow\ (f, f) \geq 0$;

(2) $\forall f, g, h \in L_2(X)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \hookrightarrow\ (\alpha\, f + \beta\, g, h) = \alpha\,(f, h) + \beta\,(g, h)$;

(3) $\forall f, g \in L_2(X) \hookrightarrow \ (g, f) = \overline{(f, g)}$;

(4) $\forall f \in L_2(X) : (f, f) = 0 \hookrightarrow \ f = \overline{0}$.

Аксиомы (1)–(3) следуют непосредственно из формулы (4). Аксиома (4) выполнена в силу соглашения об отождествлении. Формула (5) следует из (2), (4).

2) Пусть $p \in [1, +\infty)$, $p \neq 2$, $\mu(X) > 0$. Предположим, что в $L_p(X)$ можно ввести скалярное произведение так, чтобы для нормы $\|f\|_{L_p(X)}$ справедливо равенство $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Тогда из аксиом скалярного произведения следует, что

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \quad \forall f, g \in L_p(X). \tag{6}$$

Поскольку $\mu(X) > 0$, то существуют два непересекающихся подмножества $X_1, X_2 \subset X$ таких, что $\mu(X_1) = \mu(X_2) = \mu > 0$. Рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_1, \\ 0, & x \notin X_1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_2, \\ 0, & x \notin X_2. \end{cases}$$

В силу формулы (2) для нормы пространства $L_p(X)$ имеем $\|f\| = \|g\| = \mu^{\frac{1}{p}}$, $\|f + g\| = \|f - g\| = (2\mu)^{\frac{1}{p}}$. Подставляя в формулу (6), получаем $(2\mu)^{\frac{2}{p}} = 2\mu^{\frac{2}{p}}$, что при $p \neq 2$ неверно. $\square$

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{C}$ называется *существенно ограниченной*, если существует множество $X_0 \subset X$ меры нуль такое, что функция f ограничена на множестве $X \setminus X_0$.

Определение. Через $L_\infty(X)$ обозначим множество измеримых существенно ограниченных функций $f : X \to \mathbb{C}$. Для любой функции $f \in L_\infty(X)$ определим

$$\|f\|_{L_\infty(X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|, \tag{7}$$

где

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} g(x) := \inf_{\substack{X_0 \subset X \\ \mu(X_0) = 0}} \ \sup_{x \in X \setminus X_0} g(x).$$

Так же как и для пространств $L_p(X)$, примем соглашение об отождествлении эквивалентных функций, т.е. будем считать, что эквивалентные функции $f, g \in L_\infty(X)$ соответствуют одному и тому же элементу пространства $L_\infty(X)$.

Замечание. Пространство $L_\infty(X)$ с нормой (7) является нормированным пространством. Докажите это утверждение, проверив аксиомы нормы для $L_\infty(X)$.

Задача 3. Покажите, что если множество X конечно измеримо, то $L_\infty(X) \subset L_p(X)$ для любого $p \in [1, +\infty)$.

§ 3. Эквивалентные и неэквивалентные нормы

Определение. Пусть в линейном пространстве X заданы две нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$, $x \in X$. Эти нормы называются *эквивалентными*, если существуют константы $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha\|x\| \le \|x\|' \le \beta\|x\| \qquad \forall x \in X. \tag{1}$$

Теорема 1. *В конечномерном линейном пространстве X любые две нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть размерность пространства X равна n. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис в X. Для любого $x \in X$ через $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать координаты вектора x в этом базисе: $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Рассмотрим норму

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Эта норма является евклидовой относительно скалярного произведения, заданного формулой

$$(x, y) = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n, \quad \text{где } x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n,\ y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n.$$

Заметим, что если две нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны норме $\|x\|_2$, то нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны между собой. Поэтому достаточно показать, что произвольная норма $\|x\|$ эквивалентна евклидовой норме $\|x\|_2$.

Используя аксимомы нормы, для любого элемента $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in X$ получаем

$$\|x\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \|e_k\|.$$

Отсюда и из неравенств $|x_k| \leq \|x\|_2$ при всех $k \in \overline{1,n}$ следует, что $\|x\| \leq C\|x\|_2$, где $C := \sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k\|$. Поэтому

$$\Big|\|x_1\| - \|x_2\|\Big| \leq \|x_1 - x_2\| \leq C\|x_1 - x_2\|_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Отсюда следует непрерывность функции $f(x) = \|x\|$ относительно евклидовой нормы $\|x\|_2$. Используя теорему Вейерштрасса о существовании минимума и максимума непрерывной на компакте функции, получаем существование

$$m := \min_{x \in X:\ \|x\|_2 = 1} \|x\|, \qquad M := \max_{x \in X:\ \|x\|_2 = 1} \|x\|.$$

Поскольку минимум достигается на некотором $x \in X \setminus \{\overline{0}\}$, то $m > 0$. В силу определений минимума и максимума имеем

$$m \leq \|x\| \leq M \qquad \forall x \in X:\ \|x\|_2 = 1.$$

Следовательно,

$$m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M\|x\|_2 \qquad \forall x \in X,$$

т.е. нормы $\|x\|$ и $\|x\|_2$ эквивалентны. $\square$

Напомним, что норма в линейном пространстве X порождает топологию на X, т.е. семейство открытых множеств $A \subset X$, где множество $A \subset X$ считается открытым, если для любой точки $a \in A$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(a) \subset A$, где

$$U_\delta(a) := \{x \in X:\ \|x - a\| < \delta\}.$$

Будем говорить, что последовательность $\{x_k\}$ элементов нормированного пространства X *сходится по норме* $\|x\|$ к элементу $x_0 \in X$, если $\|x_k - x_0\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Замечание. Последовательность $\{x_k\}$ элементов нормированного пространства X *сходится по норме* $\|x\|$ к элементу $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall U(x_0)\ \exists N:\ \forall k \geq N \hookrightarrow\ x_k \in U(x_0),$$

где $U(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0, т.е. произвольное открытое (в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|$) множество, содержащее точку x_0.

Теорема 2. *Для двух норм $\|x\|$ и $\|x\|'$ в линейном пространстве X следующие условия равносильны:*

(1) *нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны;*

(2) *последовательность $\{x_k\}$ элементов X сходится к $x_0 \in X$ по норме $\|x\|$ тогда и только тогда, когда $\{x_k\}$ сходится к x_0 по норме $\|x\|'$;*

(3) *нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ порождают одну и ту же топологию на X.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(3). Пусть нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны, т.е. выполнены неравенства (1). Пусть множество $A \subset X$ открыто в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|$. Покажем, что A открыто в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|'$. Пусть $a \in \in A$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\{x \in X : \ \|x - a\| < \delta\} \subset A.$$

Положим $\delta' := \alpha\delta$. Тогда если $\|x - a\|' < \delta'$, то в силу первого из неравенств (1) имеем $\alpha\|x - a\| \leq \|x - a\|' < \delta' = \alpha\delta$. Следовательно, $x \in \{x \in X : \ \|x - a\| < \delta\} \subset A$. Поэтому

$$\{x \in X : \ \|x - a\|' < \delta'\} \subset A.$$

Таким образом, A открыто в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|'$. Аналогично, верно и обратное. Следовательно, нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ порождают одну и ту же топологию на X.

(3)$\Rightarrow$(2). Достаточно воспользоваться предыдущим замечанием, согласно которому топология, порожденная нормой, определяет сходимость по норме.

(2)$\Rightarrow$(1). Пусть выполнено условие (2). Предположим, что условие (1) не выполнено. Пусть, например, не существует числа $\beta > 0$ такого, что $\|x\|' \leq \beta\|x\|$ для любого $x \in X$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $y_k \in X$: $\|y_k\|' > k\|y_k\|$. Полагая $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|'}$, получим $\|x_k\|' = 1$, $\|x_k\| < \frac{1}{k}$. Поэтому последовательность $\{x_k\}$ сходится к $\overline{0}$ по норме $\|x\|$, но не сходится к $\overline{0}$ по норме $\|x\|'$. Это противоречит условию (2). $\square$

Пример 1. Пусть $1 \leq p_1 < p_2$. Покажем, что нормы $\|f\|_{L_{p_1}[0,1]}$ и $\|f\|_{L_{p_2}[0,1]}$ в пространстве непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ не эквивалентны.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx, & x \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^1 |f_k(x)|^p\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{k}} (1 - kx)^p\, dx = - \left. \frac{(1 - kx)^{p+1}}{k(p+1)} \right|_0^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k(p+1)}.$$

Поэтому

$$\|f_k\|_{L_p[0,\,1]} = \frac{1}{(k(p+1))^{\frac{1}{p}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\|f_k\|_{L_{p_2}[0,\,1]}}{\|f_k\|_{L_{p_1}[0,\,1]}} = \frac{(k(p_1+1))^{\frac{1}{p_1}}}{(k(p_2+1))^{\frac{1}{p_2}}} = \frac{(p_1+1)^{\frac{1}{p_1}}}{(p_2+1)^{\frac{1}{p_2}}}\, k^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, нормы $\|f\|_{L_{p_1}[0,\,1]}$ и $\|f\|_{L_{p_2}[0,\,1]}$ не эквивалентны.

Замечание. Если две нормы $\|f\|$ и $\|f\|'$ в линейном пространстве F связаны неравенством

$$\|f\|' \le \beta \|f\| \quad \forall f \in F,$$

где β – некоторая константа, то из сходимости последовательности элементов $f_k \in F$ к элементу $f_0 \in F$ по норме $\|f\|$ следует сходимость этой последовательности к f_0 по норме $\|f\|'$.

В частности, пусть X – конечно измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $1 \le$ $\le p_1 < p_2 < +\infty$. Согласно лемме 1 § 2

$$\|f\|_{L_{p_1}(X)} \le \|f\|_{L_{p_2}(X)} \cdot \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}} \qquad \forall f \in L_{p_2}(X).$$

Поэтому для последовательности функций $f_k \in L_{p_2}(X)$ и функции $f_0 \in L_{p_2}(X)$ имеем

$$f_k \xrightarrow{L_{p_2}(X)} f_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_k \xrightarrow{L_{p_1}(X)} f_0.$$

Определение. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^n$ или компактное топологическое пространство. Через $C(X, \mathbb{C})$ будем обозначать пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_{C(X)} := \max_{x \in X} |f(x)|,$$

через $C(X, \mathbb{R})$ – пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с той же нормой. Если понятно из контекста или не имеет значения, о каком из пространств $C(X, \mathbb{C})$ или $C(X, \mathbb{R})$ идет речь, то для краткости соответсвующее пространство будем обозначать через $C(X)$.

Легко видеть, что для компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ и $p \geq 1$

$$\|f\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{C(X)} \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in C(X). \tag{2}$$

Поэтому для функций $f_k, f_0 \in C(X)$ получаем

$$f_k \overset{C(X)}{\longrightarrow} f_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_k \overset{L_p(X)}{\longrightarrow} f_0.$$

Определение. Сходимость последовательности функций f_k по норме пространства $L_1(X)$ называется *сходимостью в среднем.* Сходимость $\{f_k\}$ по норме пространства $L_2(X)$ называется *сходимостью в смысле среднего квадратичного.*

Таким образом, из равномерной сходимости последовательности $\{f_k\}$ на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ следует сходимость $\{f_k\}$ в смысле среднего квадратичного, а из сходимости этой последовательности в смысле среднего квадратичного следует ее сходимость в среднем.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Последовательность функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ называется *сходящейся по мере* к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \mu \{x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Лемма 1. *Пусть последовательность функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится к функции $f : X \to \mathbb{R}$ почти всюду на конечно измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда последовательность f_k сходится к f по мере.*

Доказательство. Обозначим

$$\widehat{X} := \left\{ x \in X : \ f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x) \right\}.$$

Так как f_k сходится к f почти всюду на X, то $\mu(X \setminus \widehat{X}) = 0$.

Если $x \in \widehat{X}$, то по определению предела найдется номер N такой, что

$$\forall k \geq N \hookrightarrow \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\widehat{X} \subset \bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}} X_N$, где

$$X_N := \{ x \in X : \ \forall k \geq N \hookrightarrow \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \}. \tag{3}$$

Поскольку $X_N \subset X_{N+1}$ при всех $N \in \mathbb{N}$, то в силу непрерывности меры Лебега (теорема 2 §3 главы 8) имеем $\mu(\widehat{X}) = \lim\limits_{k \to \infty} \mu(X_k)$. Следовательно,

$$\mu(X \setminus X_k) = \mu(X) - \mu(X_k) = \mu(\widehat{X}) - \mu(X_k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Из равенства (3) следует, что

$$X_k \subset \{ x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\{ x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} \subset X \setminus X_k \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

а значит,

$$0 \leq \mu \ \{ x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} \leq \mu(X \setminus X_k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

откуда вытекает доказываемое утверждение. □

Замечание. Условие конечности меры множества X существенно в лемме 1. Пусть, например, $X = \mathbb{R}$ и

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & x \geq k, \\ 0, & x < k. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x) = 0$ всюду на $\mathbb{R}$, но не сходится по мере.

Задача 1. Приведите пример последовательности функций $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, которые сходятся к функции $f(x) = 0$ на $[0,1]$ по мере, но не сходятся ни в одной точке $x \in [0,1]$.

Лемма 2. *Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$, любой измеримой неотрицательной функции $f : X \to [0, +\infty)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо* неравенство Чебышева

$$\mu \{x \in X : \ f(x) \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_X f(x)\, dx.$$

Доказательство. Обозначим $Y_\varepsilon := \{x \in X : \ f(x) \geq \varepsilon\}$. Тогда

$$\int\limits_X f(x)\, dx = \int\limits_{Y_\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{X \setminus Y_\varepsilon} f(x)\, dx \geq \int\limits_{Y_\varepsilon} f(x)\, dx \geq \varepsilon \mu(Y_\varepsilon).$$

□

Замечание. Из неравенства Чебышева следует, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество и последовательность функций $f_k \in L_1(X)$ сходится к функции $f \in L_1(X)$ в среднем, то f_k сходится к f по мере.

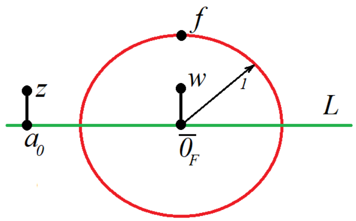
Задача 2. Приведите пример последовательности функций $f_k \in L_1(X)$, которые сходятся к функции $f(x) = 0$ на $[0,1]$ по мере и поточечно, но не сходятся в среднем.

Как известно, критерием компактности множества в конечномерном нормированном пространстве является ограниченность и замкнутость этого множества. В бесконечномерном нормированном пространстве условия ограниченности и замкнутости множества не достаточны для его компактности. Мы докажем теорему о том, что в любом бесконечномерном нормированном пространстве замкнутый шар не является компактом. Для доказательства этой теоремы потребуется следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть L – конечномерное линейное подпространство нормированного пространства F и $L \neq F$. Тогда найдется элемент $f \in F$ такой, что $\|f\| = 1$ и $\|f - g\| \geq 1$ для любого $g \in L$.*

Доказательство. Поскольку пространство $L \neq F$, то найдется $z \in F \setminus L$. Рассмотрим множество $A = \{a \in L : \ \|z - a\| \leq \|z\|\}$. Заметим, что $0 \in A$. Поскольку множество A ограничено и замкнуто в конечномерном пространстве L с нормой пространства F, то A компактно и, следовательно, $\min\limits_{a \in A} \|z - a\|$ достигается в некоторой точке $a_0 \in A$. При этом для любого $b \in L \setminus A$ имеем $\|z - b\| \geq \|z\| = \|z - \overline{0}_F\| \geq \|z - a_0\|$, поскольку $\overline{0}_F \in A$. Следовательно,

$$\|z - b\| \geq \|z - a_0\| \qquad \forall b \in L. \tag{4}$$



Обозначим $w = z - a_0$. Тогда для любого $h \in L$ имеем $b = h + a_0 \in L$ и в силу неравенства (4) получаем

$$\|w - h\| = \|z - b\| \geq \|z - a_0\| = \|w\| > 0.$$

Деля это неравенство на $\|w\|$, приходим к неравенству

$$\left\| \frac{w}{\|w\|} - \frac{h}{\|w\|} \right\| \geq 1 \qquad \forall h \in L.$$

Обозначая $f := \frac{w}{\|w\|}$ и применяя предыдущее соотношение для $h = \|w\| g$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 3. (О некомпактности замкнутого шара.) *В бесконечномерном нормированном пространстве F любой замкнутый шар не является компактом.*

Доказательство. Любой замкнутый шар получается из единичного шара $B_1 := \{f \in F : \ \|f\| \leq 1\}$ путем умножения его на число и сдвига. При этих операциях компактность множества сохраняется. Поэтому достаточно доказать, что единичный шар B_1 не является компактом.

Фиксируем произвольный элемент $f_1 \in \partial B_1$. Пусть на k-ом шаге заданы элементы $f_1, \ldots, f_k \in \partial B_1$ такие, что $\|f_i - f_j\| \geq 1$ при всех различных $i, j \in \overline{1, k}$. Обозначим через L_k линейную оболочку векторов $f_1, \ldots, f_k$. По лемме 3 найдется вектор $f_{k+1} \in \partial B_1$ такой, что $\|f_{k+1} - f_i\| \geq 1$ для всех $i \in \overline{1, k}$. Таким образом, процесс построения $\{f_k\}$ можно продолжать бесконечно. В результате получаем последовательность $\{f_k\}$ элементов B_1 такую, что $\|f_i - f_j\| \geq 1$

при всех различных i, j. Поэтому из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит, шар B_1 не является компактом. $\square$

§ 4. Линейные операторы

Определение. Пусть X, Y – вещественные или комплексные нормированные пространства. *Линейным оператором*, действующим из X в Y называется отображение $A : X \to Y$, обладающее свойством линейности

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \alpha, \beta,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, если X, Y – вещественные нормированные пространства и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, если X, Y – комплексные нормированные пространства.

Нормой линейного оператора $A : X \to Y$ называется

$$\|A\| := \sup_{x \in X:\ \|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y. \tag{1}$$

Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если $\|A\| < +\infty$.

Множество всех линейных ограниченных операторов $A : X \to Y$ обозначим через $\mathcal{L}(X, Y)$.

Замечание. Если $A : X \to Y$ – линейный оператор, то

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x\|_X \qquad \forall x \in X. \tag{2}$$

Действительно, если $x = 0$, то $Ax = 0$ и неравенство (2) справедливо. Если $x \neq 0$, то положим $x_1 = \frac{x}{\|x\|_X}$. Тогда $\|x_1\|_X = 1$ и, следовательно, $\|Ax_1\|_Y \leq \|A\|$. Поэтому $\|Ax\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x\|_X$.

Теорема 1. (О связи непрерывности и ограниченности линейного оператора.) *Пусть X, Y – нормированные пространства. Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *оператор A непрерывен в любой точке пространства X;*

(2) *оператор A непрерывен в точке $0 \in X$;*

(3) *оператор A ограничен.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) тривиально.

(2) $\Rightarrow$ (3). Применяя определение непрерывности отображения A в точке $0 \in X$ для $\varepsilon = 1$, получаем существование числа $\delta > 0$ такого, что

$$\forall x \in X: \ \|x\|_X \le \delta \hookrightarrow \ \|Ax\|_Y \le 1.$$

Используя это условие для $x = \delta \cdot x'$ в силу линейности оператора A имеем

$$\forall x' \in X: \ \|x'\|_X \le 1 \hookrightarrow \ \|Ax'\|_Y \le \frac{1}{\delta}.$$

Следовательно, $\|A\| \le \frac{1}{\delta} < +\infty$, а значит, оператор A ограничен.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть оператор A ограничен, т.е. $\|A\| < +\infty$. Покажем непрерывность A в произвольной точке $x_0 \in X$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Определим $\delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, если $\|A\| > 0$ и $\delta := 1$, если $\|A\| = 0$. В любом случае $\|A\| \cdot \delta \le \varepsilon$. Тогда для любого $x \in X$ такого, что $\|x - x_0\|_X < \delta$ имеем

$$\|Ax - Ax_0\|_Y = \|A(x - x_0)\|_Y \overset{(2)}{\le} \|A\| \cdot \|x - x_0\|_X \le \|A\| \cdot \delta \le \varepsilon.$$

Поэтому отображение A непрерывно в точке x_0. □

Лемма 1. *Пусть X, Y – нормированные пространства. Тогда множество $\mathcal{L}(X, Y)$ является нормированным пространством с нормой (1).*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, α, β – вещественные или комплексные числа (в зависимости от того, являются ли пространства X, Y вещественными или комплексными). Определим оператор $\alpha A_1 + \beta A_2$ из X в Y по формуле

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x := \alpha A_1 x + \beta A_2 x \qquad \forall x \in X.$$

Из линейности операторов A_1 и A_2 следует линейность оператора $A = \alpha A_1 + \beta A_2$. Для любого $x \in X$ такого, что $\|x\|_X = 1$ имеем

$$\|(\alpha A_1 + \beta A_2)x\|_Y = \|\alpha A_1 x + \beta A_2 x\|_Y \le$$

$$\le |\alpha| \cdot \|A_1 x\|_Y + |\beta| \cdot \|A_2 x\|_Y \le |\alpha| \cdot \|A_1\| + |\beta| \cdot \|A_2\|.$$

Следовательно,

$$\|\alpha A_1 + \beta A_2\| \leq |\alpha| \cdot \|A_1\| + |\beta| \cdot \|A_2\| < +\infty. \tag{3}$$

Поэтому оператор $\alpha A_1 + \beta A_2$ ограничен, т.е. $\alpha A_1 + \beta A_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Легко видеть, что для $\mathcal{L}(X, Y)$ выполнены все аксиомы линейного пространства. Используя аксиомы нормы для пространств X и Y, получаем аксиомы нормы для пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. В частности, неравенство треугольника для пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ следует из соотношений (3). □

Определение . *Банаховым пространством* называется полное нормированное пространство.

Теорема 2. *Пусть X – нормированное пространство, Y – банахово пространство. Тогда пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является банаховым.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность операторов $A_k \in \mathcal{L}(X, Y)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall k, m \geq N \hookrightarrow \ \|A_k - A_m\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Поскольку для любого $x \in X$ и для любых $k, m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|A_k x - A_m x\|_Y \leq \|A_k - A_m\| \cdot \|x\|_X$, то последовательность $\{A_k x\}$ фундаментальна в Y. В силу полноты пространства Y эта последовательность сходится к некоторому элементу пространства Y, который мы обозначим через Ax. Таким образом, определено отображение $A : X \to Y$. Фиксируем произвольные $x_1, x_2 \in X$ и произвольные числа α и β. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве

$$A_k(\alpha x_1 + \beta x_2) = A_k \alpha x_1 + A_k \beta x_2,$$

получаем равенство

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A\alpha x_1 + A\beta x_2.$$

Поэтому отображение $A : X \to Y$ является линейным оператором.

Используя соотношение (3), для любого $x \in X$ такого, что $\|x\|_X = 1$ и для любых $k, m \geq N$ имеем

$$\|A_k x - A_m x\|_Y \leq \|A_k - A_m\| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $m \to \infty$, получаем

$$\|A_k x - Ax\|_Y \leq \varepsilon \qquad \forall k \geq N \quad \forall x \in X : \ \|x\|_X = 1.$$

Поэтому линейный оператор A ограничен и $\|A_k - A\| \leq \varepsilon$ для любого $k \geq N$. Следовательно, последовательность операторов A_k сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. □

§ 5. Линейные функционалы

Определение. Линейный оператор из вещественного или комплексного нормированного пространства X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно называется *линейным функционалом.*

Значение функционала f на векторе $x \in X$ обозначают через $f(x)$ или $\langle f, x\rangle$.

Нормой линейного функционала $f : X \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \mathbb{C}$ называется норма линейного оператора f:

$$\|f\| := \sup_{x\in X\colon\ \|x\|_{\mathrm{X}}=1} |f(x)|.$$

Замечание. Согласно теореме о связи непрерывности и ограниченности линейного оператора линейный функционал $f : X \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \mathbb{C}$ непрерывен тогда и только тогда, когда $\|f\| < +\infty$.

Лемма 1. *Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, $y : T \to \mathbb{C}$ – измеримая функция, пусть $p \in (1, +\infty)$ и линейный функционал $F_y : L_p(T) \to \mathbb{C}$ задан формулой*

$$F_y(x) = \int\limits_T x(t)\,\overline{y(t)}\,dt \qquad \forall x \in L_p(T),$$

причем интеграл существует для любой фунции $x \in L_p(T)$. Тогда норма линейного функционала $F_y : L_p(T) \to \mathbb{C}$ совпадает с нормой функции y в пространстве $L_q(T)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\|F_y\| = \|y\|_{L_q(T)}.$$

Доказательство. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$|F_y(x)| \le \int\limits_T |x(t)\,y(t)|\,dt \le \|x\|_{L_p(T)} \cdot \|y\|_{L_q(T)} \qquad \forall x \in L_p(T).$$

Поэтому

$$\|F_y\| \le \|y\|_{L_q(T)}. \tag{1}$$

Докажем обратное неравенство.

Как было замечено сразу после доказательства неравенства Гельдера, если $|x(t)|^p = |y(t)|^q$, то неравенство Гельдера обращается в равенство. В точках $t \in T$, в которых $y(t) = 0$, положим $x(t) = 0$. В остальных точках значение $x(t)$ будем выбирать так, что $|x(t)|^p = |y(t)|^q$ и $\frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{y(t)}{|y(t)|}$. Тогда при всех $t \in T$ получим $x(t)\,\overline{y(t)} = |x(t)\,y(t)|$ и, следовательно,

$$F_y(x) = \int_T |x(t)\,y(t)|\,dt = \|x\|_{L_p(T)} \cdot \|y\|_{L_q(T)}.$$

Если $\|y\|_{L_q(T)} = 0$, то неравенство $\|F_y\| \geq \|y\|_{L_q(T)}$ выполнено тривиально. Пусть $\|y\|_{L_q(T)} > 0$. Тогда $\|x\|_{L_p(T)} > 0$. Рассматривая функцию $x_1 := \frac{x}{\|x\|_{L_p(T)}}$, получаем $\|x_1\|_{L_p(T)} = 1$ и $F_y(x_1) = \|y\|_{L_q(T)}$. Поэтому $\|F_y\| \geq |F_y(x_1)| = \|y\|_{L_q(T)}$. Последнее неравенство вместе с неравенством (1) завершают доказательство. $\square$

Замечание. Лемма 1 и ее доказательство остаются справедливыми при замене множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ на множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Определение. *Сопряженным* к вещественному или комплексному нормированному пространству X называется нормированное пространство X^*, элементами которого являются все линейные непрерывные функционалы $f : X \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \mathbb{C}$ соответственно.

Замечание. Из теоремы 2 § 4 следует, что сопряженное к любому нормированному (даже неполному) пространству является банаховым пространством.

Лемма 2. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в конечномерном нормированном пространстве X. Для любого $k \in \overline{1,n}$ через $l_k(x)$ обозначим k-ю координату вектора $x \in X$ в этом базисе, т.е. $x = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k(x)\,e_k$. Тогда $l_k \in X^*$.*

Доказательство. Фиксируем $k \in \overline{1,n}$. Поскольку для любых чисел α, β и любых векторов $x_1, x_2 \in X$ справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{n} l_j(\alpha x_1 + \beta x_2)\,e_j = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \sum_{j=1}^{n} l_j(x_1)\,e_j + \beta \sum_{j=1}^{n} l_j(x_2)\,e_j,$$

то в силу единственности разложения вектора по базису получаем $l_k(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha l_k(x_1) + \beta l_k(x_2)$. Поэтому функционал l_k линеен.

Легко видеть, что

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |l_j(x)|$$

является нормой в X. В силу теоремы об эквивалентности норм найдется число β такое, что

$$\|x\|_1 \leq \beta \|x\| \qquad \forall x \in X,$$

где $\|x\|$ – норма пространства X. Следовательно, $|l_k(x)| \leq \|x\|_1 \leq \leq \beta \|x\|$ для любого $x \in X$, а значит, $\|l_k\| \leq \beta < +\infty$. Поэтому функционал l_k непрерывен. □

Лемма 3. *Если f – линейный функционал, заданный на конечномерном нормированном пространстве X, то f непрерывен на X, т.е. $f \in X^*$.*

Доказательство. В силу конечномерности на X существует конечный базис $e_1, \ldots, e_n$. Обозначая k-ю координату вектора $x \in X$ в этом базисе через $l_k(x)$, получаем $x = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k(x)\, e_k$. Отсюда и из линейности функционала f следует, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x)\, f(e_k) \qquad \forall x \in X.$$

Согласно лемме 2 функционалы l_k непрерывны. Поэтому функционал f непрерывен. □

Замечание. В случае, когда нормированное пространство X бесконечномерно, линейный функционал может быть разрывным. Действительно, пусть X – пространство финитных числовых последовательностей, т.е. таких последовательностей $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, что для каждой из них найдется номер $N(x)$ такой, что $x(k) = 0$ при всех $k \geq N(x)$. Норму в X определим формулой $\|x\| = \max\limits_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$. Тогда функционал $f : X \to \mathbb{R}$, заданный формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)$$

линеен, но разрывен. Действительно, для произвольного числа $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим финитную последовательность $x_N \in X$, где

$$x_N(k) = \begin{cases} 1, & k \le N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Тогда $\|x_N\| = 1$. Поэтому $\|f\| \ge |f(x_N)| = N$. В силу произвольности $N \in \mathbb{N}$ получаем, что $\|f\| = +\infty$. Поэтому согласно теореме о связи непрерывности и ограниченности линейного оператора функционал f разрывен.

