Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

ЛИНЕЙНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Составитель А.В. Ершов

Долгопрудный
2016

Содержание

Мир — четырехмерное аффинное пространство [...]

В.И. Арнольд[1]

Введение

Аффинные пространства и группы, а также их подгруппы (такие как группа Пуанкаре) играют большую роль в физике (см. эпиграф), в первую очередь в квантовой теории поля. Поэтому изучение их теории в случае малого (2 и 3) числа измерений — важная для подготовки физиков часть курса аналитической геометрии.

Данный текст представляет собой сильно расширенный кусок лекций по аналитической геометрии, посвященный аффинным пространствам и аффинным отображениям. Отличия от традиционного изложения:

- понятие аффинного пространства вводится аксиоматически через понятие векторного (= линейного) пространства;
- аффинные отображения (преобразования) также определяются через линейные отображения (преобразования);
- есть отличия от традиционной терминологии, принятой в курсах аналитической геометрии (см. ниже).

Принятый здесь подход позволяет математически корректно обращаться с геометрическими понятиями, что в дальнейшем должно окупиться возможностью более глубокого понимания предмета. Кроме того, терминология, которой мы придерживаемся здесь, лучше согласована с материалом второго семестра — курсом линейной алгебры (это, в частности, касается понятия линейного отображения (преобразования)).

О терминологии

в учебнике Д.В. Беклемишева	**в данном тексте**
линейное преобразование	аффинное преобразование (вообще говоря, не биективное)
аффинное преобразование	биективное аффинное преобразование
линейное преобразование (в контексте линейных пространств, т.е. начиная с главы VI)	линейное преобразование — отображение $\varphi\colon V \to V$ *векторного* (= *линейного*) пространства V такое, что $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}),\ \ \varphi(\lambda\,\mathbf{v}) = \lambda\,\varphi(\mathbf{v})\ \ \forall\,\mathbf{u},\,\mathbf{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Об обозначениях

Свободные векторы обозначаются либо жирными буквами ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, etc.), либо (в главе про аффинные пространства) в виде $\overrightarrow{pq}$, где p, q — начало и конец представителя свободного вектора $\overrightarrow{pq}$. Множество (линейное пространство) матриц размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{K}$ обозначается $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, а множество (линейное пространство, алгебра) квадратных матриц порядка n с элементами из поля $\mathbb{K}$

[1]“Математические методы классической механики” [2].

— $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Остальные обозначения либо являются общепринятыми (такие как $\mathbb{R}$ для вещественных чисел), либо вводятся в тексте.

Требования к подготовке читателя

Для чтения основного текста (без Добавлений) должно быть достаточно знания векторной алгебры в объеме стандартного курса аналитической геометрии (см. например Главу 1 в [3]). В частности, предполагается известным понятие базиса и описание базисов на плоскости и в пространстве. В ряде мест используются свойства определителей малых порядков. Также необходимо знакомство с понятием отношения эквивалентности. В одном месте используется теорема о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке. В то же время автор не исключает, что в отдельных местах читателю потребуется обращение к рекомендованной литературе (в первую очередь, к учебникам [3] и [6]).

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Вадиму Витальевичу Редкозубову, сообщившему автору простое доказательство Леммы 2.67 и сделавшему ряд других ценных замечаний и предложений по тексту.

Disclaimer

Данный текст содержит много материала, выходящего за рамки части (касающейся аффинных пространств и преобразований) обязательной программы по аналитической геометрии (в частности, к такому материалу относятся все добавления). С другой стороны, отдельные результаты (например, о действии аффинных преобразований на кривые второго порядка) в него не вошли. Поэтому он может служить лишь дополнением к лекциям и учебнику, причем при отборе минимального материала из него нужно ориентироваться на программу курса. О замеченных опечатках и замечаниях по тексту просьба сообщать на e-mail `ershov.andrei@gmail.com`

1 Преобразования

1.1 Определение и примеры преобразований

Предполагается, что читатель знаком с общематематическим понятием отображения (= функции). Отображение f с областью определения X и областью значений[2] Y мы часто записываем как $f\colon X \to Y$.

Преобразованием f множества X мы называем его отображение $f\colon X \to X$ в себя.[3] То есть преобразования — частный случай отображений, когда область определения и область значений совпадают. Среди всех преобразований множества X есть выделенный элемент — тождественное преобразование id_X, $\mathrm{id}_X(x) = x \ \ \forall x \in X$.

Если S — евклидова плоскость, то ее преобразования — это, например, параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}$ (см. Пример 3.11), поворот против часовой стрелки на угол α вокруг точки $p \in S$ (см.

[2]заметим, что область значений, вообще говоря, не совпадает с *множеством значений* $f(X) := \{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in X\}$, в общем случае только $f(X) \subset Y$.

[3]В ряде источников (например в [11]) преобразованиями называются только *биективные* отображения в себя, но мы не будем придерживаться этого.

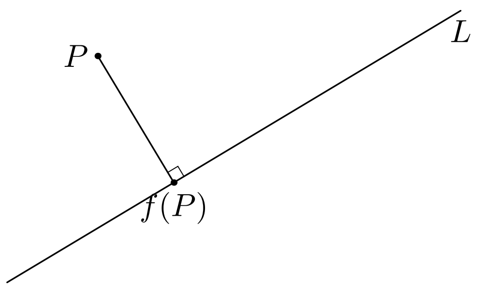


Рис. 1: Ортогональная проекция на прямую L

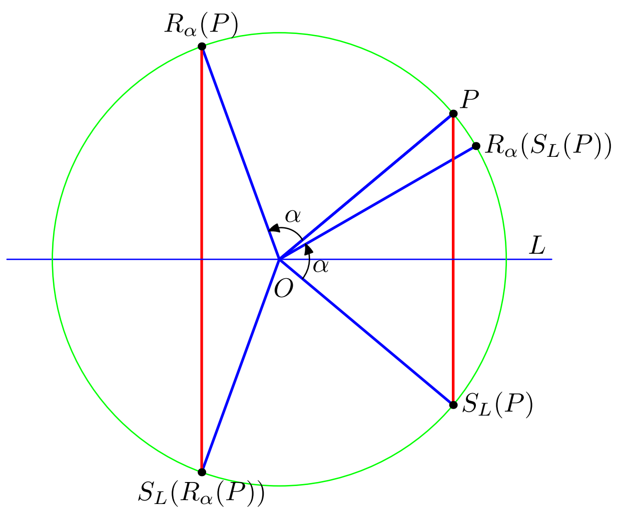


Рис. 2: Пример, когда $f \circ g \neq g \circ f$

Пример 2.42), симметрия относительно прямой $L \subset S$ (см. Пример 2.43), гомотетия с центром в точке $p \in S$ и коэффициентом $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. Пример 3.20), ортогональная проекция f плоскости S на прямую L, которая произвольной точке $P \in S$ ставит в соответствие ее ортогональную проекцию $f(P) \in L$ на прямую L, см. Рис. 1 .

Для отображений $f\colon Y \to Z$ и $g\colon X \to Y$ определена *композиция* (иногда называемая также *произведением* отображений), обозначаемая $f \circ g$. Это — отображение $X \to Z$, определенное по правилу $(f \circ g)(x) = f(g(x))\ \ \forall x \in X$. В математическом анализе композиция отображений называется *сложной функцией.* Композицию можно изобразить диаграммой

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

В частности, композиция определена для всякой упорядоченной пары f, g преобразований множества X. Заметим, что, вообще говоря, $f \circ g \neq g \circ f$, то есть операция композиции преобразований не обладает свойством коммутативности, см. Рис. 2, где $f = R_\alpha$ — поворот на угол α против часовой стрелки вокруг точки O, а $g = S_L$ — симметрия относительно прямой L.

Однако операция композиции преобразований ассоциативна: вообще, для любых отображений $f\colon Z \to W$, $g\colon Y \to Z$ и $h\colon X \to Y$ имеет место равенство

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)\colon X \to W.$$

Тождественное преобразование id_X обладает (и однозначно характеризуется — см. ниже) следующим свойством: для любых отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Z \to X$ имеют место равенства

$$f = f \circ \mathrm{id}_X, \quad g = \mathrm{id}_X \circ g. \tag{1}$$

Покажем, что id_X однозначно определяется свойством (1). Действительно, если id'_X — еще одно преобразование, обладающее этим свойством, то

$$\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}'_X = \mathrm{id}'_X.$$

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъективным* (или *вложением*), если для любых x, $x' \in X$ из $f(x) = f(x')$ следует $x = x'$. Другими словами, отображение инъективно, если разные точки имеют разные образы. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *сюръективным*, если $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$ такой, что $f(x) = y$ (то есть если образ отображения f совпадает со всем множеством Y). Инъективное и сюръективное отображение называется *взаимно однозначным* или *биекцией.*

Обратным для отображения $f\colon X \to Y$ называется такое отображение $g\colon Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X,\ \ f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Во-первых, заметим, что если обратное отображение существует, то оно единственно. Действительно, пусть g' — еще одно обратное для f. Тогда

$$g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

Во-вторых, заметим, что для существования обратного к f необходимо, чтобы f было биективным. Действительно, из импликации

$$f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \ \Rightarrow\ x = \mathrm{id}_X(x) = \mathrm{id}_X(x') = x'$$

следует инъективность f. Сюръективность f следует из того, что $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$ (а именно $g(y)$) такой, что $f(x) = y$.

В-третьих, если $f\colon X \to Y$ — биекция, то обратное отображение $g\colon Y \to X$ действительно существует. В самом деле, для произвольного $y = f(x)$ положим $g(y) = x$. В этом случае легко проверяется, что $f(g(y)) = y\ \ \forall\, y \in Y$ и $g(f(x)) = x\ \ \forall\, x \in X$, то есть что $f \circ g = \mathrm{id}_Y,\ \ g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Обратное отображение к f обычно обозначается f^{-1}.

Предложение 1.1. *Пусть f, $g\colon X \to X$ — биективные преобразования множества X. Тогда $f \circ g\colon X \to X$ — тоже биективное преобразование множества X, причем $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Доказательство. Так как f, g — биекции, то существуют f^{-1}, g^{-1}. Тогда

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ \mathrm{id}_X \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X$$

и аналогично $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = \mathrm{id}_X$. Значит преобразование $f \circ g$ имеет обратное $g^{-1} \circ f^{-1}$ и в силу предыдущего биективно. ■

Заметим, что обратные к *биективным* преобразованиям из рассматриваемых ниже классов преобразований (таких как гомоморфизмы групп, линейные или аффинные преобразования) также принадлежат к соответствующему классу.

1.2 Группы преобразований

Ниже мы будем систематически пользоваться языком теории групп преобразований. Данный параграф содержит список основных определений и носит справочный характер, читателю рекомендуется его просмотреть, а затем обращаться к нему по мере чтения дальнейшего текста.

Систематическое изложение основ теории групп можно найти в университетских учебниках алгебры, например в [6], [9]; краткое популярное введение можно найти в брошюрах [7] и [11], много интересных примеров разобрано в [16].

Определение 1.2. Пусть G — некоторое непустое множество биективных преобразований множества X, замкнутое относительно композиции, то есть $\forall\, g_1,\, g_2 \in G \;\Rightarrow\; g_2 \circ g_1 \in G$ (вместе с каждой парой преобразований из G их композиция также лежит в G), а также взятия обратного элемента, то есть $\forall\, g \in G \;\Rightarrow\; g^{-1} \in G$ (для каждого преобразования из G его обратное также содержится в G). Тогда G называется *группой преобразований* множества X.

Заметим, что из определения группы преобразований множества X сразу следует, что $\mathrm{id}_X \in G$. (Действительно, так как $G \neq \emptyset$, то $\exists\, g \in G$, тогда $g^{-1} \in G$, следовательно, $g^{-1} \cdot g = \mathrm{id}_X \in G$).

Пример 1.3. Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда группа всех биективных преобразований множества X называется *группой перестановок* на n элементах и обозначается S_n. Число элементов в S_n равно $n!$.

Произвольную перестановку $\sigma \in S_n$ можно записать в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Произведение перестановок как композицию отображений мы будем записывать справа налево. Например, при $n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Для векторного пространства V определена группа $\mathrm{GL}(V)$ его биективных линейных преобразований (см. Следствие 2.47).

Пример 1.5. Для евклидова пространства V определена группа $\mathrm{O}(V)$ его ортогональных преобразований (см. Предложение 2.62).

Пример 1.6. Движения евклидовой аффинной плоскости (евклидова аффинного пространства) S образуют группу преобразований плоскости (пространства) S, которую мы будем обозначать $\mathrm{Iso}(S)$ (см. Следствие 3.25)

Пример 1.7. Параллельные переносы аффинной плоскости (аффинного пространства) S образуют группу $\mathrm{Trans}(S)$ преобразований плоскости (пространства) S (см. Пример 3.19).

Пример 1.8. Преобразования подобия евклидовой аффинной плоскости (евклидова аффинного пространства) S образуют группу $\mathrm{Sim}(S)$ преобразований плоскости (пространства) S.

Пример 1.9. Биективные аффинные преобразования аффинной плоскости (аффинного пространства) S образуют группу $\mathrm{GA}(S)$ преобразований плоскости (пространства) S (см. Следствие 3.17).

Пример 1.10. Пусть F_n — правильный n-угольник на аффинной евклидовой плоскости S ($n \geq 3$). Движения аффинной евклидовой плоскости, которые переводят F_n в себя, образуют группу с числом элементов $2n$, среди которых n поворотов (включая тождественное преобразование — поворот на нулевой угол) и n симметрий (отражений) относительно прямых. Эта группа обозначается D_n. (Вариант: группа симметрий правильного многогранника, состоящая из всех движений аффинного евклидова пространства, переводящих данный правильный многогранник в себя).

Определение 1.11. *Подгруппой* группы преобразований G множества X называется такое непустое подмножество $H \subset G$, которое вместе с любой парой преобразований содержит их композицию и вместе с любым преобразованием содержит его обратное.

Легко видеть, что подгруппа H группы преобразований G множества X сама является некоторой группой преобразований множества X.

Пример 1.12. *Знакопеременная группа* $A_n \subset S_n$ (= подгруппа *четных* перестановок, ее определение можно найти в [6], [9]).

Пример 1.13. Группа параллельных переносов является подгруппой группы движений евклидовой плоскости (евклидова пространства). То есть $\mathrm{Trans}(S) \subset \mathrm{Iso}(S)$.

Пример 1.14. Группа D_n является подгруппой группы движений плоскости, которая, в свою очередь, является подгруппой группы преобразований подобия, являющейся подгруппой группы аффинных преобразований плоскости. То есть имеем цепочку подгрупп $D_n \subset \mathrm{Iso}(S) \subset \mathrm{Sim}(S) \subset \mathrm{GA}(S)$.

Группы преобразований являются реализациями аксиом абстрактной группы. Перед тем как дать определение группы, определим понятие бинарной операции на множестве. Напомним, что $X \times X := \{(x_1,\, x_2) \mid x_1,\, x_2 \in X\}$ есть *множество упорядоченных пар* элементов множества X.

Определение 1.15. *Бинарной операцией* φ на множестве X называется произвольное отображение $\varphi\colon X \times X \to X$.

Если φ — бинарная операция на X, то $\varphi(x_1,\, x_2) \in X$ обычно записывают как $x_1 \cdot x_2$ (мультипликативная запись)[4] или как $x_1 + x_2$.

Примерами бинарных операций являются сложение и умножение чисел, композиция преобразований или, например, векторное произведение на трехмерном ориентированном евклидовом пространстве (в то время как скалярное произведение бинарной операцией в смысле данного выше определения не является).

Определение 1.16. (Абстрактной) *группой* называется пара $(G,\, \cdot)$, состоящая из множества G и заданной на нем бинарной операции

$$G \times G \xrightarrow{\cdot} G, \quad (g_1,\, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2,$$

при этом предполагаются выполненными следующие свойства (*аксиомы группы*):

1) операция $\cdot$ ассоциативна: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \quad \forall\, g_1,\, g_2,\, g_3 \in G$;

2) G содержит *нейтральный элемент* e такой, что $g \cdot e = g = e \cdot g \quad \forall\, g \in G$;

[4] причем мультипликативную запись часто редуцируют к $x_1 x_2$, чего и мы будем часто придерживаться.

3) для любого элемента $g \in G$ его *обратный элемент* g^{-1} также лежит в G: $\forall\, g \in G \quad \exists\, g^{-1}$ такой, что $g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$.

Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если в дополнение к условиям 1) — 3) выполнено также следующее условие, называемое *коммутативностью* операции $\cdot$:

4) $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \;\; \forall\, g_1,\, g_2 \in G$.

Задача 1.17. *Докажите, что*

1) нейтральный элемент в группе $(G,\, \cdot)$ *единствен, то есть если* $e' \in G$ *— еще один элемент такой, что* $g \cdot e' = g = e' \cdot g \;\; \forall\, g \in G$, *то* $e = e'$;

2) для каждого $g \in G$ *обратный элемент* g^{-1} *единствен;*

3) $\forall\, g,\, h \in G$ *уравнения* $x \cdot g = h, \;\; g \cdot y = h$ *имеют единственные решения (именно,* $x = h \cdot g^{-1}$ *и* $y = g^{-1} \cdot h$ *соответственно).*

Кроме того, из ассоциативности операции в группе следует, что произведение произвольного конечного числа элементов группы не зависит от расстановки скобок. Читатель может попытаться доказать это, используя индукцию по числу элементов в произведении.

Группа преобразований является абстрактной группой. Действительно, композиция преобразований ассоциативна, тождественное преобразование играет роль нейтрального элемента и обратное преобразование является обратным элементом относительно операции композиции.

Определение 1.18. Непустое подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы $(G,\, \cdot)$, если $\forall\, (h_1,\, h_2) \in H \times H \;\Rightarrow\; h_2 \cdot h_1 \in H, \forall\, h \in H \;\Rightarrow\; h^{-1} \in H$.

Заметим, что тогда пара $(H,\, \cdot)$[5] сама является группой.

Ниже мы будем для группы $(G,\, \cdot)$ использовать упрощенное обозначение G если ясно, какая операция подразумевается.

Пример 1.19. Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное поле (например, рациональных, действительных или комплексных чисел). Тогда с ним связаны две коммутативные группы: $(\mathbb{K},\, +)$ (всех элементов поля с операцией сложения, роль нейтрального элемента играет $0 \in \mathbb{K}$, а обратного к $a \in \mathbb{K}$ — элемент $-a \in \mathbb{K}$) и $(\mathbb{K}^*,\, \cdot)$, где $\mathbb{K}^*$ — множество всех *ненулевых* элементов поля $\mathbb{K}$, с операцией умножения $\cdot$, причем роль нейтрального элемента играет $1 \in \mathbb{K}$, а обратного к $a \in \mathbb{K}^*$ — элемент $a^{-1} \in \mathbb{K}^*$.

Важным примером коммутативной группы является группа целых чисел с операцией сложения $(\mathbb{Z},\, +)$. В то же время множества с бинарными операциями $(\mathbb{Z},\, \cdot)$, $(\mathbb{N},\, +)$ и $(\mathbb{N},\, \cdot)$ группами не являются (объясните, почему).

Пример 1.20. Пусть V — векторное пространство. Тогда $(V,\, +)$ — коммутативная группа. Заметим, что если $(S,\, V,\, +)$ — аффинное пространство (см. Определение 3.1), то $(V,\, +) \cong \mathrm{Trans}(S)$ (см. Пример 3.19).

[5]чтобы не усложнять обозначения, операцию $\cdot$ на G и ее ограничение на подмножество $H \subset G$ мы обозначаем одним и тем же символом.

Пример 1.21. Пусть $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — множество обратимых (невырожденных) вещественных матриц порядка n с операцией умножения. Тогда $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ — группа. Легко проверить, что подмножество $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ матриц с определителем 1 является ее подгруппой. Аналогично, группу образуют ортогональные матрицы (см. Определение 2.33) данного порядка n. Последняя группа обозначается $\mathrm{O}(n)$. Заметим, что $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Пересечение $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ подгрупп группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ — подгруппа[6] ортогональных матриц с единичным определителем, обозначаемая $\mathrm{SO}(n)$.