Определение. Вещественным (комплексным) *гильбертовым пространством* называется полное евклидово (унитарное) пространство.

Норма в евклидовом, унитарном или гильбертовом пространстве X считается евклидовой, т.е. задается равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \qquad \forall x \in X.$$

Далее докажем теорему Рисса–Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Доказательство этой теоремы будет использовать следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть H – гильбертово пространство, $f \in H^*$, $\|f\| = 1$. Тогда найдется элемент $x \in H$ такой, что $f(x) = \|x\| = 1$.*

Доказательство. По определению нормы функционала найдется последовательность элементов $x_k \in H$ такая, что $\|x_k\| = 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $|f(x_k)| \to \|f\| = 1$ при $k \to \infty$. Выделим подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ такую, что числовая последовательность $\{f(x_{k_j})\}$ сходится. Это можно сделать в силу ограниченности последовательности $\{f(x_k)\}$ как в случае, когда значения функцинала f вещественны, так и в случае, когда они комплексные. Обозначая эту подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ снова через $\{x_k\}$, будем считать, что последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится к некоторому числу F. Поскольку $|f(x_k)| \to 1$, то $|F| = 1$. Тогда

$$\lim_{k,m\to\infty} f(x_k + x_m) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) + \lim_{m\to\infty} f(x_m) = 2F$$

и, следовательно,

$$\lim_{k,m\to\infty} |f(x_k + x_m)| = 2|F| = 2. \tag{2}$$

Так как $\|f\| = 1$, то $|f(x_k + x_m)| \le \|x_k + x_m\| \le \|x_k\| + \|x_m\| = 2$. Отсюда и из соотношения (2) следует, что

$$\lim_{k,m\to\infty} \|x_k + x_m\| = 2. \tag{3}$$

Заметим, что для любых $k, m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\|x_k + x_m\|^2 + \|x_k - x_m\|^2 = (x_k + x_m, x_k + x_m) + (x_k - x_m, x_k - x_m) =$$

$$= 2(x_k, x_k) + 2(x_m, x_m) = 2\|x_k\|^2 + 2\|x_m\|^2 = 4.$$

Отсюда и из соотношения (3) получаем, что

$$\lim_{k,m\to\infty} \|x_k - x_m\| = 0,$$

т.е. последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна. В силу полноты гильбертова пространства последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому $\hat{x} \in H$. Так как $\|x_k\| = 1$, то $\|\hat{x}\| = 1$. Используя непрерывность функционала f и соотношение $f(x_k) \to F$, получаем равенство $f(\hat{x}) = F$. Обозначая $x = \frac{\hat{x}}{F}$, приходим к равенствам $\|x\| = \frac{\|\hat{x}\|}{|F|} = 1$, $f(x) = \frac{f(\hat{x})}{F} = 1$. $\square$

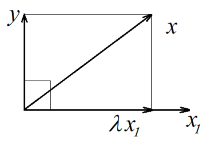
Теорема 1. (Теорема Рисса–Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.) *Пусть H – гильбертово пространство. Тогда для любого функционала $f \in H^*$ найдется элемент $x_f \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, x_f) \qquad \forall x \in H.$$

Доказательство. Фиксируем $f \in H^*$. Если $f = 0$, то утверждение теоремы справедливо при $x_f = 0$. Пусть $f \ne 0$. Рассмотрим $f_1 = \frac{f}{\|f\|}$. По лемме 4 найдется вектор $x_1 \in H$ такой, что $\|x_1\| = 1$, $f_1(x_1) = 1$. Покажем, что

$$f_1(x) = (x, x_1) \qquad \forall x \in H.$$

Фиксируем $x \in H$. Обозначим $\lambda = (x, x_1)$, $y = x - \lambda x_1$. Тогда $(y, x_1) = (x, x_1) - \lambda(x_1, x_1) = 0$. Рассмотрим случай, когда H – комплексное гильбертово пространство. Для любого $t \in \mathbb{C}$ в силу равенства $(y, x_1) = 0$ имеем



$\|x_1 + ty\|^2 = (x_1 + ty, x_1 + ty) = 1 + |t|^2\|y\|^2$. Так как

$$|f_1(x_1 + ty)| \leq \|x_1 + ty\| = \sqrt{1 + |t|^2\|y\|^2} = 1 + o(|t|), \quad t \to 0,\ t \in \mathbb{C},$$

то $|1 + tf_1(y)| \leq 1 + o(|t|)$, $t \to 0$, $t \in \mathbb{C}$. Полагая $t = \tau\overline{f_1(y)}$, получим $1 + \tau|f_1(y)|^2 \leq 1 + o(\tau)$, $\tau \to 0$, $\tau \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f_1(y) = 0$. В случае, когда H – вещественное гильбертово пространство, повторяя те же рассуждения с заменой $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$, снова получаем равенство $f_1(y) = 0$.

Таким образом, $f_1(x) = f_1(y+\lambda x_1) = f_1(y)+\lambda f_1(x_1) = \lambda = (x, x_1)$. Полагая $x_f := \|f\| \cdot x_1$, получаем доказываемое утверждение. $\square$

Определение. Нормированные пространства X и Y называются *изометрически изоморфными*, если существует линейное взаимно однозначное отображение φ из X в Y, сохраняющее норму, т.е. $\|\varphi(x)\|_Y = \|x\|_X$ для любого $x \in X$. При этом отображение $\varphi : X \to Y$ называется *изометрическим изоморфизмом* этих пространств.

Замечание. Изометрически изоморфные пространства обычно отождествляют.

Теорема 2. (Об изометрическом изоморфизме гильбертова пространства и его сопряженного.) *Пусть H – гильбертово пространство. Тогда отображение F, которое каждому элементу $y \in H$ ставит в соответствие функционал $F_y : H \to \mathbb{C}$, заданный формулой*

$$F_y(x) = (x, y) \quad \forall x \in H,$$

является изометрическим изоморфизмом из H в H^*.

Доказательство. Из линейности скалярного произведения следует линейность функционала $F_y : H \to \mathbb{C}$. Согласно неравенству Коши–Буняковского (теорема 1 §2 главы 4)

$$|F_y(x)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in H.$$

Поэтому $\|F_y\| \leq \|y\| < +\infty$, а значит, $F_y \in H^*$ для любого $y \in H$.

Покажем, что отображение F сохраняет норму. Если $y = \overline{0}_H$, то $F_y(x) = 0$ для любого $x \in H$ и, следовательно, $\|F_y\| = 0$. Пусть $y \neq \overline{0}_H$. Тогда для вектора $x = \frac{y}{\|y\|}$ имеем $\|x\| = 1$, $F_y(x) = \frac{(y,y)}{\|y\|} = \|y\|$. Следовательно, $\|F_y\| = \|y\|$ для любого $y \in H$, то есть отображение F сохраняет норму.

Покажем, что отображение $F : H \to H^*$ инъективно. Пусть $y_1, y_2 \in H$ и $F_{y_1} = F_{y_2}$. Рассмотрим $y := y_1 - y_2$. В силу линейности отображения F имеем $F_y = F_{y_1} - F_{y_2} = 0$. Поэтому $\|y\| = \|F_y\| = 0$, а значит, $y = \overline{0}_H$, то есть, $y_1 = y_2$. Таким образом, отображение $F : H \to H^*$ инъективно. Сюръективность этого отображения следует из теоремы Рисса–Фреше. Итак, отображение F линейно, взаимно однозначно и сохраняет норму. Поэтому F – изометрический изоморфизм из H в H^*. $\square$

§ 6. Малые лебеговы пространства

Определение. Пусть $p \in [1, +\infty)$. Через ℓ_p и $\ell_p^{\mathbb{R}}$ обозначим множества всех числовых последовательностей, т.е. функций $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ и $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ соответственно, которые удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty$. Для любой такой последовательности обозначим

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Через ℓ_∞ и $\ell_\infty^{\mathbb{R}}$ обозначим множества всех ограниченных числовых последовательностей $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ и $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ соответственно, т.е. таких, что

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty.$$

Линейные операции в ℓ_p определяются естественным образом: если $x, y \in \ell_p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}$, то

$$(\alpha x + \beta y)(k) := \alpha x(k) + \beta y(k).$$

Аналогично определяются линейные операции в $\ell_p^{\mathbb{R}}$.

Лемма 1. *Пусть $p \in [1, +\infty]$. Пусть $q \in [1, +\infty]$ определяется равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, где положим $\frac{1}{+\infty} = 0$. Тогда справедливы* неравенство Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)\, y(k)| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \forall x \in \ell_p \quad \forall y \in \ell_q$$

и неравенство Минковского

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall x, y \in \ell_p.$$

Доказательство. При $p = 1$ и $p = +\infty$ неравенства Гельдера и Минковского следуют непосредственно из определений. Пусть $p \in \in (1, +\infty)$. Каждой последовательности $x \in \ell_p$ сопоставим функцию $\tilde{x} : [1, +\infty) \to \mathbb{C}$, заданную формулой

$$\tilde{x}(t) = x(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [k, k+1).$$

Тогда функция $\tilde{x}$ измерима на $[1, +\infty)$ и

$$\|\tilde{x}\|_{L_p[1,+\infty)} = \left(\int\limits_1^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

Неравенство Гельдера для последовательностей $x \in \ell_p$ и $y \in \ell_q$ следует из неравенства Гельдера для функций $\tilde{x}, \tilde{y}$. Неравенство Минковского для последовательностей следует из неравенства Минковского для функций. $\square$

Замечание. Из неравенства Минковского следует, что линейная комбинация элементов пространства ℓ_p лежит в пространстве ℓ_p. Поэтому пространство ℓ_p является линейным пространством. При этом $\|x\|_p$ удовлетворяет аксиомам нормы. В частности, неравенство треугольника в ℓ_p следует из неравенства Минковского. Таким образом, ℓ_p и $\ell_p^{\mathbb{R}}$ являются соответственно комплексным и вещественным нормированными пространствами.

Лемма 2. *Пусть* $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$. *Тогда* $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$ *и*

$$\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1} \qquad \forall x \in \ell_{p_1}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольную последовательность $x \in \ell_{p_1}$. Поскольку для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x(k)| \le \|x\|_{p_1}$, то $\|x\|_\infty \le \|x\|_{p_1} < +\infty$. При $p_2 = +\infty$ лемма доказана. Пусть $p_2 < +\infty$. Обозначим $\varepsilon := p_2 - p_1$. Снова используя неравенство $|x(k)| \le \|x\|_{p_1}$, получаем

$$\|x\|_{p_2}^{p_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{p_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{p_1} \cdot |x(k)|^{\varepsilon} \le \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{p_1} \cdot \|x\|_{p_1}^{\varepsilon} =$$

$$= \|x\|_{p_1}^{p_1} \cdot \|x\|_{p_1}^{\varepsilon} = \|x\|_{p_1}^{p_2}.$$

Следовательно, $\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1} < +\infty$, а значит, $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$. $\square$

Замечание. При $1 \le p_1 < p_2$ для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ ненулевой меры включение $L_{p_1}(X) \subset L_{p_2}(X)$ неверно (см. задачу 2 § 2).

Определение. Будем говорить, что элемент f нормированного пространства F *раскладывается по системе*[1] $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов пространства F, если существует числовая последовательность $\{\alpha_k\}$ такая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ сходится к элементу f в смысле нормы пространства F, т. е. $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k\| \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае будем писать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k = f$.

Определение. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов нормированного пространства F называется *базисом Шаудера* пространства F, если для любого элемента $f \in F$ существует единственная числовая последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$.

Поскольку другие понятия базиса в бесконечномерном нормированном пространстве мы не будем рассматривать, то далее вместо «базис Шаудера» будем говорить «базис».

Теорема 1. (О базисе в ℓ_p.) *Пусть $p \in [1, +\infty)$. Тогда система последовательностей $e_k \in \ell_p$, определяемых формулой*

$$e_k(i) = \delta_{ki} \qquad \forall k, i \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где δ_{ki} – символ Кронекера, является базисом пространства ℓ_p.

При этом

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\, e_k \qquad \forall x \in \ell_p. \tag{2}$$

[1] здесь и далее под термином «система» понимается последовательность

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $x \in \ell_p$. Требует доказать существование и единственность последовательности чисел $\alpha_k \in \mathbb{C}$ такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \tag{3}$$

то есть

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $z_n := x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Тогда

$$z_n(i) = \begin{cases} x(i) - \alpha_i, & i \leq n, \\ x(i), & i > n. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|z_n\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x(i) - \alpha_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p. \tag{5}$$

Покажем, что при $\alpha_k = x(k)$ соотношение (4) справедливо. Действительно, в этом случае

$$\|z_n\|_p^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поскольку ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p$ сходится. Следовательно, $\|z_n\|_p \to 0$ при $n \to \infty$, то есть соотношение (4) справедливо, а значит, справедливо соотношение (2).

Покажем, что если соотношение (4) справедливо, то $\alpha_k = x(k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть соотношение (4) справедливо. Тогда $\|z_n\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Согласно равенству (5) для любых $n \geq k$ имеем

$$\|x(k) - \alpha_k\|^p \leq \|z_n\|_p^p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|x(k) - \alpha_k\|^p \leq 0$, то есть $x(k) = \alpha_k$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, существует и единственна числовая последовательность $\{\alpha_k\}$ такая, что справедливо разложение (3). $\square$

Лемма 3. *Пусть $p \in [1, +\infty]$, пусть задана последовательность $y : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ и пусть функционал $F_y : \ell_p \to \mathbb{C}$ задан формулой*

$$F_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\,\overline{y(k)} \qquad \forall x \in \ell_p, \tag{6}$$

причем этот ряд сходится для любого $x \in \ell_p$. Тогда $\|F_y\| = \|y\|_q$, где $q \in [1, +\infty]$ определяется равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Неравенство $\|F_y\| \le \|y\|_q$ следует из неравенства Гельдера для последовательностей.

Докажем обратное неравенство. В случае $p \in (1, +\infty)$ по аналогии с доказательством леммы 1 § 5 определим последовательность $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ исходя из равенств

$$|x(k)|^p = |y(k)|^q \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{x(k)}{|x(k)|} = \frac{y(k)}{|y(k)|} \quad \text{при} \quad y(k) \ne 0.$$

Тогда

$$F_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)\,y(k)| = \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

откуда следует неравенство $\|F_y\| \ge \|y\|_q$. В случаях $p = 1$ и $p = +\infty$ последнее неравенство предлагается доказать самостоятельно. $\square$

Теорема 2. (Об изометрическом изоморфизме ℓ_q и ℓ_p^*.) *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $q \in (1, +\infty]$ связаны равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пространство ℓ_p^* изометрически изоморфно пространству ℓ_q. Отображение F, переводящее любую последовательность $y \in \ell_q$ в функционал F_y, заданный формулой (6), является изометрическим изоморфизмом из ℓ_q в ℓ_p^*.*

Доказательство. Согласно неравенству Гельдера для последовательностей

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)\,y(k)| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \forall x \in \ell_p \quad \forall y \in \ell_q$$

Поэтому для любых $x \in \ell_p$, $y \in \ell_q$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)\,\overline{y(k)}$ сходится абсолютно. Следовательно, для любой последовательности $y \in \ell_q$ формула (6) определяет линейный функционал $F_y : \ell_p \to \mathbb{C}$. Согласно лемме 3 для любого $y \in \ell_q$ имеем $\|F_y\| = \|y\|_q < +\infty$, то есть $F_y \in$ $\in \ell_p^*$. Таким образом, отображение F действует из ℓ_q в ℓ_p^* и сохраняет норму. Поскольку правая часть формулы (6) линейна по y, то отображение $F : \ell_q \to \ell_p^*$ линейно.

Инъективность линейного отображения F следует из того, что это отображение сохраняет норму. Докажем сюръективность этого отображения.

Фиксируем произвольный функционал $f \in \ell_p^*$. Согласно теореме 1 система последовательностей e_k, определяемых формулой (1), составляет базис пространства ℓ_p и

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\, e_k \qquad \forall x \in \ell_p,$$

то есть

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из непрерывности функционала $f : \ell_p \to \mathbb{C}$ следует, что

$$f\left(x - \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из линейности f получаем

$$f(x) - \sum_{k=1}^{n} x(k) f(e_k) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то есть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) f(e_k) \qquad \forall x \in \ell_p.$$

Поэтому $f = F_y$, где $y(k) = \overline{f(e_k)}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Согласно лемме 3 имеем $\|y\|_q = \|F_y\| = \|f\| < +\infty$, то есть $y \in \ell_q$. Таким образом, линейное отображение $F : \ell_q \to \ell_p^*$ инъективно и сюръективно, то есть взаимно однозначно. Кроме того, это отображение сохраняет норму. Поэтому $F : \ell_q \to \ell_p^*$ является изометрическим изоморфизмом. $\square$

Замечание. Пространство ℓ_∞^* не является изометрически изоморфным пространству ℓ_1. Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Замечание. Для любого $p \in [1, +\infty)$ и любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ пространство $L_p^*(X)$ изометрически изоморфно пространству $L_q(X)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказательство этого факта также выходит за рамки нашего курса.

Замечание. Из теоремы 2 § 4 следует, что для любого $p \in [1, +\infty)$ пространство ℓ_p^* полно. Отсюда и из теоремы 2 этого параграфа вытекает полнота пространства ℓ_q при любом $q \in (1, +\infty]$. Пространство ℓ_1 также полно, что предлагается доказать читателю самостоятельно. В § 13 главы 22 будет доказана полнота пространств $L_p(X)$ при всех $p \in [1, +\infty)$.

Глава 22

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Определение ряда Фурье по ортогональной системе

Мы хорошо знаем, что для работы с векторами в конечномерном линейном пространстве удобно ввести базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в этом пространстве и задавать векторы координатами в этом базисе: $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Особенно удобно работать с ортогональным базисом $\{e_k\}$, т. е. с таким, что $(e_j, e_k) = 0$ при $j \neq k$. В этом базисе координаты вектора a равны $\alpha_k = \frac{(a,e_k)}{(e_k,e_k)}$.

Функции, как известно, являются элементами бесконечномерного линейного пространства. Основная идея теории рядов Фурье состоит в том, чтобы задавать функции через коэффициенты Фурье, которые играют ту же роль, что и координаты конечномерного вектора.

Пусть X – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Как было показано в теореме 2 § 2, формула

$$(f, g) = \int\limits_X f(x)\,\overline{g(x)}\,dx. \tag{1}$$

задает скалярное произведение в $L_2(X)$.

Мы будем использовать обозначение (1) не только в случае $f, g \in L_2(X)$, но и в некоторых других случаях, когда эта формула имеет смысл.

Замечание. Если $f \in L_1(X)$, $g \in L_\infty(X)$, то формула (1) определяет некоторое число $(f, g) \in \mathbb{C}$. Действительно, поскольку $g \in L_\infty(X)$, то существует множество $X_0 \subset X$, $\mu(X_0) = 0$ такое, что $C_g := \sup\limits_{x \in X\setminus X_0} |g(x)| \in \mathbb{R}$. Тогда $|f(x)\,\overline{g(x)}| \le C_g |f(x)|$ почти всюду на X. Следовательно, $\int\limits_X |f(x)\,\overline{g(x)}|\,dx \le C_g \int\limits_X |f(x)|\,dx < +\infty$. Отсюда и из измеримости функций f и g следует, что функция $f(x)\,\overline{g(x)}$ интегрируема на X.

Определение. Пусть на конечно измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана система $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функций $e_k \in L_\infty(X)$, не эквивалентных нулю и ортогональная в смысле скалярного произведения (1). Пусть $f \in L_1(X)$. Тогда числа

$$\alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

называются *коэффициентами Фурье* функции f по ортогональной системе $\{e_k\}$. Здесь, согласно формуле (1),

$$(e_k, e_k) = \int\limits_X |e_k(x)|^2\, dx, \qquad (f, e_k) = \int\limits_X f(x)\, \overline{e_k(x)}\, dx.$$

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k(x)$ называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Замечание. Для любой функции $f \in L_1(X)$ коэффициенты Фурье существуют. Действительно, поскольку $e_k \in L_\infty(X)$, то функции $f(x)\, \overline{e_k(x)}$ и $|e_k(x)|^2$ интегрируемы. Поскольку функции $e_k(x)$ не эквивалентны нулю, то $(e_k, e_k) \neq 0$. Поэтому существуют числа $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)} \in \mathbb{C}$.

Ряд Фурье функции $f \in L_1(X)$ в общем случае может расходиться или сходиться не к функции $f(x)$. В дальнейшем мы будем изучать вопрос о сходимости ряда Фурье.

Определение. *Тригонометрической системой* на отрезке $[x_0, x_0 + 2\ell]$ длиной 2ℓ называется система функций

$$\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi x}{\ell},\ \cos\frac{\pi x}{\ell},\ \ldots,\ \sin\frac{\pi k x}{\ell},\ \cos\frac{\pi k x}{\ell},\ \ldots$$

Лемма 1. *Тригонометрическая система ортогональна на любом отрезке длины 2ℓ.*

Доказательство. Для любого действительного числа x_0 и любых натуральных чисел n, k $(n \neq k)$ имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \sin\frac{\pi kx}{\ell}\,\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi(n+k)x}{\ell} - \sin\frac{\pi(n-k)x}{\ell}\right)dx =$$

$$= -\,\frac{\ell}{2\pi(n+k)}\,\cos\frac{\pi(n+k)x}{\ell}\Bigg|_{x_0}^{x_0+2\ell} + \frac{\ell}{2\pi(n-k)}\,\cos\frac{\pi(n-k)x}{\ell}\Bigg|_{x_0}^{x_0+2\ell} = 0,$$

так как, например, $\cos\frac{\pi(n+k)(x_0+2\ell)}{\ell} = \cos\left(\frac{\pi(n+k)x_0}{\ell} + 2\pi(n+k)\right) = = \cos\frac{\pi(n+k)x_0}{\ell}$. Аналогично, вычисляя интегралы, легко убедиться, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \sin\frac{\pi nx}{\ell}\,\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \sin\frac{\pi nx}{\ell}\,\sin\frac{\pi kx}{\ell}\,dx = 0, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \cos\frac{\pi nx}{\ell}\,\cos\frac{\pi kx}{\ell}\,dx = 0 \quad (n \neq k),$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \frac{1}{2}\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,dx = 0, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \frac{1}{2}\sin\frac{\pi nx}{\ell}\,dx = 0. \qquad \square$$

Поскольку

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\ell}{2}, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \left(\sin\frac{\pi kx}{\ell}\right)^2 dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \left(\cos\frac{\pi kx}{\ell}\right)^2 dx = \ell,$$

то коэффициенты Фурье функции $f \in L_1[x_0, x_0+2\ell]$ определяются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} f(x)\,\cos\frac{\pi kx}{\ell}\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} f(x)\,\sin\frac{\pi kx}{\ell}\,dx, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

Заметим, что если функция f принимает только вещественные значения, то ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе также вещественны.

Ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{\ell}+b_k\sin\frac{\pi kx}{\ell}\right). \tag{2}$$

Определение. *Стандартной тригонометрической системой* называется тригонометрическая система на отрезке длиной 2π, т.е. $\ell = \pi$. Стандартная тригонометрическая система имеет вид

$$\frac{1}{2},\ \sin x,\ \cos x,\ \cdots,\ \sin kx,\ \cos kx,\ \cdots.$$

Заменой $x \to \frac{\pi x}{\ell}$ из стандартной тригонометрической системы можно получить тригонометрическую систему общего вида. Имея в виду эту замену, для простоты будем рассматривать стандартную тригонометрическую систему.

Далее в основном мы будем рассматривать ряды Фурье по тригонометрической системе, хотя можно рассматривать ряды Фурье по любой ортогональной системе, например, по системе многочленов Лежандра, о которой речь пойдет в § 11.

Замечание. Система функций $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является ортогональной на любом отрезке длины 2π.

Поскольку для функций $e_k(x) = e^{ikx}$ имеем $(e_k, e_k) = \int\limits_{x_0}^{x_0+2\pi}|e^{ikx}|^2\,dx = 2\pi$, то коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ определяются формулами

$$c_k=\frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}=\frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi}f(x)\,e^{-ikx}\,dx,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Лемма 2. *Частичная сумма*

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ряда Фурье функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ по стандартной тригонометрической системе совпадает с частичной суммой

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

ряда Фурье функции f по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Доказательство. Используя формулы Эйлера, получаем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\,dx = c_k + c_{-k},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\,dx = i(c_k - c_{-k}).$$

Следовательно,

$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big((c_k + c_{-k})\cos kx + i(c_k - c_{-k})\sin kx\Big) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k(\cos kx + i\sin kx) + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(\cos kx - i\sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

□

Имея в виду лемму 2, ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ называют *тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме.* Сходимость такого «двустороннего» ряда будем понимать как сходимость последовательности

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

§ 2. Приближение функций по норме L_p. Теорема Римана об осцилляции

Определение. *Индикаторной функцией множества A* называется функция

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Теорема 1. (О приближении по норме L_1.) *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, равная (конечной) линейной комбинации индикаторных функций клеток $\Pi_j \subset \mathbb{R}^n$ и такая, что*

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)| \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$. В силу леммы о приближении неотрицательной измеримой функции счетно-ступенчатой функцией (см. §7 главы «Мера и интеграл Лебега») существуют измеримые счетно-ступенчатые функции $g, \varphi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ такие, что

$$g(x) \le f(x) \le g(x) + \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поскольку функция g является счетно-ступенчатой, то существует счетный набор измеримых множеств X_k и соответствующий набор чисел $g_k \in [0, +\infty)$ такие, что

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mathbf{1}_{X_k}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Исключая из этой суммы нулевые слагаемые, будем считать, что $g_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k)$ сходится. Поэтому существует индекс $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим

$$\widetilde{g}(x) := \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mathbf{1}_{X_k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\|g-\widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)-\widetilde{g}(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (g(x)-\widetilde{g}(x))\,dx = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|f-g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)-g(x))\,dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно,

$$\|f-\widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \|g-\widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|f-g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Так как $g_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) < +\infty$, то множества X_k конечно измеримы. Следовательно, для каждого $k \in \overline{1,k_0}$ найдется клеточное множество $A_k \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $g_k \cdot \mu(X_k \Delta A_k) < \frac{\varepsilon}{4k_0}$. Положим

$$h(x) := \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как клеточное множество A_k представимо в виде дизъюнктного объединения конечного числа клеток: $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{I_k} \Pi_i^k$, то $\mathbf{1}_{A_k}(x) = \sum\limits_{i=1}^{I_k} \mathbf{1}_{\Pi_i^k}(x)$. Поэтому функция h является конечной линейной комбинацией индикаторных функций клеток. Поскольку $\|\,\mathbf{1}_{A_k} - \mathbf{1}_{X_k}\,\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \mu(X_k \Delta A_k)$, то

$$\|h-\widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \|\,\mathbf{1}_{A_k} - \mathbf{1}_{X_k}\,\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mu(X_k \Delta A_k) < k_0 \cdot \frac{\varepsilon}{4k_0} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Используя неравенство (1), получаем

$$\|h - f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \|h - \widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|f - \widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \tag{2}$$

Обозначим

$$M := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x), \qquad f_\varepsilon(x) := \min\{h(x), M\}.$$

Так как функция h является конечной линейной комбинацией индикаторных функций клеток, то функция f_ε обладает тем же свойством. Покажем, что

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \le |h(x) - f(x)| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Фиксируем $x \in \mathbb{R}^n$. Если $h(x) \le M$, то $f_\varepsilon(x) = h(x)$ и неравенство (3) выполнено. Если $h(x) > M$, то $f(x) \le M = f_\varepsilon(x) < h(x)$ и неравенство (3) снова выполнено. Из неравенств (2), (3) следует, что $\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \|h - f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Из определения функции f_ε следует, что $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \le M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

Шаг 2. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Применяя утверждение, доказанное на шаге 1, к функциям

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\},$$

находим функции $f_+^\varepsilon, f_-^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, равные конечным линейным комбинациям индикаторных функций клеток и такие, что

$$\|f_+^\varepsilon - f_+\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|f_-^\varepsilon - f_-\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_\pm^\varepsilon(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_\pm(x)|.$$

Замечая, что $f = f_+ - f_-$ и полагая $f_\varepsilon := f_+^\varepsilon - f_-^\varepsilon$, получим, что f_ε является конечной линейной комбинацией индикаторных функций клеток и $f - f_\varepsilon = f_+ - f_+^\varepsilon - (f_- - f_-^\varepsilon)$, а значит,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \|f_+ - f_+^\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|f_- - f_-^\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

При этом

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_\varepsilon(x)| \le \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_+^\varepsilon(x)|, \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_-^\varepsilon(x)|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_+(x)|, \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_-(x)|\right\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|.$$

$\square$

Теорема 2. (О приближении по норме L_p.) *Пусть X – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $f \in L_p(X)$, $p \in [1,+\infty)$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $f_\varepsilon \in L_p(\mathbb{R}^n)$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток и такая, что*

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_p(X)} < \varepsilon.$$

При этом если $f \in L_p(X,\mathbb{R})$, то $f_\varepsilon \in L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $f \in L_p(X,\mathbb{R})$. Продолжим функцию f на $\mathbb{R}^n$, полагая $f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Тогда $f \in L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$X_k := \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| \le k,\ |f(x)| \le k\}.$$

Поскольку $X_k \subset X_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$, то в силу теоремы о непрерывности интеграла по множествам (теорема 1 §8 главы 8)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{X_k}|f(x)|^p\,dx.$$

Поэтому найдется индекс $k \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus X_k} |f(x)|^p\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{4}$$

Рассмотрим измеримую функцию

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in X_k, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus X_k. \end{cases}$$

Тогда

$$\|g-f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus X_k} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx = \int\limits_{X_k} |f(x)| \, dx \leq k\mu(X_k) \leq k \cdot (2k)^n < +\infty,$$

то $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем произвольное число $\delta > 0$. Согласно теореме о приближении по норме L_1 найдется функция $g_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток и такая, что

$$\|g_\delta - g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \delta, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g_\delta(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| \leq k.$$

Так как $|g_\delta(x) - g(x)| \leq |g_\delta(x)| + |g(x)| \leq 2k$, то $|g_\delta(x) - g(x)|^p \leq |g_\delta(x) - g(x)| \cdot (2k)^{p-1}$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_\delta(x) - g(x)|^p \, dx \leq (2k)^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_\delta(x) - g(x)| \, dx < (2k)^{p-1} \cdot \delta. \quad (5)$$

Определим число δ из равенства $(2k)^{p-1} \cdot \delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ и положим $f_\varepsilon = g_\delta$. Тогда

$$\|f_\varepsilon - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_\delta(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_p(X)} \leq \|f_\varepsilon - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_\varepsilon - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|g - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Шаг 2. Пусть функция $f \in L_p(X)$ может принимать комплексные значения. Применяя утверждение, доказанное на шаге 1, к функциям $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$, находим функции $g_\varepsilon, h_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, равные конечным линейным комбинациям индикаторных функций клеток и такие, что

$$\|\operatorname{Re} f - g_\varepsilon\|_{L_p(X)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\operatorname{Im} f - h_\varepsilon\|_{L_p(X)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая $f_\varepsilon := g_\varepsilon + ih_\varepsilon$, получаем

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_p(X)} \le \|\mathrm{Re}\, f - g_\varepsilon\|_{L_p(X)} + \|\mathrm{Im}\, f - h_\varepsilon\|_{L_p(X)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$

Замечание. Если функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ равна линейной комбинации индикаторных функций клеток $\Pi_j \subset \mathbb{R}^n$:

$$h(x) = \sum_{j=1}^{j_0} h_j \cdot \mathbf{1}_{\Pi_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то h представима в виде линейной комбинации индикаторных функций попарно непересекающихся клеток.