Между группами обычно рассматривают не произвольные отображения, а отображения, согласованные с операциями в группах, называемые *гомоморфизмами*.

Определение 1.22. *Гомоморфизмом групп* $\varphi\colon (G, \cdot) \to (H, \star)$ называется такое отображение $\varphi\colon G \to H$, что $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \star \varphi(g_2) \quad \forall\, g_1, g_2 \in G$. *Изоморфизмом* называется биективный гомоморфизм.

Задача 1.23. *Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп. Доказать, что*

1) $\varphi(e_G) = e_H$ (где e_G, e_H — нейтральные элементы в группах G и H соответственно);

2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \;\; \forall\, g \in G$.

Задача 1.24. *Пусть $\varphi\colon (G, \cdot) \to (H, \star)$ — изоморфизм групп. Доказать, что тогда*

$$\varphi^{-1}\colon (H, \star) \to (G, \cdot)$$

— тоже изоморфизм, то есть

$$\varphi^{-1}(h_1 \star h_2) = \varphi^{-1}(h_1) \cdot \varphi^{-1}(h_2) \;\; \forall\, h_1, h_2 \in H.$$

Две группы называются *изоморфными*, если между ними существует (хотя бы один) изоморфизм. Факт изоморфизма групп G и H обозначают $G \cong H$ (читается “(группа) G изоморфна (группе) H”). С точки зрения теории групп, изоморфные группы устроены одинаково. Другими словами, изоморфизм сохраняет все существенные свойства групп как множеств с операцией. Например, если одна из изоморфных групп коммутативна, то и другая коммутативна и т.п.

Следующая задача показывает, что с точки зрения теории групп неважно как обозначать бинарную операцию.

Задача 1.25. *Построить изоморфизм между группой $(\mathbb{R}, +)$ всех действительных чисел по сложению и группой $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ положительных действительных чисел по умножению. (Подсказка: какие функции переводят сумму чисел в произведение?).*

Пример 1.26. Сопоставляя движению плоскости, переводящему правильный треугольник в себя, перестановку на множестве его вершин (предварительно их занумеровав), получаем изоморфизм групп $D_3 \to S_3$.

Пример 1.27. Записывая обратимые линейные преобразования матрицами в фиксированном базисе, получаем изоморфизм групп $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Аналогично, записывая ортогональные преобразования в ортонормированном базисе, получаем изоморфизм $\mathrm{O}(V) \cong \mathrm{O}(n)$.

[6]вообще, пересечение любого семейства подгрупп группы G — подгруппа в G.

Пример 1.28. Сопоставление перестановке на n элементах ее знака определяет гомоморфизм групп $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$. Это следует из того, что $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) \;\; \forall\, \sigma,\, \tau \in S_n$.

Пример 1.29. Сопоставление обратимой матрице порядка n ее определителя задает гомоморфизм $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$. Это следует из того, что $\det(AB) = \det A \det B$ для любых матриц A, B порядка n.

Пример 1.30. Сопоставление $f \mapsto df$ биективному аффинному преобразованию f аффинного пространства $(S,\, V,\, +)$ его дифференциала df определяет гомоморфизм групп $d\colon \mathrm{GA}(S) \to \mathrm{GL}(V)$. Это доказано ниже в Предложении 3.14.

Пример 1.31. Сопоставление движению аффинного евклидова пространства $(S,\, V,\, +)$ его дифференциала определяет гомоморфизм групп $\mathrm{Iso}(S) \to \mathrm{O}(V)$.

Пример 1.32. Пусть $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$. Легко проверить, что $\mathrm{U}(1)$ — подгруппа в $\mathbb{C}^*$. Формула $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$ определяет гомоморфизм групп $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{U}(1)$. Наглядно этот гомоморфизм можно представлять как наматывание прямой на окружность, при котором целые точки $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ переходят в $1 \in \mathrm{U}(1)$.

Определение 1.33. Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп. *Ядром* гомоморфизма φ называется подмножество $\ker \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\} \subset G$, состоящее из тех элементов $g \in G$, которые при гомоморфизме φ отображаются в нейтральный элемент e_H группы H. *Образом* гомоморфизма φ называется подмножество $\mathrm{im}\, \varphi := \{\varphi(g) \mid g \in G\} \subset H$, состоящее из элементов вида $\varphi(g)$, где g пробегает все элементы группы G.

Ясно, что если $\varphi\colon G \to H$ — изоморфизм, то $\ker \varphi = \{e_G\}, \;\; \mathrm{im}\, \varphi = H$.

Задача 1.34. *Доказать, что* $\ker \varphi$ *и* $\mathrm{im}\, \varphi$ *— подгруппы групп* G *и* H *соответственно.*

Пример 1.35. Гомоморфизмы примеров 1.28, 1.29, 1.30, 1.31 и 1.32 сюръективны, а их ядра суть подгруппы $A_n \subset S_n, \;\; \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \;\; \mathrm{Trans}(S) \subset \mathrm{GA}(S), \;\; \mathrm{Trans}(S) \subset \mathrm{Iso}(S)$ и $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ соответственно.

2 Линейные пространства

Теорию линейных пространств и линейных отображений обычно изучают в рамках учебной дисциплины "Линейная алгебра", из учебников по которой можно рекомендовать [3], [6], [10]. Наше изложение в этой главе можно рассматривать как краткое введение в этот предмет, необходимое для определения и изучения аффинных пространств и отображений в следующей главе.

2.1 Определение и примеры линейных пространств

Напомним еще раз определение коммутативной группы, переписав его с использованием аддитивных обозначений (ср. Определение 1.16).

Определение 2.1. Пара $(A,\, +)$, состоящая из множества A и заданной на нем операции

$$A \times A \xrightarrow{+} A, \;\; (a,\, b) \mapsto a + b$$

(называемой “сложением”) называется *коммутативной*, или *абелевой группой*, если выполнены следующие условия (“аксиомы абелевой группы”):

1) сложение *коммутативно*, то есть $a + b = b + a$ для любых $a,\, b \in A$;

2) сложение *ассоциативно*, то есть $\forall\, a,\, b,\, c \in A \quad (a + b) + c = a + (b + c)$;

3) существует *нуль* (называемый также *нейтральным элементом*), обозначаемый 0 и характеризующийся свойством $a + 0 = a \;\forall\, a \in A$;

4) для каждого $a \in A$ существует *противоположный элемент*, обозначаемый $(-a)$ и характеризующийся свойством $a + (-a) = 0$.

В качестве следствий из аксиом абелевой группы отметим единственность нуля и обратного элемента, а также однозначную разрешимость в $(A,\, +)$ уравнения $x + a = b$, где $a,\, b \in A$. Ясно, что решение этого уравнения есть $b + (-a)$, оно называется *разностью* элементов b и a и обозначается $b - a$. Кроме того, из ассоциативности сложения следует, что сумма произвольного конечного числа (а не только трех) элементов абелевой группы не зависит от расстановки скобок.

Ниже вместо $(A,\, +)$ мы часто будем писать A, явно указывая только множество элементов группы, если из контекста ясно, какая операция подразумевается.

Примерами абелевых групп являются числовые системы (см. Пример 1.19). Другие примеры абелевых групп: множества свободных векторов на плоскости или в пространстве с операцией сложения, множество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц данного размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$ (аналогично можно рассматривать матрицы с элементами из $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$) с операцией сложения и т.д.

Определение 2.2. Пусть $B \subset A$ — подмножество множества элементов абелевой группы $(A,\, +)$, причем

1) B содержит ноль, то есть $0 \in B$;

2) B замкнуто относительно операции $+$, то есть $b_1,\, b_2 \in B \quad\Rightarrow\quad b_1 + b_2 \in B$;

3) B замкнуто относительно операции взятия противоположного элемента, то есть $\forall\, b \in B \Rightarrow (-b) \in B$.

Тогда пара $(B,\, +)$ называется *подгруппой* группы $(A,\, +)$.

Заметим, что вместо условия 1) в предыдущем определении можно было бы потребовать непустоты множества B. Очевидно, что подгруппа абелевой группы сама является абелевой группой (относительно той же операции).

Рассмотрим примеры абелевых групп и их подгрупп.

Пример 2.3. Самая “маленькая” (по включению) подгруппа группы $(A,\, +)$ — подгруппа, состоящая только из нуля, самая “большая” — совпадает со всей группой.

Пример 2.4. Имеет место цепочка вложений подгрупп $(\mathbb{Z},\, +) \subset (\mathbb{Q},\, +) \subset (\mathbb{R},\, +) \subset (\mathbb{C},\, +)$.

Пример 2.5. Другие, особенно важные для нас примеры подгрупп, дают подмножества группы (по сложению) свободных векторов плоскости, параллельных данной прямой, или подмножества группы свободных векторов пространства, параллельных данной прямой или плоскости.

Пример 2.6. Примерами подгрупп в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (с операцией сложения) являются подмножества симметричных (то есть таких, что $A^T = A$) и кососимметричных ($A^T = -A$) матриц, а также диагональных и верхнетреугольных (нули ниже главной диагонали) матриц.

Определение 2.7. *Векторным* (или *линейным*) *пространством* над полем $\mathbb{R}$ называется тройка $(V, +, \cdot)$, состоящая из множества V, на котором заданы две операции:

сложение: $\quad V \times V \xrightarrow{+} V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad$ и

умножение на числа ("скаляры") $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$,

удовлетворяющие следующим условиям ("аксиомам векторного пространства"):

1) $(V, +)$ — абелева группа (называемая *аддитивной группой векторного пространства* V);

2) умножение на скаляры обладает свойствами: a) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ $(1 \in \mathbb{R})$ $\forall \mathbf{v} \in V$, b) $(\lambda \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V$;

3) сложение и умножение связаны законами дистрибутивности: a) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V$, b) $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Элементы произвольного векторного пространства называются *векторами.* Заметим, что в определении векторного пространства вместо поля $\mathbb{R}$ можно взять произвольное поле $\mathbb{K}$, получив определение векторного пространства над полем $\mathbb{K}$. Общий случай мы пока рассматривать не будем и под векторным пространством будем подразумевать векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

В дальнейшем мы будем опускать обозначение $\cdot$ умножения числа на вектор, записывая $\lambda \cdot \mathbf{v}$ просто как $\lambda\, \mathbf{v}$. Кроме того, вместо тройки $(V, +, \cdot)$ мы будем писать просто V, подразумевая, что операции в векторном пространстве ясны из контекста.

Укажем некоторые следствия аксиом векторного пространства, не являющиеся следствиями аксиом абелевой группы. Читателю предлагается доказать их в качестве задачи.

Задача 2.8. *Докажите, что в произвольном векторном пространстве* $(V, +, \cdot)$ *имеют место тождества:*

1) $\lambda\, \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

2) $\lambda\, (-\mathbf{v}) = -\lambda\, \mathbf{v} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \mathbf{v} \in V$;

3) $0\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in V$;

4) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$.

Рассмотрим примеры векторных пространств.

Пример 2.9. Множество $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ матриц данного размера $m \times n$ с операциями сложения и умножения на числа (в частности, множество столбцов высоты n, часто вместо $\mathrm{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ обозначаемое $\mathbb{R}^n$) является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Пример 2.10. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1,\, i\}$. Действительно, относительно сложения комплексные числа образуют абелеву группу; кроме того, операция умножения на действительные числа обладает требуемыми свойствами п.2 Определения 2.7 и, наконец, выполнены законы дистрибутивности из п.3 Определения 2.7. Кроме того, всякое комплексное число $z \in \mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot i$, где $\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$, следовательно, $\{1,\, i\}$ — базис в векторном пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$. Это приводит к тому, что комплексные числа можно изображать как векторы на плоскости. Про связь геометрии евклидовой плоскости с комплексными числами можно почитать, например, в [1], [14].

Пример 2.11. Основные для нас примеры векторных пространств — пространства свободных векторов на плоскости и в пространстве относительно обычных операций сложения векторов и умножения их на числа (определение свободного вектора и линейных операций над свободными векторами см. например в [5]).

Определение 2.12. Пусть $U \subset V$ — подмножество множества векторов векторного пространства $(V,\, +,\, \cdot)$ такое, что

1) $(U,\, +)$ — подгруппа аддитивной группы $(V,\, +)$;

2) $\mathbf{u} \in U \quad \Rightarrow \quad \lambda\, \mathbf{u} \in U \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Тогда $(U,\, +,\, \cdot)$ называется векторным (= линейным) *подпространством* пространства $(V,\, +,\, \cdot)$.

Заметим, что подпространство само является векторным пространством.

Приведем некоторые примеры векторных подпространств.

Самое "маленькое" подпространство в $(V,\, +,\, \cdot)$ состоит только из нулевого вектора, самое "большое" — совпадает со всем пространством $(V,\, +,\, \cdot)$. Подпространствами являются подгруппы групп свободных векторов плоскости или пространства из примера 2.5, а также подмножества в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ из примера 2.6. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является подпространством пространства $\mathbb{C}$ из Примера 2.10.

2.2 Базисы

Пусть V — векторное пространство.

Определение 2.13. *Системой* n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) векторов пространства V называется произвольное отображение $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to V$.

Систему n векторов мы будем записывать в виде $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, где $f(k) = \mathbf{v}_k, \quad k = 1, \ldots, n$. Заметим, что система векторов отличается от подмножества двумя свойствами: во-первых, векторы системы имеют естественный порядок (занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$), и, во-вторых, в систему элемент может входить более одного раза (то есть возможны повторения).

Определение 2.14. *Базисом* в векторном пространстве V называется такая система векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V, что произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$ однозначно представляется в виде их линейной комбинации

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n. \tag{2}$$

Однозначность разложения (2) (при условии существования) равносильна линейной независимости системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, в то время как существование разложения произвольного вектора связано с максимальностью такой системы среди всех линейно независимых систем.

Не во всяком векторном пространстве есть базис в смысле приведенного выше определения, состоящий из конечного числа векторов. Если в V есть такой базис, то пространство V называется *конечномерным*. В дальнейшем мы рассматриваем только такие пространства.

Вообще говоря (за исключением единственного случая нульмерного пространства, см. ниже), векторное пространство V имеет много базисов. Имеет место важный факт: число элементов (точнее, мощность) во всех базисах данного пространства V одно и то же. Этот факт мы пока не доказываем[7]. Это число называется *размерностью* пространства V и обозначается $\dim V$ (от английского слова "dimension" — "размерность"). В основных для нас случаях свободных векторов на прямой, на плоскости и в пространстве с использованием геометрических соображений было доказано, что базисы — это системы, состоящие соответственно из одного ненулевого вектора, упорядоченной пары неколлинеарных векторов и упорядоченной тройки некомпланарных векторов. Таким образом, пространства свободных векторов на прямой, на плоскости и в ("трехмерном") пространстве имеют размерности соответственно 1, 2 и 3. Самое "маленькое" векторное пространство состоит из одного нулевого вектора, базис в нем пустой, и поскольку число элементов пустого множества равно 0, это пространство имеет размерность нуль.

В дальнейшем мы пишем формулы для случая $n = \dim V = 3$, хотя многие из них без изменений переносятся на случай произвольного n.

Напомним, что коэффициенты в разложении

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

вектора $\mathbf{v}$ по базису называются *координатами* вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Их обычно записывают в виде столбца $(v_1, v_2, v_3)^T$. Тогда с использованием матричного умножения разложение (2) можно записать в виде

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.15. Зафиксируем базис $\mathbf{e} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в V. Сопоставляя вектору $\mathbf{v} \in V$ его координатный столбец в данном базисе, мы получаем отображение $\varphi_{\mathbf{e}} \colon V \to \mathbb{R}^3$ из V в пространство $\mathbb{R}^3$ столбцов высоты 3. То, что оно определено на всем V и при этом корректно, следует из существования и единственности разложения произвольного вектора по базису. На самом деле отображение $\varphi_{\mathbf{e}}$ — биекция. Действительно, оно инъективно, поскольку если $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{v}' = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, то $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Сюръективность следует из того, что произвольный столбец из $\mathbb{R}^3$ является координатным столбцом некоторого вектора.

Более того, отображение $\varphi_{\mathbf{e}}$ обладает следующим важным свойством: сумме векторов оно ставит в соответствие сумму координатных столбцов, а произведению вектора на число — произведение координатного столбца на это число. Таким образом, выбор базиса позволяет свести геометрию векторов к алгебре столбцов с сохранением всех операций.

[7] он является следствием метода Гаусса решения систем линейных уравнений, который проходится во 2-м семестре.

Указанные свойства отображения $\varphi_{\mathbf{e}}$ можно сформулировать так: $\varphi_{\mathbf{e}}$ *определяет линейный изоморфизм* (то есть обратимое линейное отображение, см. раздел 2.5) *между векторными пространствами* V *и* $\mathbb{R}^3$. Отметим еще, что

$$\varphi_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_1) = (1,0,0)^T, \quad \varphi_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_2) = (0,1,0)^T, \quad \varphi_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_3) = (0,0,1)^T.$$

Пусть теперь в пространстве V заданы два базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Тогда каждый вектор второго базиса можно разложить по первому:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + c_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + c_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= c_{13}\mathbf{e}_1 + c_{23}\mathbf{e}_2 + c_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Если записывать элементы базиса в строку, то с использованием матричного умножения разложения (3) можно компактно записать в виде:

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)C,$$

где

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица, называемая *матрицей перехода* от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. По определению, k-й столбец ($k = 1,\ 2,\ 3$) матрицы C является столбцом координат вектора $\mathbf{e}'_k$ относительно старого базиса.

В следующем Предложении устанавливается важное свойство матрицы перехода: она обязательно невырождена, а, значит, обратима.

Предложение 2.16. *Матрица C перехода от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ невырождена.*

Доказательство. Докажем, что столбцы матрицы C линейно независимы. Заметим, что линейную зависимость

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \left(C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right) = ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\, C) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ — базис, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. ■

Получим формулы изменения координат вектора при замене базиса. Рассмотрим разложение произвольного вектора $\mathbf{v} \in V$ по паре базисов

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = v'_1\mathbf{e}'_1 + v'_2\mathbf{e}'_2 + v'_3\mathbf{e}'_3,$$

или, с использованием матричных обозначений и ассоциативности произведения матриц

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)C)\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\left(C\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}\right).$$

В силу единственности разложения по базису получаем равенство

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix},$$

или, ввиду обратимости матрицы перехода C,

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Полученные формулы показывают как меняются координаты вектора при замене базиса.

Замечание 2.17. Пусть $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\}$ — еще какой-то базис, и D — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ к $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\}$, то есть

$$(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)D.$$

Тогда

$$(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)D = ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)C)D = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)(CD),$$

и, значит, CD — матрица перехода от $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\}$.

В частности, если в качестве $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\}$ взять старый базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, то поскольку матрица перехода от $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ единичная, получим, что $CD = E$, то есть (снова получаем, что) матрица перехода всегда обратима. Обратно, легко видеть, что любая обратимая матрица может быть матрицей перехода от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к еще какому-то базису. Действительно, если

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)C$$

— не базис, то столбцы C линейно зависимы. Значит, по закону контрапозиции если C невырождена, то $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ — некоторый базис.

Тем самым, если зафиксировать базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в V, получаем взаимнообратные биекции между базисами в V и обратимыми матрицами порядка 3: базису $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ сопоставляем матрицу перехода от $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, и обратно, матрице C сопоставляем базис $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)C$.

Из обратимости матрицы перехода следует, что ее определитель либо положителен, либо отрицателен.

Определение 2.18. Два базиса называются *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы C перехода между ними положителен, и *противоположно ориентированными* в противном случае.