Действительно, индукцией по числу клеток j_0 легко доказать, что клеточное множество $A := \bigcup\limits_{j=1}^{j_0} \Pi_j$ представимо в виде дизъюнктного объединения клеток $\pi_k \subset \mathbb{R}^n$ таких, что для любых индексов $j \in \overline{1, j_0}$ и $k \in \overline{1, k_0}$ либо $\pi_k \subset \Pi_j$, либо $\pi_k \cap \Pi_j = \emptyset$. Тогда любая клетка Π_j является дизъюнктным объединением клеток π_k таких, что $\pi_k \subset \Pi_j$. Следовательно,

$$\mathbf{1}_{\Pi_j}(x) = \sum_{k:\ \pi_k \subset \Pi_j} \mathbf{1}_{\pi_k}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall j \in \overline{1, j_0}.$$

Поэтому для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$h(x) = \sum_{j=1}^{j_0} h_j \sum_{k:\ \pi_k \subset \Pi_j} \mathbf{1}_{\pi_k}(x) = \sum_{k \in \overline{1, k_0}} \left(\sum_{j:\ \pi_k \subset \Pi_j} h_j \right) \mathbf{1}_{\pi_k}(x),$$

то есть функция h представима в виде линейной комбинации индикаторных функций попарно непересекающихся клеток π_k.

Теорема 3. (Теорема Римана.) *Пусть $f \in L_1(a, b)$, где (a, b) – конечный или бесконечный интервал. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\, e^{i\omega x}\, dx \quad \overset{\omega \to \pm\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу теоремы о приближении по норме L_p найдется функция $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \to \mathbb{C}$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток $\Pi_k \subset \mathbb{R}$: $f_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mathbf{1}_{\Pi_k}(x)$ и такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_{L_1(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\left|\int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) e^{i\omega x}\, dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx = \|f - f_\varepsilon\|_{L_1(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Заметим, что клетка в $\mathbb{R}$ – это ограниченный числовой промежуток. Концы этого числового промежутка обозначим как α_k и β_k, $\alpha_k \le \le \beta_k$. Если $(\alpha_k, \beta_k) \not\subset (a, b)$, то заменим интервал (α_k, β_k) на интервал $(\alpha_k, \beta_k) \cap (a, b)$ и получим, что $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f_\varepsilon(x) e^{i\omega x}\, dx = \sum_{k=1}^{k_0} g_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} e^{i\omega x}\, dx = \sum_{k=1}^{k_0} g_k \left. \frac{e^{i\omega x}}{i\omega} \right|_{x=\alpha_k}^{x=\beta_k}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(x) e^{i\omega x}\, dx\right| \le \frac{2}{|\omega|} \sum_{k=1}^{k_0} |g_k|.$$

Выбирая число $\omega_\varepsilon > 0$ так, что $\frac{2}{\omega_\varepsilon} \sum_{k=1}^{k_0} |g_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем неравенство

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(x) e^{i\omega x}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \omega : \ |\omega| > \omega_\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (6) получаем

$$\left|\int_a^b f(x) e^{i\omega x}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall \omega : \ |\omega| > \omega_\varepsilon.$$

Поэтому $\int\limits_a^b f(x)\, e^{i\omega x}\, dx \to 0$ при $\omega \to \pm\infty$. $\square$

Следствие. *Если $f \in L_1(-\pi, \pi)$, то коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ стремятся к нулю при $k \to \pm\infty$. Следовательно, коэффициенты Фурье по стандартной тригонометрической системе

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k})$$

также стремятся к нулю при $k \to \infty$.

§ 3. Сходимость ряда Фурье в точке

Заметим, что поскольку функции e^{ikx} являются 2π-периодичными, то сумма ряда Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ (в случае сходимости ряда) является 2π-периодической функцией. Поэтому периодичность функции $f(x)$ с периодом 2π является необходимым условием сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ к самой функции $f(x)$.

При вычислении интегралов от периодических функций полезно иметь в виду, что интеграл по отрезку, длина которого равна периоду функции, не зависит от расположения этого отрезка.

Лемма 1. *Если функция φ периодична с периодом T и интегрируема на отрезке длиной T, то интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_0+T} \varphi(x)\, dx$ не зависит от x_0.*

Доказательство. Поскольку любой отрезок можно покрыть конечным числом отрезков длиной T, то в силу аддитивности интеграла функция φ интегрируема на любом отрезке. Используя периодичность функции φ, получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+T} \varphi(x)\, dx = \int\limits_{x_0}^{T} \varphi(x)\, dx + \int\limits_{T}^{x_0+T} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{T} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{0}^{x_0} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} \varphi(x)\,dx. \qquad \square$$

Обратимся к вопросу о сходимости ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье означает сходимость последовательности его частичных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}. \tag{1}$$

Лемма 2. *Пусть функция $f \in L_1(-\pi,\pi)$ является 2π-периодичной. Тогда для частичных сумм ряда Фурье функции f справедлива формула*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_n(t)\,dt,$$

где функция

$$D_n(t) := \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt} = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt$$

называется ядром Дирихле порядка n.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $x \in \mathbb{R}$. Подставляя в формулу (1) выражения $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,e^{-iku}\,du$, получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)} \right) du = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\, D_n(x-u)\,du$$

Вводя новую переменную интегрирования $t = u - x$, получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\, D_n(-t)\,dt.$$

Используя лемму 1, с учетом 2π-периодичности функций f и D_n, имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_n(t)\, dt.$$

В последнем равенстве использована четность ядра Дирихле. □

Свойства ядра Дирихле.

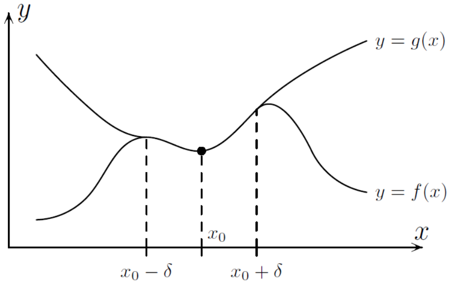
$$(1) \qquad \int\limits_0^\pi D_n(t)\, dt = \tfrac{\pi}{2};$$

$$(2) \quad D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Доказательство. 1) $\int\limits_0^\pi D_n(t)\, dt = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_0^\pi \cos kt\, dt = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

2) $2\sin\frac{t}{2}\, D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$ □

Теорема 1. (Принцип локализации.) *Пусть функции $f, g \in L_1(-\pi,\pi)$ – 2π-периодичны. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*



Тогда в точке x_0 ряды Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся – то к одинаковым значениям.

Доказательство. Обозначим через $S_n^f(x)$, $S_n^g(x)$ частичные суммы рядов Фурье функций f и g. В силу леммы 2

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)\Big)\, D_n(t)\, dt.$$

По условию теоремы $f(x_0+t) + f(x_0-t) = g(x_0+t) + g(x_0-t)$ при $t \in (0, \delta)$, поэтому

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \Big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)\Big)\, D_n(t)\, dt.$$

Пользуясь свойством (2) ядра Дирихле, получаем

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi h(t)\, \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt, \qquad (2)$$

где

$$h(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Так как $h \in L_1(\delta, \pi)$, то в силу теоремы Римана и формулы (2) получаем $S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. □

Теорема 2. (Признак Ди́ни.) *Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$ является 2π-периодичной. Пусть в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Пусть существует число $\delta \in (0, \pi)$ такое, что функция*

$$\varphi(t) := \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-t) - f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}$$

принадлежит классу $L_1(0, \delta)$. Тогда ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к числу $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Поскольку $f \in L_1(-\pi, \pi)$, то $\varphi \in L_1(\delta, \pi)$. Отсюда и из условий теоремы получаем, что функция $\varphi \in L_1(0, \pi)$. В силу теоремы Римана

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из леммы 2 следует, что

$$S_n(x_0) = \tfrac{1}{\pi} \int_0^\pi \Bigg(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) + \\ + f(x_0 - t) - f(x_0 - 0) \Bigg) D_n(t) \, dt + \tfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) \, dt.$$

Пользуясь свойствами ядра Дирихле $\int_0^\pi D_n(t) \, dt = \frac{\pi}{2}$ и $D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$, получаем

$$S_n(x_0) - \tfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \\ = \tfrac{1}{\pi} \int_0^\pi \tfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t \, dt = \\ = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t \, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $S_n(x_0) \to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ при $n \to \infty$. □

Теорема 3. (О сходимости ряда Фурье в точке.) *Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$ является 2π-периодичной. Пусть в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ и конечные односторонние производные*

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{t \to -0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)}{t}.$$

Тогда ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к числу $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, в частности, в случае непрерывности функции f в точке x_0 – к значению $f(x_0)$.

Доказательство. Поскольку

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}=f'_+(x_0)-f'_-(x_0),$$

то для функции $\varphi(t)=\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\times$ $\times\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}=2(f'_+(x_0)-f'_-(x_0))$. Следовательно, функция φ ограничена на некотором интервале $(0,\delta)$, где $\delta\in(0,\pi)$. Отсюда и из измеримости φ следует, что $\varphi\in L_1(0,\delta)$. По признаку Дини получаем требуемое утверждение. $\square$

Замечание. Если функция f определена и дифференцируема на интервале (x_0,x_1) и в точке x_0 существуют конечные пределы справа функции f и ее производной, то в точке x_0 правая производная функции f существует и равна правому пределу производной: $f'_+(x_0)=$ $=f'(x_0+0)$, где по определению $f'_+(x_0)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$, $f'(x_0+0)=\lim\limits_{t\to+0}f'(x_0+t)$. Этот факт следует из теоремы Лагранжа о среднем (глава 3, §4). Аналогичный факт справедлив для предела слева.

Определение. Функция f называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех точках (a,b) за исключением конечного числа точек $x_i\in(a,b)$, в которых существуют конечные односторонние пределы $f(x_i\pm0)$, а в концах отрезка $[a,b]$ существуют конечные односторонние пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$. При этом в самих точках x_i функция f может быть не определена.

Например, если функция f и ее производная f' кусочно-непрерывны на отрезке $[a,b]$, то в точках разрыва функции f ее производная не существует, но существуют односторонние производные, равные односторонним пределам производной.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x \in (-\pi, \pi)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, а в точках $\pm\pi$ – к числу $\frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$.*

Доказательство. Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то изменим значение функции f в точке π так, чтобы $f(-\pi) = f(\pi)$. При этом коэффициенты Фурье $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$ не изменятся, а значит, не изменится и ряд Фурье. Продолжим функцию f 2π-периодически на всю числовую ось. Из теоремы 3 следует, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x_0 \in (-\pi, \pi)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$, а в точках $\pm\pi$ – к числу $\frac{1}{2}(f(\pi+0) + f(\pi-0)) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$. $\square$

Замечание. Существуют непрерывные и 2π-периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках.

Пример Фейера. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Q(x, 2^{n^2})$, где

$$Q(x,m) = \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{\cos kx}{2m-k} + \sum_{k=2m+1}^{3m} \frac{\cos kx}{2m-k}.$$

Задача 1. Доказать, что функция f в примере Фейера непрерывна и 2π-периодична, но ее ряд Фурье не сходится в точке $x = 0$.

§ 4. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье

Теорема 1. (О почленном дифференцировании ряда Фурье.) *Пусть функция f непрерывна, а ее производная f' кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и выполняется равенство $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ряд Фурье функции f' получается формальным почленным дифференцированием ряда Фурье*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

функции f. То есть, ряд Фурье функции f' имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}.$$

Доказательство. Обозначим через c_k' коэффициенты Фурье функции $f'(x)$. Интегрируя по частям и учитывая условие $f(-\pi) = f(\pi)$, получим

$$c_k' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, f(x)\, e^{-ikx}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-ik)\, e^{-ikx}\, dx = ikc_k.$$

Поэтому ряд Фурье функции f' имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k' e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}. \qquad \square$$

Замечание. В вещественной форме ряды Фурье функция f и f' принимают соответственно вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\right).$$

Теорема 2. (О почленном интегрировании ряда Фурье.) *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда для любого $x \in [-\pi,\pi]$ справедлива формула почленного интегрирования ряда Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$:*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \widetilde{C}_0 + c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik} e^{ikx},$$

где

$$\widetilde{C}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\, dx, \qquad \Phi(x) = \int_0^x f(t)\, dt - c_0 x.$$

Доказательство. Так как

$$\Phi(\pi) - \Phi(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - c_0 \cdot 2\pi = 0,$$

то в силу теоремы 4 § 3 функция $\Phi(x)$ равна сумме своего ряда Фурье:

$$\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{C}_k e^{ikx}, \tag{1}$$

где $\widetilde{C}_k$ – коэффициенты Фурье функции $\Phi(x)$, в частности, $\widetilde{C}_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\,dx$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье $\quad c_k = ik \cdot \widetilde{C}_k$, что вместе с формулой (1) дает требуемое равенство. □

§ 5. Порядок убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда для коэффициентов Фурье функции f справедливы оценки:* $\quad c_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, *т. е.*

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \hookrightarrow \ |c_k| \leq \frac{M}{|k|}.$$

Доказательство. Поскольку из кусочной непрерывности функций f и f' следует их ограниченность, то существуют числа $M_0, M_1 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f'(x)| \leq M_1 \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Пусть $x_0, \ldots, x_J \quad (-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_J = \pi)$ – точки разрывов функции f. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{J}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\frac{de^{-ikx}}{-ik} =$$

$$= -\frac{1}{2ik\pi} \sum_{j=1}^{J} \left(f(x)\, e^{-ikx} \Big|_{x=x_{j-1}+0}^{x=x_j-0} - \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\, e^{-ikx}\, dx \right).$$

Поэтому $|c_k| \le \frac{M_0 J + \pi M_1}{\pi |k|}$, т. е. $c_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$. $\square$

Теорема 1. (О порядке убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье.)

1) Пусть задано число $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что

а) $q = 0$ или

б) $q \in \mathbb{N}$ и функция f вместе с ее производными до $q-1$ порядка включительно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условиям $f^{(p)}(-\pi) = f^{(p)}(\pi)$ при $p \in \overline{0, q-1}$.

Пусть производные q-го и $(q+1)$-го порядков функции f кусочно-непрерывны на $[-\pi, \pi]$. Тогда справедлива следующая оценка скорости убывания коэффициентов Фурье функции f:

$$c_k = O\left(\frac{1}{|k|^{q+1}}\right). \tag{1}$$

2) Если функция $f^{(q)}(x)$ имеет неустранимый разрыв $(f^{(q)}(x_0 - 0) \ne f^{(q)}(x_0 + 0))$ в некоторой точке $x_0 \in (-\pi, \pi)$ или $f^{(q)}(\pi - 0) \ne f^{(q)}(-\pi + 0)$, то оценка (1) неулучшаема в том смысле, что

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \ c_k \ne O\left(\frac{1}{|k|^{q+1+\varepsilon}}\right).$$

3) При этом при $q \in \mathbb{N}$ справедлива следующая оценка скорости убывания остатка ряда Фурье $r_n(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}:\ |k| > n} c_k\, e^{ikx}$:

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Доказательство. 1) Обозначим через $c_k^{(p)}$ коэффициенты Фурье функции $f^{(p)}(x)$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье

$$c_k^{(p)} = (ik)^p c_k. \tag{2}$$

Применяя лемму 1 к функции $f^{(q)}(x)$, получим оценку $c_k^{(q)} = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, что вместе с равенством (2) доказывает оценку (1).

2) Вторую часть теоремы докажем методом от противного. Предположим, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$ справедлива оценка $c_k = O\left(\frac{1}{|k|^{q+1+\varepsilon}}\right)$. Отсюда и из равенства (2) получаем, что $c_k^{(q)} = O\left(\frac{1}{|k|^{1+\varepsilon}}\right)$, следовательно, числовой ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k^{(q)}|$ сходится. В силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов получаем равномерную сходимость ряда Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(q)} e^{ikx}$ функции $f^{(q)}(x)$. Так как сумма равномерно сходящегося функционального ряда, члены которого являются непрерывными функциями, есть функция непрерывная (глава 10, §3, теорема 2), то сумма ряда Фурье функции $f^{(q)}(x)$ непрерывна.

Если $f^{(q)}(x_0 - 0) \neq f^{(q)}(x_0 + 0)$ в некоторой точке $x_0 \in (-\pi, \pi)$ или $f^{(q)}(\pi - 0) \neq f^{(q)}(-\pi + 0)$, то в силу теоремы о сходимости ряда Фурье в точке сумма ряда Фурье функции $f^{(q)}(x)$ будет иметь разрыв в точке x_0 или в точках $\pm\pi$ соответственно. Полученное противоречие завершает доказательство второй части теоремы.

3) Из оценки (1) следует существование константы M такой, что $|c_k| \leq \frac{M}{|k|^{q+1}} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, следовательно,

$$\sup_{x \in [-\pi,\pi]} |r_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|c_{-k}| + |c_k|) \leq 2M \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{q+1}}.$$

Интегрируя неравенство $\frac{1}{k^{q+1}} \leq \frac{1}{t^{q+1}}$, справедливое при $t \in [k-1, k]$, получим неравенство $\frac{1}{k^{q+1}} \leq \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{q+1}}$. Следовательно,

$$\sup_{x \in [-\pi,\pi]} |r_n(x)| \leq 2M \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{q+1}} = 2M \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dt}{t^{q+1}} = \frac{2M}{q} \frac{1}{n^q},$$

т. е. $\sup\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right)$. □

§ 6. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических

Определение. *Суммами Фейера* $\sigma_n(x)$ функции $f(x)$ называются средние арифметические сумм Фурье $S_n(x)$ функции $f(x)$:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ называется *сходящимся в смысле средних арифметических*, если сходится последовательность сумм Фейера функции $f(x)$.

В данном параграфе будет доказана теорема Фейера, утверждающая, что последовательность сумм Фейера непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно. Поэтому суммы Фейера любой непрерывной 2π-периодической функции могут служить равномерными приближениями этой функции. Поскольку последовательность сумм Фурье непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ может расходиться в некоторых точках, то суммы Фурье не могут служить приближениями такой функции $f(x)$ в этих точках и тем более равномерно.

Лемма 1. *Для сумм Фейера непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ справедлива формула*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, F_n(t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

где функция

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

равная среднему арифметическому ядер Дирихле, называется ядром Фейера порядка n.

Доказательство. В силу леммы 2 § 3 частичная сумма Фурье выражается через ядро Дирихле по формуле

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))\,D_k(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n S_k(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k(t)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))\,F_n(t)\,dt. \qquad \square$$

Свойства ядра Фейера:

(1) $\int\limits_0^\pi F_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$;

(2) $F_n(t) = \frac{1-\cos(n+1)t}{(n+1)4\sin^2(t/2)}$;

(3) $F_n(t) \geq 0$;

(4) $\max\limits_{t\in[\delta,\pi]} F_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall\delta\in(0,\pi)$.

Доказательство. 1) В силу первого свойства ядра Дирихле $\int\limits_0^\pi D_k(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\int\limits_0^\pi F_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^n \int\limits_0^\pi D_k(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$.

2) Поскольку согласно второму свойству ядра Дирихле имеем $D_k(t) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$, то

$$(n+1)\,4\sin^2(t/2)\,F_n(t) = 2\sin(t/2)\ \sum_{k=0}^n \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t =$$

$$= \sum_{k=0}^n\Big(\cos kt - \cos(k+1)t\Big) = 1-\cos(n+1)t.$$

3) Следует из второго свойства ядра Фейера.

4) Из второго свойства также следует, что $F_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)2\sin^2(t/2)}$, поэтому для любого $\delta\in(0,\pi)$ имеем

$$\max_{t\in[\delta,\pi]} F_n(t) \le \frac{1}{(n+1)2\sin^2(\delta/2)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теорема 1. (Теорема Фейера.) *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда последовательность сумм Фейера функции f сходится к функции f равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$.*

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\sigma_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{1}$$

Продолжим 2π-периодично функцию f на $\mathbb{R}$. Из условий теоремы следует непрерывность продолженной функции f. В силу леммы 1 и первого свойства ядра Фейера

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))\, F_n(t)\, dt - \frac{2}{\pi} f(x) \int_0^\pi F_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\Big)\, F_n(t)\, dt.$$

Поэтому, используя третье свойство ядра Фейера, получаем

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt. \tag{2}$$

Для доказательства соотношения (1) разобъем интеграл в правой части неравенства (2) на два интеграла по отрезкам $[0,\delta]$ и $[\delta,\pi]$.

Из непрерывности функции f на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ по теореме Кантора следует равномерная непрерывность f на этом отрезке. Поэтому, обозначая

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x',x''\in[-2\pi,2\pi]\\ |x'-x''|\le\delta}} |f(x') - f(x'')|,$$

получаем соотношение

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 0. \tag{3}$$

Поскольку для любых $\delta \in (0, \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$ справедливы неравенства

$$\int\limits_0^{\delta} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt \le$$

$$\le \int\limits_0^{\delta} (|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|)\, F_n(t)\, dt \le$$

$$\le 2\omega(\delta) \int\limits_0^{\delta} F_n(t)\, dt \le 2\omega(\delta) \int\limits_0^{\pi} F_n(t)\, dt,$$

то в силу первого свойства ядра Фейера для любых $\delta \in (0, \pi)$, $x \in$ $\in [-\pi, \pi]$ имеем

$$\int\limits_0^{\delta} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt \le \pi\omega(\delta). \tag{4}$$

В силу непрерывности функции f на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ существует число $M = \max\limits_{x \in [-2\pi, 2\pi]} |f(x)|$. Поэтому для любых $\delta \in (0, \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt \le 4M\,\pi \max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t).$$

Отсюда и из неравенств (2), (4) для любого $\delta \in (0, \pi)$ получаем

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(x) - f(x)| \le \omega(\delta) + 4M \max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t).$$

Используя соотношение (3), для любого числа $\varepsilon > 0$ определим число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \pi)$ так, что $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу четвертого свойства ядра Фейера существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n \ge N$ справедливо неравенство $4M \max\limits_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N(\varepsilon),$$

то есть выполняется условие (1). $\square$

§ 7. Приближения непрерывных функций многочленами

Определение. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ – некоторые комплексные числа, причем $A_n \neq 0$ или $B_n \neq 0$. Выражение

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называется *тригонометрическим многочленом* степени n.

Теорема 1. (Первая теорема Вейерштрасса.) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T_n(x)$, равномерно приближающий функцию $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ с точностью ε, т. е.*

$$\|f - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} < \varepsilon.$$

При этом, если все значения функции f вещественны, то все коэффициенты тригонометрического многочлена T_n вещественны.

Доказательство. Поскольку частичные суммы Фурье являются тригонометрическими многочленами, то суммы Фейера $\sigma_n(x)$, равные линейным комбинациям сумм Фурье, также являются тригонометрическими многочленами. Из теоремы Фейера следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f - \sigma_n\|_{C[-\pi,\pi]} < \varepsilon$. Полагая $T_n = \sigma_n$, получаем требуемое неравенство. □

Теорема 2. (Вторая теорема Вейерштрасса.) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, равномерно приближающий функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью ε, т. е.*

$$\|f - P_n\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

При этом, если все значения функции f вещественны, то все коэффициенты многочлена P_n вещественны.

Доказательство. Производя замену переменной

$$x = a + \frac{b-a}{\pi}t, \qquad 0 \le t \le \pi, \qquad a \le x \le b, \tag{1}$$

получим функцию $F(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}t\right)$, непрерывную на отрезке $[0, \pi]$. Продолжим функцию $F(t)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом. Получим непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $F(t)$, удовлетворяющую условию $F(-\pi) = F(\pi)$.

В силу теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T_m(t)$ такой, что

$$\|F - T_m\|_{C[-\pi,\,\pi]} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Поскольку функции $\sin kt$, $\cos kt$ раскладываются в ряды Тейлора с радиусом сходимости $R = +\infty$, то функция $T_m(t)$, равная (конечной) линейной комбинации функций $\sin kt$, $\cos kt$, также раскладывается в ряд Тейлора с $R = +\infty$. Так как степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости этого ряда, то ряд Тейлора функции $T_m(t)$ сходится к функции $T_m(t)$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Следовательно, найдется многочлен $Q_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$ такой, что $\|T_m - Q_n\|_{C[-\pi,\,\pi]} < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из неравенства (2) получаем, что

$$\|F - Q_n\|_{C[-\pi,\,\pi]} < \varepsilon.$$

Производя обратную к (1) замену переменной: $t = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$, получим неравенство

$$\max_{x\in[a,b]} \left| F\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right) - Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right) \right| < \varepsilon.$$

Определив многочлен $P_n(x) = Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ и замечая, что $f(x) = F\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$, получаем требуемое неравенство. $\square$

Определение . Пусть F – нормированное пространство. Множество $A \subset F$ называется *всюду плотным* подмножеством множества $B \subset \subset F$, если $A \subset B \subset \overline{A}$, т.е. $A \subset B$ и

$$\forall b \in B \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A : \quad \|b - a_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Определение. Через $C^{=}[a,b]$ обозначим линейное пространство функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и таких, что $f(a) = f(b)$.

Первая теорема Вейерштрасса утверждает, что множество тригонометрических многочленов является всюду плотным подмножеством множества $C^{=}[-\pi,\pi]$ относительно нормы пространства $C[-\pi,\pi]$.

Вторая теорема Вейерштрасса утверждает, что множество алгебраических многочленов является всюду плотным подмножеством пространства $C[a,b]$.

§ 8. Теорема Вейерштрасса–Стоуна

Определение. Семейство A непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ называется *алгеброй Стоуна* на топологическом пространстве X, если

1) любая постоянная функция $f : X \to \mathbb{R}$ содержится в A;

2) если $f, g \in A$, то $f + g \in A$ и $fg \in A$ (функции $f + g$ и fg определяются формулами $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для любого $x \in X$);

3) для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ найдется функция $f \in A$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Лемма 1. *Пусть A – алгебра Стоуна на топологическом пространстве X. Тогда для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ и для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется функция $f \in A$ такая, что $f(x_1) = \lambda_1$, $f(x_2) = \lambda_2$.*

Доказательство. Фиксируем произвольные различные точки $x_1, x_2 \in X$ и произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. В силу пункта 3) определения алгебры Стоуна найдется функция $g \in A$ такая, что $g(x_1) \neq g(x_2)$. Заметим, что для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \alpha g(x) + \beta$ принадлежит семейству A. Подберем числа α, β так, чтобы $f(x_1) = \lambda_1$, $f(x_2) = \lambda_2$, т.е.

$$\begin{cases} \alpha g(x_1) + \beta = \lambda_1, \\ \alpha g(x_2) + \beta = \lambda_2. \end{cases}$$

Поскольку определитель матрицы этой системы линейных уравнений равен $\begin{vmatrix} g(x_1) & 1 \\ g(x_2) & 1 \end{vmatrix} = g(x_1) - g(x_2) \neq 0$, то такие числа α, β существуют. $\square$

Лемма 2. *Пусть A – алгебра Стоуна на компакте*[1] *X. Пусть $f \in$ $\in A$. Тогда $|f| \in \overline{A}$, где $\overline{A}$ – замыкание множества A относительно нормы $C(X)$.*

Доказательство. Обозначим $M = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $m(y) = |y|$ непрерывна, то в силу второй теоремы Вейерштрасса найдется алгебраический многочлен $P_n(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n$ такой, что $\|m - P_n\|_{C[-M,\, M]} <$ $< \varepsilon$. Следовательно,

$$\max_{x \in X} \Big|\, |f(x)| - P_n(f(x)) \Big| < \varepsilon.$$

Положим $f_\varepsilon(x) := P_n(f(x)) = a_0 + a_1 f(x) + \ldots + a_n f^n(x)$. По определению алгебры Стоуна получаем $f_\varepsilon \in A$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in A$ такая, что $\Big\| |f| - f_\varepsilon \Big\|_{C(X)} < \varepsilon$. Поэтому $|f| \in \overline{A}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть A – алгебра Стоуна на компакте X. Пусть $f_1, f_2 \in \overline{A}$, $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, $h(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ при всех $x \in X$. Тогда $g, h \in \overline{A}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_1, f_2 \in \overline{A}$, то существуют функции $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon \in A$ такие, что $\|f_i^\varepsilon - f_i\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $i = 1, 2$. Положим $g^\varepsilon(x) := \max\{f_1^\varepsilon(x), f_2^\varepsilon(x)\}$, $x \in X$. Заметим, что для любого $x \in X$

$$g^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(f_1^\varepsilon(x) + f_2^\varepsilon(x) + |f_1^\varepsilon(x) - f_2^\varepsilon(x)|).$$

В силу леммы 2 имеем $|f_1^\varepsilon - f_2^\varepsilon| \in \overline{A}$. Поэтому найдется функция $\varphi \in A$ такая, что

$$\Big\| |f_1^\varepsilon - f_2^\varepsilon| - \varphi \Big\|_{C(X)} < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $\tilde{g}^\varepsilon := \frac{1}{2}(f_1^\varepsilon + f_2^\varepsilon + \varphi)$ содержится в A. При этом

[1] здесь и далее под компактом понимаем компактное топологическое пространство, в частности, ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является компактом

$$\left\|\tilde{g}^{\varepsilon} - g^{\varepsilon}\right\|_{C(X)} = \frac{1}{2}\left\||f_1^{\varepsilon} - f_2^{\varepsilon}| - \varphi\right\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Так как при $i = 1, 2$ имеем $\|f_i^{\varepsilon} - f_i\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$f_i(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_i^{\varepsilon}(x) < f_i(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X,$$

а значит для любого $x \in X$

$$\max\{f_1(x), f_2(x)\} - \frac{\varepsilon}{2} < \max\{f_1^{\varepsilon}(x), f_2^{\varepsilon}(x)\} < \max\{f_1(x), f_2(x)\} + \frac{\varepsilon}{2},$$

то есть, $\|g - g^{\varepsilon}\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из неравенства (1) получаем неравенство

$$\|\tilde{g}^{\varepsilon} - g\|_{C(X)} < \varepsilon.$$

Поскольку $\tilde{g}^{\varepsilon} \in A$, то в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $g \in \overline{A}$. Аналогично, $h \in \overline{A}$. □

Теорема 1. (Теорема Вейерштрасса–Стоуна.) *Алгебра Стоуна на компакте X является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{R})$.*

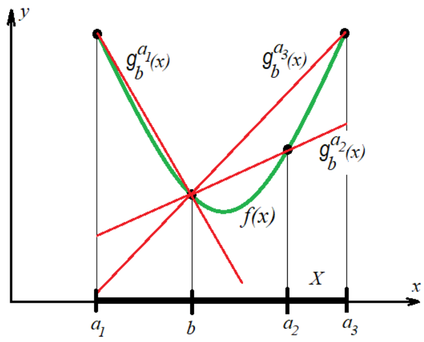
Доказательство. Пусть A – алгебра Стоуна на компакте X. Фиксируем произвольную функцию $f \in C(X, \mathbb{R})$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. Для любых двух различных точек $a, b \in X$ по лемме 1 существует функция $g_b^a \in A$ такая, что

$$g_b^a(a) = f(a), \quad g_b^a(b) = f(b).$$

Если $a = b$, то такая функция $g_b^a \in A$ также существует (в этом случае можно взять, например, константу $g_b^a(x) = f(a) = f(b)$).

В силу непрерывности функций f и g_b^a для любых $a, b \in X$ найдутся окрестность $U^b(a)$ точки a и окрестность $V^a(b)$ точки b такие, что

$$|g_b^a(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in U^b(a) \cup V^a(b). \qquad (2)$$



Фиксируем произвольную точку $b \in X$. В силу компактности X из открытого покрытия $X \subset \bigcup\limits_{a \in X} U^b(a)$ можно выделить конечное подпокрытие, т.е. существует конечный набор точек $a_1, \ldots, a_I \in X$ такой, что

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{I} U^b(a_i). \tag{3}$$

Для любой точки $x \in X$ положим

$$g_b(x) := \max_{i \in \overline{1,I}} g_b^{a_i}(x).$$

Из неравенства (2) следует, что

$$g_b(x) \geq g_b^{a_i}(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in U^b(a_i).$$

Отсюда и из включения (3) получаем

$$g_b(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

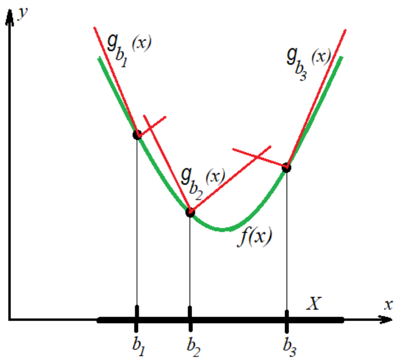
С другой стороны, из неравенства (2) следует, что

$$g_b^{a_i}(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in V^{a_i}(b),$$

а значит,

$$g_b(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in V(b), \tag{5}$$

где $V(b) := \bigcap\limits_{i=1}^{I} V^{a_i}(b)$ – окрестность точки b.



Выделяя конечное подпокрытие из открытого покрытия $X \subset \subset \bigcup_{b \in X} V(b)$, найдем такой конечный набор точек $b_1, \ldots, b_J \in X$, что

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{J} V(b_j).$$

Отсюда и из неравенства (5) получаем

$$g(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in X, \tag{6}$$

где

$$g(x) := \min_{j \in \overline{1,J}} g_{b_j}(x).$$

Из неравенства (4) следует, что $g(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in X$. Отсюда и из неравенства (6) имеем

$$\|f - g\|_{C(X)} < \varepsilon. \tag{7}$$

Так как $g_b^a \in A$, то в силу леммы 3 получаем $g_b \in \overline{A}$ при всех $b \in X$. Еще раз применяя лемму 3, приходим к включению $g \in \overline{A}$. Поэтому найдется функция $h \in A$ такая, что $\|h - g\|_{C(X)} < \varepsilon$. Используя неравенство (7), имеем $\|h - f\|_{C(X)} < 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $f \in \overline{A}$. Таким образом, $A \subset C(X, \mathbb{R}) \subset \overline{A}$. $\square$

Следствие. *Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P_m(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных такой, что $\|f - P_m\|_{C(X)} < \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что семейство алгебраических многочленов $P_m(x_1, \dots, x_n)$ составляет алгебру Стоуна на X и применить теорему Вейерштрасса–Стоуна. $\square$

Замечание. Утверждение, полученное прямым обобщением теоремы Вейерштрасса–Стоуна на комплеснозначные функции, несправедливо. Точнее, существует компакт X и семейство A непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$, содержащее все постоянные функции $f : X \to \mathbb{C}$ и удовлетворяющее условиям 2) и 3) определения алгебры Стоуна, которое не является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{C})$.

Пусть, например, X – единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с топологией, индуцированной топологией пространства $\mathbb{R}^2$, а семейство A состоит из функций вида

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, e^{ik\varphi},$$

где число $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ не фиксировано (зависит от конкретной функции $f \in A$), $c_k \in \mathbb{C}$, φ – полярный угол точки на единичной окружности X. Легко видеть, что семейство A состоит из непрерывных на X функций, содержит все постоянные функции $f : X \to \mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям 2) и 3) определения алгебры Стоуна.

Покажем, что A не является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{C})$. Пусть $f_0(\varphi) = e^{-i\varphi}$. Тогда $f_0 \in C(X, \mathbb{C})$. Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) \, \overline{f_0(\varphi)} \, d\varphi = 0 \qquad \forall f \in A.$$

Поэтому для любой функции $f \in A$ имеем

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi) - f_0(\varphi)|^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (f(\varphi) - f_0(\varphi))(\overline{f(\varphi)} - \overline{f_0(\varphi)}) \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 \, d\varphi + \int_0^{2\pi} |f_0(\varphi)|^2 \, d\varphi - \int_0^{2\pi} f(\varphi) \, \overline{f_0(\varphi)} \, d\varphi - \overline{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \, \overline{f_0(\varphi)} \, d\varphi} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} |f_0(\varphi)|^2\, d\varphi \geq \int\limits_0^{2\pi} |f_0(\varphi)|^2\, d\varphi = 2\pi.$$

С другой стороны, $\int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi) - f_0(\varphi)|^2\, d\varphi \leq 2\pi \|f - f_0\|^2_{C(X)}$. Следовательно,

$$\|f - f_0\|_{C(X)} \geq 1 \qquad \forall f \in A.$$

Таким образом, A не является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{C})$.

§ 9. Полные системы

Определение. Будем говорить, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов линейного нормированного пространства F *полна* в пространстве F, если для любого элемента $f \in F$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ элементов системы $\{e_k\}$, приближающая элемент f по норме пространства F с точностью ε:

$$\|\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n - f\| < \varepsilon.$$

Иными словами, полнота системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве F эквивалентна тому, что множество линейных комбинаций элементов этой системы является всюду плотным подмножеством пространства F.

Отметим, что полнота системы и полнота пространства – это совершенно разные понятия.

Теорема 1. *Стандартная тригонометрическая система полна в пространстве $C^{=}[-\pi, \pi]$ относительно нормы $C[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Поскольку любой тригонометрический многочлен является линейной комбинацией элементов тригонометрической системы, то из теоремы Вейерштрасса о приближении функций тригонометрическими многочленами следует, что любую функцию $f \in C^{=}[-\pi, \pi]$ можно с любой точностью равномерно (т. е. в смысле нормы пространства $C[-\pi, \pi]$) приблизить линейной комбинацией элементов тригонометрической системы. $\square$

Пример 1. Покажем, что тригонометрическая система неполна в нормированном пространстве $C[-\pi, \pi]$.

Решение. Поскольку любая линейная комбинация элементов тригонометрической системы является тригонометрическим многочленом $T_n(x)$, то неполнота тригонометрической системы в $C[-\pi, \pi]$ означает, что

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists f \in C[-\pi, \pi] \ : \quad \forall T_n \hookrightarrow \ \|f - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} \geq \varepsilon.$$

Определим $f(x) = x$, $\varepsilon = \pi$. Поскольку $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$, то

$$\|f - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| \geq$$

$$\geq \max\{|f(-\pi) - T_n(-\pi)|, \ |f(\pi) - T_n(\pi)|\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\Big(|f(-\pi) - T_n(-\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(|f(-\pi) - T_n(\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\Big) \geq \frac{1}{2}|f(-\pi) - f(\pi)| = \pi = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 2. *Система функций* $\{x^k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ *полна в нормированном пространстве* $C[a, b]$.

Доказательство состоит в применении теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами. $\square$

Ниже мы докажем полноту тригонометрической системы в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$. Для этого потребуются следующая лемма.

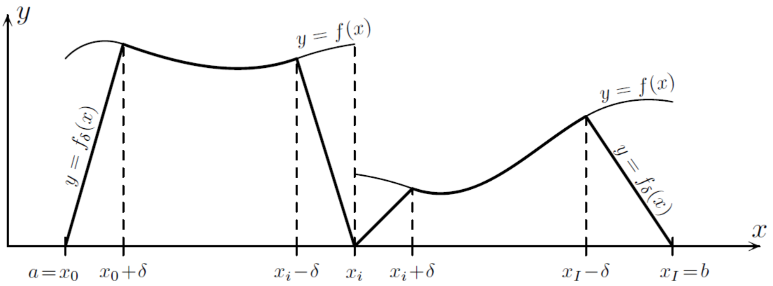
Лемма 1. *Множество* $C^{=}[a, b]$ *является всюду плотным подмножеством множества кусочно-непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций относительно нормы* $L_p[a, b]$, $p \in [1, +\infty)$.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a, b]$, т. е. существует конечный набор точек $\{x_i\}_{i=0}^{I}$, $\quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b$ таких, что в каждой точке $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$ функция $f(x)$ непрерывна, а в точках x_i функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы. Если в точках x_i функция f не определена, то доопределим ее в этих точках произвольным образом. Обозначим $\delta_0 = \frac{1}{2} \min\limits_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1})$. Для любого числа $\delta \in (0, \delta_0)$ определим непрерывную на $[a, b]$ функцию $f_\delta(x)$, положив

$f_\delta(x) = f(x)$ при $x \notin (x_i - \delta, x_i + \delta)$, $i = 0, 1, \ldots, I$;

$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta} f(x_i + \delta)(x - x_i)$ при $x \in [x_i, x_i + \delta)$, $i = 0, 1, \ldots, I - 1$;

$f_\delta(x) = -\frac{1}{\delta} f(x_i - \delta)(x - x_i)$ при $x \in (x_i - \delta, x_i)$, $i = 1, \ldots, I$.



Из непрерывности функции $f_\delta(x)$ и условий $f_\delta(a) = f_\delta(b) = 0$ следует, что $f_\delta \in C^{=}[a, b]$.

Поскольку функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$, т. е. $C = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| < +\infty$. Из определения функции $f_\delta(x)$ следует, что $|f_\delta(x)| \leq C \ \forall x \in [a, b]$.

Поэтому

$$\|f - f_\delta\|^p_{L_p[a,\,b]} = \int\limits_a^b |f(x) - f_\delta(x)|^p \, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\delta} |f(x) - f_\delta(x)|^p \, dx + \int\limits_{x_i - \delta}^{x_i} |f(x) - f_\delta(x)|^p \, dx \right) \leq$$

$$\leq I \cdot 2\delta \cdot (2C)^p \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Следовательно, для любой кусочно-непрерывной на $[a, b]$ функции f и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\delta \in C^{=}[a, b]$ такая, что $\|f - f_\delta\|_{L_p[a,\,b]} < \varepsilon$. $\square$

Теорема 3. *Стандартная тригонометрическая система полна в нормированном пространстве $L_p[-\pi, \pi]$ при $p \in [1, +\infty)$.*

Доказательство. Пусть заданы произвольные функция $f \in \in L_p[-\pi, \pi]$ и число $\varepsilon > 0$. В силу теоремы о приближении по норме L_p существует функция $f_\varepsilon : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток (а значит, кусочно-непрерывная) и такая, что $\|f_\varepsilon - f\|_{L_p[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$. Согласно лемме 1 найдется функция $g_\varepsilon \in C^{=}[-\pi, \pi]$, удовлетворяющая неравенству $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L_p[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$. Из полноты тригонометрической системы в пространстве $C^{=}[-\pi, \pi]$ относительно нормы $C[-\pi, \pi]$ (теорема 1) следует существование тригонометрического многочлена T_n такого, что $\|g_\varepsilon - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3(2\pi)^{\frac{1}{p}}}$. Отсюда и из неравенства (2) § 3 вытекают неравенства

$$\|g_\varepsilon - T_n\|_{L_p[-\pi,\pi]} \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \|g_\varepsilon - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак,

$$\|f - T_n\|_{L_p[-\pi,\pi]} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L_p[-\pi,\pi]} + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L_p[-\pi,\pi]} + \\ + \|g_\varepsilon - T_n\|_{L_p[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \square$$

§ 10. Сходимость ряда Фурье в смысле евклидовой нормы

Определение. Пусть F – произвольное евклидово (или унитарное) пространство. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов пространства F называется *ортогональной*, если эта система не содержит нулевого элемента пространства F и $(e_k, e_n) = 0$ при любых $k, n \in \mathbb{N}$ таких, что $k \neq n$. Числа $\alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}$ называются *коэффициентами Фурье*, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ – *рядом Фурье* элемента $f \in F$ по системе $\{e_k\}$.

Теорема 1. (Минимальное свойство коэффициентов Фурье.) *Пусть в евклидовом (или унитарном) пространстве F задана ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и элемент $f \in F$. Пусть задано число $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда среди всех линейных комбинаций элементов $e_1, \ldots, e_n$ *сумма Фурье*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k, \qquad \text{где} \quad \alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)},$$

является наилучшим приближением элемента f *в смысле евклидовой нормы пространства* F, *т. е.*

$$\min_{\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\| = \|f - s_n\|.$$

Доказательство. Обозначим $d_n = s_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k$. Тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \|f - s_n + d_n\|^2 =$$

$$= (f - s_n + d_n, f - s_n + d_n) = \|f - s_n\|^2 + (d_n, f - s_n) + (f - s_n, d_n) + \|d_n\|^2.$$

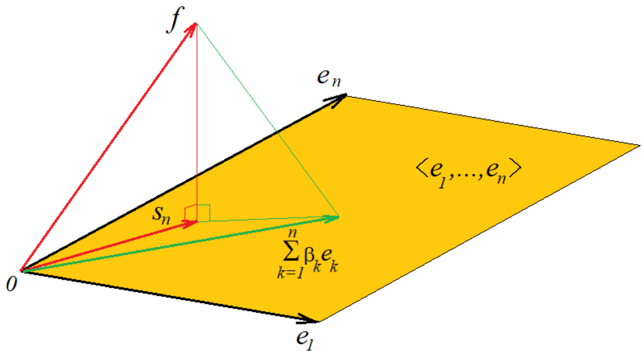
Поскольку в силу ортогональности системы $\{e_k\}$ для любого $k \in \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо равенство $(s_n, e_k) = \alpha_k\,(e_k, e_k)$, то по определению коэффициентов Фурье α_k получаем $(f - s_n, e_k) = (f, e_k) - - \alpha_k\,(e_k, e_k) = 0$, а значит, $(e_k, f - s_n) = \overline{(f - s_n, e_k)} = 0$. Так как $d_n = = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k$, то $(d_n, f - s_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k)\,(e_k, f - s_n) = 0$. Следовательно, $(f - s_n, d_n) = \overline{(d_n, f - s_n)} = 0$ и

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \|d_n\|^2 \geq \|f - s_n\|^2.$$

Поэтому

$$\min_{\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \|f - s_n\|. \qquad \square$$

Замечание. (Геометрическая интерпретация минимального свойства коэффициентов Фурье.) Пусть $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ – линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_n$, тогда s_n – ортогональная проекция элемента f на подпространство $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Теорема 1 утверждает, что ортогональная проекция элемента f является его наилучшим приближением среди всех элементов подпространства $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.



Теорема 2. (О единственности разложения элемента евклидова пространства по ортогональной системе.) *Пусть элемент f евклидова (или унитарного) пространства F раскладывается по ортогональной системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$: $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, где сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ понимается в смысле евклидовой нормы пространства F. Тогда коэффициенты α_k являются коэффициентами Фурье:* $\alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}$.

Доказательство. Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Равенство $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ означает, что $\|f - s_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенства Коши–Буняковского для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем, что $|(f, e_k) - (s_n, e_k)| \leq \|f - s_n\| \cdot \|e_k\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\forall k \in \in \mathbb{N} \hookrightarrow (f, e_k) = \lim\limits_{n \to \infty} (s_n, e_k)$. Из ортогональности системы $\{e_k\}$ получаем равенство $(s_n, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k)$ при $n \geq k$. Следовательно, $(f, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k)$, а значит, $\alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}$. $\square$

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ представима в виде тригонометрического ряда* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, *равномерно сходящегося на* $[-\pi, \pi]$. *Тогда коэффициенты* a_k, b_k *являются коэффициентами Фурье функции* $f(x)$ *по тригонометрической системе.*

Доказательство. Поскольку из равномерной сходимости ряда вытекает его сходимость в смысле среднего квадратичного, то ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ сходится к функции $f(x)$ в смысле евклидовой нормы пространства $L_2[-\pi, \pi]$. Применяя теорему 2, получаем требуемое утверждение. □

Теорема 3. (Об эквивалентности полноты системы и ее базисности.) *Для ортогональной системы* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *в евклидовом (или унитарном) пространстве* F *следующие условия эквивалентны:*

(1^o) *система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *базис пространства* F;

(2^o) *система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна в пространстве* F;

(3^o) *для любого элемента* $f \in F$ *ряд Фурье этого элемента по системе* $\{e_k\}$ *сходится к элементу* f *в смысле евклидовой нормы пространства* F.

Доказательство. (3^o) $\Rightarrow$ (1^o) следует непосредственно из теоремы 2 и определения базиса.

(1^o) $\Rightarrow$ (2^o). Пусть ортогональная система $\{e_k\}$ является базисом пространства F. Тогда по определению базиса для любого элемента $f \in F$ существует разложение $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$ такая, что $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k\| < \varepsilon$, т. е. система $\{e_k\}$ полна в пространстве F.

(2^o) $\Rightarrow$ (3^o). Пусть ортогональная система $\{e_k\}$ полна в пространстве F. Зафиксируем произвольный элемент $f \in F$. Обозначим

$$\Delta_n = \inf_{\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{C}} \|f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k\|.$$

Поскольку $\Delta_n \le \inf\limits_{\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\in\mathbb{C},\quad \beta_n=0} \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k\| = \Delta_{n-1}$, то числовая последовательность $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ является невозрастающей, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$.

Из полноты системы $\{e_k\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k$ такая, что $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k\| < \varepsilon$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad \Delta_n < \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $\Delta_n \ge 0$ следует, что $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = 0$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$.

Из минимального свойства коэффициентов Фурье следует, что $\Delta_n = \|f - s_n\|$, где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$ – сумма Фурье порядка n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$, т. е. ряд Фурье произвольного элемента $f \in F$ сходится к элементу f. $\square$

Из теоремы об эквивалентности полноты системы и ее базисности и полноты тригонометрической системы в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ (теорема 3 § 9) получаем следующую теорему.

Теорема 4. *1) Тригонометрическая система является базисом пространства* $L_2[-\pi,\pi]$.

2) Ряд Фурье любой функции $f \in L_2[-\pi,\pi]$ *сходится к этой функции в смысле среднего квадратичного (т. е. по норме* $L_2[-\pi,\pi]$*).*

Замечание. Из полноты линейно независимой системы $\{e_k\}$ в нормированном пространстве F относительно неевклидовой нормы не следует, что эта система является базисом пространства F. Например, линейно независимая система функций $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $C[-1,1]$ (теорема 2 § 9), но не является базисом этого пространства. Действительно, предположим противное: система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ – базис пространства $C[-1,1]$. Тогда для функции $f(x) = |x|$, принадлежащей пространству $C[-1,1]$, существует разложение $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \ \forall x \in [-1,1]$. В силу теоремы о дифференцировании степенного ряда (теорема 6 § 3 главы 11) получаем, что функция $f(x) = |x|$ дифференцируема в точке $x = 0$. Противоречие. $\square$

§ 11. Многочлены Лежандра

Определение. *Многочленами Лежандра* называются многочлены

$$\mathfrak{L}_0(x) = 1, \qquad \mathfrak{L}_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Лемма 1. *Многочлены Лежандра составляют ортогональную систему в пространстве* $L_2[-1,1]$.

Доказательство. Требуется доказать, что при $n > k$ справедливо равенство

$$J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \cdot \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k \, dx = 0.$$

Поскольку $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$, то индукцией по j легко доказать, что для любого $j \in \overline{1, n-1}$ $\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n = (x-1)^{n-j}g(x)$, где $g(x)$ – некоторый многочлен. Следовательно, $\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = 0$ при $j \leq n-1$. Аналогично, $\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = 0$ при $j \leq n-1$.

Интегрируя выражение J по частям, получаем

$$J = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \cdot \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k \, dx = \cdots =$$

$$= (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}(x^2-1)^k \, dx.$$

Поскольку многочлен $(x^2-1)^k$ имеет степень $2k$, а $k+n > 2k$, то $\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}(x^2-1)^k = 0$, следовательно, $J = 0$. □

Лемма 2. *Любой алгебраический многочлен можно представить в виде линейной комбинации многочленов Лежандра.*

Доказательство. Обозначим через E_n линейное пространство алгебраических многочленов степени не выше $n-1$. Поскольку любой многочлен степени не выше $n-1$ является линейной комбинацией n функций $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, то размерность пространства E_n не превосходит n.

Согласно лемме 1 многочлены Лежандра составляют ортогональную систему в пространстве $L_2[-1,1]$. Поэтому любой конечный набор многочленов Лежандра линейно независим. Поскольку пространство E_n содержит n линейно независимых элементов $\mathfrak{L}_0(x),\ldots,\mathfrak{L}_{n-1}(x)$, то размерность пространства E_n равна n, а система $\mathfrak{L}_0(x),\ldots,\mathfrak{L}_{n-1}(x)$ является базисом пространства E_n. Поэтому любой многочлен степени $n-1$ представим как линейная комбинация многочленов $\mathfrak{L}_0(x),\ldots,\mathfrak{L}_{n-1}(x)$. $\square$

Теорема 1. *Система многочленов Лежандра полна в пространствах $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$ и является базисом пространства $L_2[-1,1]$. Ряд Фурье любой функции $f \in L_2[-1,1]$ по системе многочленов Лежандра сходится к функции f в смысле среднего квадратичного.*

Доказательство. Из полноты системы $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C[a,b]$ (теорема 2 § 9) следует, что

$$\forall f \in C[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ алг. мн-н } P_n(x):\ \|f - P_n\|_{C[a,b]} < \varepsilon. \tag{1}$$

Отсюда и из неравенства

$$\|g\|_{L_2[a,b]} \le \|g\|_{C[a,b]} \sqrt{b-a} \qquad \forall g \in C[a,b]$$

(см. неравенство (2) § 3) получаем

$$\forall f \in C[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists P_n(x):\ \|f - P_n\|_{L_2[a,b]} < \varepsilon\sqrt{b-a}. \tag{2}$$

В силу теоремы о приближении по норме L_p и леммы 1 § 9 множество $C^{=}[a,b]$, а значит, и множество $C[a,b]$ являются всюду плотными подмножествами пространства $L_2[a,b]$ относительно нормы $L_2[a,b]$, т. е.

$$\forall g \in L_2[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists f \in C[a,b]:\ \|f - g\|_{L_2[a,b]} < \varepsilon.$$

Отсюда и из (2) получаем

$$\forall g \in L_2[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists P_n(x):\ \|g - P_n\|_{L_2[a,b]} < \varepsilon\sqrt{b-a} + \varepsilon. \tag{3}$$

В силу леммы 2 из условия (1) следует полнота системы многочленов Лежандра $\{\mathfrak{L}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $C[a,b]$, а из условия (3) – полнота системы $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ в пространстве $L_2[a,b]$.

Поскольку система $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ ортогональна в смысле скалярного произведения пространства $L_2[-1,1]$ и полна в $L_2[-1,1]$, то в силу теоремы об эквивалентности полноты системы и ее базисности система $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ является базисом пространства $L_2[-1,1]$, и ряд Фурье любой функции $f \in L_2[-1,1]$ по системе $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ сходится к функции f в смысле нормы $L_2[-1,1]$. $\square$

§ 12. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля и равномерная сходимость ряда Фурье

Лемма 1. *Пусть в евклидовом (или унитарном) пространстве F задана ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и элемент $f \in F$. Пусть $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$ – коэффициенты Фурье элемента f, а $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$ – сумма Фурье порядка n. Тогда справедливо равенство*

$$\|f\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2.$$

Доказательство.

$$\|f\|^2 = \|f - s_n + s_n\|^2 = \|f - s_n\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(f - s_n, s_n) + \|s_n\|^2.$$

В силу ортогональности системы $\{e_k\}$ справедливо равенство $(s_n, e_k) = \alpha_k(e_k, e_k)$ $\forall k \in \overline{1,n}$. Отсюда и из определения коэффициентов Фурье получаем

$$(f - s_n, e_k) = (f, e_k) - \alpha_k(e_k, e_k) = 0 \qquad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Так как $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$, то $(f - s_n, s_n) = 0$. Следовательно,

$$\|f\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \|s_n\|^2.$$

Еще раз используя ортогональность системы $\{e_k\}$, получаем

$$\|s_n\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2\,(e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2. \quad \square$$

Замечание. Равенство $\|f\|^2 = \|f-s_n\|^2+\|s_n\|^2$, доказанное в лемме 1, можно рассматривать как применение теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику с катетами s_n и $f-s_n$ и гипотенузой f.

Теорема 1. (Неравенство Бесселя.) *Для любой ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ евклидова (или унитарного) пространства F и для любого элемента $f \in F$ справедливо неравенство Бесселя:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2,$$

где α_k – это коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{e_k\}$, а $\|e_k\|$, $\|f\|$ – евклидовы нормы соответствующих элементов.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\|f\|^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим требуемое неравенство. $\square$

Теорема 2. (Равенство Парсеваля.) *Ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в евклидовом (или унитарном) пространстве F является базисом пространства F тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in F$ выполнено равенство Парсеваля:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|f\|^2,$$

где α_k – это коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{e_k\}$, а $\|e_k\|$, $\|f\|$ – евклидовы нормы соответствующих элементов.