Предложение 2.19. *Отношение "быть одинаково ориентированными" является отношением эквивалентности на множестве всех базисов в V.*

Доказательство. Будем пользоваться краткими обозначениями $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и т.д. Во-первых, $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}$, так как $\det E = 1 > 0$. Во-вторых, если $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$, то $\det C > 0 \quad \Rightarrow \quad \det(C^{-1}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' \sim \mathbf{e}$. В-третьих, если $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$, $\mathbf{e}' \sim \mathbf{e}''$, то $\det C > 0,\ \det D > 0$, а следовательно $\det(CD) = \det(C)\det(D) > 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{e} \sim \mathbf{e}''$. ■

В качестве следствия получаем, что все базисы в V разбиваются на два класса эквивалентности: матрицы перехода между базисами из одного класса имеют положительный определитель, а между базисами из разных классов — отрицательный.

2.3 Структуры на линейных пространствах

"Голое" векторное пространство имеет довольно бедную геометрию, связанную с линейными соотношениями между векторами. Для того, чтобы в V можно было ввести понятия длины вектора и угла между векторами, его нужно снабдить дополнительной структурой — скалярным произведением.

В векторной алгебре скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ обычно определяется как функция $(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$, заданная формулой $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$. Далее показывается, что она обладает свойствами

1) *билинейности*, то есть $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$, $(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ $\forall\, \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$, и аналогично для второго аргумента;

2) *симметричности*, то есть $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ $\forall\, \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V$;

3) *положительной определенности*, то есть $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ $\forall\, \mathbf{v} \in V$, причем если $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$.

С математической точки зрения более естественно определить скалярное произведение как произвольную функцию $(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую перечисленным выше свойствам 1) — 3). Далее можно положить $|\mathbf{v}| := \sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})}$, и для ненулевых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ определить угол α между ними с помощью формулы $\cos\alpha := \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$. Поскольку при вещественных α выполнено двойное неравенство $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, существование угла α, $0 \leq \alpha \leq \pi$ обеспечивает следующее Предложение.

Предложение 2.20. *(Неравенство Коши — Буняковского). Для любых векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из V имеет место неравенство*

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|, \tag{5}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны.

Доказательство. Если $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то обе части (5) равны 0. Пусть теперь $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Из положительной определенности скалярного произведения следует, что

$$|\mathbf{u} + t\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + 2t(\mathbf{u},\mathbf{v}) + t^2|\mathbf{v}|^2 \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

откуда следует, что дискриминант квадратного трехчлена в (6) неположителен, то есть $(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \le 0$, что дает требуемое неравенство (5).

Пусть векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ коллинеарны, причем $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{u}+t_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$, то есть трехчлен в (6) имеет вещественный корень, а, значит, его дискриминант равен нулю (поскольку мы уже доказали, что он неположителен).

Обратно, если дискриминант равен нулю, то квадратный трехчлен в (6) имеет корень $t_0 \in \mathbb{R}$ и, значит, $\mathbf{u} + t_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то есть векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ коллинеарны. ■

Следствие 2.21. *(Неравенство треугольника). Для любых* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

Доказательство. Неравенство треугольника непосредственно следует из неравенства Коши — Буняковского:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 \le |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2. \quad ■$$

Следствие 2.22. *Пусть* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ *— произвольная пара неколлинеарных векторов. Тогда*

$$\det \begin{pmatrix} |\mathbf{u}|^2 & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & |\mathbf{v}|^2 \end{pmatrix} > 0.$$

Матрица из предыдущего Следствия называется *матрицей Грама* системы векторов $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}$, см. Определение 2.24 ниже.

Определение 2.23. *Евклидовым пространством* называется пара $(V, (\cdot, \cdot))$, состоящая из вещественного векторного пространства V и заданного на нем скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$.

Далее евклидово пространство мы будем обозначать просто V, подразумевая что скалярное произведение задано.

Определение 2.24. *Матрицей Грама* системы векторов $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ евклидова пространства V называется матрица $G = (g_{ij})$, составленная из попарных скалярных произведений векторов системы, $g_{ij} := (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. Подробнее:

$$G = G(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & \ldots & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k) \\ (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & \ldots & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_2) & \ldots & (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы Грама называется *грамианом.*

Матрица Грама G произвольного базиса $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ евклидова пространства V полностью определяет его скалярное произведение. Действительно, легко проверяется, что $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, u_2, u_3)G \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, где $(u_1, u_2, u_3)^T$ и $(v_1, v_2, v_3)^T$ — столбцы координат векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в том же самом базисе $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$.

Замечание 2.25. Из определения матрицы Грама и симметричности скалярного произведения следует симметричность матрицы Грама. Возникает вопрос: какие симметричные матрицы являются матрицами Грама линейно независимых систем векторов евклидова пространства? Оказывается, необходимо и достаточно потребовать условие их *положительной определенности*, которое, например, для $k = 2$ и симметричной матрицы A вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ эквивалентно системе неравенств $a_{11} > 0,\ \det A > 0$ (ср. Следствие 2.22).

Задача 2.26. *Докажите (при $k = 2, 3$), что если система векторов $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ линейно зависима, то ее грамиан равен нулю. Попробуйте также доказать обратное утверждение.*

Задача 2.27. *Докажите (при $k = 2, 3$), что грамиан системы векторов $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ не зависит от порядка векторов в системе.*

Заметим, что задание скалярного произведения на V среди всех базисов в V выделяет "привилегированный" класс — класс ортонормированных базисов, для которых матрица Грама является единичной.

Замечание 2.28. Заметим, что функций $(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям 1) — 3) скалярного произведения, много[8] (за исключением тривиального случая нульмерного пространства), но все они приводят к изоморфным структурам евклидова пространства, которые обладают одинаковыми геометрическими свойствами. Точнее, пусть $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$ — две такие функции на V. Тогда существует такое взаимно однозначное линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$, что $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 = (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}))_1 \ \ \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$. То есть такое преобразование φ дли́ны и углы в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_2$ переводит в дли́ны и углы в смысле произведения $(\cdot,\cdot)_1$.

Структура евклидова пространства — не единственная интересная структура на вещественном векторном пространстве V. Другая такая структура (весьма мало, впрочем, похожая на евклидову) — *ориентация*, то есть выбор одного из двух классов ориентации базисов в V (см. Определение 2.18). Векторное пространство, в котором выбрана ориентация, называется *ориентированным.*

Еще одна интересная структура — *форма объема*, позволяющая измерять ориентированные объемы параллелепипедов, построенных на векторах. Дадим ее определение для случая $\dim V = 3$ (в случае $\dim V = n$ нужно рассматривать n-линейные функции, в частности, при $n = 2$ — билинейные, а в остальном определение аналогично).

Определение 2.29. *Форма объема* на V — ненулевая функция $(\cdot,\cdot,\cdot)\colon V \times V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) она *трилинейна*, то есть

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2,\, \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V,$$

$$(\lambda\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda\, (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

и аналогично для второго и третьего аргументов и

[8] мы предлагаем заинтересованному читателю их описать, используя понятие матрицы Грама.

2) *кососимметрична*, то есть при перестановке любых двух аргументов меняет знак.

Читатель, конечно, заметил, что форма объема (при $n = 3$) обладает двумя основными свойствами смешанного произведения; единственное отличие — смешанное произведение определяется в случае евклидова пространства, и нормируется дополнительным условием $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ правый ортонормированный. При определении формы объема никакой евклидовой структуры на V, вообще говоря, не предполагается.

Если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — произвольный базис, то из определения формы объема (ее полилинейности и кососимметричности) легко получить, что

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \tag{7}$$

где $(u_1, u_2, u_3)^T$, $(v_1, v_2, v_3)^T$, $(w_1, w_2, w_3)^T$ — координатные столбцы векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Из этого легко видеть, что две формы объема на V отличаются ненулевым множителем. Заметим, что задание формы объема среди всех базисов в V выделяет "привилегированный" класс, состоящий из тех базисов, для которых ориентированный объем построенного на них параллелепипеда равен 1.

Заметим, что в евклидовом пространстве можно измерять неориентированные объемы параллелепипедов. Например, если $V(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — объем[9] параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ на евклидовой плоскости, то

$$\det \begin{pmatrix} |\mathbf{u}|^2 & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & |\mathbf{v}|^2 \end{pmatrix} = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \alpha = V(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2,$$

то есть объем выражается через скалярные произведения. Аналогичный результат (что квадрат объема параллелепипеда, построенного на системе векторов, равен грамиану этой системы) верен для евклидова пространства произвольной размерности. Докажем это для $n = 3$.[10]

Предложение 2.30. *Верно равенство*

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^2 = \det \begin{pmatrix} |\mathbf{u}|^2 & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & |\mathbf{v}|^2 & (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{w}) & (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & |\mathbf{w}|^2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что в любом евклидовом пространстве есть ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть $A := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ — матрица, составленная из координат векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ в этом базисе. Из векторной алгебры мы знаем, что $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\det A|$. Кроме того, легко убедиться, что $AA^T = G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Требуемая формула теперь следует из двух свойств определителя: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ и $\det A^T = \det A$. ∎

[9] при $n = 1$ объемом называется длина, при $n = 2$ — площадь.

[10] для $n = 1$ он очевиден — длина вектора (одномерный объем) есть корень квадратный из матрицы Грама системы, состоящей из одного этого вектора.

Задача 2.31. *Пусть* α, β, γ *— углы между векторами* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$; $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ *и* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *соответственно. Доказать, что*
$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}|\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

Если в V помимо евклидовой структуры определена ориентация, то объему можно приписать знак, получив при этом *форму объема, согласованную с евклидовой структурой и ориентацией.*[11]

Однако наличие евклидовой структуры и ориентации не необходимо для того, чтобы определить ориентированные объемы — форма объема "беднее" чем совокупность скалярного произведения и ориентации. Некоторое объяснение этого факта дает то, что к одной и той же форме объема приводят разные евклидовы структуры, о чем свидетельствует формула (7). Действительно, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ не только для правых ортонормированных базисов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, но и вообще для всех правых базисов, для которых объем построенного на них параллелепипеда равен 1.

Замечание 2.32. Последнему факту можно также дать более глубокое объяснение в духе Эрлангенской программы Ф. Клейна (см. Добавление 4 в конце). А именно, форма объема является инвариантом бо́льшей группы преобразований, а именно группы $\mathrm{SL}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ линейных преобразований с определителем 1, в то время как евклидова структура с ориентацией — только ее подгруппы $\mathrm{SO}(V) \subset \mathrm{SL}(V)$, состоящей из ортогональных преобразований (сохраняющих данную евклидову структуру) с определителем 1. То есть всякое линейное преобразование, сохраняющее скалярное произведение и ориентацию, автоматически сохраняет и форму объема, но не наоборот.

2.4 Ортогональные матрицы

Пусть V — евклидово пространство. Для упрощения обозначений предположим, что $\dim V = 2$. Мы уже знаем, что матрица перехода между двумя произвольными базисами обратима. Ортонормированность — дополнительное условие на базис. Посмотрим, что можно сказать про матрицу C перехода между двумя *ортонормированными* базисами в V в дополнение к тому что она обратима.

Итак, пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ — ортонормированные базисы в V и C — матрица перехода между ними. Записывая условия того, что базис $\{\mathbf{e}'_1 = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_2 = c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2\}$ ортонормированный и используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\begin{cases} (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1) = c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1; \\ (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0; \\ (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2) = c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Если мы рассмотрим столбцы $c_1 := (c_{11}, c_{21})^T$, $c_2 := (c_{12}, c_{22})^T$ матрицы C, то последние условия означают, что они образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$ относительно "стандартного" скалярного произведения в пространстве столбцов. Это условие можно также записать в виде матричного тождества $C^TC = E$.

Определение 2.33. Матрица C порядка n называется *ортогональной*, если $C^TC = E$.

[11] сама евклидова структура никакую ориентацию не задает, см. Задачу 2.27.

Примеры ортогональных матриц порядка 2:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Предложение 2.34. *Если матрица C ортогональна, то* $\det C = \pm 1$.

Доказательство. Действительно,

$$\det(C^T C) = \det(C^T)\det C = (\det C)^2 = \det E = 1. \quad \blacksquare$$

Заметим, что при $n = \dim V > 1$ условие $\det C = \pm 1$ не является достаточным условием ортогональности C (например, матрица

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

имеет единичный определитель, но не ортогональна).

Обратно, если условия (8) выполнены и базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ортонормированный, то базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ тоже ортонормированный.

Вообще, имеет место следующее Предложение.

Предложение 2.35. *Из любых двух из следующих условий следует третье:*

1) *базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ортонормированный;*

2) *базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ ортонормированный;*

3) *матрица C перехода между ними ортогональна.*

Задача 2.36. *Доказать сформулированное Предложение.*

Замечание 2.37. Следующие отображения между ортонормированными базисами в V и ортогональными матрицами порядка 2 являются взаимно-обратными биекциями. Фиксируем некоторый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в V. Тогда еще одному ортонормированному базису $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ сопоставим матрицу C перехода к нему от зафиксированного базиса. Эта матрица ортогональна. Обратно, если C — ортогональная матрица порядка 2, то сопоставим ей базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, задаваемый формулой $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)C$, и он, согласно предыдущему, тоже ортонормированный.

Построенная биекция между ортонормированными базисами и ортогональными матрицами является аналогом биекции между базисами и обратимыми матрицами, построенной в Замечании 2.17.

Конечно, аналогичные результаты имеют место для евклидовых пространств произвольной размерности n.

Параметризуем множество матриц (c_{ij}), где c_{ij} являются решениями системы (8) (эквивалентно, множество матриц, удовлетворяющих матричному уравнению $C^T C = E$). Для этого заметим, что, в силу соотношения $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$, всегда можно найти такой угол α, единственный с точностью до кратных 2π, что $(c_{11}, c_{21}) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. То есть вектор $\mathbf{e}'_1$ имеет в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ координатный столбец $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$. Аналогично, третье соотношение (8) означает, что вектор $\mathbf{e}'_2$ тоже

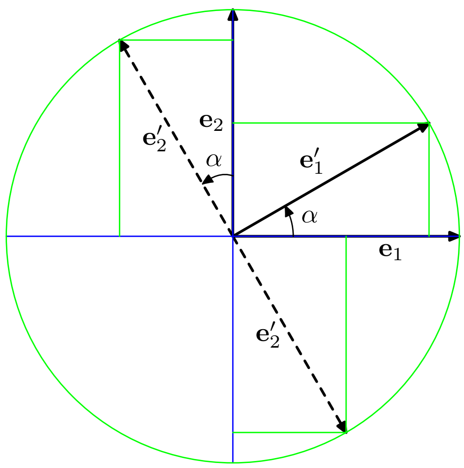


Рис. 3: Ортогональные матрицы перехода

имеет единичную длину, а второе из соотношений (8) — что векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ ортогональны. В зависимости от того, является ли пара $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ одинаково или противоположно ориентированной с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, остается две возможности для координатного столбца $\mathbf{e}'_2$: либо $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$, либо $(\sin\alpha, -\cos\alpha)^T$, см. Рис. 3.

Таким образом, множество решений системы (8) распадается на два класса:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Эти два класса отличаются знаком определителя: матрицы перехода первого типа сохраняют ориентацию базиса, а второго — меняют ее. При этом два базиса в первом случае отличаются на поворот, а во втором случае — на симметрию относительно некоторого одномерного подпространства.

Замечание 2.38. Аналогично случаю евклидовой структуры на векторном пространстве V можно было бы рассмотреть форму объема (площади в двумерном случае), получив класс базисов, для которых объемы натянутых на них ориентированных параллелограммов равны 1, и матрицы перехода между ними — в точности матрицы с определителем 1. В этом случае также имеет место аналог Предложения 2.35.

2.5 Линейные отображения и преобразования

Между векторными пространствами, как правило, рассматривают не произвольные, а так называемые линейные отображения, которые согласованы с операциями в векторных пространствах.

Определение 2.39. Пусть U и V — векторные пространства. Отображение $\varphi\colon U \to V$ называется *линейным*, если

1) $\varphi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_1) + \varphi(\mathbf{u}_2) \quad \forall\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ и

2) $\varphi(\lambda\,\mathbf{u}) = \lambda\,\varphi(\mathbf{u}) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, \mathbf{u} \in U$.

Линейное отображение $\varphi\colon V \to V$ называется *линейным преобразованием* пространства V.

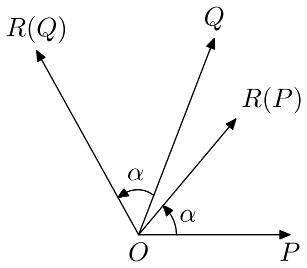


Рис. 4: Поворот

Заметим, что условие 1) означает, что линейное отображение φ задает гомоморфизм аддитивных групп $(U, +) \to (V, +)$. В частности, $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и $\varphi(-\mathbf{u}) = -\varphi(\mathbf{u})\ \ \forall\, \mathbf{u} \in U$.

Еще следствие из определения: если $\varphi\colon U \to V$ — линейное отображение, то для любой линейной комбинации $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \mathbf{u}_k$ векторов из U имеем:

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \mathbf{u}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \varphi(\mathbf{u}_k).$$

Примеры линейных преобразований.

Пример 2.40. *Нулевое* преобразование: $\varphi\colon V \to V,\ \ \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\ \ \ \forall\, \mathbf{v} \in V$.

Пример 2.41. *Тождественное* преобразование $\varphi = \mathrm{id}_V\colon V \to V,\ \ \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\ \ \ \forall\, \mathbf{v} \in V$.

Пример 2.42. В этом примере мы определим преобразование $r_\alpha\colon V \to V$ двумерного ориентированного евклидова пространства, называемое *поворотом на угол* α.

Поворотом R_α аффинной[12] ориентированной[13] евклидовой плоскости S на угол α вокруг некоторой точки $O \in S$ называется такое преобразование $R_\alpha\colon S \to S$, при котором точка O неподвижна, то есть $R_\alpha(O) = O$, и для любой точки $P \in S$ радиус-векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OR_\alpha(P)}$ равны по модулю и ориентированный угол между ними равен α, см. Рис. 4.

Пусть V — векторное пространство свободных векторов в плоскости S. Если $\mathbf{v} = [\overrightarrow{PQ}] \in V$ (класс эквивалентности направленных отрезков в S), то определим преобразование $r_\alpha\colon V \to V$ формулой

$$r_\alpha(\mathbf{v}) = [\overrightarrow{R_\alpha(P)R_\alpha(Q)}]. \tag{10}$$

Во-первых, заметим, что формула (10) корректно задает r_α. Последнее означает, что если вместо направленного отрезка $\overrightarrow{PQ}$, представляющего свободный вектор $\mathbf{v}$, взять другой направленный отрезок $\overrightarrow{P'Q'}$, такой что $\mathbf{v} = [\overrightarrow{P'Q'}]$, то должно выполняться равенство $[\overrightarrow{R_\alpha(P)R_\alpha(Q)}] = [\overrightarrow{R_\alpha(P')R_\alpha(Q')}]$. Теперь корректность легко усмотреть из Рис. 5. Преобразование r_α мы также будем называть *поворотом на угол* α.

Более того, r_α — линейное преобразование линейного пространства V, что легко усмотреть из Рис. 6. Действительно, левая картинка показывает, что $r_\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r_\alpha(\mathbf{u}) + r_\alpha(\mathbf{v})$, а правая — что $r_\alpha(\lambda\, \mathbf{v}) = \lambda\, r_\alpha(\mathbf{v})$.

[12] ниже мы дадим точное определение этого понятия. Для нас сейчас важно, что элементами аффинной плоскости S являются точки, в то время как элементами V являются свободные векторы.

[13] ниже мы в качестве ориентирующего класса везде выбираем класс правых базисов, то есть в двумерном случае под поворотом на угол α подразумевается поворот *против часовой стрелки*.

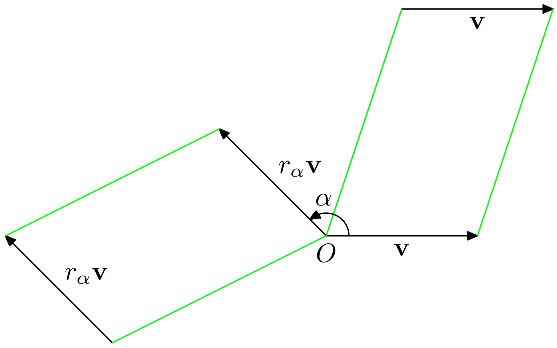


Рис. 5: Корректность определения поворота

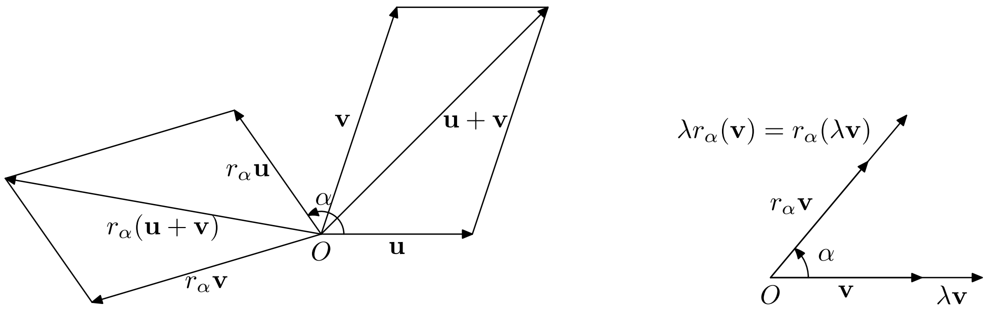


Рис. 6: Линейность поворота

Пример 2.43. Пусть L — некоторая прямая на аффинной евклидовой плоскости S. Определим *симметрию относительно прямой* L как преобразование $S_L\colon S \to S$, которое каждой точке $P \in S$ сопоставляет симметричную относительно прямой L точку $S_L(P) \in S$, см. Рис. 7.

Задача 2.44. *По аналогии с предыдущим примером определите соответствующее линейное преобразование $s_l\colon V \to V$[14] пространства V свободных векторов в S. Докажите формулу*

$$s_l(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v},\, \mathbf{n})\, \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n} \in V$ — единичный вектор нормали к прямой L, см. Рис. 8 (Подсказка: на этом рисунке $\mathbf{w} = -(\mathbf{v},\, \mathbf{n})\, \mathbf{n}$).

Пример 2.45. Приведем примеры преобразований $\varphi\colon V \to V$, не являющихся линейными. Зафикси-

[14]здесь $l \subset V$ обозначает *направляющее подпространство* прямой $L \subset S$.

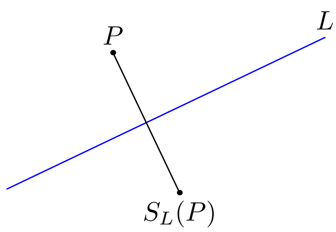


Рис. 7: Симметрия относительно прямой

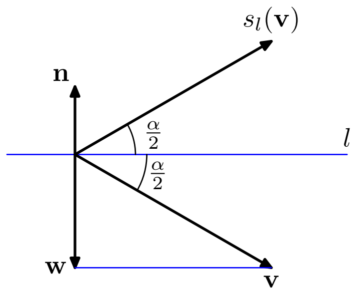


Рис. 8: Симметрия относительно подпространства

руем произвольный вектор $\mathbf{a} \in V$. Определим преобразование $\varphi_{\mathbf{a}}\colon V \to V$ формулой

$$\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V.$$

Легко проверить, что $\varphi_{\mathbf{a}}\colon V \to V$ линейно $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Определим преобразование $\tau_{\mathbf{a}}\colon V \to V$ с помощью формулы

$$\tau_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V.$$

Легко проверить, что $\tau_{\mathbf{a}}\colon V \to V$ линейно $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Предложение 2.46. *1) Композиция $\psi \circ \varphi$ линейных преобразований φ, $\psi\colon V \to V$ также является линейным преобразованием пространства V.*

2) Преобразование φ^{-1}, обратное к биективному линейному преобразованию $\varphi\colon V \to V$, также линейно.

Доказательство. 1) Имеем:

$$\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}),\;\; \psi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v}) \;\Rightarrow$$

$$(\psi \circ \varphi)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \psi(\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})) = \psi(\varphi(\mathbf{u})) + \psi(\varphi(\mathbf{v})) = (\psi \circ \varphi)(\mathbf{u}) + (\psi \circ \varphi)(\mathbf{v}),$$

аналогично для умножения на числа.

2) φ биективно $\Rightarrow \forall\, \mathbf{v} \in V\; \exists\,!\, \mathbf{u} \in V$ такой, что $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ ($\Leftrightarrow$ $\mathbf{u} = \varphi^{-1}(\mathbf{v})$). Пусть также $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Тогда в силу линейности φ имеем:

$$\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \mathbf{v} \quad (\Leftrightarrow\; \mathbf{a} + \mathbf{u} = \varphi^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{v})),$$

что дает $\varphi^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{v}) = \mathbf{a} + \mathbf{u} = \varphi^{-1}(\mathbf{b}) + \varphi^{-1}(\mathbf{v})$; так как $\mathbf{b}$ и $\mathbf{v}$ — произвольные, то для φ^{-1} получаем условие 1) из Определения 2.39.

Аналогично доказывается что $\varphi^{-1}(\lambda\, \mathbf{v}) = \lambda\, \varphi^{-1}(\mathbf{v})$. ■

Следствие 2.47. *Биективные линейные преобразования пространства V образуют группу. Она обозначается* $\mathrm{GL}(V)$ *(от английских слов “general linear” — “общая линейная” — группа).*

Помимо операции композиции линейные преобразования можно складывать и умножать на числа, получая при этом новые линейные преобразования. Точнее, для двух линейных преобразований φ, $\psi\colon V \to V$ определим их *сумму* $\varphi + \psi$ как преобразование пространства V, заданное формулой

$$(\varphi + \psi)(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v}) \;\; \forall\, \mathbf{v} \in V.$$

Его линейность легко проверяется. Аналогично, для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ определим преобразование $\lambda\,\varphi\colon V \to V$ как

$$(\lambda\,\varphi)(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \varphi(\mathbf{v}) \;\; \forall\, \mathbf{v} \in V.$$

Легко проверить, что множество $\mathcal{L}(V)$ всех линейных преобразований пространства V с введенными операциями сложения и умножения на числа само является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Замечание 2.48. Фактически, на множестве $\mathcal{L}(V)$ линейных преобразований векторного пространства V заданы 3 операции: сложение преобразований, умножение их на числа (относительно этих двух операций $\mathcal{L}(V)$ является векторным пространством), а также композиция преобразований. Эти операции удовлетворяют ряду аксиом, которые мы не будем здесь выписывать. Такая алгебраическая структура называется *алгеброй*. Ее определение и свойства можно найти, например, в учебнике [6]. Другой пример алгебры дают матрицы $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ порядка n с операциями сложения, умножения на числа и умножения матриц.

2.6 Матрица линейного преобразования

В этом разделе мы опишем, как задаются линейные преобразования пространства V в фиксированном базисе. Точнее, мы покажем, что подобно тому как в конкретном базисе вектору сопоставляется столбец его координат, преобразованию сопоставляется квадратная матрица, которая полностью определяет преобразование. Как обычно, мы рассматриваем случай $\dim V = 3$.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в V, а $\varphi\colon V \to V$ — линейное преобразование. Если

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

то из линейности φ получаем

$$\varphi(\mathbf{v}) = v_1\varphi(\mathbf{e}_1) + v_2\varphi(\mathbf{e}_2) + v_3\varphi(\mathbf{e}_3) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3))\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Поскольку $\varphi(\mathbf{e}_k) \in V$, эти векторы, в свою очередь, могут быть разложены по базису. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ \varphi(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{12}$$

— эти разложения.

Определим матрицу

$$A = A_\varphi := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(то есть координаты вектора $\varphi(\mathbf{e}_k)$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ выписаны в ее k-й столбец, $k = 1, 2, 3$. Заметим, что A зависит не только от преобразования φ, но и от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$). Тогда из правила умножения матриц (точнее, строки на матрицу) следует, что (12) эквивалентно следующему соотношению:

$$(\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11) и используя ассоциативность произведения матриц, получаем:

$$\varphi(\mathbf{v}) = ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \left(A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right), \tag{14}$$

то есть координаты вектора $\varphi(\mathbf{v})$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют столбец $A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Матрица A называется *матрицей преобразования φ в базисе* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Таким образом, мы видим, что *в фиксированном базисе действие линейного преобразования φ на вектор $\mathbf{v}$ сводится к умножению матрицы преобразования φ в этом базисе на столбец координат вектора $\mathbf{v}$ в том же базисе.* Тем самым мы еще дальше продвинулись в сведéнии геометрии к алгебре, начатом в разделе 2.2.

Задача 2.49. *Проверить, что в любом базисе пространства V матрица преобразования $\lambda\,\mathrm{id}_V$ равна $\lambda\, E$.*

Замечание 2.50. Формула (11) показывает, что линейное преобразование полностью определяется тем, куда оно переводит некоторый базис, то есть системой векторов $\{\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3)\}$ для некоторого базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Другими словами, линейное преобразование полностью определяется своей матрицей. Тем самым сопоставление $\varphi \mapsto A_\varphi$ преобразованиям их матриц в фиксированном базисе определяет инъективное отображение из множества преобразований в множество матриц порядка 3. Обратно, взяв произвольную матрицу порядка 3, можно определить линейное преобразование пространства V с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ по формуле (14). Другими словами, указанное сопоставление также сюръективно. Таким образом, каждый базис задает биекцию между множеством линейных преобразований пространства V и множеством матриц порядка 3. Конечно, этот результат обобщается на случай произвольной размерности $\dim V = n$: каждый базис задает биекцию между множеством линейных преобразований пространства V и множеством матриц порядка n.

Замечание 2.51. Линейное преобразование φ биективно $\Leftrightarrow$ оно обратимо $\Leftrightarrow$ оно некоторый базис переводит в базис (то есть для базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ система векторов $\{\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3)\}$ тоже базис) $\Leftrightarrow$ столбцы его матрицы A в некотором базисе линейно независимы $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ матрица A обратима (обратная матрица A^{-1} будет тогда матрицей обратного преобразования φ^{-1} в том же базисе).

Предложение 2.52. *Сопоставление $\varphi \mapsto A_\varphi$ линейному преобразованию его матрицы в базисе обладает следующими свойствами: композиции преобразований $\psi \circ \varphi$ отвечает умножение их матриц, то есть*

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi A_\varphi,$$

тождественному преобразованию id_V *отвечает единичная матрица (в любом базисе!),* $A_{\mathrm{id}_V} = E$, *и если* φ *обратимо, то*

$$A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $A_\varphi = (a_{ij}^\varphi)$. По определению матрицы преобразования для $k = 1,\ 2,\ 3$ имеем

$$\varphi(\mathbf{e}_k) = a_{1k}^\varphi \mathbf{e}_1 + a_{2k}^\varphi \mathbf{e}_2 + a_{3k}^\varphi \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} a_{1k}^\varphi \\ a_{2k}^\varphi \\ a_{3k}^\varphi \end{pmatrix},$$

и тогда по линейности ψ

$$\psi(\varphi(\mathbf{e}_k)) = a_{1k}^\varphi \psi(\mathbf{e}_1) + a_{2k}^\varphi \psi(\mathbf{e}_2) + a_{3k}^\varphi \psi(\mathbf{e}_3) = (\psi(\mathbf{e}_1), \psi(\mathbf{e}_2), \psi(\mathbf{e}_3))\begin{pmatrix} a_{1k}^\varphi \\ a_{2k}^\varphi \\ a_{3k}^\varphi \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$(\psi(\varphi(\mathbf{e}_1)), \psi(\varphi(\mathbf{e}_2)), \psi(\varphi(\mathbf{e}_3))) = (\psi(\mathbf{e}_1), \psi(\mathbf{e}_2), \psi(\mathbf{e}_3))A_\varphi.$$

Используя это, получаем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A_{\psi\circ\varphi} = (\psi(\varphi(\mathbf{e}_1)), \psi(\varphi(\mathbf{e}_2)), \psi(\varphi(\mathbf{e}_3))) = (\psi(\mathbf{e}_1), \psi(\mathbf{e}_2), \psi(\mathbf{e}_3))A_\varphi =$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A_\psi A_\varphi,$$

откуда $A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi A_\varphi$.

Из Задачи 2.49 мы знаем, что в любом базисе $A_{\mathrm{id}_V} = E$. Если φ^{-1} — преобразование, обратное φ, то $\varphi^{-1}\circ\varphi = \mathrm{id}_V$. Из доказанного тогда следует, что $A_{\varphi^{-1}}A_\varphi = A_{\varphi^{-1}\circ\varphi} = A_{\mathrm{id}_V} = E \ \Rightarrow\ A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$, что и требовалось доказать. ■

Замечание 2.53. В частности, выбор базиса $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ в V определяет изоморфизм между группой $\mathrm{GL}(V)$ и группой $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ обратимых матриц порядка 3 с элементами из поля $\mathbb{R}$.

Кроме того, легко проверяется, что сумме операторов отвечает сумма их матриц, $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$, произведению оператора на число — произведение его матрицы на это число, $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$. Таким образом, операции над линейными преобразованиями приводят к соответствующим операциям над их матрицами в фиксированном базисе.

Замечание 2.54. Более формально, выбор базиса определяет изоморфизм алгебры $\mathcal{L}(V)$ (см. Замечание 2.48) линейных преобразований векторного пространства V и алгебры $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ матриц порядка 3 с элементами из поля $\mathbb{R}$.

Выше уже отмечалось, что матрица преобразования зависит, вообще говоря, от базиса. Опишем эту зависимость.

Предложение 2.55. *Если* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *и* $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ *— два базиса в пространстве* V *и* C *— матрица перехода от первого ко второму, то для произвольного преобразования* φ *пространства* V *имеем:*

$$A'_\varphi = C^{-1}A_\varphi C$$

где A_φ, A'_φ *— матрицы преобразования* φ *в первом и втором базисах соответственно.*

Доказательство. По определению матрицы перехода для $k = 1, 2, 3$ имеем

$$\mathbf{e}'_k = c_{1k}\mathbf{e}_1 + c_{2k}\mathbf{e}_2 + c_{3k}\mathbf{e}_3,$$

и тогда по линейности φ

$$\varphi(\mathbf{e}'_k) = c_{1k}\varphi(\mathbf{e}_1) + c_{2k}\varphi(\mathbf{e}_2) + c_{3k}\varphi(\mathbf{e}_3) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3)) \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ c_{3k} \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$(\varphi(\mathbf{e}'_1), \varphi(\mathbf{e}'_2), \varphi(\mathbf{e}'_3)) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3))C.$$

Используя это, получим

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)A'_\varphi = (\varphi(\mathbf{e}'_1), \varphi(\mathbf{e}'_2), \varphi(\mathbf{e}'_3)) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3))C =$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A_\varphi C = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)C^{-1}A_\varphi C,$$

откуда $A'_\varphi = C^{-1}A_\varphi C$, что и требовалось доказать. ■

В частности, если $\varphi = \mathrm{id}_V$ — тождественное преобразование, то оно имеет одну и ту же (единичную) матрицу во всех базисах, поскольку единичная матрица коммутирует (перестановочна) со всеми матрицами и, значит, $E = C^{-1}EC$ для любой обратимой матрицы C. Можно показать, что преобразование φ имеет одну и ту же матрицу во всех базисах тогда и только тогда, когда $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$.

Пример 2.56. Пусть $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$ — базис в двумерном пространстве V и пусть $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ — произвольная пара чисел. Рассмотрим линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$, заданное своими значениями на базисе:

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \lambda_1\, \mathbf{e}_1, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \lambda_2\, \mathbf{e}_2.$$

С использованием свойства линейности оно однозначно продолжается на все пространство V: в самом деле, для произвольного вектора $\mathbf{v} = \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2$ имеем:

$$\varphi(\mathbf{v}) = \mu_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \mu_2\varphi(\mathbf{e}_2) = \mu_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\lambda_2\mathbf{e}_2.$$

В базисе $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$ преобразование φ имеет диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейные преобразования $\psi,\ \chi\colon V \to V$,

$$\psi(\mathbf{e}_1) = \lambda_1\, \mathbf{e}_1,\ \psi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2; \quad \chi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1,\ \chi(\mathbf{e}_2) = \lambda_2\, \mathbf{e}_2.$$

Тогда, легко видеть, что $\varphi = \chi \circ \psi = \psi \circ \chi$ и соответственно для матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Если V — евклидова плоскость, $\lambda_1 > 0$, и векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ взаимно перпендикулярны, то преобразование ψ естественно назвать *сжатием* (при $0 < \lambda_1 \le 1$) или *растяжением* (при $1 \le \lambda_1$) *к одномерному подпространству с направляющим вектором* $\mathbf{e}_2$; аналогично для χ.

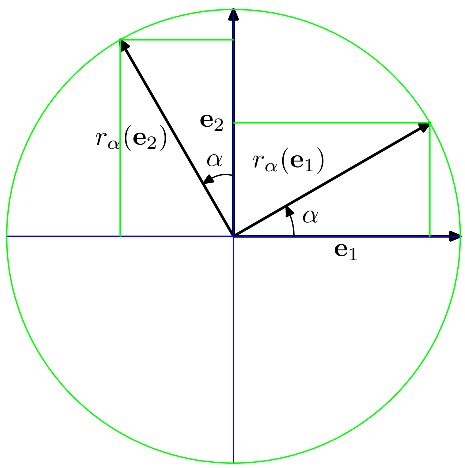


Рис. 9: Вывод матрицы преобразования поворота

Пример 2.57. Найдем матрицу поворота r_α (см. Пример 2.42) в правом ортонормированном базисе на плоскости (см. Рис. 9). Имеем:

$$r_\alpha(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \sin\alpha; \quad r_\alpha(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cos\alpha.$$

Таким образом, матрица преобразования поворота на угол α в указанном классе базисов есть

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример 2.58. Найдем в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на плоскости матрицу преобразования симметрии s_l (см. Задачу 2.44) относительно одномерного подпространства l (направляющий вектор подпространства $l \subset V$ предполагается известным).

Пусть единичный направляющий вектор $\mathbf{a}$ подпространства l имеет в базисе координаты $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})^T$. Тогда единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ (один из двух) к подпространству l имеет координаты $(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})^T$. Используя формулу Задачи 2.44, имеем:

$$s_l(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})\,\mathbf{n},$$

и вычисление с координатными столбцами приводит к результату[15]

$$(1,\, 0)^T + 2\sin\frac{\alpha}{2}\,(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})^T = (\cos\alpha,\, \sin\alpha)^T.$$

Аналогичное вычисление показывает, что вектор $s_l(\mathbf{e}_2)$ имеет в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ координатный столбец $(\sin\alpha, -\cos\alpha)^T$.

Таким образом, матрица преобразования симметрии s_l относительно подпространства l, направляющий вектор $\mathbf{a}$ которого имеет координаты $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})^T$, есть

$$A_{s_l} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

[15]отметим, что, как и должно быть, выражение для $s_l(\mathbf{e}_1)$ не меняется при замене $\mathbf{n}$ на $-\mathbf{n}$.

(Кстати, теперь понятно зачем мы в качестве углового параметра взяли не α, а $\frac{\alpha}{2}$). По виду она похожа на матрицу поворота, но имеет принципиальное отличие от нее: ее определитель равен -1, в то время как определитель матрицы поворота равен 1. Это связано с тем, что симметрия в отличие от поворота меняет ориентацию базиса.

2.7 Ортогональные преобразования

Пусть V — евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Напомним, что длина (= модуль) вектора $\mathbf{v}$ евклидова пространства V определяется формулой $|\mathbf{v}| := \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})} \geq 0$, причем $|\mathbf{v}| = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Определение 2.59. Преобразование $\varphi\colon V \to V$ называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть

$$(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V.$$

Заметим, что ортогональное преобразование φ сохраняет длины векторов, поскольку

$$|\varphi(\mathbf{v})|^2 = (\varphi(\mathbf{v}),\, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}| \;\; \forall\, \mathbf{v} \in V,$$

а также углы между ними. Из геометрических соображений довольно понятно, что из этих свойств должна следовать линейность. Приведем формальное доказательство этого результата.