Доказательство. В силу теоремы об эквивалентности полноты системы и ее базисности система $\{e_k\}$ является базисом евклидова пространства F тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in F$ ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ элемента f сходится к f в смысле евклидовой нормы. Это означает, что $\|f-s_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$. В силу леммы 1 имеем $\|f\|^2 = \|f-s_n\|^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$.

Поэтому система $\{e_k\}$ является базисом евклидова пространства F тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in F$ справедливо предельное соотношение $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 - \|f\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|f\|^2$. □

Так как тригонометрическая система является базисом евклидова пространства $L_2[-\pi,\pi]$, то в силу теоремы 2 получаем

Следствие. *Для любой функции $f \in L_2[-\pi,\pi]$ справедливо равенство Парсеваля:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \pi\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по стандартной тригонометрической системе, c_k – ее коэффициенты Фурье по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Теорема 3. (Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье.) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$. Пусть производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть c_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а c'_k – коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье $c'_k = ik\,c_k$. Так как функция $f' \in L_2[-\pi,\pi]$, то в силу равенства Парсеваля ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c'_k|^2$ сходится, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k\,c_k|^2$. Применяя неравенство $xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ для $x = |k\,c_k|$, $y = \frac{1}{|k|}$, при всех $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ получим $|c_k| \le \frac{1}{2}\left(|k\,c_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right)$. Отсюда и из сходимости рядов $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k\,c_k|^2$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}$ по признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$. Поэтому в силу признака Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. $\square$

§ 13. Полнота пространств L_p

Напомним, что метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится в этом пространстве. Если F – нормированное пространство, то F – метрическое пространство с метрикой $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Замечание. Любое конечномерное нормированное пространство является полным. Это следует из критерия Коши в $\mathbb{R}^n$ и эквивалентности норм конечномерного пространства.

Определение. Пусть F – нормированное пространство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ элементов $u_k \in F$ называется *сходящимся* в F, если последовательность $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ сходится в F, т.е. существует элемент $S \in F$ такой, что $\|S - S_n\| \to 0$ $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$ сходится.

Лемма 1. *Нормированное пространство F является банаховым тогда и только тогда, когда абсолютная сходимость любого ряда из элементов F влечет сходимость этого ряда в F.*

Доказательство. "$\Rightarrow$". Пусть F – банахово пространство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ из элементов F сходится абсолютно. Обозначим $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ – частичные суммы этого ряда. Тогда

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна. В силу полноты пространства F последовательность $\{S_n\}$ сходится в F, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится в F.

"$\Leftarrow$". Пусть абсолютная сходимость любого ряда из элементов F влечет сходимость этого ряда в F. Пусть задана фундаментальная последовательность элементов $f_n \in F$. Требуется доказать сходимость последовательности $\{f_n\}$. Из определения фундаментальной последовательности следует существование строго возрастающей последовательности натуральных чисел N_k такой, что

$$\|f_n - f_m\| < 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N_k. \tag{1}$$

Покажем, что последовательность $g_k := f_{N_k}$ сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, где $u_1 := g_1$, $u_{k+1} := g_{k+1} - g_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Из неравенства (1) следует, что $\|u_{k+1}\| < 2^{-k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$. Используя принятое условие, получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ в F. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = g_n$, то последовательность $\{g_k\}$ сходится. Последовательность $\{g_k\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_n\}$. Из сходимости этой подпоследовательности и фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ следует сходимость $\{f_n\}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть X – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – абсолютно сходящийся ряд из элементов $u_k \in L_p(X)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится для почти всех $x \in X$ к некоторой функции $S \in L_p(X)$, причем*

$$\|S\|_{L_p(X)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)}.$$

Доказательство. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$A_N(x) := \left(\sum_{k=1}^{N} |u_k(x)| \right)^p, \quad x \in X.$$

Поскольку $A_N(x) \leq A_{N+1}(x)$, то для любого $x \in X$ существует $A(x) := \lim\limits_{N\to\infty} A_N(x) \in [0,+\infty]$. По теореме Б. Леви о монотонной сходимости (теорема 1 §12 главы 8) функция $A(x)$ измерима и

$$\int\limits_X A(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_X A_N(x)\,dx. \tag{2}$$

Заметим, что

$$\int\limits_X A_N(x)\,dx = \int\limits_X \left(\sum_{k=1}^N |u_k(x)|\right)^p dx = \left\|\sum_{k=1}^N |u_k|\right\|^p_{L_p(X)}.$$

В силу неравенства треугольника для нормы $L_p(X)$ получаем

$$\int\limits_X A_N(x)\,dx \leq \left(\sum_{k=1}^N \|u_k\|_{L_p(X)}\right)^p \leq M^p,$$

где $M := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)}$. В силу абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ имеем $M < +\infty$. Отсюда и из соотношения (2) следует, что

$$\int\limits_X A(x)\,dx \leq M^p < +\infty, \tag{3}$$

а значит функция $A(x)$ интегрируема на X. Согласно лемме 2 §6 главы 8 функция $A(x)$ конечна почти всюду на X.

Так как $\sum\limits_{k=1}^{N} |u_k(x)| = (A_N(x))^{\frac{1}{p}} \leq (A(x))^{\frac{1}{p}}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)| \leq (A(x))^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad \text{для почти всех } x \in X. \tag{4}$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$S_N(x) := \sum_{k=1}^N u_k(x), \quad x \in X. \tag{5}$$

Согласно лемме 1 §2 главы 11 из абсолютной сходимости комплексного числового ряда следует его сходимость. Поэтому в силу соотношения (4) при почти всех $x \in X$ существует

$$S(x) := \lim_{N\to\infty} S_N(x) \in \mathbb{C}.$$

Функция $S(x)$ измерима как поточечный предел измеримых функций. Используя соотношения (4), (5) для почти всех $x \in X$ получаем

$$|S(x)| = \lim_{N\to\infty} |S_N(x)| \le \sum_{k=1}^{N} |u_k(x)| \le (A(x))^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому согласно неравенствам (3)

$$\int\limits_X |S(x)|^p\,dx \le \int\limits_X A(x)\,dx \le M^p < +\infty.$$

Следовательно, $S \in L_p(X)$ и

$$\|S\|_{L_p(X)} = \left(\int\limits_X |S(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le M = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)}.$$

$\square$

Теорема 1. *Пусть X – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1,+\infty)$. Нормированное пространство $L_p(X)$ является банаховым.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – абсолютно сходящийся ряд из элементов $u_k \in L_p(X)$. Обозначим $S_N(x) := \sum\limits_{k=1}^{N} u_k(x)$. В силу леммы 2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится для почти всех $x \in X$ к некоторой функции $S \in L_p(X)$. Применяя лемму 2 к ряду $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)$, получаем неравенство

$$\|S - S_N\|_{L_p(X)} \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)} \to 0$ при $N \to \infty$. Поэтому $\|S - S_N\|_{L_p(X)} \to 0$ при $N \to \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится в $L_p(X)$. Применяя лемму 1, завершаем доказательство теоремы. $\square$

Из теоремы 1 данного параграфа и теоремы 2 § 2 следует, что пространство $L_2(X)$ является гильбертовым.

Задача 1. Докажите, что для любого измеримого множества $X \subset \subset \mathbb{R}^n$ пространство $L_\infty(X)$ является банаховым.

Замечание. Пусть X – компактное топологическое пространство. Тогда пространство $C(X)$ является банаховым. Действительно, пусть последовательность непрерывных на X функций $f_k(x)$ фундаментальна. В силу критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности последовательность $\{f_k(x)\}$ равномерно (т.е. по норме пространства $C(X)$) сходится к некоторой функции $f(x)$. При этом функция $f(x)$ будет непрерывной на X, как равномерный предел последовательности непрерывных функций. Следовательно, последовательность $\{f_k\}$ сходится в пространстве $C(X)$.

Пример 1. Пусть $p \in [1, +\infty)$, X – компакт в $\mathbb{R}^n$. Через $CL_p(X)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$ с нормой пространства $L_p(X)$. Покажем, что нормированное пространство $CL_p[-1, 1]$ не полно.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$f_k(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{k}\right], \\ kx, & x \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Если $n > k$, то $f_n(x) = f_k(x)$ для любых $x \in \left[-1, -\frac{1}{k}\right] \cup \left[\frac{1}{k}, 1\right]$. Поэтому

$$\|f_n - f_k\|_{L_p(X)} = \left(\int\limits_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} |f_n(x) - f_k(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где последнее неравенство следует из неравенства $|f_n(x)-f_k(x)| \le 1$. Таким образом, $\|f_n - f_k\|_{L_p(X)} \to 0$ при $n \ge k \to \infty$, т.е. $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве $CL_p[-1,1]$. Покажем, что $\{f_n\}$ не сходится в пространстве $CL_p[-1,1]$. Предположим противное: $\{f_n\}$ сходится по норме $L_p[-1,1]$ к некоторой непрерывной функции $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in$ $\in (0,1)$ и выберем число $\delta > 0$ из условия $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (0,1)$. Так как

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f_n(x) - f(x)|^p dx \le \|f_n - f\|^p_{L_p(X)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и при $n > \frac{1}{x_0-\delta}$ имеем $x_0 - \delta > \frac{1}{n}$, а значит, $f_n(x) = 1$ при всех $x \in$ $\in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, то

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |1 - f(x)|^p dx = 0.$$

Отсюда и из непрерывности функции f следует, что $f(x_0) = 1$. Таким образом, $f(x) = 1$ при всех $x \in (0,1)$. Аналогично, $f(x) = -1$ при всех $x \in (-1,0)$. Это противоречит непрерывности функции f.

§ 14. Теорема Рисса–Фишера и замкнутые системы

Теорема 1. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H; $\{\alpha_k\}$ – числовая последовательность. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ сходится к некоторому элементу $f \in H$ в смысле нормы пространства H;*

(2) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ является рядом Фурье некоторого элемента $\widetilde{f} \in$ $\in H$, т. е. $\quad \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ \alpha_k = \frac{(\widetilde{f}, e_k)}{(e_k, e_k)}$;*

(3) *числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$ сходится.*

Доказательство. По теореме о единственности разложения элемента евклидова пространства по ортогональной системе из условия (1) следует условие (2), где $\widetilde{f} = f$.

В силу неравенства Бесселя $\|\widetilde{f}\|^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$ из условия (2) следует условие (3).

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть выполнено условие (3). Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$. Поскольку при любых $n, p \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $s_{n+p} - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\, e_k$, то в силу ортогональности системы $\{e_k\}$ получаем

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = (s_{n+p} - s_n, s_{n+p} - s_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\, e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\, e_k \right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2\, (e_k, e_k) = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2.$$

В силу критерия Коши сходимости числового ряда из условия (3) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \|s_{n+p} - s_n\|^2 < \varepsilon.$$

Это означает фундаментальность последовательности $\{s_n\}$ относительно нормы пространства H. Отсюда и из полноты пространства H следует, что последовательность $\{s_n\}$ сходится к некоторому элементу $f \in H$ в смысле нормы пространства H, т. е. выполнено условие (1). $\square$

Замечание. В теореме 1 ортогональная система $\{e_k\}$ может не быть базисом. Элементы f и $\widetilde{f}$, фигурирующие в условиях (1) и (2) теоремы 1, могут быть различными. Действительно, пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональный базис в гильбертовом пространстве H. Выбрасывая из этого базиса элемент e_1, получим ортогональную систему $\{e_k\}_{k=2}^{\infty}$. Рассмотрим элемент $\widetilde{f} = e_1 + e_2 \in H$. Тогда числовая последовательность $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots) = (1, 0, 0, \ldots)$ является последовательностью коэффициентов Фурье элемента $\widetilde{f}$ по системе $\{e_k\}_{k=2}^{\infty}$ и ряд Фурье элемента $\widetilde{f}$ по системе $\{e_k\}_{k=2}^{\infty}$ сходится к элементу $e_2 \neq \widetilde{f}$.

Теорема 2. (Теорема Рисса–Фишера.) *Гильбертово пространство H со счетным ортонормированным базисом изометрически изоморфно пространству ℓ_2.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в H. Определим отображение $\varphi : H \to \ell_2$, которое каждому элементу $f \in H$ ставит в соответствие последовательность $\varphi(f) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ коэффициентов Фурье $\alpha_k = (f, e_k)$. Согласно теореме 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ сходится, поэтому отображение φ действительно является отображением из H в ℓ_2.

Покажем, что отображение $\varphi : H \to \ell_2$ является взаимно однозначным. Фиксируем последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell_2$. По теореме 1 найдется элемент $f \in H$ такой, что $\alpha_k = (f, e_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т.е. $\varphi(f) = \alpha$. Поскольку $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис, то ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится к f в смысле евклидовой нормы H. Поэтому такой элемент $f \in H$ единственен и отображение φ взаимно однозначно переводит H в ℓ_2.

В силу равенства Парсеваля $\|f\|_H^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|\alpha\|_{\ell_2}^2$. Отсюда и из линейности отображения φ следует, что φ – изометрический изоморфизм пространств H и ℓ_2. $\square$

Следствие. *Пространство $L_2[a, b]$ изометрически изоморфно пространству ℓ_2.*

Замечание. При $p \neq 2$ пространства $L_p[a, b]$ и ℓ_p не являются изометрически изоморфными. Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Определение . Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов евклидова пространства F называется *замкнутой* в пространстве F, если не существует ненулевого элемента $f \in F$ такого, что $(f, e_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Отметим, что замкнутость системы и замкнутость множества – это совершенно разные понятия.

Теорема 3. *Для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в евклидовом (или унитарном) пространстве F следующие условия эквивалентны:*

(1^o) *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис пространства F;*

(2^o) *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве F;*

(3^o) *для любого элемента $f \in F$ ряд Фурье этого элемента по системе $\{e_k\}$ сходился к элементу f в смысле евклидовой нормы пространства F;*

(4^o) *для любого элемента $f \in F$ справедливо равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|f\|^2$, где α_k – это коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{e_k\}$.*

При этом любое из условий (1^o) – (4^o) влечет условие

(5^o) *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в пространстве F.*

Если пространство F гильбертово, то для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ все условия (1^o) – (5^o) равносильны.

Доказательство. Эквивалентность условий (1^o) – (3^o) доказана в теореме об эквивалентности полноты системы и ее базисности. Отсюда и из теоремы 2 § 12 следует эквивалентность условий (1^o) – (4^o).

Докажем, что $(3^o) \Rightarrow (5^o)$. Зафиксируем произвольный элемент $f \in F$ такой, что $(f, e_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Для доказательства замкнутости системы $\{e_k\}$ требуется доказать, что $f = \overline{0}$. Из условия $(f, e_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ следует, что все коэффициенты ряда Фурье элемента f равны нулю. Следовательно, ряд Фурье элемента f сходится к нулевому элементу. С другой стороны, в силу условия (3^o) ряд Фурье элемента f сходится к элементу f. Поэтому $f = \overline{0}$. Поскольку условия (1^o) – (4^o) эквивалентны, то любое из этих условий влечет условие (5^o).

Покажем теперь, что в случае гильбертова пространства F из условия (5^o) следует условие (3^o). Зафиксируем произвольный элемент $f \in F$. Пусть $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$ – коэффициенты Фурье элемента f.

В силу неравенства Бесселя числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$ сходится. Отсюда по теореме 1 получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ сходится в смысле нормы пространства F к некоторому элементу $\widetilde{f} \in F$. По теореме о единственности разложения элемента евклидова пространства числа α_k являются коэффициентами Фурье элемента $\widetilde{f}$. Следовательно, $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ \frac{(\widetilde{f}, e_k)}{(e_k, e_k)} = \alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}$. Поэтому $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ (\widetilde{f} - f, e_k) = 0$. В силу замкнутости системы $\{e_k\}$ получаем, что $f - \widetilde{f} = \overline{0}$, а значит, $f = \widetilde{f} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$. Тем самым доказано, что в случае гильбертова пространства F из условия (5^o) следует условие (3^o). Поэтому для гильбертова пространства F все условия $(1^o)-(5^o)$ эквивалентны. $\square$

Задача 1. Приведите пример неполного евклидова пространства F и замкнутой ортогональной системы в F, которая не является базисом пространства F.

Глава 23

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Равномерная сходимость несобственных интегралов

В этом параграфе будем рассматривать несобственный интеграл с особенностью в точке $b \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$

$$\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx := \lim_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx$$

с параметром $y \in Y$, где Y – произвольное множество параметров. Будем предполагать, что $-\infty < a < b \leq +\infty$ и для любого фиксированного $y \in Y$ функция $f(x,y)$ как функция переменной x интегрируема по Лебегу на любом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$.

Несобственный интеграл с особенностью на левом конце промежутка интегрирования рассматривается аналогично.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ называется *сходящимся равномерно* на множестве Y, если

1) для любого фиксированного $y \in Y$ этот интеграл сходится, т.е. существует

$$\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx := \lim_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx \in \mathbb{R} \text{ (или } \in \mathbb{C})$$

и

2) $\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx \underset{y\in Y}{\rightrightarrows} \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ при $b' \to b-0$, т.е.

$$\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \to 0 \quad \text{при} \quad b' \to b-0.$$

Теорема 1. (Признак Вейерштрасса.) *Пусть* $|f(x,y)| \le g(x)$ *для любых* $x \in [a,b)$, $y \in Y$ *и функция* g *интегрируема (по Лебегу) на* (a,b). *Тогда интеграл* $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* Y.

Доказательство. В силу признака сравнения при каждом фиксированном $y \in Y$ существует конечный интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$. Интегрируя неравенство $|f(x,y)| \le g(x)$, получаем

$$\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \le \sup_{y\in Y}\int\limits_{b'}^{\to b} |f(x,y)|\,dx \le \int\limits_{b'}^{b} g(x)\,dx.$$

Из теоремы о непрерывности интеграла как функции верхнего предела (теорема 1 §9 главы 8) следует, что $\int\limits_{b'}^{b} g(x)\,dx \to 0$ при $b' \to b-0$. Поэтому $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \to 0$ при $b' \to b-0$. $\square$

Теорема 2. (Признак Дирихле.) *Пусть на множестве* $[a,b)\times Y$ *заданы функции* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *такие, что при любом фиксированном* $y \in Y$ *функция* $f(x,y)$ *непрерывна, а функция* $g(x,y)$ *непрерывно дифференцируема по* x *на множестве* $[a,b)$. *Пусть*

1) первообразная $F(x,y) = \int\limits_a^x f(t,y)\,dt$ *равномерно ограничена:*

$$\exists C \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in [a,b) \quad \forall y \in Y \hookrightarrow \ |F(x,y)| \le C;$$

2) при любом $y \in Y$ *функция* $g(x,y)$ *является невозрастающей относительно* x, *начиная с некоторого* x_0, *не зависящего от* y:

$$\exists x_0 \in [a,b): \quad \forall x \in [x_0,b) \quad \forall y \in Y \hookrightarrow \ g'_x(x,y) \le 0;$$

3) при $x \to b-0$ *функция* $g(x,y)$ *стремится к нулю равномерно по* $y \in Y$:

$$\sup_{y\in Y}|g(x,y)| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to b-0.$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* Y.

Доказательство. В силу признака Дирихле сходимости несобственных интегралов, не зависящих от параметра (теорема 2 §3 главы 9), при каждом фиксированном $y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ сходится. Интегрируя по частям, для любых $b' \in$ $\in [a,b)$, $y \in Y$ получаем

$$\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx = F(x,y)\,g(x,y)\Big|_{x=b'}^{x\to b-0} - \int\limits_{b'}^{\to b} F(x,y)\,g'_x(x,y)\,dx.$$

Поскольку $\forall y \in Y \hookrightarrow \lim\limits_{x\to b-0} F(x,y)\,g(x,y) = 0$, то

$$\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx = -F(b',y)\,g(b',y) - \int\limits_{b'}^{\to b} F(x,y)\,g'_x(x,y)\,dx.$$

Из неравенства $g'_x(x,y) \le 0$ при $x \in [x_0,b)$ и условия $\lim\limits_{x\to b} g(x,y) = 0$ следует, что $g(b',y) \ge 0$ для любых $b' \in [x_0,b)$, $y \in Y$. Отсюда и из неравенства $|F(x,y)| \le C$ получаем

$$\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right| \le C\,g(b',y) - C\int\limits_{b'}^{\to b} g'_x(x,y)\,dx =$$

$$= 2C\,g(b',y) = 2C\,|g(b',y)|.$$

Следовательно,

$$\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right| \le 2C\sup_{y\in Y}|g(b',y)| \to 0 \quad \text{при} \quad b' \to b-0. \qquad \square$$

Теорема 3. (Критерий Коши.) *Для того чтобы интеграл* $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ *сходился равномерно на множестве* Y, *необходимо и* *достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in [a, b):\ \forall b_1, b_2 \in [b', b) \hookrightarrow \sup_{y \in Y} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx \right| \leq \varepsilon. \qquad (1)$$

Доказательство. 1) Пусть интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно на множестве Y. Тогда по определению равномерной сходимости интеграла

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in [a, b):\ \forall b_1 \in [b', b) \hookrightarrow \sup_{y \in Y} \left| \int_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любых $b_1, b_2 \in [b', b)$

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx \right| = \sup_{y \in Y} \left| \int_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx - \int_{b_2}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \sup_{y \in Y} \left| \int_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| + \sup_{y \in Y} \left| \int_{b_2}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие (1).

2) Пусть выполняется условие (1). В силу критерия Коши сходимости несобственных интегралов, не зависящих от параметра, при каждом фиксированном $y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x, y)\, dx$ сходится. Переходя к пределу при $b_2 \to b - 0$ в условии (1), получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in [a, b):\ \forall b_1 \in [b', b) \hookrightarrow \sup_{y \in Y} \left| \int_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. $\sup\limits_{y \in Y} \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \to 0$ при $b' \to b - 0$. $\square$

Замечание. Критерий Коши удобного использовать для доказательства того, что несобственный интеграл не сходится равномерно на множестве Y. Для этого достаточно проверить, что выполняется отрицание к условию (1), т. е.

$$\exists\varepsilon > 0 : \ \forall b' \in [a, b) \ \exists b_1, b_2 \in [b', b) \ \exists y \in Y : \ \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx \right| > \varepsilon.$$

§ 2. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру

Теорема 1. (Непрерывность собственного интеграла.) *Пусть X – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, Y – произвольное множество в $\mathbb{R}^m$. Пусть задана функция $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ такая, что для всех $y \in Y$ существует интеграл Лебега*

$$J(y) := \int\limits_X f(x, y)\, dx \in \mathbb{C}$$

и для почти всех фиксированных $x \in X$ функция $f(x, y)$ непрерывна по $y \in Y$ в точке $y_0 \in Y$. Пусть существует интегрируемая функция $\varphi : X \to [0, +\infty)$ такая, что при почти всех $x \in X$ и при всех $y \in Y$

$$|f(x, y)| \le \varphi(x).$$

Тогда функция $J : Y \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке y_0.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность элементов $y_k \in Y \setminus \{y_0\}$, сходящуюся к точке y_0. В силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости (теорема 3 §12 главы 8)

$$\lim_{k\to\infty} J(y_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X f(x, y_k)\, dx = \int\limits_X f(x, y_0)\, dx = J(y_0).$$

Согласно определению предела функции по Гейне получаем требуемое утверждение. $\square$

Замечание. Условие ограниченности величины $|f(x,y)|$ интегрируемой функцией $\varphi(x)$, не зависящей от y, существенно в теореме 1. Действительно, рассмотрим интеграл

$$J(y) := \int_0^{+\infty} y\, e^{-xy}\, dx.$$

Подынтегральная функция $f(x,y) = y\, e^{-xy}$ непрерывна на $X \times Y = [0,+\infty) \times [0,1]$. Прямые вычисления показывают, что для каждого $y \in Y = [0,1]$ интеграл существует и равен $J(y) = 1$ при $y \in (0,1]$, $J(y) = 0$ при $y = 0$. Таким образом, интеграл $J(y)$ не непрерывен в точке $y_0 = 0$.

Следствие. *Пусть множества $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ компактны, функция $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ непрерывна. Тогда функция $J(y) := \int\limits_X f(x,y)\, dx$ непрерывна на Y.*

Доказательство. Замечая, что функция $\varphi(x) = C := \max\limits_{x\in X,\, y\in Y} |f(x,y)|$ интегрируема на компакте X, видим, что все условия теоремы 1 выполнены. Применяя эту теорему, получаем доказываемое утверждение. □

Теорема 2. (Непрерывность несобственного интеграла.) *Пусть $-\infty < a < b \le +\infty$, Y – произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $f : [a,b) \times Y \to \mathbb{C}$ непрерывна и интеграл*

$$J(y) := \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\, dx$$

сходится равномерно на Y. Тогда функция $J : Y \to \mathbb{C}$ непрерывна.

Доказательство. Фиксируем произвольные точку $y_0 \in Y$ и последовательность точек $y_k \in Y$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0$. Согласно определению Гейне требуется показать, что

$$\lim_{k\to\infty} J(y_k) = J(y_0). \qquad (1)$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\, dx$ существует число $b' \in [a,b)$ такое, что

$$\left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall y \in Y.$$

Заметим, что множество $\widetilde{Y} := \{y_k : \ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ компактно. Согласно следствию из теоремы 1 собственный интеграл $\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx$ непрерывен по параметру $y \in \widetilde{Y}$ в точке y_0. Следовательно, найдется индекс N_ε такой, что

$$\left| \int\limits_a^{b'} f(x,y_k)\,dx - \int\limits_a^{b'} f(x,y_0)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq N_\varepsilon.$$

Поэтому для любого $k \geq N_\varepsilon$ справедливы неравенства

$$|J(y_k) - J(y_0)| \leq \left| \int\limits_a^{b'} f(x,y_k)\,dx - \int\limits_a^{b'} f(x,y_0)\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y_k)\,dx \right| + \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y_0)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

т. е. выполнено соотношение (1). $\square$

Замечание. Согласно теореме Фубини (теорема 3 §1 главы 15), если $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ – измеримые множества, а функция $f : X \times \times Y \to \mathbb{C}$ интегрируема, то

$$\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)\,dx = \int\limits_{X \times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

Таким образом, теорема Фубини дает формулу интегрирования собственного интеграла по параметру.

Теорема 3. (Интегрирование несобственного интеграла.) *Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, Y – конечно измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $f : [a,b) \times Y \to \mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на множестве*

$[a,b']\times Y$ *для любого* $b'\in[a,b)$. *Пусть интеграл* $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^{\to b} dx\int\limits_Y f(x,y)\,dy$ *сходится и*

$$\int\limits_a^{\to b} dx\int\limits_Y f(x,y)\,dy=\int\limits_Y dy\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx.$$

Доказательство. В силу теоремы Фубини

$$\int\limits_Y dy\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^{b'} dx\int\limits_Y f(x,y)\,dy\qquad\forall b'\in[a,b).$$

Заметим, что

$$\left|\int\limits_Y dy\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx-\int\limits_Y dy\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx\right|=\left|\int\limits_Y dy\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx\right|\le$$

$$\le\mu(Y)\cdot\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx\right|\to 0\quad\text{при}\quad b'\to b-0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^{\to b} dx\int\limits_Y f(x,y)\,dy=\lim_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} dx\int\limits_Y f(x,y)\,dy=$$

$$=\lim_{b'\to b-0}\int\limits_Y dy\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx=\int\limits_Y dy\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx.$$

$\square$

Теорема 4. (Дифференцирование собственного интеграла.) *Пусть* $X\subset\mathbb{R}^n$ *– измеримое множество. Пусть функция* $f(x,y)$ *интегрируема по множеству* X *при каждом фиксированном* $y\in[y_1,y_2]$ *и при почти всех* $x\in X$ *существует частная производная* $f'_y(x,y)$.

Пусть $|f'_y(x,y)| \le \varphi(x)$ *при почти всех* $x \in X$ *и всех* $y \in Y$, *где функция* $\varphi : X \to [0,+\infty)$ *интегрируема на* X. *Тогда при всех* $y \in \in [y_1, y_2]$ *существует*

$$\frac{d}{dy} \int\limits_X f(x,y)\, dx = \int\limits_X f'_y(x,y)\, dx.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $y_0 \in [y_1, y_2]$ и произвольную числовую последовательность $\{t_k\}$ такую, что $t_k \ne \ne 0$, $t_k \to 0$ и $y_0 + t_k \in [y_1, y_2]$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $g_k(x) := \frac{f(x,y_0+t_k)-f(x,y_0)}{t_k}$ при $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$. По определению производной $g_k(x) \to f'_y(x, y_0)$ при $k \to \infty$ для почти всех $x \in X$. По теореме Лагранжа о среднем для почти всех $x \in X$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ найдется число $\theta_k \in (0,1)$ такое, что $g_k(x) = f'_y(x, y_0 + \theta_k t_k)$. Следовательно, $|g_k(x)| \le \varphi(x)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и при почти всех $x \in X$. В силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X g_k(x)\, dx = \int\limits_X \left(\lim_{k\to\infty} g_k(x) \right) dx = \int\limits_X f'_y(x, y_0)\, dx.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k} \left(\int\limits_X f(x, y_0 + t_k)\, dx - \int\limits_X f(x, y_0)\, dx \right) = \int\limits_X f'_y(x, y_0)\, dx.$$

$\square$

Следствие. *Пусть на отрезке* $[y_1, y_2]$ *заданы дифференцируемые функции* $a(y)$ *и* $b(y)$ *такие, что* $a(y) \le b(y)$ $\forall y \in [y_1, y_2]$. *Пусть в некотором открытом множестве* $G \subset \mathbb{R}^2$, *содержащем множество* $E = \{(x,y) \ : \ y \in [y_1, y_2],\ x \in [a(y), b(y)]\}$, *задана функция* $f(x,y)$, *непрерывная вместе с частной производной* $f'_y(x,y)$. *Тогда функция* $J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx$ *дифференцируема на отрезке* $[y_1, y_2]$ *и для любого* $y \in [y_1, y_2]$ *справедливо равенство*

$$J'(y) = f(b(y), y)\, b'(y) - f(a(y), y)\, a'(y) + \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\, dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(y,a,b) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. По формуле Ньютона–Лейбница $\Phi'_b(y,a,b) = f(b,y)$, $\quad \Phi'_a(y,a,b) = -f(a,y)$. В силу теоремы 4 имеем $\Phi'_y(y,a,b) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$. Дифференцируя сложную функцию $J(y) = \Phi(y,a(y),b(y))$: $\quad J'(y) = \Phi'_y(y,a(y),b(y)) + \Phi'_a(y,a(y),b(y))\,a'(y) + \Phi'_b(y,a(y),b(y))\,b'(y)$, получим требуемое утверждение. $\square$

Теорема 5. (Дифференцирование несобственного интеграла.) *Пусть функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны на множестве $[a,b)\times[y_1,y_2]$ (где $b\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$), интеграл $\int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[y_1,y_2]$ и при некотором $y_0\in[y_1,y_2]$ сходится интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y_0)\,dx$. Тогда при любом $y\in[y_1,y_2]$ интеграл $J(y) := \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ сходится и существует*

$$J'(y) = \int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx.$$

Доказательство. Поскольку для любых $x\in[a,b)$, $t\in[y_1,y_2]$ справедливо равенство $f(x,t) = f(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{t} f'_y(x,y)\,dy$, то в силу теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру для любого $t\in[y_1,y_2]$ имеем

$$\begin{aligned} J(t) &= \int\limits_a^{\to b} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_a^{\to b}\left(\int\limits_{y_0}^{t} f'_y(x,y)\,dy\right)dx = \\ &= \int\limits_a^{\to b} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{t}\left(\int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx\right)dy. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что функция $F(y) := \int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx$ непрерывна на $[y_1,y_2]$

согласно теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Дифференцируя равенство (2) в точке $t = y$, получим требуемое утверждение. $\square$

Пример 1. Вычислить *интеграл Дирихле* $\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение. Рассмотрим интеграл

$$D(y) = \int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\,dx, \qquad y \geq 0,$$

который при $y > 0$ существует в собственном смысле. Заметим, что подынтегральная функция

$$F(x,y) := \begin{cases} e^{-yx}\,\dfrac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на множестве $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$. При этом функция $F'_y(x,y) = -\sin x\, e^{-yx}$ также непрерывна.

Зафиксируем произвольные числа y_1, y_2 такие, что $0 < y_1 < y_2$. Тогда при $y \in [y_1, y_2]$ справедливо неравенство $|F'_y(x,y)| \leq e^{-y_1 x}$, причем функция $\varphi(x) := e^{-y_1 x}$ интегрируема на множестве $[0,+\infty)$.

Согласно теореме о дифференцировании собственного интеграла по параметру при любом $y \in [y_1, y_2]$ существует

$$D'(y) = \int\limits_0^{+\infty} F'_y(x,y)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, e^{-yx}\,dx = -\mathrm{Im} \int\limits_0^{+\infty} e^{(-y+i)x}\,dx =$$

$$= -\mathrm{Im}\ \frac{e^{(-y+i)x}}{-y+i}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} = \mathrm{Im}\,\frac{1}{-y+i} = \mathrm{Im}\,\frac{-y-i}{y^2+1} = -\frac{1}{y^2+1}.$$

Следовательно, при $0 < y_1 < y_2$

$$D(y_2) - D(y_1) = -\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2+1} = -\mathrm{arctg}\, y_2 + \mathrm{arctg}\, y_1. \tag{3}$$

Поскольку $|D(y)| \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y} \to 0$ при $y \to +\infty$, то $\lim\limits_{y_2\to+\infty} D(y_2) = 0$. Отсюда, переходя к пределу при $y_2 \to +\infty$, $y_1 \to +0$ в равенстве (3), получаем $0 - \lim\limits_{y_1\to+0} D(y_1) = -\lim\limits_{y_2\to+\infty} \operatorname{arctg} y_2 + \lim\limits_{y_1\to+0} \operatorname{arctg} y_1 = -\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\lim_{y\to+0} D(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Осталось доказать непрерывность функции $D(y)$ в точке $y = 0$ справа. Отсюда будет следовать, что интеграл Дирихле равен $\frac{\pi}{2}$:

$$\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = D(0) = \lim_{y\to+0} D(y) = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. В силу теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру для доказательства непрерывности интеграла $D(y) = \int\limits_0^{\to+\infty} F(x,y)\,dx$ на отрезке $[0,\delta]$ достаточно проверить, что

1) функция $F(x,y)$ непрерывна на множестве $[0,+\infty) \times [0,\delta]$ и

2) интеграл $\int\limits_0^{\to+\infty} F(x,y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[0,\delta]$.

Выполнение первого условия следует непосредственно из определения функции $F(x,y)$. Проверим равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\to+\infty} F(x,y)\,dx = \int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-yx}\,dx$. Заметим, что равномерная сходимость интеграла $\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-yx}\,dx$ эквивалентна равномерной сходимости интеграла $\int\limits_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-yx}\,dx$.

Применим признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов. Функции $g(x) = \sin x$ и $h(x,y) = \frac{e^{-yx}}{x}$ непрерывны при $x \in [1,+\infty)$, первообразная функции $g(x)$ равномерно ограничена, а функция $h(x,y)$ при $x \to +\infty$ стремится к нулю монотонно и равномерно по y: $h'_x(x,y) < 0$ и $|h(x,y)| \leq \frac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$. В силу признака Дирихле получаем равномерную сходимость интеграла $\int\limits_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-yx}\,dx$, а значит, и интеграла

$\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\, dx$ по параметру $y \in [0, +\infty)$.

Итак, для интеграла $D(y) = \int\limits_0^{\to+\infty} F(x, y)\, dx$ выполняются все условия теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Применение этой теоремы завершает обоснование формулы (4).

§ 3. Эйлеровы интегралы

Определение. *Гамма-функцией Эйлера* называется

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx$$

Поскольку при $x \to +0$ имеет место эквивалентность $x^{p-1}\, e^{-x} \sim \sim x^{p-1}$, то в соответствии со вторым признаком сравнения (теорема 2 §2 главы 9) функция $x^{p-1}\, e^{-x}$ интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$ при $p > 0$. Так как при достаточно больших x справедливо неравенство $x^{p-1}\, e^{-x} \leq e^{-x/2}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x/2}\, dx < +\infty$, то $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx < +\infty$ при любых $p \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx < +\infty$ при $p > 0$.

Теорема 1. (Формула понижения.)

$$\Gamma(p+1) = p\, \Gamma(p) \qquad \forall p > 0.$$

Доказательство. При $p > 0$ имеем

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^p\, de^{-x} =$$

$$= -x^p\, e^{-x}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} p\, x^{p-1}\, e^{-x}\, dx = p\, \Gamma(p). \qquad \square$$

Поскольку $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1 = 0!$, то в силу формулы понижения получаем $\Gamma(n) = (n-1)!$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$k! = \Gamma(k+1) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Таким образом, гамма-функция продолжает факториал на все действительные числа, большие -1.

Определение. *Бета-функцией Эйлера* называется

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Так как при $x \to +0$: $x^{p-1}\,(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, а при $x \to 1-0$: $x^{p-1}\,(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$, то интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx < +\infty$ при $p > 0$, $q > 0$.

Теорема 2. (Формула сведения.)

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \forall p > 0, \quad q > 0.$$

Доказательство. Фиксируем произвольные числа $p > 0$ и $q > 0$. В силу теоремы Фубини имеем

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} dx \int\limits_0^{+\infty} y^{q-1}\,e^{-x-y}\,dy = \int\limits_{x>0,\,y>0} x^{p-1}\,y^{q-1}\,e^{-x-y}\,dxdy.$$

Перейдем от переменных (x,y) к переменным (x,s), где $s = x+y$.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_{s>x>0} x^{p-1}\,(s-x)^{q-1}\,e^{-s}\,dxds.$$

Снова применим теорему Фубини

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}\,ds \int\limits_0^{s} x^{p-1}(s-x)^{q-1}\,dx.$$

Переходя от переменной x к переменной $t = \frac{x}{s}$, получаем $x = st$ и

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\,ds \int_0^1 s^{p-1}t^{p-1}s^{q-1}(1-t)^{q-1}s\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} s^{p+q-1}e^{-s}\,ds \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \Gamma(p+q)\,B(p,q).$$

$\square$

$\triangleright$

При доказательстве формулы дополнения для гамма-функции понадобится следующая лемма.

Лемма 1.

$$\frac{\pi}{\sin \pi p} = \frac{1}{p} + 2p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^2-k^2} \qquad \forall p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

Доказательство. В силу теоремы 4 § 3 главы 22 ряд Фурье функции $\cos px$ по стандартной тригонометрической системе сходится к этой функции на интервале $(-\pi,\pi)$, т.е. с учетом четности $\cos px$

$$\cos px = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\cos kx \qquad \forall x \in (-\pi,\pi), \tag{2}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\,dx = \frac{1}{\pi p}\sin \pi p\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{2\sin \pi p}{\pi p},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\,\cos kx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(p+k)x + \cos(p-k)x\Big)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(p+k)x}{p+k}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{\sin(p-k)x}{p-k}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k\sin \pi p}{p+k} + \frac{(-1)^k\sin \pi p}{p-k}\right) = \frac{2p(-1)^k\sin \pi p}{\pi(p^2-k^2)}$$

при $k \in \mathbb{N}$. Подставляя в формулу (2) $x=0$, имеем

$$1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{\sin \pi p}{\pi p} + \frac{2p\sin \pi p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^2-k^2}.$$

Домножая левую и правую части этого равенства на $\frac{\pi}{\sin \pi p}$, получаем доказываемое равенство. $\square$

Теорема 3. (Формула дополнения.)

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad \forall p \in (0,1).$$

Доказательство. Фиксируем $p \in (0,1)$. В силу теоремы 2 имеем

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = B(p,1-p)\,\Gamma(1) = B(p,1-p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}\,dy.$$

Производя во втором слагаемом замену переменной $y \to x := 1-y$, приходим к равенству

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Big(x^{p-1}(1-x)^{-p} + (1-x)^{p-1}x^{-p}\Big)dx.$$

Переходя к переменной интегрирования t, где $x = \frac{t}{1+t}$, получаем

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int\limits_0^1 (t^{p-1} + t^{-p})\frac{dt}{1+t}. \tag{3}$$

Заметим, что для любого $t \in [0,1)$ справедливо равенство $\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$, т.е.

$$\frac{1}{1+t} = \lim_{n\to\infty} g_n(t),$$

где $g_n(t) := \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$. Заметим, что $|g_n(t)| \le 1$ при всех $t \in [0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$. Обозначая $\varphi(t) := t^{p-1} + t^{-p}$, получаем

$$|\varphi(t) g_n(t)| \le \varphi(t) \qquad \forall t \in [0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так как функция φ интегрируема на $[0,1]$, то согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости получаем равенство

$$\int\limits_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} \varphi(t) g_n(t)\Big)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \varphi(t) g_n(t)\,dt.$$

Отсюда и из равенства (3) следует, что

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \left((t^{p-1}+t^{-p})\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int\limits_0^1\left(t^{k+p-1}+t^{k-p}\right)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k+p}+\frac{1}{k-p+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+p}+\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k'}}{k'-p+1} =$$

$$= \frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+p}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k-p},$$

где последнее равенство получено путем замены индекса суммирования $k := k'+1$ во второй сумме. Таким образом,

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{1}{p}+2p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^2-k^2} = \frac{\pi}{\sin\pi p},$$

последнее равенство следует из леммы 1. $\square$

Замечание. Согласно формуле дополнения $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$. Отсюда и из неравенства $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ следует, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Это дает еще один способ вычисления интеграла Пуассона (см. пример 2 §3 главы 14)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \overset{x=\sqrt{t}}{=} 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4}$$

$\triangleleft$

Теорема 4. (Формула Стирлинга.)

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{2\pi}\,p^{p+\frac{1}{2}}\,e^{-p}} = 1.$$

Доказательство. По определению гамма-функции $\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt$. Так как максимум подынтегральной функции $t^p\, e^{-t}$ достигается при $t = p$, то интуитивно понятно, что основной вклад в интеграл $\Gamma(p+1)$ дает поведение подынтегральной функции в окрестности точки $t = p$. Для выяснения асимптотики интеграла $\Gamma(p+1)$ нужно разложить подынтегральную функцию по формуле Тейлора при $t \to p$ и провести необходимые оценки. Для удобства перейдем к переменной интегрирования $x = \frac{t}{p} - 1$. Тогда $x \to 0$ при $t \to p$. Поскольку $t = p(x+1)$, то

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_{-1}^{+\infty} p^p (x+1)^p e^{-p(x+1)} p\,dx = p^{p+1} e^{-p} \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-p(x-\ln(x+1))} dx.$$

Следовательно,

$$\Gamma(p+1) = p^{p+1} e^{-p} \cdot I(p), \tag{5}$$

где

$$I(p) = \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-p\varphi(x)} dx, \tag{6}$$

$$\varphi(x) = x - \ln(x+1).$$

Согласно равенству (5) для доказательства теоремы требуется доказать, что

$$\lim_{p \to +\infty} \sqrt{p}\, I(p) = \sqrt{2\pi}. \tag{7}$$

Фиксируем произвольную последовательность чисел $p_k > 0$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = +\infty$. Согласно определению предела по Гейне для доказательства соотношения (7) требуется доказать, что

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{p_k}\, I(p_k) = \sqrt{2\pi}. \tag{8}$$

Раскладывая $\varphi(x)$ по формуле Маклорена, получаем

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0. \tag{9}$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{1-\varepsilon}{2}x^2 < \varphi(x) < \frac{1+\varepsilon}{2}x^2 \qquad \forall x \in (-\delta, \delta). \tag{10}$$

Представим интеграл (6) в виде

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) + I_3(p), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-p\varphi(x)}dx, \\ I_2(p) &= \int\limits_{-1}^{-\delta} e^{-p\varphi(x)}dx + \int\limits_{\delta}^{1} e^{-p\varphi(x)}dx, \\ I_3(p) &= \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-p\varphi(x)}dx \end{aligned}$$

и оценим каждый из этих интегралов.

Так как $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, то $\varphi(x)$ убывает на $(-1, 0]$ и возрастает на $[0, 1)$. Поэтому

$$\varphi(x) \geq m \qquad \forall x \in (-1, -\delta] \cup [\delta, 1],$$

где $m = m(\varepsilon) := \min\{\varphi(-\delta(\varepsilon)), \varphi(\delta(\varepsilon))\} > 0$. Следовательно,

$$\sqrt{p}\, I_2(p) < 2\sqrt{p}e^{-pm} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to +\infty. \tag{12}$$

Поскольку $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x} \geq \frac{1}{2}$ при $x \geq 1$, то $\varphi(x) \geq \varphi(1) + \frac{x-1}{2}$ для любого $x \geq 1$. Следовательно,

$$\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-p\varphi(x)}dx \leq e^{-p\varphi(1)} \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\frac{p(x-1)}{2}}dx = \frac{2}{p}e^{-p\varphi(1)},$$

$$\sqrt{p}\, I_3(p) < \frac{2}{\sqrt{p}}e^{-p\varphi(1)} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to +\infty, \tag{13}$$

В силу первого из неравенств (10) получаем

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-p\varphi(x)}dx < \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1-\varepsilon}{2}px^2}dx <$$

$$< \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1-\varepsilon}{2}px^2}dx \overset{t=\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)p}{2}}x}{=} \sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)p}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\varepsilon)p}},$$

где в последнем равенстве был использован интеграл Пуассона (4). Поэтому

$$\sqrt{p}\, I_3(p) < \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\varepsilon)}}.$$

Отсюда и из соотношений (11), (12), (13) следует, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt{p_k}\, I(p_k) \le \sum_{j=1}^{3} \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt{p}\, I_j(p_k) \le \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\varepsilon)}}.$$

Поскольку $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt{p_k}\, I(p_k)$ не зависит от ε, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем неравенство

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt{p_k}\, I(p_k) \le \sqrt{2\pi}. \tag{14}$$

Оценим интеграл $I(p)$ снизу. Используя второе из неравенств (10), получаем

$$\sqrt{p}\, I(p) \ge \sqrt{p}\, I_1(p) = \sqrt{p} \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-p\varphi(x)}dx \ge$$

$$\ge \sqrt{p} \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1+\varepsilon}{2}px^2}dx \overset{t=\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)p}{2}}x}{=}$$

$$= \sqrt{p} \int\limits_{-\delta\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)p}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)p}{2}}} e^{-t^2}dt \sqrt{\frac{2}{(1+\varepsilon)p}} \xrightarrow{p\to+\infty}$$

$$\longrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \sqrt{\frac{2}{1+\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2\pi}{1+\varepsilon}}.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{k\to\infty} \sqrt{p_k}\, I(p_k) \geq \sqrt{\frac{2\pi}{1+\varepsilon}}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем

$$\varliminf_{k\to\infty} \sqrt{p_k}\, I(p_k) \geq \sqrt{2\pi}.$$

Отсюда и из соотношения (14) вытекает (8). $\square$

Замечание. Из теоремы 4 и формулы (1) получаем асимптотическую формулу для факториала

$$k! = \sqrt{2\pi}\, k^{k+\frac{1}{2}}\, e^{-k}(1+o(1)), \quad k \to \infty.$$

Теорема 5. (Объем шара в $\mathbb{R}^n$.) *Мера евклидова шара*

$$B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq r\}$$

радиуса $r \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$ выражается формулой

$$\mu(B_r^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n.$$

Доказательство. Поскольку шар B_r^n получается из шара B_1^n линейным преобразованием $z(x) = r \cdot x$ с якобианом r^n, то по теореме о замене переменных в кратном интеграле

$$\mu(B_r^n) = \int\limits_{B_r^n} dz = \int\limits_{B_1^n} r^n\, dx = r^n \mu(B_1^n). \tag{15}$$

Согласно теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\, dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\, dx_2 \ldots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}\, dx_n = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt \right)^n.$$

Используя интеграл Пуассона, получаем

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt\right)^n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^{e^{-|x|^2}} dy = \int\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0<y<e^{-|x|^2}}} dx\,dy.$$

Применяя теорему Фубини, имеем

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0<y<e^{-|x|^2}}} dx\,dy = \int\limits_{\substack{y\in(0,1) \\ \ln y<-|x|^2}} dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\substack{y\in(0,1) \\ |x|<\sqrt{-\ln y}}} dx\,dy = \int\limits_0^1 \mu\left(B^n_{\sqrt{-\ln y}}\right)\,dy.$$

Применяя формулу (15), получаем

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \mu(B^n_1)\int\limits_0^1 (-\ln y)^{\frac{n}{2}}\,dy.$$

Производя замену переменной $t = -\ln y$, имеем

$$\int\limits_0^1 (-\ln y)^{\frac{n}{2}}\,dy = \int\limits_{+\infty}^0 t^{\frac{n}{2}} e^{-t}(-dt) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t}\,dt = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Следовательно,

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \mu(B^n_1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Используя равенство (15), получаем

$$\mu(B^n_r) = \mu(B^n_1)\,r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n.$$

$\square$

Глава 24

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Преобразование и интеграл Фурье функций одной переменной

Поскольку сумма ряда Фурье по тригонометрической системе является периодической функцией, то непериодическую функцию $f(x)$ нельзя представить как сумму ряда Фурье на всей числовой прямой. Далее мы увидим, что многие непериодические функции представимы интегралом Фурье, который является аналогом ряда Фурье.

Определение. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ называется *локально интегрируемой*, если она интегрируема (по Лебегу) на любом отрезке $[a,b]\subset$ $\subset\mathbb{R}$.

Заметим, что кусочно-непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ является локально интегрируемой.

Определение. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ локально интегрируема. *Интеграл в смысле главного значения* $\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется формулой

$$\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx.$$

Заметим, что если функция f интегрируема на $\mathbb{R}$, то интеграл в смысле главного значения $\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует и равен интегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Из существования интеграла

$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ не следует существование интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Например, $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$, но интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ не существует как в собственном, так и в несобственном смыслах.

Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ нечетна и локально интегрируема, то для любого числа $\lambda > 0$ имеем $\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx = 0$, следовательно, $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$.

Определение. *Преобразованием Фурье* локально интегрируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется функция $F[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\,dx. \tag{1}$$

Обратным преобразованием Фурье функции f называется функция $F^{-1}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\,dx. \tag{2}$$

Если в точке $y \in \mathbb{R}$ не существует интеграл в смысле главного значения, записанный в формуле (1) или (2), то в этой точке $F[f](y)$ или $F^{-1}[f](y)$ соответственно не существует.

Замечание. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то из равенства $|f(x)\, e^{\pm ixy}| = |f(x)|$ следует интегрируемость функций $f(x)\, e^{\pm ixy}$ по переменной x на $\mathbb{R}$. В этом случае интегралы в смысле главного значения в формулах (1), (2) существуют и совпадают с обычными интегралами Лебега.

Замечание. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то в силу теоремы 1 § 2 функции $F[f]$ и $F^{-1}[f]$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

Определение. *Интегралом Фурье* функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется интеграл

$$I_f(x) := F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f](y)\, e^{ixy}\, dy.$$

Лемма 1. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = F\Big[F^{-1}[f]\Big](x) = \lim_{\lambda\to+\infty} I_f(x,\lambda), \tag{3}$$

где

$$I_f(x,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\lambda} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\cos y(x-t)\, dt.$$

Формулу (3) следует понимать так, что $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x)$, $F\Big[F^{-1}[f]\Big](x)$ и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_f(x,\lambda)$ существуют или не существуют одновременно, а если существуют, то равны между собой.

Доказательство. Поскольку $f \in L_1(\mathbb{R})$, то интеграл (2) в смысле главного значения совпадает с интегралом в обычном смысле:

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ity}\, dt.$$

Фиксируем $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$F\Big[F^{-1}[f]\Big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[f](y)\, e^{-ixy}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i(t-x)y}\, dt = \frac{1}{2\pi}\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (g_1(y) + ig_2(y))dy,$$

где

$$g_1(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\cos(t-x)y\, dt, \qquad g_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\sin(t-x)y\, dt.$$

Поскольку функция $g_2(y)$ нечетна, то v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2(y)\,dy = 0$. Так как функция $g_1(y)$ четна, то

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1(y)\,dy = \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} g_1(y)\,dy = 2 \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_{0}^{\lambda} g_1(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$F\Big[F^{-1}[f]\Big](x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_{0}^{\lambda} g_1(y)\,dy = \lim_{\lambda\to+\infty} I_f(x,\lambda).$$

Равенство $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_f(x,\lambda)$ доказывается аналогично. $\square$

Теорема 1. (О взаимно обратных преобразованиях Фурье для функций на $\mathbb{R}$.) *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и пусть в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ и конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Тогда интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к числу $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$:*

$$I_f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)).$$

Доказательство. Согласно лемме 1 справедливо равенство $I_f(x_0) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_f(x_0,\lambda)$. Поэтому требуется доказать, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_f(x_0,\lambda) = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)). \tag{4}$$

Производя замену переменной интегрирования $u = t - x_0$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\cos y(x_0-t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+u)\,\cos yu\,du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x_0+u)\,\cos yu\,du + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x_0+u)\,\cos yu\,du =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (f(x_0+u)+f(x_0-u))\cos yu\, du.$$

Следовательно,

$$I_f(x_0,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\lambda} dy \int\limits_0^{+\infty} (f(x_0+u)+f(x_0-u))\cos yu\, du.$$

Поскольку функция $F_1(y,u) := f(x_0+u)+f(x_0-u)$ интегрируема на множестве $[0,\lambda]\times[0,+\infty)$, а функция $F_2(y,u) := F_1(y,u)\cos yu$ измерима и удовлетворяет неравенству $|F_2(y,u)| \le |F_1(y,u)|$, то функция $F_2(y,u)$ также интегрируема на множестве $[0,\lambda]\times[0,+\infty)$. Меняя порядок интегрирования в силу теоремы Фубини, получаем

$$I_f(x_0,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} (f(x_0+u)+f(x_0-u))\, du \int\limits_0^{\lambda} \cos yu\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} (f(x_0+u)+f(x_0-u))\,\frac{\sin\lambda u}{u}\, du.$$

Используя интеграл Дирихле $\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin\lambda u}{u}\, du = \int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, приходим к равенству

$$\begin{gathered} I_f(x_0,\lambda) - \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)) = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\to+\infty} \Big(f(x_0+u)+f(x_0-u)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\Big)\frac{\sin\lambda u}{u}\, du. \end{gathered} \tag{5}$$

Покажем, что

$$\int\limits_0^{\to+\infty} (f(x_0+u)-f(x_0+0))\,\frac{\sin\lambda u}{u}\, du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty \tag{6}$$

и

$$\int\limits_{0}^{\to +\infty} (f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)) \frac{\sin \lambda u}{u} \, du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \qquad (7)$$

Отсюда и из равенства (5) будет следовать требуемое равенство (4).

Представим интеграл из соотношения (6) в виде суммы трех интегралов:

$$\int\limits_{0}^{\to +\infty} (f(x_0+u) - f(x_0+0)) \frac{\sin \lambda u}{u} \, du = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} \sin \lambda u \, du +$$

$$+ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f(x_0 + u)}{u} \sin \lambda u \, du - f(x_0 + 0) \int\limits_{1}^{\to +\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} \, du.$$

Из интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$ и существования конечного предела $\lim\limits_{u \to +0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} = f'_+(x_0)$ следует интегрируемость функции $\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}$ на отрезке $[0, 1]$. Поэтому в силу теоремы Римана об осцилляции

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \sin \lambda u \, du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \qquad (8)$$

Из интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$ и неравенства $\left| \frac{f(x_0+t)}{t} \right| \leq$ $\leq |f(x_0 + t)| \quad \forall t \geq 1$ следует интегрируемость функции $\frac{f(x_0+t)}{t}$ на $(1, +\infty)$, что в силу теоремы Римана дает соотношение

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f(x_0 + u)}{u} \sin \lambda u \, du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Из сходимости интеграла Дирихле $\int\limits_{0}^{\to +\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ следует, что

$$\int\limits_{1}^{\to +\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} \, du \overset{t = \lambda u}{=} \int\limits_{\lambda}^{\to +\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \qquad (9)$$

Из формул (8) – (9) следует соотношение (6). Соотношение (7) доказывается аналогично. Из равенств (5) – (7) следует требуемое равенство (4). □

Замечание. Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что на классе непрерывных функций $f \in L_1(\mathbb{R})$, для которых в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние производные $f'_{\pm}(x)$, преобразования F и F^{-1} являются взамно обратными:

$$F^{-1}\Big[F[f]\Big] = F\Big[F^{-1}[f]\Big] = f.$$

Лемма 2. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально интегрируема. Тогда в случае, когда функция f четная, справедливы равенства*

$$F[f](y) = F^{-1}[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx,$$

а в случае, когда f нечетная, – равенства

$$F[f](y) = -F^{-1}[f](y) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to+\infty} f(x)\, \sin xy\, dx.$$

Доказательство. Пусть функция f четная. Тогда

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\, (\cos xy - i\, \sin xy)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to+\infty} \left(2\int\limits_0^{\lambda} f(x)\, \cos xy\, dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx,$$

аналогично, $F^{-1}[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx.$

В случае нечетной функции f лемма доказывается аналогично. $\square$

Пример 1. Найти преобразования Фурье функций $f(x) = e^{-|x|}$ и $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение. В силу четности функции f по лемме 2 получаем

$$F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re} \int\limits_0^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re} \int\limits_0^{+\infty} e^{(-1+iy)x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re}\ \frac{e^{(-1+iy)x}}{-1+iy}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re}\ \frac{-1}{-1+iy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re}\ \frac{1+iy}{1+y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+y^2}.$$

Следовательно,

$$F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ g(y).$$

Поэтому $F^{-1}[g](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ F^{-1}\Big[F[f]\Big](x)$. Поскольку функция $f(x) = e^{-|x|}$ непрерывна и интегрируема на $\mathbb{R}$, а $f'(x)$ кусочно-непрерывна на $\mathbb{R}$, то по теореме о взаимно обратных преобразованиях Фурье для функций на $\mathbb{R}$ имеем $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = f(x)$. Следовательно, $F^{-1}[g](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ f(x)$. В силу четности g имеем $F^{-1}[g](x) = F[g](x)$. Поэтому

$$F[g](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ f(x). \tag{10}$$

$\square$

Замечание. В силу четности функции $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ согласно лемме 2 формулу (10) можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(y)\, \cos xy\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ f(x),$$

т. е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}.$$

Тем самым мы вычислили один из *интегралов Лапласа* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy$.