Предложение 2.60. *Всякое ортогональное преобразование линейно.*

Доказательство. По условию, имеем $(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \;\; \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$. Во-первых, проверим, что из этого следует, что $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) \;\; \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$. Пусть $\mathbf{w} := \mathbf{u} + \mathbf{v}$, тогда, используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$0 = |\mathbf{w} - \mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{w} - \mathbf{u} - \mathbf{v},\, \mathbf{w} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) = |\mathbf{w}|^2 + |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u},\, \mathbf{w}) - 2(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) + 2(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) =$$

$$|\varphi(\mathbf{w})|^2 + |\varphi(\mathbf{u})|^2 + |\varphi(\mathbf{v})|^2 - 2(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{w})) - 2(\varphi(\mathbf{v}),\, \varphi(\mathbf{w})) + 2(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) =$$

$$|\varphi(\mathbf{w}) - \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})|^2,$$

и теперь, в силу эквивалентности $|\mathbf{a}| = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{0}$, получаем $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$.

Докажем теперь, что $\varphi(\lambda\, \mathbf{v}) = \lambda\, \varphi(\mathbf{v}) \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R},\, \mathbf{v} \in V$. Пусть $\mathbf{w} := \lambda\, \mathbf{v}$, тогда имеем:

$$0 = |\mathbf{w} - \lambda\, \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{w}|^2 - 2\lambda\, (\mathbf{w},\, \mathbf{v}) + \lambda^2 |\mathbf{v}|^2 =$$

$$|\varphi(\mathbf{w})|^2 - 2\lambda\, (\varphi(\mathbf{w}),\, \varphi(\mathbf{v})) + \lambda^2\, |\varphi(\mathbf{v})|^2 = |\varphi(\mathbf{w}) - \lambda\, \varphi(\mathbf{v})|^2,$$

откуда $\varphi(\lambda\, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w}) = \lambda\, \varphi(\mathbf{v})$. ■

Предложение 2.61. *Преобразование φ ортогонально $\Leftrightarrow$ оно линейно и сохраняет длины векторов, то есть*

$$|\varphi(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}| \quad \forall\, \mathbf{v} \in V.$$

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$: Выше уже было доказано, что ортогональное преобразование линейно и сохраняет длины векторов.

$\boxed{\Leftarrow}$: По условию, $|\varphi(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}| \ \ \forall\, \mathbf{v} \in V \Rightarrow |\varphi(\mathbf{v})|^2 = |\mathbf{v}|^2 \ \ \forall\, \mathbf{v} \in V$. Но

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + (\mathbf{v},\, \mathbf{u}) + (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + 2(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2$$ [16]

$\Rightarrow (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2)$. Из условия сохранения длин и линейности имеем:

$$2(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = |\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})|^2 - |\varphi(\mathbf{u})|^2 - |\varphi(\mathbf{v})|^2 =$$

$$|\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})|^2 - |\varphi(\mathbf{u})|^2 - |\varphi(\mathbf{v})|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = 2(\mathbf{u},\, \mathbf{v})$$

$\Rightarrow (\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \ \ \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V.$ ∎

Опишем теперь свойства матрицы ортогонального преобразования в ортонормированном базисе. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — ортогональное преобразование, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в V (пока не обязательно ортонормированный); пусть $G := (g_{ij})$ — матрица Грама базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (то есть $g_{ij} = (\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j)$, см. Определение 2.24). Пусть $\mathbf{v}$ имеет в этом базисе столбец координат $(v_1, v_2, v_3)^T$, а $\mathbf{u}$ — $(u_1, u_2, u_3)^T$. Тогда

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (u_1, u_2, u_3)\, G \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Пусть A — матрица преобразования φ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Тогда векторы $\varphi(\mathbf{u})$ и $\varphi(\mathbf{v})$, как мы знаем из формулы (14), имеют в том же базисе координатные столбцы $A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ и $A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ соответственно. Следовательно,

$$(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = \left(A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right)^T G \left(A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) = (u_1, u_2, u_3) A^T G A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Если последнее выражение равно $(\mathbf{u},\, \mathbf{v})$ для любых векторов $\mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$, то

$$(u_1, \ldots, u_n) A^T G A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (u_1, u_2, u_3) G \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

для любых столбцов $(u_1, u_2, u_3)^T, \ \ (v_1, v_2, v_3)^T$, откуда (рассматривая всевозможные столбцы с одним ненулевым элементом, равным 1) получаем, что

$$A^T G A = G. \tag{16}$$

Тем самым мы получили в матричном виде условие того, что линейное преобразование сохраняет скалярное произведение, то есть является ортогональным.

[16] заметим, что это тождество не что иное как теорема косинусов.

В частности, если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ортонормированный, то $G = E$ и из (16) в этом случае получаем, что $A^T A = E$. То есть *матрица ортогонального преобразования в ортонормированном базисе является ортогональной.* Верно, конечно, и обратное — если некоторое линейное преобразование имеет в ортонормированном базисе ортогональную матрицу, то оно ортогонально.

Заметим, что из Предложения 2.34 мы знаем, что если A ортогональна, то $\det A = \pm 1$. В частности, ортогональное преобразование обязательно обратимо. Кроме того, оно сохраняет неориентированные объемы (см. ниже).

Предложение 2.62. *Ортогональные преобразования евклидова пространства (плоскости) V образуют группу.*

Доказательство. Легко проверить, что композиция ортогональных преобразований ортогональна, тождественное преобразование ортогонально, обратное к ортогональному ортогонально. ■

Группа ортогональных преобразований евклидова пространства (плоскости) V обозначается $\mathrm{O}(V)$. Выбор базиса определяет ее изоморфизм с группой $\mathrm{O}(3)$ (соотв. с группой $\mathrm{O}(2)$) ортогональных матриц порядка 3 (соотв. 2).

Пример 2.63. Изучим подробнее ортогональные преобразования евклидовой плоскости V. Выберем в V ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$. Тогда, как мы знаем, ортогональные преобразования — в точности те, которые имеют ортогональные матрицы. Ортогональные матрицы порядка 2 были изучены нами в конце раздела 2.2. Напомним, что они делятся на два класса

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

в соответствии со знаком определителя.

Мы уже знаем из примеров 2.57 и 2.58, что матрица первого типа задает поворот в положительном направлении на угол α, в то время как второго типа — симметрию относительно подпространства с направляющим вектором $\mathbf{a}$ с координатами $(\cos\frac{\alpha}{2},\, \sin\frac{\alpha}{2})^T$.

Мы хотим показать, как найти $\mathbf{a}$ по матрице преобразования φ. Из геометрического определения симметрии относительно подпространства ясно, что в качестве направляющего вектора $\mathbf{a}$ подпространства, относительно которого φ является симметрией, можно взять произвольный ненулевой вектор такой, что $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, поскольку симметрия все векторы указанного подпространства оставляет на месте. Поставим более общую задачу: на какие ненулевые векторы $\mathbf{v}$ наше преобразование φ с ортогональной матрицей второго типа действует умножением на некоторое число $\lambda \in \mathbb{R}$, то есть

$$\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\, \mathbf{v}\ ? \tag{17}$$

В частности, для каких $\lambda \in \mathbb{R}$ существуют такие векторы?

Так как действие преобразования на вектор в базисе сводится к умножению матрицы преобразования на координатный столбец вектора, то соотношение (17) переписывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

что, очевидно, эквивалентно равенству

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} v_1(\cos\alpha - \lambda) + v_2 \sin\alpha = 0; \\ v_1 \sin\alpha + v_2(-\cos\alpha - \lambda) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

решения которой — суть линейные зависимости

$$v_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

между столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix}.$$

Наличие такой нетривиальной зависимости эквивалентно вырожденности этой матрицы, одним из критериев которой является равенство нулю ее определителя, то есть

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Значит, возможные значения λ, для которых существуют ненулевые векторы $\mathbf{v}$, удовлетворяющие соотношению (17), суть ± 1. Обратно, для каждого из этих значений λ ненулевые векторы $\mathbf{v}$, удовлетворяющие соотношению (17), существуют, поскольку столбцы соответствующей матрицы линейно зависимы и коэффициенты любой нетривиальной линейной зависимости являются координатами такого вектора. Эти значения λ называются *собственными значениями* преобразования φ.

Для каждого из собственных значений найдем *собственные векторы*, то есть ненулевые векторы $\mathbf{v}$, удовлетворяющие соотношению (17). Возьмем $\lambda = 1$. Тогда система (18) равносильна уравнению

$$v_1(\cos\alpha - 1) + v_2 \sin\alpha = 0,$$

которое, в свою очередь, как следует из тригонометрии, равносильно

$$v_1 \sin\frac{\alpha}{2} - v_2 \cos\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Ненулевым решением последнего является пара $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})$, любое другое решение пропорционально этому. Таким образом, собственный вектор $\mathbf{v}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, имеет в нашем базисе координатный столбец $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})^T$.

Возьмем теперь второе собственное значение $\lambda = -1$. Рассматривая его аналогично предыдущему случаю, получаем на координаты соответствующего собственного вектора соотношение

$$u_1 \cos\frac{\alpha}{2} + u_2 \sin\frac{\alpha}{2} = 0,$$

и, значит, собственный вектор $\mathbf{u}$, отвечающий собственному значению $\lambda = -1$, имеет координатный столбец $(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})^T$.

Полученный результат можно проверить прямым вычислением, например, для $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

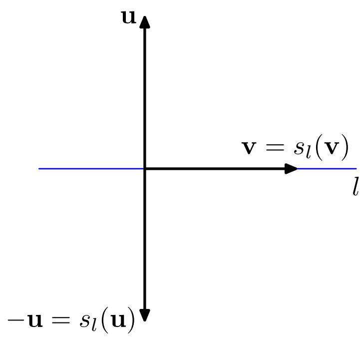


Рис. 10: Собственные векторы преобразования симметрии

Заметим, что векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$, как и должно быть по геометрическому смыслу симметрии (см. Рис. 10), взаимно ортогональны. Они образуют ортонормированный базис $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$, в котором матрица оператора φ имеет очень простой — диагональный — вид[17]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

И в общем случае, если в векторном пространстве есть базис из собственных векторов линейного преобразования φ, то в этом базисе матрица этого преобразования диагональна; верно и обратное — если в некотором базисе матрица преобразования диагональна, то этот базис состоит из его собственных векторов.

Заметим, что не всегда у линейного преобразования есть собственные векторы: например, для оператора поворота при $\alpha \neq 0, \pi$ таких векторов, очевидно, нет, и, тем более, из собственных векторов не обязательно можно составить базис пространства.

Задача 2.64. *Убедитесь, перемножая матрицы, что композиция поворота ориентированной евклидовой плоскости на угол α и поворота на угол β — поворот на угол $\alpha+\beta$. Каким преобразованием будет композиция поворота и симметрии? Композиция двух симметрий?*

Читатель, решивший предыдущую задачу, знает, что композиция поворота и симметрии — симметрия, композиция двух симметрий — поворот.

Задача 2.65. *Пусть s_α — симметрия относительно прямой, образующей угол α с какой-то фиксированной прямой l. Проследив за образом какой-нибудь одной точки, убедитесь, что*

$$s_\beta \circ r_\alpha = s_{\beta-\frac{\alpha}{2}}, \quad r_\alpha \circ s_\beta = s_{\beta+\frac{\alpha}{2}}, \quad s_\beta \circ s_\alpha = r_{2(\beta-\alpha)}.$$

Напомним, что в Примере 2.56 мы определили понятие сжатия евклидовой плоскости к одномерному подпространству.

Теорема 2.66. *Любое обратимое линейное преобразование евклидовой плоскости является композицией ортогонального преобразования и сжатий (растяжений) к двум взаимно перпендикулярным одномерным подпространствам.*

[17] читателю рекомендуется убедиться в этом также с использованием формулы Предложения 2.55.

Доказательство. Для доказательства Теоремы нам потребуется следующая Лемма.

Лемма 2.67. Для любого обратимого линейного преобразования φ евклидовой плоскости V существует пара единичных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ таких, что $\varphi(\mathbf{u}) \perp \varphi(\mathbf{v})$.

Доказательство Леммы. Выберем ортонормированный базис в V. Тогда единичные взаимно перпендикулярные векторы $\mathbf{u}_\alpha$, $\mathbf{v}_\alpha$, полученные из базисных векторов поворотом на угол α, имеют координатные столбцы $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$, $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$ соответственно. Определим функцию

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(\alpha) := (\varphi(\mathbf{u}_\alpha), \varphi(\mathbf{v}_\alpha)).$$

Если в выбранном базисе преобразование φ имеет матрицу A, то

$$f(\alpha) = (\varphi(\mathbf{u}_\alpha), \varphi(\mathbf{v}_\alpha)) = \left(A\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right)^T A\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} = (\cos\alpha, \sin\alpha)A^TA\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Заметим, что матрица A^TA симметрична, пусть $A^TA = \begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$; тогда из (19) получаем

$$f(\alpha) = \frac{c-a}{2}\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha.$$

Пусть $b \neq 0$, тогда $f(0) = b$ и $f(\frac{\pi}{2}) = -b$ имеют разные знаки; так как функция f непрерывна, то между точками 0 и $\frac{\pi}{2}$ лежит ее нуль. Если $b = 0$, то $f(0) = 0$. В любом случае существует такое $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, что $f(\alpha) = (\varphi(\mathbf{u}_\alpha), \varphi(\mathbf{v}_\alpha)) = 0$. Таким образом, $\varphi(\mathbf{u}_\alpha) \perp \varphi(\mathbf{v}_\alpha)$. ■

Вернемся к доказательству Теоремы. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ортонормированный базис в V такой, что $\varphi(\mathbf{e}_1) \perp \varphi(\mathbf{e}_2)$. Определим ортонормированный базис

$$\mathbf{e}_1' := \frac{\varphi(\mathbf{e}_1)}{|\varphi(\mathbf{e}_1)|}, \ \ \mathbf{e}_2' := \frac{\varphi(\mathbf{e}_2)}{|\varphi(\mathbf{e}_2)|}.$$

Определим линейное преобразование $\omega\colon V \to V$ условием $\omega(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1'$, $\omega(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2'$. Так как ω ортонормированный базис переводит в ортонормированный, то оно ортогонально.

Определим линейные преобразования ψ, $\chi\colon V \to V$

$$\psi(\mathbf{e}_1') = \varphi(\mathbf{e}_1), \ \psi(\mathbf{e}_2') = \mathbf{e}_2', \ \ \chi(\mathbf{e}_1') = \mathbf{e}_1', \ \chi(\mathbf{e}_2') = \varphi(\mathbf{e}_2).$$

Легко видеть, что ψ и χ являются сжатиями (растяжениями) к двум взаимно перпендикулярным подпространствам (см. Пример 2.56) с коэффициентами $|\varphi(\mathbf{e}_1)|$, $|\varphi(\mathbf{e}_2)|$, и, кроме того, $\varphi = \psi \circ \chi \circ \omega = \chi \circ \psi \circ \omega$. ■

Другое доказательство этой теоремы можно найти в учебнике [3], гл. IV, § 3, п. 5.

Разложение обратимого линейного преобразования в композицию ортогонального и сжатий-растяжений к взаимно перпендикулярным направлениям[18] обобщается на случай евклидовых пространств произвольной размерности n и носит название *полярного разложения*.

[18]такие линейные преобразования называются *положительными самосопряженными*.

В качестве примера еще одной структуры на векторном пространстве мы также рассматривали форму объема. Условие того, что линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$, $\dim V = 3$, сохраняет форму объема $(\cdot,\cdot,\cdot)$ на V записывается как

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{w})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V. \tag{20}$$

Сразу заметим, что такое преобразование φ обязательно невырождено (что мы будем далее предполагать). Зафиксируем некоторый базис $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$ в V; пусть A — матрица преобразования φ в нем. Так как координаты векторов $\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{w})$ в базисе $\{\varphi(\mathbf{e}_1),\, \varphi(\mathbf{e}_2),\, \varphi(\mathbf{e}_3)\}$ равны соответственно координатам векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$, то φ сохраняет объемы $\Leftrightarrow$ $(\varphi(\mathbf{e}_1),\, \varphi(\mathbf{e}_2),\, \varphi(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3)$ для данного базиса (ср. формулу (7)). Легко видеть, что

$$(\varphi(\mathbf{e}_1),\, \varphi(\mathbf{e}_2),\, \varphi(\mathbf{e}_3)) = \det A\, (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3) \tag{21}$$

и, значит, φ *сохраняет форму объема* $\Leftrightarrow$ $\det A = 1$.[19]

3 Аффинные пространства

В этой части текста наше изложение идеологически довольно близко к принятому в Главе 7 учебника Э.Б. Винберга [6]. В частности, мы даем определения аффинных пространств и аффинных отображений, принятые в курсах алгебры (см. также [10]). Об особенностях такого подхода было написано во Введении. Классическое изложение элементов теории аффинных преобразований как части курса аналитической геометрии можно найти, например, в учебниках [3], [5], а аффинной (и проективной) геометрии как самостоятельной науки — в [12].

3.1 Определение и примеры аффинных пространств

Определение 3.1. *Аффинным пространством* называется тройка $(S,\, V,\, +)$, где S — множество (элементы которого мы будем называть "точками"), V — векторное пространство и

$$+\colon S \times V \to S, \quad (p,\, \mathbf{v}) \mapsto p + \mathbf{v} \in S \qquad p \in S,\, \mathbf{v} \in V$$

— операция сложения точки и вектора, обладающая свойствами:

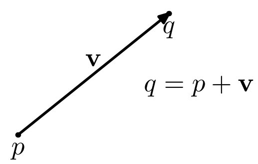
1) $p + \mathbf{0} = p \ \ \forall\, p \in S$;

2) $p + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (p + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \ \ \forall\, p \in S,\, \forall\, \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V$;

3) для любой упорядоченной пары $(p,\, q)$ точек из S существует причем единственный вектор $\mathbf{v} \in V$ такой, что $q = p + \mathbf{v}$.

Если $p + \mathbf{v} = q$, положим $\overrightarrow{pq} := \mathbf{v}$. Если при этом $\mathbf{w} = \overrightarrow{qr}$, то свойство 2) тогда дает $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r$ и из свойства 3) тогда следует, что $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.

[19] Заметим, что определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса, читатель легко выведет это из формулы, доказанной в Предложении 2.55, или из равенства (21) (ср. рассуждение на стр. 52).



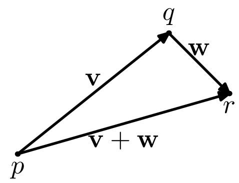


Рис. 11: Сложение точек и векторов

Кроме того, $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$. Действительно, используя свойства 1) — 3) операции сложения точки и вектора, имеем:

$$q = p + \overrightarrow{pq} = (q + \overrightarrow{qp}) + \overrightarrow{pq} = q + (\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pq}) = q + \mathbf{0} \;\;\Rightarrow\;\; \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pq} = \mathbf{0} \;\;\Rightarrow\;\; \overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}.$$

Пример 3.2. Важный для дальнейшего пример — *аффинная плоскость*. В этом случае S — множество точек плоскости, V — векторное пространство свободных векторов на плоскости, $+$ — операция откладывания представителя свободного вектора от точки (см. Рис. 11), при этом сумма точки и вектора — точка, являющаяся концом отложенного вектора. Все свойства из Определения 3.1 легко проверяются. Аналогично определяется аффинная прямая и аффинное пространство (при этом векторное пространство V имеет размерность соответственно 1 и 3).

Векторизация аффинного пространства. Пусть $(S,\, V,\, +)$ — аффинное пространство. Выберем точку $o \in S$. Определим отображение

$$\chi_o\colon S \to V, \quad p \mapsto \overrightarrow{op} \in V,$$

где $\overrightarrow{op}$ — по определению такой единственный вектор, что $p = o + \overrightarrow{op}$. В силу свойства 3) операции $+$ из Определения 3.1 отображение χ_o определено, причем корректно, на всем S.

Докажем, что χ_o биективно. Во-первых оно инъективно, так как если $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oq}$, то $p = o + \overrightarrow{op} = o + \overrightarrow{oq} = q$, то есть $p = q$. Во-вторых, оно сюръективно. Действительно, если $\mathbf{v} \in V$ — произвольный вектор, то положим $p := o + \mathbf{v} \in S$, тогда $\chi_o(p) = \overrightarrow{op} = \mathbf{v}$.

Таким образом, выбор начальной точки $o \in S$ позволяет отождествить множество точек S с множеством векторов V, при этом точке $p \in S$ ставится в соответствие ее радиус-вектор $\chi_o(p) = \overrightarrow{op}$ и сложение $q = p + \mathbf{v}$ ($\Rightarrow\;\; \mathbf{v} = \overrightarrow{pq}$) точки и вектора превращается в сложение векторов $\overrightarrow{oq} = \overrightarrow{op} + \mathbf{v}$. Заметим, что указанное отождествление зависит от выбора точки $o \in S$! Отождествление χ_o точек с векторами называется *векторизацией* аффинного пространства S относительно точки o.

Размерностью аффинного пространства $(S,\, V,\, +)$ называется размерность соответствующего векторного пространства V. Далее мы будем рассматривать случай аффинных пространств размерности один (“аффинная прямая”), два (“аффинная плоскость”) или три (“аффинное пространство”).

Пусть $(S,\, V,\, +)$ — двумерное или трехмерное аффинное пространство.

Определение 3.3. *Прямой* в $(S,\, V,\, +)$ называется подмножество точек в S вида

$$L := \{p_0 + \mathbf{u} \mid p_0 \in S \text{ — фиксированная точка, } \mathbf{u} \in U\},$$

где $U \subset V$ — одномерное подпространство в V. Подпространство $U \subset V$ называется *направляющим подпространством* прямой L. Любой ненулевой вектор $\mathbf{u} \in U$ называется *направляющим вектором* прямой L.

Легко видеть, что $(L, U, +)$ является в очевидном смысле одномерным аффинным подпространством в $(S, V, +)$. В качестве "начальной точки" p_0 прямой L может быть взята любая точка из L. Заметим, что направляющее подпространство U однозначно восстанавливается по прямой L: оно состоит в точности из векторов в V, соединяющих точки из L (то есть векторов вида $\overrightarrow{pq}$, где $p, q \in L$.).

Пусть $(S, V, +)$ — трехмерное аффинное пространство.

Определение 3.4. *Плоскостью* в $(S, V, +)$ называется подмножество точек в S вида

$$\Pi := \{p_0 + \mathbf{u} \mid p_0 \in S - \text{фиксированная точка, } \mathbf{u} \in U\},$$

где $U \subset V$ — двумерное подпространство в V. Подпространство $U \subset V$ называется *направляющим подпространством* плоскости Π.

Легко видеть, что $(\Pi, U, +)$ является в очевидном смысле двумерным аффинным подпространством в $(S, V, +)$. В качестве "начальной точки" p_0 плоскости Π может быть взята любая точка из Π. Заметим, что направляющее подпространство U однозначно восстанавливается по плоскости Π: оно состоит в точности из векторов в V, соединяющих точки из Π.

Вообще, можно ввести понятие аффинного подпространства в $(S, V, +)$ как подмножества $S' \subset S$ точек вида

$$S' = \{p_0 + \mathbf{u} \mid p_0 \in S - \text{фиксированная точка, } \mathbf{u} \in U\},$$

где $U \subset V$ — некоторое линейное подпространство. В частности, если $\dim U = 0, 1, 2$ тогда S' — точка, прямая и плоскость. Легко показать, что пересечение аффинных подпространств в $(S, V, +)$, при условии что оно непусто, снова является аффинным подпространством.

Пусть теперь V — евклидово пространство. Тогда, как мы знаем, в V можно измерять длины векторов и углы между ними.

Определение 3.5. Если V — евклидово пространство, то аффинное пространство $(S, V, +)$ называется *аффинным евклидовым пространством* или просто *евклидовым пространством*, если из контекста ясно что оно аффинное. В случае $\dim V = 2$ или 3 аффинное евклидово пространство $(S, V, +)$ называется *евклидовой плоскостью* или *евклидовым пространством* соответственно.

Если $(S, V, +)$ — евклидово пространство, то определено расстояние d между его точками, $d(p, q) := |\overrightarrow{pq}|$, углы между прямыми в нем и т.д.

3.2 Декартовы системы координат

Пусть $(S, V, +)$ — аффинная плоскость (случай аффинного пространства аналогичен).

Определение 3.6. *Декартовой системой координат* (кратко дск) в $(S, V, +)$ называется пара $o, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, состоящая из точки $o \in S$ и базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в V. Если пространство $(S, V, +)$ евклидово, то декартова система координат называется *прямоугольной* (кратко пдск), если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ортонормированный.

Если на плоскости $(S, V, +)$ задана дск o, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, то координаты $(x_1, x_2)^T$ произвольной точки $p \in S$ — это по определению координаты вектора $\overrightarrow{op} \in V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$\overrightarrow{op} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

Эквивалентно, чтобы получить координаты точек $(S, V, +)$ в дск o, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, мы производим векторизацию $\chi_o \colon S \to V$ относительно точки $o \in S$, и тогда координаты точки $p \in S$ — это координаты вектора $\chi_o(p) = \overrightarrow{op}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ пространства V.

Легко видеть, что координаты точки $q = p + \mathbf{v}$ равны суммам соответствующих координат точки p и вектора $\mathbf{v}$. Действительно, при векторизации сложение точки и вектора превращается в сложение векторов $\overrightarrow{oq} = \overrightarrow{op} + \mathbf{v}$ и, как мы знаем, координаты вектора $\overrightarrow{oq}$ равны суммам соответствующих координат векторов $\overrightarrow{op}$ и $\mathbf{v}$. Отсюда получаем, что *координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ равны разностям соответствующих координат точек q и p.*

Мы видим, что подобно тому как выбор базиса в векторном пространстве V приводит к отождествлению V с $\mathbb{R}^n$, сохраняющему операции, выбор декартовой системы координат в аффинном пространстве $(S, V, +)$ приводит к отождествлению S с $\mathbb{R}^n$ (каждой точке ставится в соответствие ее столбец координат), при этом V также отождествляется с $\mathbb{R}^n$ (координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ равны разностям соответствующих координат точек q и p) и операция “+” сложения точки p и вектора $\overrightarrow{pq}$ сводится к сумме соответствующих координатных столбцов, что дает координатный столбец точки q.

Замена декартовой системы координат. Пусть в $(S, V, +)$ заданы две дск o, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и o', $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. Пусть C — матрица перехода между базисами $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (то есть $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\, C$).

Пусть $p \in S$ — некоторая точка. Как связаны ее координаты в старой $(x_1, x_2)^T$ и новой $(x'_1, x'_2)^T$ системах координат, если известна матрица перехода C и координаты $(x^o_1, x^o_2)^T$ начала o' второй дск относительно первой?

Имеем:

$$\overrightarrow{op} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{oo'} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x^o_1 \\ x^o_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{o'p} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\, C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Подставим теперь приведенные выше разложения по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в равенство $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p}$, получим:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x^o_1 \\ x^o_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\, C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left(C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^o_1 \\ x^o_2 \end{pmatrix} \right).$$

Тогда из единственности разложения по базису получаем искомую связь между координатами:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^o_1 \\ x^o_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что мы выразили старые координаты произвольной точки p через ее новые координаты. Но матрица C как матрица перехода между базисами обратима, что позволяет выразить также новые координаты через старые.

Если обе дск o, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и o', $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ прямоугольные, то матрица C ортогональна. Вообще, для декартовых систем координат имеет место аналог Предложения 2.35.

3.3 Аффинные преобразования и их свойства

Пусть $(S, V, +)$ — аффинная плоскость или аффинное пространство.

Определение 3.7. Отображение $f\colon S \to S$ называется *аффинным преобразованием*, если $\forall\, p \in S$, $\forall\, \mathbf{v} \in V$

$$f(p + \mathbf{v}) = f(p) + \varphi(\mathbf{v}), \tag{22}$$

где

$$\varphi\colon V \to V$$

— некоторое линейное преобразование, называемое *дифференциалом* f и иногда обозначаемое df.

Аналогично можно было бы определить *аффинные отображения* между разными аффинными пространствами, но мы их здесь рассматривать не будем.

Из определения следует, что аффинное преобразование полностью определяется своим дифференциалом df и образом некоторой точки $p \in S$. Действительно, $\forall\, q \in S \quad f(q) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(p) + df(\overrightarrow{pq})$.

Замечание 3.8. Заметим, что дифференциал φ восстанавливается по аффинному преобразованию f. Действительно, пусть $\mathbf{v} = \overrightarrow{pq}$, то есть $q = p + \mathbf{v}$, тогда $f(q) = f(p) + \varphi(\mathbf{v}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{v}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$.

Замечание 3.9. Заметим также, что выполнение свойства (22) достаточно потребовать для некоторой точки $p \in S$ и для любого вектора $\mathbf{v} \in V$, тогда оно будет верно для любой точки $q \in S$. Действительно, пусть $f(p + \mathbf{v}) = f(p) + df(\mathbf{v})\ \ \forall\, \mathbf{v} \in V$. Тогда

$$f(q + \mathbf{v}) = f((p + \overrightarrow{pq}) + \mathbf{v}) = f(p + (\overrightarrow{pq} + \mathbf{v})) = f(p) + df(\overrightarrow{pq} + \mathbf{v}) =$$

$$f(p) + df(\overrightarrow{pq}) + df(\mathbf{v}) = f(p) + \overrightarrow{f(p)f(q)} + df(\mathbf{v}) = f(q) + df(\mathbf{v}).$$

Пример 3.10. Тождественное преобразование $f = \mathrm{id}_S\colon S \to S$ является аффинным. Заметим, что его дифференциал — тождественное линейное преобразование $\mathrm{id}_V\colon V \to V$.

Пример 3.11. *Параллельный перенос на вектор* $\mathbf{v} \in V$ определяется следующим образом:

$$t_{\mathbf{v}}\colon S \to S, \quad t_{\mathbf{v}}(p) = p + \mathbf{v} \quad \forall\, p \in S.$$

Если $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то $t_{\mathbf{0}} = \mathrm{id}_S$. Заметим, что $dt_{\mathbf{v}} = \mathrm{id}_V$. Действительно, если $\mathbf{w} = \overrightarrow{pq}$, то $dt_{\mathbf{v}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{t_{\mathbf{v}}(p)t_{\mathbf{v}}(q)} = \overrightarrow{pq}$.

Обратно, пусть $f\colon S \to S$ — аффинное преобразование такое, что $df = \mathrm{id}_V$. Покажем, что $f = t_{\mathbf{v}}$ для некоторого $\mathbf{v} \in V$. Действительно, положим $\mathbf{v} := \overrightarrow{pf(p)}$. Тогда для произвольной точки $q \in S$ имеем:

$$f(q) = f(p) + df(\overrightarrow{pq}) = f(p) + \overrightarrow{pq} = p + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{pq} = p + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{pf(p)} = q + \overrightarrow{pf(p)} = q + \mathbf{v}.$$

Пример 3.12. Пусть R_α — поворот аффинной евклидовой плоскости S вокруг точки $o \in S$ на угол α (см. Пример 2.42). Тогда R_α — аффинное преобразование S, причем $dR_\alpha = r_\alpha$ (в обозначениях того же примера). Действительно, по определению, $r_\alpha(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{R_\alpha(p)R_\alpha(q)}$ и поэтому

$$R_\alpha(q) = R_\alpha(p + \overrightarrow{pq}) = R_\alpha(p) + r_\alpha(\overrightarrow{pq}) = R_\alpha(p) + \overrightarrow{R_\alpha(p)R_\alpha(q)} = R_\alpha(q) \quad \forall\, q \in S.$$

При векторизации (см. стр. 39) аффинной плоскости S относительно точки o точки $p \in S$ отождествляются со своими радиус-векторами $\overrightarrow{op} \in V$, при этом поворот R_α плоскости S отождествляется с поворотом r_α векторной евклидовой плоскости V.

Пример 3.13. Пусть R_α — поворот аффинной евклидовой плоскости S вокруг точки p на угол α в положительном направлении. Пусть $o, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — правая пдск. Запишем R_α в координатах, если p имеет координаты $(x_0, y_0)^T$.

Пусть $q \in S$ — произвольная точка, $(x, y)^T$ — ее координаты. Имеем:

$$R_\alpha(q) = R_\alpha(p) + r_\alpha(\overrightarrow{pq}) = p + r_\alpha(\overrightarrow{pq}). \tag{23}$$

Вектор $\overrightarrow{pq}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ имеет координатный столбец $(x - x_0, y - y_0)^T$. Тогда $r_\alpha(\overrightarrow{pq})$ в том же базисе имеет координатный столбец

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha \\ (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда из (23) получаем, что точка $R_\alpha(q)$ имеет координаты

$$(x_0 + (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha,\ y_0 + (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha)^T.$$

Предложение 3.14. *Пусть $f, g\colon S \to S$ — аффинные преобразования. Тогда композиция $g \circ f\colon S \to S$ — аффинное преобразование, причем $d(g \circ f) = (dg) \circ (df)$.*

Доказательство. Пусть $p \in S$, $\mathbf{v} \in V$. Тогда имеем:

$$(g \circ f)(p + \mathbf{v}) = g(f(p + \mathbf{v})) = g(f(p) + df(\mathbf{v})) = g(f(p)) + dg(df(\mathbf{v})) = (g \circ f)(p) + (dg \circ df)(\mathbf{v}),$$

откуда вытекает аффинность композиции $g \circ f$, так как мы уже знаем из Предложения 2.46, что композиция линейных преобразований $dg \circ df$ линейна. ∎

Оказывается, что обратимость аффинного преобразования полностью определяется его дифференциалом.

Предложение 3.15. *Аффинное преобразование $f\colon S \to S$ биективно $\Leftrightarrow$ линейное преобразование $df\colon V \to V$ биективно.*

Доказательство. Рассмотрим векторизацию

$$\chi_o\colon S \to V,\ \ \chi_o(p) = \overrightarrow{op}$$

относительно некоторой точки $o \in S$. Напомним, что она является биекцией.

Заметим, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_o"'] & S \arrow[d, "\chi_{f(o)}"] \\ V \arrow[r, "df"'] & V \end{tikzcd} \tag{24}$$

коммутативна, то есть $\chi_{f(o)} \circ f = df \circ \chi_o$. Действительно, $(\chi_{f(o)} \circ f)(p) = \chi_{f(o)}(f(p)) = \overrightarrow{f(o)f(p)}$, $(df \circ \chi_o)(p) = df(\chi_o(p)) = df(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{f(o)f(p)}$.

Если df — биекция, то из диаграммы (24) следует, что $f = (\chi_{f(o)})^{-1} \circ df \circ \chi_o$ — биекция как композиция биекций. Если f — биекция, то из диаграммы (24) следует, что $df = \chi_{f(o)} \circ f \circ (\chi_o)^{-1}$ — биекция как композиция биекций. ■

Из Предложения 2.46 мы знаем, что преобразование, обратное к биективному линейному, тоже линейно. То же верно и для аффинных преобразований.

Предложение 3.16. *Пусть $f\colon S \to S$ — биективное аффинное преобразование. Тогда $f^{-1}\colon S \to S$ также аффинно, причем $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$.*

Доказательство. Для биективного преобразования f однозначно определено f^{-1}. Докажем, что f^{-1} аффинно. Точнее, докажем, что для $q = p + \mathbf{v}$

$$f^{-1}(q) = f^{-1}(p) + (df)^{-1}(\mathbf{v}) \quad (\text{то есть что } d(f^{-1}) = (df)^{-1}).$$

f^{-1} однозначно характеризуется тем, что это такое отображение $S \to S$, что $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_S$. С одной стороны, $f(f^{-1}(q)) = q$; с другой стороны, имеем:

$$f(f^{-1}(p) + (df)^{-1}(\mathbf{v})) = f(f^{-1}(p)) + df((df)^{-1}(\mathbf{v})) = p + \mathbf{v} = q,$$

откуда и вытекает требуемое. ■

Следствие 3.17. *Биективные аффинные преобразования $f\colon S \to S$ образуют группу относительно операции композиции. Эта группа обозначается* $\mathrm{GA}(S)$ *и называется группой аффинных преобразований аффинного пространства S.*

Отметим, что Предложение 3.14 теперь можно сформулировать так: если $(S, V, +)$ — аффинное пространство, то дифференциал d задает гомоморфизм из группы $\mathrm{GA}(S)$ в группу $\mathrm{GL}(V)$.

Определение 3.18. Биективное аффинное преобразование f аффинной плоскости (пространства) $(S, V, +)$ называется *собственным*, если df сохраняет ориентацию базисов пространства V, в противном случае f называется *несобственным.*

Заметим, что собственные аффинные преобразования образуют подгруппу $\mathrm{GA}_+(S)$ в $\mathrm{GA}(S)$, причем ее образ при гомоморфизме d есть подгруппа $\mathrm{GL}_+(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ линейных преобразований, сохраняющих ориентацию V (эквивалентно, задаваемых в произвольном базисе матрицами, имеющими положительный определитель).

Пример 3.19. $(S, V, +)$ — аффинное пространство (плоскость). Тогда $\mathrm{Trans}(S) = \{t_{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \in V\} \subset \mathrm{GA}(S)$ — подгруппа, состоящая из всех параллельных переносов (см. Пример 3.11). Сопоставление $\mathbf{v} \mapsto t_{\mathbf{v}}$ определяет изоморфизм $\mathrm{Trans}(S) \to (V, +)$ группы параллельных переносов с аддитивной группой $(V, +)$ пространства V (см. Определение 2.7). Пример 3.11 показывает, что $\mathrm{Trans}(S)$ является ядром гомоморфизма $d\colon \mathrm{GA}(S) \to \mathrm{GL}(V)$ (см. Определение 1.33).

Пример 3.20. *Гомотетией с центром в точке $o \in S$ и коэффициентом λ* называется аффинное преобразование, задаваемое формулой $f(o + \mathbf{v}) = o + \lambda\,\mathbf{v}$. Заметим, что из определения следует, что $df = \lambda\,\mathrm{id}_V$.

Покажем, что, обратно, аффинное преобразование $f\colon S \to S$ такое, что $df = \lambda\,\mathrm{id}_V$, $\lambda \neq 1$, есть гомотетия с центром в некоторой точке $o \in S$. Центр гомотетии o характеризуется тем, что это — неподвижная точка преобразования f, то есть $f(o) = o$. Покажем, что неподвижная точка в нашем случае действительно существует.

Пусть p — произвольная точка аффинной плоскости S. Имеем:

$$f(o) = f(p + \overrightarrow{po}) = f(p) + df(\overrightarrow{po}) = f(p) + \lambda\,\mathrm{id}_V(\overrightarrow{po}) = f(p) + \lambda\,\overrightarrow{po},$$

и если o — неподвижная точка, то $o = f(p) + \lambda\,\overrightarrow{po}$, то есть (рассматривая векторизацию относительно точки p) $\overrightarrow{po} = \overrightarrow{pf(p)} + \lambda\,\overrightarrow{po}$, тогда $\overrightarrow{po} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{pf(p)}$, откуда находится искомая неподвижная точка o.

Покажем теперь, что f — гомотетия с центром в неподвижной точке o. Пусть $q \in S$ — произвольная точка, тогда $f(q) = f(o + \overrightarrow{oq}) = f(o) + df(\overrightarrow{oq}) = o + \lambda\,\overrightarrow{oq}$, то есть f — действительно гомотетия с центром в точке o и коэффициентом λ.