Аналогично, рассматривая преобразования Фурье функций $f(x) = e^{-|x|}\operatorname{sign} x$ и $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, вычисляется второй интеграл Лапласа:

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{y\,\sin xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}\operatorname{sign} x.$$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$F[g](y) = \frac{1}{|\alpha|}\, e^{i\frac{\beta}{\alpha}y}\, F[f]\left(\frac{y}{\alpha}\right) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Поскольку $g \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x + \beta)\, e^{-ixy}\,dx \quad \overset{u=\alpha x+\beta}{=}$$

$$= \frac{\operatorname{sign}\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\frac{u-\beta}{\alpha}y}\,\frac{du}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|}\, e^{i\frac{\beta}{\alpha}y}\, F[f]\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

□

Теорема 2. (Преобразование Фурье производной.) *Пусть функция* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *непрерывна, а ее производная* $f' \in L_1(\mathbb{R})$ *кусочно-непрерывна на любом отрезке* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Тогда*

$$F[f'](y) = iy\, F[f](y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Поскольку $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\,dt$, то из условия $f' \in L_1(\mathbb{R})$ следует существование конечного предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int\limits_0^{+\infty} f'(t)\,dt$.

Если $A \neq 0$, то по определению предела $\exists x_0 : \ \forall x > x_0 \hookrightarrow \ |f(x)| > |A|/2$. Это противоречит конечности интеграла $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, dx$. Следовательно, $A = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Так как $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-ixy}\, dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, получаем

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x)\, e^{-ixy} \Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(-iy)\, e^{-ixy}\, dx \right) = iy\, F[f](y). \qquad \square$$

Следствие. *Пусть функции* $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ *интегрируемы и непрерывны на* $\mathbb{R}$, *а функция* $f^{(k)}$ *интегрируема и кусочно-непрерывна на* $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$F[f^{(k)}](y) = (iy)^k F[f](y). \tag{11}$$

и

$$F[f](y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad y \to \infty. \tag{12}$$

Доказательство равенства (11) состоит в k-кратном применении теоремы 2. В силу теоремы Римана об осцилляции

$$F[f^{(k)}](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)\, e^{-ixy}\, dx \to 0 \quad (y \to \infty).$$

Следовательно, согласно равенству (11) имеем $(iy)^k F[f](y) = F[f^{(k)}](y) \to 0$ при $y \to \infty$, т.е. справедливо соотношение (12). $\square$

Теорема 3. (Производная преобразования Фурье.) *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $x \cdot f \in L_1(\mathbb{R})$. *Тогда преобразование Фурье функции* $f(x)$ *является непрерывно дифференцируемой на* $\mathbb{R}$ *функцией и*

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = F[-ix\, f](y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Доказательство. Фиксируем произвольный отрезок $[y_1, y_2]$ и применим теорему о дифференцировании собственного интеграла по параметру к интегралу $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dx$, где $g(x,y) := f(x)e^{-ixy}$. Поскольку $|g'_y(x,y)| \le |xf(x)|$ и $x \cdot f \in L_1(\mathbb{R})$, то условия этой теоремы выполнены и для любого $y \in [y_1, y_2]$ существует

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g'_y(x,y)\,dx,$$

т.е. справедливо равенство (13). В силу произвольности отрезка $[y_1, y_2]$ оно справедливо при всех $y \in \mathbb{R}$. По теореме о непрерывности собственного интеграла правая часть этого равенства непрерывна по y. Поэтому функция $F[f](y)$ непрерывно дифференцируема. $\square$

Следствие. *Пусть функции* $f(x), xf(x), \ldots, x^k f(x)$ *интегрируемы на* $\mathbb{R}$. *Тогда преобразование Фурье функции* f *является* k *раз непрерывно дифференцируемой функцией и*

$$\frac{d^k}{dy^k}F[f](y) = F[(-ix)^k f](y).$$

Доказательство состоит в k-кратном применении теоремы 3. $\square$

Пример 2. Вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$.

Решение. В силу теоремы о производной преобразования Фурье получаем

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = F[-ix\, f](y) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2/2}\, e^{-ixy}\,dx =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x+iy)\, e^{-x^2/2}\, e^{-ixy}\, dx - \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\right)'_x dx - y\, F[f](y) =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - y\, F[f](y) = -y\, F[f](y).$$

Следовательно, функция $F[f](y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{d}{dy}F[f](y) = -y\, F[f](y)$. Решая это уравнение, получаем

$$F[f](y) = C\, e^{-y^2/2}, \tag{14}$$

где

$$C = F[f](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{15}$$

Поскольку $e^{-y^2/2} = f(y)$, то равенство (14) можно записать в виде $F[f](y) = C\, f(y)$. Аналогично, справедливо равенство $F^{-1}[f](y) = C\, f(y)$. Следовательно, $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = C^2\, f(x)$. Поскольку функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируема, то по теореме о взаимно обратных преобразованиях Фурье для функций на $\mathbb{R}$ имеем $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = f(x)$. Следовательно, $C^2 = 1$. Из формулы (15) следует, что $C > 0$. Поэтому $C = 1$. Отсюда и из формулы (14) следует, что

$$F[f](y) = e^{-y^2/2}.$$

Замечание. Пример 2 дает еще один способ вычисления интеграла Пуассона: из формулы (15) и равенства $C = 1$ следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, а значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

§ 2. Преобразование и интеграл Фурье функций нескольких переменных

Определение. *Преобразованием Фурье* функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $F[f] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i(x,y)}\, dx,$$

где $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Обратным преобразованием Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $F^{-1}[f] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{i(x,y)}\, dx.$$

Замечание. Если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то в силу теоремы 1 § 2 функция $F[f]$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Непосредственно из определения преобразования Фурье следует, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то функция $F[f]$ ограничена на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|F[f]\|_{C(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1}$$

Аналогичные утверждения справедливы для $F^{-1}[f]$.

Если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $F[f] \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то *интегралом Фурье* функции f называется интеграл

$$I_f(x) := F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](y)\, e^{i(x,y)}\, dy.$$

Лемма 1. *Пусть $\alpha > 0$, $f(x) = e^{-\frac{\alpha|x|^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$F[f](y) = \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{|y|^2}{2\alpha}} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Заметим, что $f(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}(x_1^2+\ldots+x_n^2)} = \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi(t) = e^{-\frac{\alpha t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$. По теореме Фубини

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x_1)\, e^{-ix_1y_1}\, dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x_2)\, e^{-ix_2y_2}\, dx_2 \times \ldots$$
$$\ldots \times \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x_n)\, e^{-ix_ny_n}\, dx_n = F[\varphi](y_1)\ldots F[\varphi](y_n). \qquad (2)$$

Так как $\varphi(t) = \varphi_1(\sqrt{\alpha}t)$, где $\varphi_1(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}$, то по лемме 3 § 1 получаем

$$F[\varphi](u) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} F[\varphi_1]\left(\frac{u}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Согласно примеру 2 § 1 имеем $F[\varphi_1] = \varphi_1$, а значит, $F[\varphi](u) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\frac{u^2}{2\alpha}}$. Отсюда и из равенства (2) получаем доказываемое равенство. $\square$

Лемма 2. (О свертке непрерывной функции с функцией гауссовой плотности.) *Пусть функция* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *пусть* $\varrho_\alpha(x)$ – *плотность* нормального (гауссова) распределения, *т.е.*

$$\varrho_\alpha(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_0 - u)\, \varrho_\alpha(u)\, du = f(x_0).$$

Доказательство. Согласно теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|u|^2}{2\alpha}}\, du = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u_1^2}{2\alpha}}\, du_1 \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u_2^2}{2\alpha}}\, du_2 \ldots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u_n^2}{2\alpha}}\, du_n = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}\, dt\right)^n.$$

Используя интеграл Пуассона, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}\, dt \overset{\xi=\frac{t}{\sqrt{2\alpha}}}{=} \sqrt{2\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{2\pi\alpha}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho_\alpha(u)\, du = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|u|^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}}\, du = 1. \qquad (3)$$

Следовательно, для доказательства требуемого равенства достаточно доказать, что

$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du=0. \tag{4}$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 найдется число $\delta>0$ такое, что $|f(x_0-u)-f(x_0)|<$ $<\varepsilon$ при всех $u\in U_\delta(0)$. Используя равенство (3), имеем

$$\left|\int\limits_{|u|<\delta}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du\right|\le\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varrho_\alpha(u)\,du=\varepsilon. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{|u|\ge\delta}\varrho_\alpha(u)\,du\quad\overset{v=\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}{=}\quad\int\limits_{|v|\ge\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}}\varrho_1(v)\,dv\quad\overset{\alpha\to+0}{\longrightarrow}\quad 0,$$

$$\int\limits_{|u|\ge\delta}|f(x_0-u)|\,\varrho_\alpha(u)\,du\ \le\ \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot\sup_{|u|\ge\delta}\varrho_\alpha(u)\quad\overset{\alpha\to+0}{\longrightarrow}\quad 0,$$

так как

$$\sup_{|u|\ge\delta}\varrho_\alpha(u)=\frac{e^{-\frac{\delta^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}}\quad\overset{\alpha\to+0}{\longrightarrow}\quad 0.$$

Поэтому найдется число $\alpha_\varepsilon>0$ такое, что при всех $\alpha\in(0,\alpha_\varepsilon)$

$$\left|\int\limits_{|u|\ge\delta}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du\right|<\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (5) получаем

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du\right|<2\varepsilon\qquad\forall\alpha\in(0,\alpha_\varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ отсюда вытекает соотношение (4). $\square$

Теорема 1. (О взаимно обратных преобразованиях Фурье для функций на $\mathbb{R}^n$.) *Пусть функция* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и пусть* $F[f] \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$F\left[F^{-1}[f]\right](x_0) = F^{-1}\left[F[f]\right](x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Для любого $\alpha \geq 0$ обозначим

$$g_\alpha(y) := F[f](y) \cdot e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2}}, \qquad f_\alpha := F^{-1}[g_\alpha](x_0).$$

Тогда

$$f_0 = F^{-1}[g_0](x_0) = F^{-1}\Big[F[f]\Big](x_0). \tag{6}$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to+0} g_\alpha(y) = g_0(y)$ и $|g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}| = |g_\alpha(y)| \leq |F[f](y)|$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$, причем $F[f] \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{\alpha\to+0} g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}\right) dy,$$

а значит,

$$\lim_{\alpha\to+0} f_\alpha = \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_0(y)\, e^{i(x_0,y)}\, dy = F^{-1}[g_0](x_0) = f_0.$$

Отсюда и из равенств (6) следует, что для доказательства равенства $F^{-1}\left[F[f]\right](x_0) = f(x_0)$ достаточно доказать, что

$$\lim_{\alpha\to+0} f_\alpha = f(x_0). \tag{7}$$

Так как

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{-i(\xi,y)}\, d\xi,$$

то

$$f_\alpha = F^{-1}[g_\alpha](x_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](y)\, e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} + i(x_0,y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} + i(x_0,y) - i(\xi,y)}\, d\xi.$$

Поскольку модуль подынтегральной функции не превосходит функции $F(y,\xi) := |f(\xi)| \cdot e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2}}$, которая интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то подынтегральная функция также интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Меняя по теореме Фубини порядок интегрирования, получаем

$$f_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, d\xi \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} - i(\xi - x_0, y)}\, dy.$$

В силу леммы 1

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} - i(\xi - x_0, y)}\, dy = \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi - x_0|^2}{2\alpha}}.$$

Поэтому

$$f_\alpha = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{-\frac{|\xi - x_0|^2}{2\alpha}}\, d\xi \overset{u = x_0 - \xi}{=} \frac{1}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_0 - u)\, e^{-\frac{|u|^2}{2\alpha}}\, du.$$

Применяя лемму 2, получаем соотношение (7). Следовательно,

$$F^{-1}\left[F[f]\right](x_0) = f(x_0).$$

Замечая, что $F^{-1}[f](y) = F[f](-y)$, приходим к равенству $F\left[F^{-1}[f]\right] = F^{-1}\left[F[f]\right]$. $\square$

§ 3. Свертка и преобразование Фурье

Теорема 1. (Тонелли.) *Пусть X и Y – измеримые множества в $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^m_y$ соответственно. Пусть функция $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ измерима. Тогда*

$$\int\limits_{X \times Y} f(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\, dy.$$

Доказательство. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$f_k(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & |x| \le k,\ |y| \le k,\ |f(x,y)| \le k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как функция f_k интегрируема на $X \times Y$, то согласно теореме Фубини

$$\int\limits_{X\times Y} f_k(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f_k(x,y)\,dy \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В силу теоремы Б. Леви о монотонной сходимости имеем

$$\int\limits_Y f(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_Y f_k(x,y)\,dy \qquad \forall x \in X.$$

Поэтому, еще раз применяя теорему Б. Леви, получаем

$$\int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X dx \int\limits_Y f_k(x,y)\,dy.$$

Третий раз применяя теорему Б. Леви, можно написать

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{X\times Y} f_k(x,y)\,dx\,dy.$$

Поэтому, переходя к пределу в равенстве (1), получаем доказываемое равенство. $\square$

Теорема 2. (О свертке.) *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

(1) *функция $F(x,y) := f(x-y)\,g(y)$ интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;*

(2) *для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует конечный интеграл*

$$h(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy; \tag{2}$$

(3) *$h \in L_1(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ определим

$$\varphi(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy \in [0,+\infty].$$

По теореме Тонелли

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\,dz < +\infty.$$

Поэтому $F \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Согласно лемме 2 §6 главы 8 имеем $\varphi(x) < +\infty$ для почти всех $x \in X$. Если $\varphi(x) < +\infty$, то в силу теоремы 3 §7 главы 8 интеграл (2) существует. Так как функция h измерима (как предел интегралов от счетно-ступенчатых измеримых функций) и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx < +\infty$, то $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. □

Определение. *Сверткой* функций $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, определяемая формулой

$$(f*g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Корректность этого определения следует из теоремы 2.

Замечание. Согласно лемме 2 § 3 главы 22 для частичной суммы ряда Фурье 2π-периодической функции $f \in L_1[-\pi,\pi]$ справедлива формула

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt,$$

т.е. частичная сумма ряда Фурье равна свертке функции f с ядром Дирихле D_n.

Свертка функций имеет многочисленные применения в математической физике, теории вероятностей и других разделах математики.

Замечание. Свертка функций обладает следующими свойствам:

(1) коммутативность: $g*f = f*g$;

(2) дистрибутивность: $(f_1+f_2)*g = f_1*g + f_2*g$;

(3) ассоциативность: $(f*g)*h = f*(g*h)$.

Для доказательства свойства коммутативности достаточно сделать замену переменной интегрирования: $z = x - y$. Свойство дистрибутивности следует из линейности интеграла. Свойство ассоциативности – из теоремы Фубини.

Теорема 3. (Преобразование Фурье от свертки.) *Пусть* $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда преобразование Фурье свертки функций* f *и* g *равно произведению преобразований Фурье этих функций, умноженному на коэффициент* $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$:

$$F[f * g] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot F[f] \cdot F[g].$$

Доказательство. По определению преобразования Фурье и свертки для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$F[f * g](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y)\, e^{-i(x,y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\, g(z)\, e^{-i(x,y)}\, dz.$$

В силу теоремы о свертке функция $f(y-z)\, g(z)$, а значит, и функция $f(y-z)\, g(z)\, e^{-i(x,y)}$ интегрируемы по (y, z) на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Поэтому согласно теореме Фубини

$$F[f * g](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z)\, e^{-i(x,z)}\, dz \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\, e^{-i(x,y-z)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z)\, e^{-i(x,z)}\, dz \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-i(x,t)}\, dt =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot F[f](x) \cdot F[g](x).$$

$\square$

§ 4. Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$

Будем использовать обозначение

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Определение. *Мультииндексом* $\overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$ называется упорядоченный набор $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ индексов $m_i \in \mathbb{N}_0$.

Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и мультииндекса $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ будем использовать обозначения

$$|\overline{m}| := m_1 + \ldots + m_n, \qquad x^{\overline{m}} = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n},$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m_n} = \frac{\partial^{|\overline{m}|}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}.$$

Определение. *Пространством Шварца* $S(\mathbb{R}^n)$ называется линейное пространство, состоящее из бесконечно дифференцируемых *быстроубывающих* функций, т.е. таких функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^{\overline{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi(x) \right| < +\infty \quad \forall \overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n.$$

В частности, $S(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^p \varphi^{(m)}(x) \right| < +\infty \quad \forall p, m \in \mathbb{N}_0.$$

Операции умножения элемента на число и сложения элементов в $S(\mathbb{R}^n)$ определяются естественным образом:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \ \lambda \in \mathbb{C}, \ x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow$$
$$\hookrightarrow \ (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \qquad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\, \varphi(x).$$

Легко видеть, что данные операции не выводят из пространства $S(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что функция $\varphi(x) = e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}$ содержится в $S(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > \frac{n}{2}$. Тогда функция $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, заданная формулой $f(x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha}$, интегрируема на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. В силу теоремы Тонелли

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^{f(x)} dy = \int\limits_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}: \\ 0 < y < f(x)}} dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ y<f(x)}} dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ y<f(x)}} dx,$$

где последнее равенство следует из неравенства $f(x) \le 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in (0,1)$

$$y < f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y < (1+|x|^2)^{-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \sqrt{y^{-\frac{1}{\alpha}} - 1}.$$

Обозначая $r(y) = \sqrt{y^{-\frac{1}{\alpha}} - 1}$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ |x|<r(y)}} dx = \int\limits_0^1 \mu(B^n_{r(y)})\,dy = \mu(B^n_1)\int\limits_0^1 r^n(y)\,dy.$$

Здесь использована формула $\mu(B^n_{r(y)}) = r^n(y)\mu(B^n_1)$, полученная в теореме 5 § 3 главы 23. Обозначим $g(r) = (1+r^2)^{-\alpha}$. Тогда $y = g(r)$ – обратная функция к $r = r(y)$. Переходя к переменной интегрирования r, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \mu(B^n_1)\int\limits_{+\infty}^0 r^n g'(r)\,dr = 2\alpha\mu(B^n_1)\int\limits_0^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^{\alpha+1}}\,dr$$

Поскольку $\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{r^{2\alpha+1-n}}$ при $r \to +\infty$ и $\alpha > \frac{n}{2}$, то $\int\limits_0^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^{\alpha+1}}\,dr < +\infty$. Следовательно, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx < +\infty$, а значит функция f интегрируема на $\mathbb{R}^n$. $\square$

Определение. Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^n)$ называется *сходящейся* в S к функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ (пишут $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$ при $k \to \infty$), если для любых $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$

$$x^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi_k(x) \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi(x) \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то есть

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left| x^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} (\varphi_k - \varphi)(x)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Лемма 2. (а) $S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$;

(б) *если* $\varphi_k \overset{S(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \varphi$, *то* $\varphi_k \overset{L_1(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \varphi$.

Доказательство. Фиксируем натуральное число $N > \frac{n}{2}$ и рассмотрим многочлен $P(x) := (1 + |x|^2)^N$. Согласно лемме 1

$$C_0 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{P(x)} < +\infty.$$

(а) Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Обозначим

$$C_1 := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |P(x)\varphi(x)|.$$

Из определения пространства $S(\mathbb{R}^n)$ следует, что $C_1 < +\infty$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, dx \le C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{P(x)} = C_1 C_0 < +\infty,$$

то есть, $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

(б) Пусть $\varphi_k \overset{S(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \varphi$. Обозначим $\beta_k := \varphi_k - \varphi$,

$$\varepsilon_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |P(x)\beta_k(x)|.$$

Из определения сходимости в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$ следует, что $\varepsilon_k \to$ $\to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому

$$\|\beta_k\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta_k(x)|\, dx \le \varepsilon_k \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{P(x)} = \varepsilon_k C_0 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, $\beta_k \overset{L_1(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} 0$, а значит, $\varphi_k \overset{L_1(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \varphi$. □

Лемма 3. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *и пусть* $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$. *Тогда для любого* $y \in \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство*

$$(iy)^{\overline{p}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[f](y) = F\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}} \left((-ix)^{\overline{m}} f\right)\right](y).$$

Доказательство. Для любого индекса $k \in \overline{1,n}$ через F_k обозначим преобразование Фурье по k-ой координате. Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема по координате x_k на $\mathbb{R}$, то

$$F_k[f](x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-ix_k y_k}\, dx_k.$$

Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то согласно лемме 2 имеем $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Поэтому для интеграла

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i(x,y)}\, dx$$

можно применить теорему Фубини и, следовательно,

$$F[f](y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 y_1}\, dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-ix_n y_n}\, dx_n =$$

$$= (F_1 \circ \ldots \circ F_n)[f](y_1, \ldots, y_n).$$

Таким образом,

$$F[f] = (F_1 \circ \ldots \circ F_n)[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то $x_k f \in S(\mathbb{R}^n)$. Поэтому согласно теореме о производной пребразования Фурье

$$F_k[(-ix_k)f] = \frac{\partial}{\partial y_k} F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{2}$$

По определению преобразования F_k имеем

$$F_k[x_j f] = x_j F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall j \neq k. \tag{3}$$

В силу теоремы о дифференцировании собственного интеграла по параметру

$$F_k\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f\right] = \frac{\partial}{\partial x_j} F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall j \neq k. \tag{4}$$

Из равенств (1)–(4) следует, что

$$F[(-ix_k)f] = \frac{\partial}{\partial y_k} F[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{5}$$

Согласно теореме о преобразовании Фурье производной

$$F_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k} f\right] = (iy_k) F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Отсюда и из равенств (1), (3), (4) следует, что

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_k} f\right] = (iy_k) F[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{6}$$

Из равенств (5), (6) вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Теорема 1. (О преобразовании Фурье в пространстве Шварца.) (а) *Преобразование Фурье любую функцию $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ переводит в функцию пространства $S(\mathbb{R}^n)$.*

(б) *Преобразование Фурье $F : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ непрерывно в смысле сходимости в $S(\mathbb{R}^n)$, т.е. если $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$, то $F[\varphi_k] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} F[\varphi]$.*

(в) *Для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы формулы обращения*

$$F\left[F^{-1}[\varphi]\right] = F^{-1}\left[F[\varphi]\right] = \varphi.$$

Доказательство. (а). Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$; $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$. Тогда $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}}((-ix)^{\overline{m}}\varphi) \in S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда в силу неравенства (1) § 2 следует ограниченность функции $F\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}}((-ix)^{\overline{m}}\varphi)\right]$ на $\mathbb{R}^n$. Поэтому согласно лемме 3

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| (iy)^{\overline{p}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[\varphi](y) \right| < +\infty.$$

Следовательно, $F[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n)$.

(б). Пусть $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$. Фиксируем произвольные мультиндексы $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$. Обозначим

$$\beta_k := \varphi_k - \varphi, \qquad g_k(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}} \left((-ix)^{\overline{m}} \beta_k\right)(x).$$

Поскольку $\beta_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$, то по определению сходимости в $S(\mathbb{R}^n)$ имеем $g_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$. Отсюда в силу леммы 2(б) следует, что $g_k \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} 0$. Поэтому в силу неравенства (1) § 2 получаем $F[g_k] \xrightarrow{C(\mathbb{R}^n)} 0$. Применяя лемму 3 к функциям $f = \beta_k$, получаем равенства

$$(iy)^{\overline{p}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[\beta_k](y) = F[g_k](y).$$

Следовательно,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left| y^{\overline{p}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[\beta_k](y) \right| = \|F[g_k](y)\|_{C(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Это означает, что $F[\beta_k] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$, то есть, $F[\varphi_k] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} F[\varphi]$.

(в). Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. В силу пункта (а) настоящей теоремы и леммы 2(а) имеем $F[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда по теореме о взаимно обратных преобразованиях Фурье для функций на $\mathbb{R}^n$ получаем формулы обращения. $\square$

Глава 25

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ (РАСПРЕДЕЛЕНИЯ)

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2n}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2n}, +\infty\right), \\ n, & x \in \left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку $f_n(x) \geq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$, то функцию $f_n(x)$ можно интерпретировать как линейную плотность однородного стержня массы 1 и длины $\frac{1}{n}$. Уменьшая длину стержня в пределе при $n \to \infty$, получим материальную точку массы 1. Поскольку $f_n(0) = n \to +\infty$, то в классе обычных функций не существует предела $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Далее мы будем рассматривать пространство обобщенных функций, которое наряду с обычными функциями содержит, например, δ-функцию Дира́ка. δ-функцию Дирака можно интерпретировать как плотность материальной точки массы 1. При этом для последовательности функций (1) выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$ в смысле обобщенных функций.

Приведем еще один аргумент в пользу рассмотрения обобщенных функций. Многие часто встречающиеся функции (например, $f(x) = |x|$) не дифференцируемы в некоторых точках. Одним из достоинств пространства обощенных функций является то, что для любой обощенной функции (в том числе и для $f(x) = |x|$ и для $f(x) = \delta(x)$) существуют производные любого порядка, которые также являются обобщенными функциями.

§ 1. Пространство $\mathcal{D}$ основных (пробных) функций

Напомним, что функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется финитной, если ее носитель

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

является компактом.

Определение. *Пространством пробных (основных) функций* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ называется линейное пространство, элементами которого являются финитные бесконечно дифференцируемые функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Операции умножения элемента на число и сложения элементов в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ определяются естественным образом:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow\ (\varphi_1+\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x), \qquad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\,\varphi(x).$$

Легко видеть, что данные операции не выводят из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Элементом пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является, например, функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *сходится* к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *в пространстве* $\mathcal{D}$, и писать $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ при $k \to \infty$, если

1) множество $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_k$ ограничено и

2) $\forall \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n \hookrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi_k(x) \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi(x)$ при $k \to \infty$.

§ 2. Пространство $\mathcal{D}'$ обобщенных функций

Определение. *Функционалом* f называется отображение $f : \Phi \to \mathbb{C}$, которое каждому элементу φ бесконечномерного пространства Φ ставит в соответствие число $(f, \varphi) \in \mathbb{C}$, равное значению функционала на элементе $\varphi \in \Phi$.

Рассмотрим функционалы, определенные на пространстве пробных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Функционал $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ называется *линейным*, если

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \hookrightarrow \ (f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 (f, \varphi_1) + \lambda_2 (f, \varphi_2).$$

Функционал $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ называется *непрерывным*, если для любой последовательности пробных функций $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, сходящейся к пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathcal{D}$, числовая последовательность (f, φ_k) сходится к числу (f, φ):

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \Longrightarrow \quad (f, \varphi_k) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Определение. *Пространством обобщенных функций (или распределений)* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется множество линейных непрерывных функционалов $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является линейным пространством, операции в котором определяются естественным образом:

$$\forall f, f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \ \lambda \in \mathbb{C}, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \ (f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \quad (\lambda f, \varphi) = \lambda (f, \varphi).$$

Определение. Функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется *локально интегрируемой*, если она интегрируема (по Лебегу) на любом компакте $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Данное определение обобщает определение локально интегрируемых функций одной переменной. Заметим, что непрерывные функции $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ локально интегрируемы.

Лемма 1. *Если функционал $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ порожден локально интегрируемой функцией $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ согласно формуле*

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{$*$}$$

то f является распределением из пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Поскольку функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ финитна, то ее носитель $\Omega := \operatorname{supp} \varphi$ является компактом. Из интегрируемости на компакте Ω функции f_0 и непрерывности функции φ следует существование интеграла $(f, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f_0(x)\, \varphi(x)\, dx$. Линейность функционала f следует из свойства линейности интеграла. Покажем непрерывность функционала f. Пусть $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ при $k \to \infty$. Тогда существует компакт Ω, содержащий носители всех функций φ_k, и, кроме того, $\varphi_k(x) \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $k \to \infty$. Следовательно,

$$|(f, \varphi_k) - (f, \varphi)| = \left| \int\limits_{\Omega} f_0(x)\, (\varphi_k(x) - \varphi(x))\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\Omega} |f_0(x)|\, dx \right) \max_{x \in \Omega} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, функционал $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ линеен и непрерывен, следовательно, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Определение. *Регулярным функционалом* называется функционал $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, порожденный некоторой локально интегрируемой функцией $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ согласно формуле $(*)$.

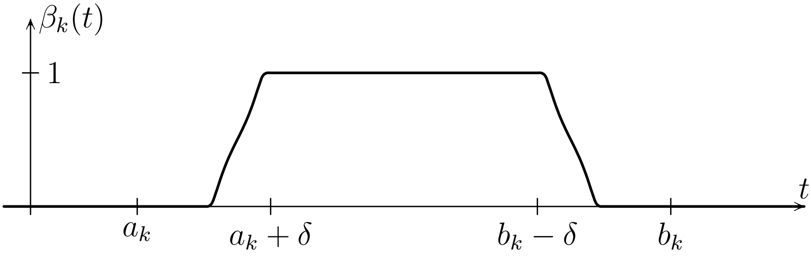
Лемма 2. *Пусть Π – клетка в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется пробная функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, 1], \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \Pi, \quad \int\limits_{\Pi} \varphi(x)\, dx > \mu(\Pi) - \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно определению клетки $\Pi = \omega_1 \times \ldots \times \omega_n$, где ω_k – ограниченные числовые промежутки с концами a_k, b_k. Тогда $(a_k, b_k) \subset \omega_k \subset [a_k, b_k]$. Если $\mu(\Pi) = 0$, то достаточно взять $\varphi(x) = 0$. Пусть $\mu(\Pi) > 0$, а значит, $b_k > a_k$ при всех $k \in \overline{1, n}$. Положим

$$\delta_0 := \frac{1}{2} \min_{k \in \overline{1,n}} (b_k - a_k).$$

Фиксируем произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$. В силу леммы леммы 1 § 2 главы 14 для любого $k \in \overline{1, n}$ существует гладкая функция $\beta_k \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ такая, что $\operatorname{supp} \beta_k \subset (a_k, b_k)$ и $\beta_k(t) = 1$ при $t \in [a_k + \delta, b_k - \delta]$.