Задача 3.21. *Доказать, что композиция гомотетий с центрами в точках $p \neq q$ и коэффициентами λ, μ при $\lambda\mu \neq 1$ — гомотетия, а при $\lambda\mu = 1$ — нетривиальный*[20] *параллельный перенос.*

Заметим, что если S — нечетномерное аффинное пространство, то гомотетия с коэффициентом λ, $\lambda < 0$, является несобственным, а если S — четномерное, то собственным аффинным преобразованием.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — некоторый базис в 3-мерном векторном пространстве V. Для произвольной системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ пространства V существует причем единственное линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$ такое, что $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$. А именно для произвольного вектора $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ в силу линейности φ мы должны положить

$$\varphi(\mathbf{v}) = v_1\varphi(\mathbf{e}_1) + v_2\varphi(\mathbf{e}_2) + v_3\varphi(\mathbf{e}_3) = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

Так как разложение по базису единственно, то преобразование φ корректно определено на всех векторах V. Таким образом, существует не более одного линейного преобразования, удовлетворяющего приведенному условию. Далее прямым вычислением можно проверить, что так определенное преобразование линейно, то есть для любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$, и для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{v} \in V$ $\varphi(\lambda\,\mathbf{v}) = \lambda\,\varphi(\mathbf{v})$. Причем φ биективно $\Leftrightarrow$ система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ линейно независима ($\Leftrightarrow$ является базисом в V). Заметим, что аналогичные рассуждения применимы и к 2-мерному[21] пространству V.

Воспользуемся приведенным результатом для доказательства следующего важного свойства аффинных преобразований.

Предложение 3.22. *Пусть $\{p_0, p_1, p_2\}$ — система из трех точек на аффинной плоскости $(S, V, +)$, не лежащих на одной прямой. Пусть $\{q_0, q_1, q_2\}$ — произвольная система их трех точек в S. Тогда существует, причем единственное, аффинное преобразование $f\colon S \to S$ такое, что $f(p_i) = f(q_i)$, $i = 0, 1, 2$, причем f биективно $\Leftrightarrow$ точки $\{q_0, q_1, q_2\}$ не лежат на одной прямой.*

[20] то есть на ненулевой вектор.

[21] а также к n-мерному для произвольного натурального n, но этот общий случай мы здесь не рассматриваем.

Доказательство. Положим $\mathbf{e}_i := \overrightarrow{p_0 p_i},\ i = 1, 2$. Так как $\{p_0, p_1, p_2\}$ не лежат на одной прямой, то система $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ линейно независима, то есть является базисом в V.

Положим $\mathbf{a}_i := \overrightarrow{q_0 q_i},\ i = 1, 2$. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — то единственное линейное преобразование, для которого $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i,\ i = 1, 2$. Для произвольной точки $p \in S$ положить

$$f(p) = f(p_0 + \overrightarrow{p_0 p}) = f(p_0) + \varphi(\overrightarrow{p_0 p}) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0 p})$$

— единственный способ определить аффинное преобразование, для которого $f(p_i) = f(q_i),\ i = 0, 1, 2$. То, что так определенное f является аффинным, следует теперь из Замечания 3.9. Отметим, что $\varphi = df$.

Биективность f при условии, что точки $\{q_0, q_1, q_2\}$ не лежат на одной прямой следует из того, что в этом случае векторы $\mathbf{a}_i,\ i = 1, 2$ образуют базис в V. ■

В частности, из доказанного предложения следует, что для любых двух треугольников на плоскости существует причем единственное аффинное преобразование, переводящее первый треугольник во второй с сохранением порядка вершин.

3.4 Движения

Определение 3.23. Аффинное преобразование f аффинной евклидовой плоскости (пространства) $(S, V, +)$ называется *движением*, если $|\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |\overrightarrow{pq}|\ \ \forall\, p, q \in S$.

Предложение 3.24. *Аффинное преобразование f — движение $\Leftrightarrow$ $df\colon V \to V$ — ортогональное преобразование евклидова пространства V.*

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$: Раз f — движение, то оно аффинно и, значит, $df\colon V \to V$ линейно. Кроме того, из $df(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ следует, что df сохраняет длины:

$$\forall\, p, q \in S \quad |\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |\overrightarrow{pq}| \quad \Rightarrow \quad \forall\, p, q \in S \quad |df(\overrightarrow{pq})| = |\overrightarrow{pq}| \quad \Rightarrow \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \quad |df(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|.$$

Теперь из Предложения 2.61 следует, что df ортогонально.

$\boxed{\Leftarrow}$: Из Предложения 2.61 мы знаем, что если преобразование $\varphi\colon V \to V$ евклидова пространства V ортогонально, то оно линейно и сохраняет длины. Таким образом, df линейно и

$$\forall\, \mathbf{v} \in V \quad |df(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}| \quad \Rightarrow \quad \forall\, p, q \in S \quad |df(\overrightarrow{pq})| = |\overrightarrow{pq}| \quad \Rightarrow \quad \forall\, p, q \in S \quad |\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |\overrightarrow{pq}|,$$

значит, f — движение. ■

Таким образом, согласно Предложению 3.15, всякое движение биективно, и как легко видеть, обратное к нему также является движением.

Следствие 3.25. *Все движения аффинного евклидового пространства (плоскости) $(S, V, +)$ образуют группу, обозначаемую* $\mathrm{Iso}(S)$.[22]

Оставшаяся часть этого параграфа предназначена для читателя, желающего глубже разобраться в этой теме и при первом чтении может быть пропущена.

Во-первых, докажем, что условие аффинности f в Определении 3.23 может быть опущено.

[22] Другое название движения — *изометрия*, isometry по-английски.

Предложение 3.26. *Если $f\colon S\to S$ — такое преобразование аффинной плоскости $(S, V, +)$, что $|\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |\overrightarrow{p\,q}|\ \ \forall\, p,\, q\in S$, то f — движение.*

Доказательство. Преобразования $f\colon S\to S$, сохраняющие расстояния между точками, назовем изометриями. Во-первых, заметим, что для любого вектора $\mathbf{v}\in V$ параллельный перенос $t_{\mathbf{v}}$ является изометрией, и, кроме того, композиция изометрий — изометрия. Пусть f — изометрия, $o\in S$, $\mathbf{v} := \overrightarrow{f(o)o}$, тогда $g := t_v\circ f$ — изометрия такая, что $g(o) = o$. Пусть $\chi_o\colon S\to V$ — векторизация относительно точки o, тогда $\widetilde{g} = \chi_o\circ g\circ\chi_o^{-1}\colon V\to V$ — единственное отображение, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\chi_o"'] & S \arrow[d, "\chi_o"] \\ V \arrow[r, "\widetilde{g}"] & V \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Покажем, что преобразование $\widetilde{g}$ является линейным. Пусть $\mathbf{v} = \overrightarrow{op}$, тогда $\widetilde{g}(\mathbf{v}) = \overrightarrow{og(p)}$. Пусть еще $\mathbf{w} = \overrightarrow{oq}$. Тогда

$$|\mathbf{w}-\mathbf{v}| = |\overrightarrow{oq}-\overrightarrow{op}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{g(p)g(q)}| = |\overrightarrow{og(q)}-\overrightarrow{og(p)}| = |\widetilde{g}(\mathbf{w})-\widetilde{g}(\mathbf{v})|,$$

то есть $|\mathbf{w}-\mathbf{v}|^2 = |\widetilde{g}(\mathbf{w})-\widetilde{g}(\mathbf{v})|^2$ и, в частности, $|\widetilde{g}(\mathbf{v})|^2 = |\mathbf{v}|^2$. Из полученного тождества так же как в доказательстве Предложения 2.61 получаем, что

$$(\widetilde{g}(\mathbf{w}),\, \widetilde{g}(\mathbf{v})) = (\mathbf{w},\, \mathbf{v}),$$

и поскольку векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ являются произвольными, то преобразование $\widetilde{g}$ является ортогональным. Тогда из Предложения 2.60 следует, что преобразование $\widetilde{g}$ является линейным.

Покажем теперь, что $g(q) = g(p)+\widetilde{g}(\overrightarrow{pq})\ \ \forall\, p,\, q\in S$, то есть что изометрия g является аффинным преобразованием с дифференциалом $dg = \widetilde{g}$. Действительно,

$$g(p)+\widetilde{g}(\overrightarrow{pq}) = g(p)+\widetilde{g}(\overrightarrow{oq}-\overrightarrow{op}) = g(p)+\overrightarrow{g(p)o}+\overrightarrow{og(q)} = g(q).$$

То есть $g(p+\overrightarrow{pq}) = g(p)+\widetilde{g}(\overrightarrow{pq})$, где $\widetilde{g}\colon V\to V$ — линейно, и, значит, $dg = \widetilde{g}$ и g аффинно.

И, наконец, f аффинно как композиция $f = t_{\mathbf{v}}^{-1}\circ g = t_{-\mathbf{v}}\circ g$ аффинных преобразований. Значит, всякая изометрия является движением. ■

Сформулируем теорему, дающую геометрическую классификацию движений плоскости.

Теорема 3.27. *Любое собственное движение плоскости есть либо поворот вокруг некоторой неподвижной точки, либо параллельный перенос. Любое несобственное движение плоскости есть скользящая симметрия, то есть композиция симметрии (отражения) относительно некоторой прямой со сдвигом (параллельным переносом) вдоль той же прямой.*

Эту теорему мы докажем в следующем параграфе.

Пример 3.28. Обозначим через $R_\alpha(p)$ поворот в евклидовой плоскости $(S, V, +)$ на угол α вокруг точки p. Его дифференциал есть, очевидно, r_α — поворот на тот же угол в V. Рассмотрим произведение $R_\beta(q)R_\alpha(p)$ поворотов вокруг разных точек. Его дифференциал является поворотом на угол $\alpha+\beta$ в V и, таким образом, если угол $\alpha+\beta$ не кратен 2π, то $R_\beta(q)R_\alpha(p)$ является поворотом на угол $\alpha+\beta$ вокруг некоторой третьей точки (в случае, если $\alpha+\beta$ кратен 2π, то $R_\beta(q)R_\alpha(p)$ — параллельный перенос). Чтобы найти эту третью точку, воспользуемся следующим Предложением.

Предложение 3.29. *Пусть $\triangle pqr$ — треугольник с вершинами в точках p, q, r и углами α, β, γ при этих вершинах. Тогда*

$$R_{2\gamma}(r)R_{2\beta}(q)R_{2\alpha}(p) = \mathrm{id}_S.$$

Доказательство. Обозначим через L, M, N прямые, содержащие стороны qr, rp, pq треугольника $\triangle pqr$. Пусть S_L, S_M, S_N — симметрии относительно этих прямых. Тогда (см. Задачу 2.65)

$$R_{2\alpha}(p) = S_N S_M, \quad R_{2\beta}(q) = S_L S_N, \quad R_{2\gamma}(r) = S_M S_L.$$

Перемножая полученные выражения и используя то, что квадрат S_K^2 произвольной симметрии S_K есть тождественное преобразование id_S, получаем требуемое соотношение. ■

Задача 3.30. *Пользуясь доказанным Предложением, указать способ построения центра поворота $R_\beta(q)R_\alpha(p)$ из Примера 3.28.*

3.5 Задание аффинных преобразований в координатах

Пусть o, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — декартова система координат в аффинном пространстве $(S, V, +)$. Напомним, что то, что точка $p \in S$ имеет в данной системе координат координатный столбец $(x_1, x_2, x_3)^T$ означает, что $\overrightarrow{op} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.

Пусть $f\colon S \to S$ — некоторое аффинное преобразование. Тогда $f(p) = f(o) + df(\overrightarrow{op})$, что, рассматривая векторизацию относительно точки o, также можно записать в виде

$$\overrightarrow{of(p)} = \overrightarrow{of(o)} + df(\overrightarrow{op}). \tag{25}$$

Пусть $\varphi := df$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ имеет матрицу $A = (a_{ij})$. Пусть, кроме того, $f(o)$ в выбранной дск имеет координаты $(b_1, b_2, b_3)^T$, а $f(p)$ — координаты $(x_1', x_2', x_3')^T$. Тогда (25) в координатах переписывается в виде

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right),$$

откуда, используя единственность разложения по базису, получаем следующее выражение координат $(x_1', x_2', x_3')^T$ образа $f(p)$ точки p через координаты $(x_1, x_2, x_3)^T$ самой точки p:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

что в развернутом виде записывается как

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3. \end{cases}$$

Итак, нами доказано следующее

Предложение 3.31. *Любое аффинное преобразование f пространства $(S,\, V,\, +)$ в дск $o,\, \{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$ задается выражением вида (26), где A — матрица линейного преобразования $df\colon V \to V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$, а $(b_1,\, b_2,\, b_3)^T$ — координаты точки $f(o)$.*

Заметим, что ввиду того, что декартовы координаты однозначно определяют точку, выражение вида (26) задает некоторое преобразование пространства S, ставящее в соответствие точке с координатами $(x_1,\, x_2,\, x_3)^T$ в выбранной дск точку с координатами $(x_1',\, x_2',\, x_3')^T$ в той же дск. Докажем, что верно утверждение, обратное предыдущему предложению.

Предложение 3.32. *Выражение вида (26) в произвольной дск $o,\, \{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$ определяет некоторое аффинное преобразование f пространства $(S,\, V,\, +)$, причем A — матрица df в базисе $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$.*

Доказательство. Заметим, что для любого линейного преобразования $\varphi\colon V \to V$ и любой пары точек $o,\, q \in S$ существует единственное аффинное преобразование $f\colon S \to S$ такое, что $df = \varphi$ и $f(o) = q$. Действительно, если такое f существует, то оно однозначно определяется формулой

$$f(p) = f(o + \overrightarrow{op}) = f(o) + df(\overrightarrow{op}) = q + \varphi(\overrightarrow{op}) \quad \forall\, p \in S.$$

Аффинность так определенного преобразования f вытекает из Замечания 3.9.

Далее, существует единственное линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$, которое имеет матрицу A в базисе $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$. Аналогично, существует единственная точка $q \in S$ такая, что $(b_1,\, b_2,\, b_3)^T$ — ее столбец координат в дск $o,\, \{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$. Тогда (26) — координатная запись в данной дск того единственного аффинного преобразования $f\colon S \to S$, для которого $df = \varphi$ и $f(o) = q$. Чтобы в этом убедиться, нужно повторить вывод формулы (26). ■

Замечание 3.33. Для доказательства того, что матрица A в координатной записи (26) является матрицей дифференциала df можно было также воспользоваться Замечанием 3.8 и тем, что координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ равны разностям соответствующих координат точек q и p. Используем краткую форму записи $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ для (26). Пусть $\mathbf{x}$ — координатный столбец точки p, тогда $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ — координатный столбец точки $f(p)$, аналогично, $\mathbf{y}$ — координатный столбец точки q, тогда $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$ — координатный столбец точки $f(q)$. Кроме того, $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ — координатный столбец вектора $\overrightarrow{pq}$, а $\mathbf{y}' - \mathbf{x}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b} - (A\mathbf{x} + \mathbf{b}) = A(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ — координатный столбец вектора $\overrightarrow{f(p)f(q)} = df(\overrightarrow{pq})$, откуда получаем, что действие линейного преобразования df на координатный столбец $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ сводится к умножению слева на матрицу A.

В качестве следствия из доказанного предложения и Предложения 3.15 получаем, что f — обратимо $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Если $\det A \neq 0$, то гомоморфизм $d\colon \mathrm{GA}(S) \to \mathrm{GL}(V)$ в координатах задается сопоставлением аффинному преобразованию (26) матрицы A. Убедимся в гомоморфности данного отображения, используя координаты. Снова используем краткую запись (26) в виде $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Пусть $g\colon S \to S$ — еще одно аффинное преобразование, задаваемое в той же дск выражением $\mathbf{x}' = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$. Тогда композиция $g \circ f$ в координатах записывается как $\mathbf{x}'' = B(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (BA)\mathbf{x} + (B\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (ср. Предложение 3.14).

Пусть $\det A \neq 0$, найдем выражение в координатах для f^{-1}. Если f^{-1} задается выражением $\mathbf{x}' = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$, то

$$\mathbf{x} = BA\mathbf{x} + B\mathbf{b} + \mathbf{c} \;\; \forall\, \mathbf{x} \;\; \Leftrightarrow \;\; (BA - E)\mathbf{x} + B\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \;\; \forall\, \mathbf{x} \;\; \Leftrightarrow$$

$$BA = E, \ \ \mathbf{c} = -B\mathbf{b} \ \ \Leftrightarrow \ \ B = A^{-1}, \ \mathbf{c} = -A^{-1}\mathbf{b}$$

(ср. Предложение 3.16).

Заметим, что всякое собственное движение аффинной евклидовой плоскости в декартовой прямоугольной системе координат записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

а всякое несобственное движение — в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

ср. Пример 2.63.

Приведем, наконец, обещанное в необязательной части предыдущего параграфа доказательство Теоремы 3.27. Итак, пусть $(S,\, V,\, +)$ — аффинная евклидова плоскость. Пусть сначала f — собственное движение S. Если $df = \mathrm{id}_V$, то есть $A = E$, то из Примера 3.11 мы знаем, что f — параллельный перенос. Если $df \neq \mathrm{id}_V$, то в пдск f имеет вид (27) с $\alpha \neq 2\pi n$. Покажем, что у f тогда есть неподвижная точка. Ее координатный столбец $\mathbf{x}$ должен удовлетворять уравнению

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x}, \quad \text{то есть} \ \ (E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{29}$$

где A — матрица из (27). Заметим, что

$$\det{(E-A)} = \begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} = 2 - 2\cos\alpha \neq 0,$$

откуда следует, что (29) имеет единственное решение, которое мы обозначим $\mathbf{x}_0$. Это — координатный столбец неподвижной точки p преобразования f. Пусть q — произвольная точка с координатным столбцом $\mathbf{x}$. Используя координатную форму равенства $q = p + \overrightarrow{pq}$, то есть $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, получаем для координатного столбца $\mathbf{x}'$ точки $f(q)$

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b} = A(\mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) + \mathbf{b} = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

откуда ясно, что в этом случае f является поворотом вокруг p на угол α, ср. Пример 3.13.

Пусть теперь f — несобственное движение евклидовой плоскости, тогда в произвольной пдск оно имеет вид (28). Используя результат Примера 2.63, можно выбрать такой ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$ в V, что матрица A дифференциала df в нем будет иметь вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. То есть в соответствующей пдск f запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + b_1 \\ -y + b_2 \end{pmatrix}.$$

Производя замену пдск по формуле

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x, \\ \widetilde{y} = y - \frac{b_2}{2}, \end{cases}$$

в новой пдск получим

$$\begin{cases} \widetilde{x}' = \widetilde{x} + b_1, \\ \widetilde{y}' = -\widetilde{y}, \end{cases}$$

что, очевидно, является координатной записью скользящего отражения — композиции отражения (симметрии) относительно прямой $\widetilde{x} = 0$ и параллельного переноса на вектор $(b_1,\, 0)^T$ вдоль этой прямой. ■

3.6 Геометрические свойства аффинных преобразований

В этом пункте f — *биективное* аффинное преобразование аффинной плоскости $(S,\, V,\, +)$.

Предложение 3.34. *При аффинном преобразовании $f\colon S \to S$ аффинной плоскости S*

1) прямые переходят в прямые, причем параллельные прямые — в параллельные прямые;

2) отрезки переходят в отрезки.

Доказательство. 1) Выше мы определили прямую как подмножество $L = \{p_0 + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\} \subset S$, где $U \subset V$ — одномерное подпространство. Если $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $L = \{p_0 + t\mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Если $p = p_0 + t\mathbf{a} \in L$ — произвольная точка, то $f(p) = f(p_0) + df(t\mathbf{a}) = f(p_0) + tdf(\mathbf{a})$.

Так как f биективно, то $\mathbf{b} := df(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, пусть также $q_0 := f(p_0)$, тогда $f(L) = \{q_0 + t\mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$ — некоторая прямая.

Если $L' \subset S$ — прямая, параллельная L, то $L' = \{p_0' + t\mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$, поэтому тот же вектор $\mathbf{b}$ является направляющим и для прямой $f(L')$, и, значит, прямые $f(L)$ и $f(L')$ также параллельны.