Положим

$$\varphi(x) := \beta_1(x_1) \cdots \beta_n(x_n) \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \Pi$ и

$$\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in \Pi_\delta := [a_1 + \delta, b_1 - \delta] \times \ldots \times [a_n + \delta, b_n - \delta].$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Pi} \varphi(x)\, dx \geq \int\limits_{\Pi_\delta} \varphi(x)\, dx = \mu(\Pi_\delta) = (b_1 - a_1 - 2\delta) \cdots (b_n - a_n - 2\delta).$$

Поскольку $\mu(\Pi_\delta) \xrightarrow{\delta \to +0} (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \mu(\Pi)$, то число $\delta \in (0, \delta_0)$ можно выбрать так, что $\mu(\Pi_\delta) > \mu(\Pi) - \varepsilon$. Следовательно, $\int\limits_{\Pi} \varphi(x)\, dx > \mu(\Pi) - \varepsilon$. □

Лемма 3. *Пусть функция* $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *является линейной комбинацией индикаторных функций клеток в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется пробная функция* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *такая, что*

$$\|\gamma - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \qquad \operatorname{supp} \varphi \subset \operatorname{supp} \gamma, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\gamma(x)|.$$

Доказательство. По условию леммы найдутся числа $\gamma_k \in \mathbb{C}$ и клетки $\Pi_k \subset \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k \cdot \mathbf{1}_{\Pi_k}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Согласно замечанию после теоремы 2 § 2 главы 22 клетки Π_k можно считать попарно непересекающимися. Отбрасывая нулевые слагаемые, будем считать, что $\gamma_k \neq 0$ при $k \in \overline{1, k_0}$. В силу леммы 2 для каждого $k \in \overline{1, k_0}$ найдется пробная функция

$$\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1]) : \qquad \text{supp } \varphi_k \subset \Pi_k,$$

$$\int\limits_{\Pi_k} \varphi_k(x)\, dx > \mu(\Pi_k) - \frac{\varepsilon}{k_0 \cdot |\gamma_k|}. \tag{2}$$

Положим

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k \cdot \varphi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Так как клетки Π_k попарно не пересекаются, то

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \text{supp } \varphi_k \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \Pi_k = \text{supp } \gamma,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq \max_{k \in \overline{1, k_0}} |\gamma_k| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\gamma(x)|,$$

$$\|\gamma - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\gamma(x) - \varphi(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{\Pi_k} |\gamma(x) - \varphi(x)|\, dx \overset{(1),(3)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{\Pi_k} |\gamma_k| \cdot |1 - \varphi_k(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{k_0} |\gamma_k| \left(\mu(\Pi_k) - \int\limits_{\Pi_k} \varphi_k(x)\, dx \right) \overset{(2)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_0} |\gamma_k| \cdot \frac{\varepsilon}{k_0 \cdot |\gamma_k|} = \varepsilon.$$

□

Далее нам понадобится следующая теорема, которую можно рассматривать как обобщение основной леммы вариационного исчисления, изучаемой в курсе дифференциальных уравнений.

Теорема 1. (О взаимно однозначном соответствии между локально интегрируемыми функциями и регулярными функционалами.) *Пусть функционалы, порожденные локально интегрируемыми функциями* $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *в соответствии с формулой* $(*)$, *совпадают, т. е.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_0(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n).$$

Тогда значения функций f_0 *и* g_0 *совпадают почти всюду на* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Обозначим $h_0(x) := f_0(x) - g_0(x)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_0(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Требуется доказать, что $h_0(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Предположим противное. Тогда согласно лемме 3 § 1 главы 14

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_0(x)|\,dx > 0. \tag{5}$$

Для того, чтобы показать основную идею доказательства предположим сначала, что соотношение (4) справедливо для любой измеримой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда, применяя соотношение (4) к функции

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} \frac{\overline{h_0(x)}}{|h_0(x)|}, & h_0(x) \neq 0, \\ 0, & h_0(x) = 0, \end{cases}$$

где $\overline{h_0(x)}$ – число, комплексно сопряженное числу $h_0(x)$, получим

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} h_0(x)\,\varphi_0(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |h_0(x)|\,dx,$$

что противоречит неравенству (5).

Проведем теперь строгое доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим куб $Q_m := [-m, m]^n = [-m, m] \times \ldots \times [-m, m]$. В силу непрерывности интеграла Лебега по множествам интегрирования

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_0(x)|\,dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_m} |h_0(x)|\,dx.$$

Поэтому согласно неравенству (5) найдется индекс $m \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{Q_m} |h_0(x)|\,dx = C > 0. \tag{6}$$

Поскольку $h_0 \in L_1(Q_m)$, то в силу теоремы о приближении по норме L_p существует функция $\beta \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток и такая, что

$$\|h_0 - \beta\|_{L_1(Q_m)} < \frac{C}{2}. \tag{7}$$

Полагая $\beta(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_m$, получим, что $\operatorname{supp} \beta \subset Q_m$. При этом функция β остается линейной комбинацией индикаторных функций клеток. Согласно замечанию § 2 главы 22 функция β представима в виде линейной комбинацией индикаторных функций непересекающихся клеток.

Обозначим

$$\gamma(x) := \begin{cases} \frac{\overline{\beta(x)}}{|\beta(x)|}, & \beta(x) \neq 0, \\ 0, & \beta(x) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $\overline{\beta(x)}$ – число, комплексно сопряженное числу $\beta(x)$. Тогда γ – линейная комбинация индикаторных функций непересекающихся клеток.

В силу леммы 3 найдется последовательность пробных функций $\varphi_k \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ такая, что

$$\|\gamma - \varphi_k\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subset \operatorname{supp} \gamma \subset \operatorname{supp} \beta \subset Q_m,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\gamma(x)| \leq 1$$

при всех $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\beta(x)| < +\infty$, то

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(x)(\gamma(x) - \varphi_k(x))\,dx \right| \leq \|\gamma - \varphi_k\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\beta(x)| \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(x)\varphi_k(x)\,dx \xrightarrow{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(x)\gamma(x)\,dx \overset{(8)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta(x)|\,dx \overset{\operatorname{supp}\beta\subset Q_m}{=}$$

$$= \|\beta\|_{L_1(Q_m)} \geq \|h_0\|_{L_1(Q_m)} - \|h_0-\beta\|_{L_1(Q_m)} \overset{(6),\,(7)}{>} \frac{C}{2}.$$

Следовательно, найдется индекс $k \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(x)\varphi_k(x)\,dx\right| > \frac{C}{2}. \tag{9}$$

С другой стороны, поскольку $\operatorname{supp}\varphi_k \subset Q_m$ и $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)| \leq 1$, то

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} (h_0(x)-\beta(x))\varphi_k(x)\,dx\right| \leq \|h_0-\beta\|_{L_1(Q_m)} \overset{(7)}{<} \frac{C}{2}.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(x)\varphi_k(x)\,dx\right| < \frac{C}{2}.$$

Это противоречит неравенству (9). □

Замечание. Из теоремы 1 следует, что если не различать функции, которые отличаются лишь на множестве лебеговой меры нуль, то формула $(*)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между обычными локально интегрируемыми функциями $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ и регулярными функционалами $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Когда говорят «рассмотрим функцию $f(x)$ как обобщенную функцию», имеют в виду, что рассматривается регулярный функционал $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, порожденный функцией $f_0 = f$ по формуле $(*)$. При этом функционал, как правило, обозначают той же буквой, что и породившую его обычную функцию, отождествляя обычные функции с регулярными функционалами. В этом смысле любая обычная локально интегрируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ содержится в пространстве $D'(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Функционалы $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*.

Определение. *δ-функцией Дирака* называется функционал δ, определяемый по формуле

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n).$$

Легко видеть, что функционал δ линеен и непрерывен, т. е. $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 4. *Функционал δ является сингулярным.*

Доказательство. Предположим противное: существует локально интегрируемая функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку для пробной функции $\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$ справедливо равенство $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \varphi_a(x) = \varphi_a(0) = e^{-1}$, то согласно нашему предположению для любого числа $a > 0$ имеем

$$\varphi_a(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,\varphi_a(x)\,dx = \int\limits_{|x|\leq a} f_0(x)\,\varphi_a(x)\,dx \leq \varphi_a(0) \int\limits_{|x|\leq a} |f_0(x)|dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|x|\leq a} |f_0(x)|\,dx \geq 1 \qquad \forall a > 0. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу непрерывности интеграла по множествам интегрирования

$$\int\limits_{|x|\leq 1} |f_0(x)|\,dx = \int\limits_{0<|x|\leq 1} |f_0(x)|\,dx = \lim_{a\to+0} \int\limits_{a<|x|\leq 1} |f_0(x)|\,dx$$

и, следовательно,

$$\lim_{a\to+0}\int\limits_{|x|\le a}|f_0(x)|\,dx=0,$$

что противоречит соотношению (10). $\square$

Ради единства формы записи сингулярные функционалы также записывают как обычные функции (например, $\delta(x)$), хотя сингулярному функционалу не соответствует никакая обычная функция. Такая запись еще удобна, например, при рассмотрении *смещенной δ-функции* $\delta(x-x_0)$, которая определяется формулой

$$(\delta(x-x_0),\varphi)=\varphi(x_0)\qquad\forall\varphi\in\mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n).$$

§ 3. Сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$

Определение. Будем говорить, что последовательность распределений $f_k\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *сходится* к распределению $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *в пространстве* $\mathcal{D}'$, и писать $f_k(x)\xrightarrow{\mathcal{D}'}f(x)$ при $k\to\infty$, если

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\ (f_k,\varphi)\to(f,\varphi)\quad\text{при}\quad k\to\infty.$$

Аналогично, запись $f_\varepsilon(x)\xrightarrow{\mathcal{D}'}f(x)$ при $\varepsilon\to+0$ означает, что

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\ (f_\varepsilon,\varphi)\to(f,\varphi)\quad\text{при}\quad \varepsilon\to+0.$$

Пример 1. Доказать, что $f_k(x)\xrightarrow{\mathcal{D}'}\delta(x)$ при $k\to\infty$, где

$$f_k(x)=\begin{cases}0, & x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2k}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2k},+\infty\right),\\ k, & x\in\left(-\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}\right).\end{cases}$$

Решение. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}\,(\mathbb{R})$. Тогда $(f_k,\varphi)=k\int\limits_{-1/(2k)}^{1/(2k)}\varphi(x)\,dx$. В силу интегральной теоремы о среднем

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad\exists\xi_k\in\left(-\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}\right):\qquad\int\limits_{-1/(2k)}^{1/(2k)}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{k}\,\varphi(\xi_k).$$

Поскольку $\xi_k\to0$ при $k\to\infty$, то в силу непрерывности функции φ имеем $(f_k,\varphi)=\varphi(\xi_k)\to\varphi(0)$ при $k\to\infty$. Итак, $\forall\varphi\in\mathcal{D}\,(\mathbb{R})\hookrightarrow$ $\to\ (f_k,\varphi)\to\varphi(0)=(\delta,\varphi)$ при $k\to\infty$. $\square$

§ 4. Произведение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию

Определение. Пусть функция $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ бесконечно дифференцируема, а $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – распределение. *Произведением* ψf называется распределение, определяемое по формуле

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Поскольку произведение бесконечно дифференцируемой функции ψ на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является финитной бесконечно дифференцируемой функцией, то $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, имеет смысл выражение $(f, \psi\varphi)$, а значит, функционал $\psi f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ определен корректно. Легко видеть, что функционал ψf, определенный по формуле (1), линеен и непрерывен, т. е. $\psi f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1. *Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, а функционал $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является регулярным. Тогда произведение $\psi(x)\, f(x)$ в смысле обобщенных функций совпадает с произведением $\psi(x)\, f(x)$ в смысле обычных функций. Иными словами, если функционал f порожден локально интегрируемой функцией $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ согласно формуле $(*)$, то функционал ψf порожден функцией ψf_0.*

Доказательство. Требуется доказать, что

$$(\psi f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, f_0(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Подставляя в формулу $(*)$ функцию $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ вместо функции φ, получим $(f, \psi\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\, \psi(x)\, \varphi(x)\, dx$, что вместе с равенством (1) доказывает формулу (2). □

Пример 1. Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Покажем, что

$$\psi(x)\, \delta(x) = \psi(0)\, \delta(x).$$

Решение. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(\psi\delta, \varphi) = (\delta, \psi\varphi) = \psi(0)\, \varphi(0) = \psi(0)\, (\delta, \varphi). \qquad \square$$

§ 5. Производная обобщенной функции

Определение. *Производной* распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется распределение $f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, определяемое по формуле

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Это определение представляет собой частный случай следующего.

Определение. *Производная* $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Поскольку для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ее производная $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$ также финитна и бесконечно дифференцируема, то имеет смысл выражение $\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)$. Следовательно, функционал $\frac{\partial}{\partial x_i} f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ определен корректно. Легко видеть, что функционал $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, определенный по формуле (1), линеен и непрерывен, т. е. $\frac{\partial}{\partial x_i} f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1. *Пусть функция $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Тогда производная $\frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x)$ в обычном смысле совпадает с производной $\frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x)$ в смысле обобщенных функций. Иными словами, если функционал f порожден функцией $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ согласно формуле $(*)$, то функционал $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ порожден функцией $\frac{\partial}{\partial x_i} f_0$.*

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $i = 1$. Требуется доказать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1} \varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Согласно формуле (1) имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi\right) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\, dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1}\,\varphi(x)\,dx - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \varphi\right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1}\,\varphi(x) + f_0(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\,dx,$$

где $h = f_0\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. В силу теоремы Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\,dx_1.$$

Используя финитность функции h и формулу Ньютона–Лейбница, получаем $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\,dx_1 = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1}\,\varphi(x)\,dx - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\,dx = 0.$$

Таким образом, равенство (2) доказано. □

Лемма 2. *Пусть $f_k, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ при $k \to \infty$. Тогда $f_k' \xrightarrow{\mathcal{D}'} f'$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда

$$(f_k', \varphi) = -(f_k, \varphi') \xrightarrow{k\to\infty} -(f, \varphi') = (f', \varphi). \qquad \square$$

Лемма 3. *Для любой функции $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ и для любого распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула Лейбница*

$$\frac{\partial(\psi f)}{\partial x_i} = \psi\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,f.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\left(\frac{\partial(\psi f)}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(\psi f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) = -\left(f, \psi\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \left(f, -\frac{\partial(\psi\varphi)}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\varphi\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \psi\varphi\right) + \left(f, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\varphi\right) =$$

$$= \left(\psi\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i} f, \varphi\right) = \left(\psi\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} f, \varphi\right).$$

Следовательно, $\frac{\partial(\psi\, f)}{\partial x_i} = \psi\, \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, f$. □

Пример 1. Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Показать, что

$$\psi(x)\,\delta'(x) = \psi(0)\,\delta'(x) - \psi'(0)\,\delta(x).$$

Решение. Из леммы 3 следует, что $(\psi(x)\,\delta(x))' = \psi'(x)\,\delta(x) + \psi(x)\,\delta'(x)$. В силу примера 1 имеем $\psi(x)\,\delta(x) = \psi(0)\,\delta(x)$, $\psi'(x)\,\delta(x) = \psi'(0)\,\delta(x)$. Поэтому $(\psi(0)\,\delta(x))' = \psi'(0)\,\delta(x) + \psi(x)\,\delta'(x)$, т. е. $\psi(x)\,\delta'(x) = \psi(0)\,\delta'(x) - \psi'(0)\,\delta(x)$. □

§ 6. Пространство Шварца обобщенных функций S'

Используя пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$, определим пространство Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций.

Определение. *Пространством Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций (или распределений)* называется линейное пространство, состоящее из линейных непрерывных функционалов $f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, т.е. таких, что

1) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^n),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \hookrightarrow$
$(f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\,(f, \varphi_1) + \lambda_2\,(f, \varphi_2)$ и

2) $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi \quad \Rightarrow \quad (f, \varphi_k) \to (f, \varphi)$ при $k \to \infty$.

Операции умножения элемента на число и сложения элементов в S определяются естественным образом:

$$\forall f, f_1, f_2 \in S'(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow\ (f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \quad (\lambda\, f, \varphi) = \lambda\,(f, \varphi).$$

Определение. Функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется функцией *медленного роста*, если существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$f_0(x) = O(|x|^m) \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty,$$

то есть существуют числа $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$|f_0(x)| \le C_1 |x|^m \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \ge C_2. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ – локально интегрируемая функция медленного роста. Тогда функционал $f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, определяемый формулой*

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \tag{$**$}$$

является элементом пространства $S'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число $N > \frac{n}{2}$. Согласно лемме 1 § 4 главы 24 функция

$$g(x) := \frac{1}{(1 + |x|^2)^N}$$

интегрируема на $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольную пробную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, то в частности для числа $m \in \mathbb{N}$, для которого выполнено неравенство (1), справедливо неравенство

$$C_\varphi := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(|x|^m (1 + |x|^2)^N \, |\varphi(x)| \Big) < +\infty.$$

Следовательно, $|f_0(x)\varphi(x)| \le \frac{C_\varphi C_1}{(1+|x|^2)^N} = C_\varphi C_1 \, g(x)$ при $|x| \ge C_2$, а значит, интеграл

$$\int\limits_{|x| \ge C_2} f_0(x)\varphi(x)\, dx$$

существует и конечен. Так как функция φ непрерывна, а функция f_0 локально интегрируема, то их произведение $f_0(x)\varphi(x)$ является локально интегрируемой функцией и, в частности, интегрируемой на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le C_2\}$. Поэтому интеграл $(**)$ существует и конечен. Итак, для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ определено значение функционала f.

Линейность функционала f, определяемого формулой $(**)$, следует из линейности интеграла. Докажем непрерывность функционала f. Пусть $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$. Тогда

$$\varepsilon_k := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(|x|^m (1+|x|^2)^N |\varphi_k(x) - \varphi(x)|\Big) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как при $|x| \geq C_2$ справедливы неравенства

$$|f_0(x)| \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leq C_1 |x|^m \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leq C_1 \varepsilon_k g(x),$$

то

$$|(f, \varphi_k - \varphi)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0(x)| \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)|\, dx =$$

$$= \int\limits_{|x|\leq C_2} |f_0(x)| \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)|\, dx + \int\limits_{|x|\geq C_2} |f_0(x)| \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)|\, dx.$$

$$\int\limits_{|x|\leq C_2} |f_0(x)| \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)|\, dx \leq \sup_{|x|\leq C_2} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \cdot \int\limits_{|x|\leq C_2} |f_0(x)|\, dx \to 0,$$

$$\int\limits_{|x|\geq C_2} |f_0(x)| \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)|\, dx \leq C_1 \varepsilon_k \int\limits_{|x|\geq C_2} g(x)\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому $(f, \varphi_k - \varphi) \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. функционал f непрерывен. □

Определение. *Регулярным функционалом* называется функционал $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, порожденный некоторой локально интегрируемой функцией медленного роста $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ согласно формуле $(**)$. Функционал $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, не являющийся регулярным, называется *сингулярным*.

Принято отождествлять, обозначая одной и той же буквой, регулярные функционалы $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ и порождающие их функции $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. В связи с этим пространство $S'(\mathbb{R}^n)$ принято называть пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Определение. Будем говорить, что последовательность распределений $f_k \in S'(\mathbb{R}^n)$ *сходится* к распределению $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *в пространстве* S', и писать $f_k(x) \xrightarrow{S'} f(x)$ при $k \to \infty$, если

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ (f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Определение. *Производная* $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) \qquad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Докажем корректность этого определения. Поскольку для любой быстроубывающей бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ее производная $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$ также является быстроубывающей бесконечно дифференцируемой функцией, то значение функционала $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)$ определено. Так как из сходимости $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$ следует сходимость $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_k \xrightarrow{S} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$, то в силу непрерывности функционала f функционал $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ также непрерывен. Таким образом, для любого $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ функционал $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, определяемый формулой (2), также является элементом пространства $S'(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Пусть функция $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ удовлетворяет условию

$$\forall \overline{p} \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists m \in \mathbb{N}: \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{1 + |x|^m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}} \psi(x) \right| < +\infty. \tag{3}$$

Произведением распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ на функцию ψ называется распределение $\psi f \in S'(\mathbb{R}^n)$, определяемое формулой

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство корректности этого определения предлагается провести самостоятельно. Заметим, что многочлен $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ является бесконечно дифференцируемой функцией и удовлетворяет условию (3). Поэтому, в частности, определено произведение распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ на многочлен.

Следующая лемма показывает связь пространств $S'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. (1). $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$.

(2). *Если* $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, *то* $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$.

(3). $S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пункты (1), (2) следуют непосредственно из определений, пункт (3) – из пунктов (1), (2).

Лемма 2 показывает, что пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ шире пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ и в этом состоит преимущество пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ по сравнению с $S'(\mathbb{R}^n)$. В следующем параграфе мы увидим преимущество пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ по сравнению с $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которое состоит в том, что в пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$ можно определить преобразование Фурье, тогда как в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ преобразование Фурье вообще говоря не определено.

§ 7. Преобразование Фурье обобщенных функций

Определение. Преобразованием Фурье распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ называется распределение $F[f] \in S'(\mathbb{R}^n)$, определяемое формулой

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Аналогично определяется обратное преобразование Фурье распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\left(F^{-1}[f], \varphi\right) = \left(f, F^{-1}[\varphi]\right) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Корректность этого определения вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. (1). *Для любого распределения* f *класса* $S'(\mathbb{R}^n)$ *ее преобразование Фурье* $F[f]$ *является распределением того же класса* $S'(\mathbb{R}^n)$.

(2). *Если* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *– регулярный функционал, порожденный функцией медленного роста* $f_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *по формуле* $(**)$, *то* $F[f]$ *– регулярный функционал, порожденный функцией* $F[f_0]$ *по формуле* $(**)$.

Доказательство. (1). В силу пункта (a) теоремы о преобразовании Фурье в пространстве Шварца для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливо включение $F[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n)$, поэтому выражение $(f, F[\varphi])$ имеет смысл. Функционал $F[f]$, заданный формулой (1), линеен по φ в силу линейности преобразования Фурье и функционала f. Проверим непрерывность функционала $F[f]$. Пусть $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$. Тогда в силу пункта (б) упомянутой выше теоремы имеем $F[\varphi_k] \xrightarrow{S} F[\varphi]$. Отсюда в силу непрерывности функционала $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ получаем $(f, F[\varphi_k]) \to (f, F[\varphi])$, то есть $(F[f], \varphi_k) \to$ $\to (F[f], \varphi)$ при $k \to \infty$. Таким образом, функционал $F[f]$ непрерывен, а значит, $F[f] \in S'(\mathbb{R}^n)$.

(2). Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ – регулярный функционал, порожденный функцией медленного роста $f_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по формуле $(**)$, то есть

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Тогда

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x) F[\varphi](x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\varphi(y)\,dy.$$

Меняя порядок интегрирования в силу теоремы Фубини, получаем

$$(F[f], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x) e^{-i(x,y)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f_0](y)\varphi(y)\,dy,$$

т.е. $F[f]$ – регулярный функционал, порожденный функцией $F[f_0]$ по формуле $(**)$.

Для обоснования применимости теоремы Фубини нужно проверить, что функция $f_0(x)\,\varphi(y)\,e^{-i(x,y)}$ интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Интегрируемость этой функции следует из ее измеримости и конечности интеграла ее модуля $|f_0(x)\,\varphi(y)\,e^{-i(x,y)}| = |f_0(x)\,\varphi(y)|$. Конченость этого интеграла вытекает из теоремы Тонелли и соотношений $f_0 \in$ $\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f_0(x)\,\varphi(y)|\,dx\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0(x)|\,dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|\,dy < +\infty.$$

$\square$

Согласно пункту (в) теоремы о преобразовании Фурье в пространстве Шварца для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства $F^{-1}\left[F[\varphi]\right] = F\left[F^{-1}[\varphi]\right] = \varphi$. Поэтому

$$F^{-1}\left[F[f]\right]=F\left[F^{-1}[f]\right]=f \qquad \forall f\in S'(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Лемма 2. *Для любой обобщенной функции* $f\in S'(\mathbb{R}^n)$ *и для любого мультииндекса* $\overline{p}\in\mathbb{N}_0^n$ *справедливы равенства*

$$F\left[\left((-ix)^{\overline{p}}f\right)\right](y)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}}F[f](y), \tag{4}$$

$$F\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}}f(x)\right](y)=(iy)^{\overline{p}}F[f](y). \tag{5}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную пробную функцию $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. Используя определения операций с обобщенными функциями и лемму 3 § 4 главы 24 получаем

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}}F[f](y),\varphi(y)\right)=(-1)^{|\overline{p}|}\left(F[f](y),\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}}\varphi(y)\right)=$$

$$=(-1)^{|\overline{p}|}\left(f(x),F\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}}\varphi(y)\right](x)\right)=(-1)^{|\overline{p}|}\Big(f(x),(ix)^{\overline{p}}F[\varphi](x)\Big)=$$

$$=\Big((-ix)^{\overline{p}}f(x),F[\varphi](x)\Big)=\Big(F\left[(-ix)^{\overline{p}}f\right](y),\varphi(y)\Big).$$

Тем самым доказано равенство (4). Равенство (5) доказывается аналогично. $\square$

Пример 1. Найти преобразование Фурье следующих обобщенных функций:

1) $f_1(x)=\delta(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$;
2) $f_2(x)=1$;
3) $f_3(x)=x^{\overline{p}}$, $\overline{p}\in\mathbb{N}_0^n$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Решение. Обобщенные функции f_2 и f_3 являются регулярными функционалами, порожденными соответственно функциями 1 и $x^{\overline{p}}$. Для любой пробной функции $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\Big(F[f_1],\varphi\Big)=\Big(f_1,F[\varphi]\Big)=\Big(\delta,F[\varphi]\Big)=F[\varphi](0)=$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i(x,y)}\, dx \Bigg|_{y=0} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (f_2, \varphi).$$

Следовательно, $F[f_1] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} f_2$. Аналогично, $F^{-1}[f_1] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} f_2$. Поэтому, используя равенство (3), получаем

$$F[f_2] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F\left[F^{-1}[f_1]\right] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f_1.$$

В силу равенства (4) имеем

$$F[f_3](y) = F[x^{\overline{p}} f_2](y) = i^{|\overline{p}|} F[(-ix)^{\overline{p}} f_2](y) =$$

$$= i^{|\overline{p}|} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} F[f_2](y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\ i^{|\overline{p}|} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} f_1(y).$$

Ответ. $F[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$; $\qquad F[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta$;

$$F\left[x^{\overline{p}}\right](y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\ i^{|\overline{p}|} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} \delta(y).$$

В данном параграфе было определено преобразование Фурье на пространстве Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций. Это определение использует тот факт, что преобразование Фурье переводит пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ пробных функций в себя. Следующий пример показывает, что преобразование Фурье любую пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, не равную тождественно нулю, переводит в функцию, не лежащую в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что на пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (и, тем более, на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) невозможно корректно определить преобразование Фурье.

Пример 2. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $F[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Покажем, что $\varphi \equiv 0$.

Решение. Так как функция φ финитна, то существует число $A > 0$ такое, что $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$. Рассмотрим функцию $\beta(x) := = \varphi\left(\frac{A}{\pi} x\right)$. Тогда $\operatorname{supp} \beta \subset [-\pi, \pi]$. Поскольку $F[\beta](y) = \frac{\pi}{A} F[\varphi]\left(\frac{\pi}{A} y\right)$, то из финитности функции $F[\varphi]$ следует финитность функции $F[\beta]$. Обозначим через c_k коэффициенты Фурье функции β по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \beta(x)\, e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Сравнивая это выражение с преобразованием Фурье функции β

$$F[\beta](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta(x)\, e^{-ixy}\, dx \quad \overset{\text{supp } \beta \subseteq [-\pi,\pi]}{=} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \beta(x)\, e^{-ixy}\, dx,$$

получаем равенства $c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F[\beta](k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. В силу финитности функции $F[\beta]$ существует такой индекс $k_0 \in \mathbb{N}$, что $c_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} : \ |k| > k_0$.

По теореме о сходимости ряда Фурье

$$\beta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx} = \sum_{k=-k_0}^{k_0} c_k\, e^{ikx} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Поэтому функция β совпадает с тригонометрическим многочленом на $[-\pi, \pi]$.

Предположим, что $\varphi \not\equiv 0$. Тогда $\beta \not\equiv 0$. Обозначим

$$x_0 := \sup\{x \in [-\pi, \pi] : \ \beta(x) \neq 0\}.$$

Тогда $x_0 \in (-\pi, \pi]$ и $\beta(x) = 0 \quad \forall x \geq x_0$. Следовательно, $\beta^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, все слагаемые ряда Тейлора функции β в точке x_0 равны нулю.

Поскольку функция β совпадает с тригонометрическим многочленом на $[-\pi, \pi]$, то функция β регулярна на $[-\pi, \pi]$, а значит ряд Тейлора функции β в точке x_0 сходится к функции β в некоторой левой полуокрестности точки x_0. Следовательно, $\beta(x) = 0$ в некоторой левой полуокрестности точки x_0, что противоречит определению x_0.