2) Отрезок $[p\,q]$ — множество точек вида $(1-t)p + tq = p + t\overrightarrow{pq}$, $0 \le t \le 1$. Тогда $f([p\,q]) = [f(p)\,f(q)] = f(p) + t\overrightarrow{f(p)f(q)}$, $0 \le t \le 1$. ■

Заметим, что при (биективном) аффинном преобразовании алгебраические кривые переходят в алгебраические кривые того же порядка — док-во см. в учебнике [3].

Предложение 3.35. *При аффинном преобразовании аффинной плоскости отношение направленных отрезков, лежащих на параллельных прямых, сохраняется.*

Доказательство. Отношение коллинеарных направленных отрезков $\overrightarrow{pq}$ и $\overrightarrow{rs}$ (при условии что $\overrightarrow{rs} \neq \mathbf{0}$) — это такое число λ, что $\overrightarrow{pq} = \lambda\,\overrightarrow{rs}$. Тогда ввиду линейности df имеем $df(\overrightarrow{pq}) = \lambda\, df(\overrightarrow{rs})$, то есть $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \lambda\,\overrightarrow{f(r)f(s)}$. ■

Следствие 3.36. *Если точка p делит отрезок $[q\,r]$ в отношении λ, то и ее образ $f(p)$ делит отрезок $f([q\,r]) = [f(q)\,f(r)]$ в отношении λ.*

Изучим теперь как меняется площадь фигур на аффинной евклидовой плоскости при аффинных преобразованиях.

Пусть $\{p_0,\, p_1,\, p_2\}$ — система из трех точек аффинной евклидовой плоскости S. Она определяет некоторый параллелограмм P — множество точек в S вида $p + t\overrightarrow{p_0p_1} + s\overrightarrow{p_0p_2}$, $0 \le t,\, s \le 1$. Положим $\mathbf{u} := \overrightarrow{p_0p_1}$, $\mathbf{v} := \overrightarrow{p_0p_2}$. *Ориентированная площадь* параллелограмма P — то же, что ориентированная площадь $S\{\mathbf{u},\, \mathbf{v}\}$[23] параллелограмма в V, построенного на упорядоченной паре векторов $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}$, или, другими словами, просто их псевдоскалярное произведение[24].

Пусть o, $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$ — дск в S. Пусть векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ имеют в базисе $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$ в V координатные столбцы $(u_1,\, u_2)^T$, $(v_1,\, v_2)^T$ соответственно; тогда из свойств ориентированной площади имеем (ср. (7)):

$$S\{\mathbf{u},\, \mathbf{v}\} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} S\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}.$$

Пусть $\varphi := df$. Заметим, что ориентированная площадь образа $f(P)$ параллелограмма P (который, очевидно, есть параллелограмм, определяемый точками $\{f(p_0),\, f(p_1),\, f(p_2)\}$) есть $S\{\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})\}$.

Заметим, что $\varphi(\mathbf{u}) = u_1\varphi(\mathbf{e}_1) + u_2\varphi(\mathbf{e}_2)$, $\varphi(\mathbf{v}) = v_1\varphi(\mathbf{e}_1) + v_2\varphi(\mathbf{e}_2)$. Отсюда

$$S\{\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})\} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} S\{\varphi(\mathbf{e}_1),\, \varphi(\mathbf{e}_2)\}.$$

Пусть линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$ имеет матрицу $A = (a_{ij})$. Тогда

$$S\{\varphi(\mathbf{e}_1),\, \varphi(\mathbf{e}_2)\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} S\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}.$$

Поэтому

$$\frac{S\{\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})\}}{S\{\mathbf{u},\, \mathbf{v}\}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A.$$

Таким образом, нами доказан следующий результат: *Отношение ориентированных площадей параллелограммов $f(P)$ и P равно* $\det A$, *где A — матрица преобразования df в базисе* $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2\}$.

Заметим, что отношение площадей не зависит от выбора базиса, значит, и *определитель* $\det A$, *матрицы линейного преобразования φ, не зависит от базиса*, и, значит, корректно определено число $\det\varphi := \det A$, где A — матрица преобразования φ в некотором базисе. Сформулируем полученный результат.

Предложение 3.37. *Отношение ориентированных площадей параллелограммов $f(P)$ и P равно* $\det(df)$.

Таким образом, модуль $\det(df)$ показывает, во сколько раз увеличивается (уменьшается) площадь параллелограммов при аффинном преобразовании f, в то время как знак этого определителя говорит о том, меняется или нет их ориентация.

Например, если f — движение аффинной евклидовой плоскости, то, как мы знаем, $\det(df) = \pm 1$, поэтому оно сохраняет неориентированные площади фигур (что, впрочем, и так очевидно).

Заметим, что, поскольку (неориентированная) площадь параллелограмма, определяемого точками $\{p_0,\, p_1,\, p_2\}$ равна удвоенной площади треугольника с вершинами в p_0, p_1, p_2, то отношение (неориентированной) площади образа треугольника к площади исходного треугольника равно

[23] это — то же, что форма площади (двумерного объема), согласованная с евклидовой структурой и ориентацией, рассмотренная нами выше; так как обозначение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ зарезервировано для скалярного произведения векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, здесь мы ее обозначим $S\{\mathbf{u},\, \mathbf{v}\}$.

[24] из векторной алгебры известно, что это — число, равное $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha$, где α — угол вращения от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$, измеряемый *против часовой стрелки.*

$|\det(df)|$. Так как любой многоугольник можно разбить в объединение конечного числа треугольников, пересекающихся только по границе, то аналогичный факт верен и для них. Рассмотрим класс фигур на плоскости, для которых площади вписанных и описанных многоугольников стремятся к общему пределу (такие фигуры называются *измеримыми по Жордану*, причем класс таких фигур достаточно широк для практических целей). Для них тоже верен аналогичный факт.

Перейдем теперь к доказательству важного результата о том, что любое аффинное преобразование плоскости является композицией движения и сжатий (растяжений) к двум взаимно перпендикулярным прямым. Он является аналогом Теоремы 2.66.

Теорема 3.38. *Пусть $f\colon S \to S$ — биективное аффинное преобразование аффинной евклидовой плоскости, тогда его можно представить в виде композиции $f = h_2 \circ h_1 \circ g$, где g — движение, а h_1, h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым.*

Доказательство. Пусть $\varphi := df\colon V \to V$ — дифференциал f. Из Леммы 2.67 мы знаем, что существует пара единичных взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ таких, что $\varphi(\mathbf{e}_1) \perp \varphi(\mathbf{e}_2)$.

Пусть $q := f(p)$, $\mathbf{e}'_1 := \frac{\varphi(\mathbf{e}_1)}{|\varphi(\mathbf{e}_1)|}$, $\mathbf{e}'_2 := \frac{\varphi(\mathbf{e}_1)}{|\varphi(\mathbf{e}_1)|}$. Тогда q, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ — пдск в S. Заметим, что существует причем единственное аффинное преобразование $g\colon S \to S$, переводящее пдск p, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в пдск q, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (ср. Предложение 3.22). Это преобразование является движением, поскольку его дифференциал ортонормированный базис переводит в ортонормированный.

Пусть теперь h_1, h_2 — аффинные преобразования $S \to S$, (однозначно) определяемые условиями:

$$h_1(q) = q,\ \ h_1(\mathbf{e}'_1) = \varphi(\mathbf{e}_1),\ \ h_1(\mathbf{e}'_2) = \mathbf{e}'_2;\quad h_2(q) = q,\ \ h_2(\mathbf{e}'_1) = \mathbf{e}'_1,\ \ h_2(\mathbf{e}'_2) = \varphi(\mathbf{e}_2).$$

Тогда легко проверить, что h_1 является сжатием с коэффициентом $|\varphi(\mathbf{e}_1)|$ к прямой L_1, проходящей через точку q и направляющим вектором $\mathbf{e}'_2$, а h_2 — сжатием с коэффициентом $|\varphi(\mathbf{e}_2)|$ к прямой L_2, проходящей через точку q и направляющим вектором $\mathbf{e}'_1$ и, кроме того, $f = h_2 \circ h_1 \circ g = h_1 \circ h_2 \circ g$, поскольку и левая и правая части дск p, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ переводят в дск q, $\{\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2)\}$. ∎

3.7 Добавление 1: Основная теорема аффинной геометрии

В этом параграфе мы докажем важную теорему о том, что всякое непрерывное биективное преобразование аффинной плоскости, переводящее прямые в прямые, является аффинным. Заметим, что это утверждение верно и без предположения о непрерывности, хотя доказательство в этом случае сложнее (см. [14]).

Ниже мы используем понятие непрерывности применительно к преобразованию $f\colon S \to S$, где $S = (S, V, +)$ — аффинная плоскость. Для читателей, знакомых пока только с понятием непрерывности "обычных" функций нескольких переменных, поясним, как понимать непрерывность в рассматриваемом случае.

Как объяснялось в параграфе 3.2, выбор в S произвольной декартовой системы координат o, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ задает отождествление S с $\mathbb{R}^2$, после этого преобразование f превращается в преобразование $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задание которого равносильно заданию двух функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Непрерывность f равносильна непрерывности каждой из этих функций.* В частности, так определенное понятие непрерывности f не зависит от выбора дск, с помощью которой мы отождествили S с $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3.39. *Пусть $f\colon S \to S$ — взаимно однозначное непрерывное преобразование аффинной плоскости $S = (S, V, +)$, обладающее следующим свойством: если p_1, p_2, p_3 — произвольные три точки, лежащие на одной прямой в S, то и их образы $q_i := f(p_i)$, $i = 1, 2, 3$ тоже лежат на одной прямой. Тогда $f\colon S \to S$ — аффинное преобразование.*

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

1) Из условия следует, что если $L \subset S$ — некоторая прямая, то $f(L) \subset L'$, где $L' \subset S$ — некоторая прямая. Покажем, что тогда $f(L) = L'$.

Если $p, q \in S$, $p \neq q$, то единственную прямую $L \subset S$, проходящую через эти точки, будем обозначать L_{pq}.

Пусть $p_1, p_2 \in S$, $p_1 \neq p_2$, $q_i := f(p_i)$, $i = 1, 2 \Rightarrow f(L_{p_1p_2}) \subset L_{q_1q_2}$. Пусть $q_3 \in L_{q_1q_2}$ — произвольная точка; покажем, что $p_3 := f^{-1}(q_3) \in L_{p_1p_2}$. Предположим противное, то есть что $p_3 \notin L_{p_1p_2}$. Тогда $L_{p_1p_3}$ и $L_{p_2p_3}$ — две различные прямые, отличные от $L_{p_1p_2}$. Пусть $r \in S$ — произвольная точка, отличная от p_3. Тогда через r можно провести прямую L, пересекающую прямые $L_{p_1p_3}$ и $L_{p_2p_3}$ в двух различных точках, скажем, p_1' и p_2' соответственно. Так как $f(p_i) \in L_{q_1q_2}$, $i = 1, 2, 3$, то $f(L_{p_1p_3}) \subset L_{q_1q_2}$, $f(L_{p_2p_3}) \subset L_{q_1q_2}$. Поскольку $p_i' \in L_{p_ip_3}$, $i = 1, 2$, то $f(p_i') \in L_{q_1q_2}$, $i = 1, 2$. Наконец, $p_1', p_2', r \in L \;\Rightarrow\; f(r) \in L_{q_1q_2}$. Поскольку $r \in S$ — произвольная точка плоскости, отличная от p_3, то $f(S) \subset L_{q_1q_2}$, вопреки предположению о биективности f. Тем самым мы доказали, что преобразование f произвольную прямую $L \subset S$ взаимно-однозначно отображает на некоторую прямую $L' \subset S$.

2) Далее, если прямые L и L_1, параллельны, то и $f(L)$ и $f(L_1)$ параллельны. Действительно, в противном случае существует точка $q \in f(L) \cap f(L_1)$, тогда $f^{-1}(q) \in L \cap L_1$, что противоречит параллельности прямых L и L_1.

3) Пусть $[pq]$ обозначает направленный отрезок ($=$ упорядоченную пару точек) в S с началом в p и концом в q. Определим преобразование $\widetilde{f}$ из множества направленных отрезков в S в себя по формуле $\widetilde{f}([pq]) = [f(p)f(q)]$. Докажем теперь, что $\widetilde{f}$ корректно определяет некоторое преобразование $\varphi = \varphi(f)\colon V \to V$ пространства свободных векторов V. Пусть $[pq] \sim [p'q']$ (то есть $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'}$ как элементы пространства V), предположим дополнительно что $p' \notin L_{pq}$ и $p \neq q$. Тогда $pqq'p'$ — параллелограмм в S. Так как прямые L_{pq} и $L_{p'q'}$ (соотв. $L_{pp'}$ и $L_{qq'}$) параллельны, то и прямые $L_{f(p)f(q)}$ и $L_{f(p')f(q')}$ (соотв. $L_{f(p)f(p')}$ и $L_{f(q)f(q')}$) параллельны, откуда $\widetilde{f}([pq]) = [f(p)f(q)] \sim [f(p')f(q')] = \widetilde{f}([p'q'])$. Несложный разбор других случаев оставляем читателю. Таким образом, полагая $\varphi(\overrightarrow{pq})$ равным классу эквивалентности $\overrightarrow{f(p)f(q)} \in V$ направленного отрезка $\widetilde{f}([pq])$, получаем корректно определенное преобразование $\varphi\colon V \to V$.

4) Покажем теперь, что $\varphi\colon V \to V$ линейно. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Фиксируя точку $p \in S$ получаем единственные точки $q, r \in S$ такие, что $\mathbf{v} = \overrightarrow{pq}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{qr}$. Тогда имеем:

$$\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi(\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = \varphi(\overrightarrow{pr}) = \overrightarrow{f(p)f(r)}$$

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} + \overrightarrow{f(q)f(r)} = \varphi(\overrightarrow{pq}) + \varphi(\overrightarrow{qr}) = \varphi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}).$$

В частности, полагая $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, получаем $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Теперь покажем, что $\varphi(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{v})\;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. Ясно, что $\varphi(n\mathbf{v}) = n\varphi(\mathbf{v})$, если n — натуральное. Кроме того, $\varphi(\mathbf{v}) + \varphi(-\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v} - \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, откуда $\varphi(-\mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v})$. Значит, $\varphi(n\mathbf{v}) = n\varphi(\mathbf{v})$, если n — целое. Кроме того, для натурального n имеем:

$$n\varphi\left(\frac{1}{n}\mathbf{v}\right) = \varphi\left(\frac{1}{n}\mathbf{v}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{1}{n}\mathbf{v}\right) = \varphi\left(\mathbf{v}\right),$$

то есть $\varphi(\frac{1}{n}\mathbf{v}) = \frac{1}{n}\varphi(\mathbf{v})$. Таким образом, нами доказано равенство $\varphi(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{v})$ для произвольного $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Задача 3.40. *1) Используя непрерывность преобразования $f\colon S \to S$ докажите непрерывность преобразования $\varphi\colon V \to V$.*

2) Докажите, что для любого $\mathbf{v} \in V$ функция

$$g\colon \mathbb{R} \to V, \quad g(\alpha) := \varphi(\alpha\mathbf{v}) - \alpha\varphi(\mathbf{v}) \tag{30}$$

непрерывна.

Из непрерывности функции (30) и того, что она равна нулю для любого $\alpha \in \mathbb{Q}$ следует, что она тождественно равна нулю для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Итак, мы доказали, что преобразование $\varphi\colon V \to V$ линейно.

5) Из доказанного получаем, что для произвольных $p,\, q \in S$

$$f(q) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(p) + \overrightarrow{f(p)f(q)} = f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq}),$$

где $\varphi\colon V \to V$ линейно, откуда следует, что f — аффинно и $\varphi = df$. ∎

3.8 Добавление 2: Барицентрические координаты

Точки аффинного пространства складывать нельзя, но можно придать смысл некоторым их линейным комбинациям.

Определение 3.41. *Барицентрической линейной комбинацией* точек $p_1, \ldots, p_k$ аффинного пространства S называется выражение вида

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i, \tag{31}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, при условии $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

По определению, барицентрическая линейная комбинация (31) равна точке $p \in S$, определяемой равенством $\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{op_i}$, где $o \in S$ — некоторая точка.

Во-первых, проверим, что точка p корректно определена. Произвол в ее определении заключался в выборе точки $o \in S$. Пусть o' — другая точка. Тогда

$$\overrightarrow{o'p} = \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op} = \overrightarrow{o'o} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \overrightarrow{op_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, (\overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op_i}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \overrightarrow{o'p_i},$$

где в третьем равенстве мы использовали условие $\sum_i \lambda_i = 1$.

Центром тяжести p_c системы точек $p_1, \ldots, p_k \in S$ называется точка

$$p_c = \frac{1}{k}(p_1 + \ldots + p_k).$$

Например, центр тяжести r точек $p,\, q \in S$ есть середина отрезка $[p\,q]$. Действительно, $\forall\, o \in S$ $\overrightarrow{or} = \frac{1}{2}\overrightarrow{op} + \frac{1}{2}\overrightarrow{oq}$. Положим $o = p$, тогда $\overrightarrow{pr} = \frac{1}{2}\overrightarrow{pq}$.

Задача 3.42. *Доказать, что в аффинной плоскости центр тяжести точек* p, q, r *есть точка пересечения медиан треугольника с вершинами* p, q, r.

Более общо, барицентрическая линейная комбинация $\lambda p + \mu q$ при λ, $\mu \geq 0$ определяет точку r, которая делит отрезок $[p\,q]$ в отношении $\mu : \lambda$. Действительно, полагая $o = r$ в $\overrightarrow{or} = \lambda\overrightarrow{op} + \mu\overrightarrow{oq}$, получаем $\lambda\overrightarrow{pr} = \mu\overrightarrow{rq}$, то есть $\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{rq}} = \frac{\mu}{\lambda}$ (при $\lambda = 0$ получаем $r = q$). Случаи $\lambda < 0$ или $\mu < 0$ читателю предлагается исследовать самостоятельно.

При решении задач бывает полезен следующий легко проверяемый факт: для любой пары α, β чисел такой, что $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha \neq 0$ существует причем единственное λ, $\lambda \neq -1$ такое, что $\alpha = \frac{1}{1+\lambda}$, $\beta = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. Тогда точка $\alpha p + \beta q$ делит отрезок $[p\,q]$ в отношении $\lambda : 1$.

Предложение 3.43. *Если* $f\colon S \to S$ *— аффинное преобразование, то для произвольной барицентрической линейной комбинации* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i$ *имеем:*

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f(p_i).$$

Доказательство. Пусть $p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i$. Тогда по определению барицентрической линейной комбинации имеем:

$$f(p) = f(o + \overrightarrow{op}) = f(o) + df\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \overrightarrow{op_i}\right) = f(o) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, df(\overrightarrow{op_i}) =$$

$$f(o) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \overrightarrow{f(o)f(p_i)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, (f(o) + \overrightarrow{f(o)f(p_i)}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f(p_i). \quad \blacksquare$$

В частности, центр тяжести системы точек при аффинном преобразовании переходит в центр тяжести их образов.

Определение 3.44. Система точек $\{p_0, \ldots, p_k\}$ из $(S, V, +)$ называется *аффинно независимой*, если никакую из них нельзя представить в виде барицентрической линейной комбинации остальных.

Лемма 3.45. Система точек $\{p_0, \ldots, p_k\}$ аффинно независима тогда и только тогда, когда система векторов $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$ из V линейно независима.

Доказательство. Пусть, например, p_0 представляется в виде барицентрической линейной комбинации остальных точек, то есть $p_0 = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_k p_k$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Тогда $\mathbf{0} = \overrightarrow{p_0p_0} = \lambda_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{p_0p_k}$ — нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю.

Обратно, пусть

$$\mathbf{0} = \lambda_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{p_0p_k} \tag{32}$$

— нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю. Если $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Пусть $p := \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_k p_k$. Тогда $\overrightarrow{p_0p} = \lambda_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{p_0p_k} = \mathbf{0}$, следовательно, $p = p_0$.

Теперь предположим, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, но $\lambda_1 \neq 0$. Используя соотношения $\overrightarrow{p_0p_i} = -\overrightarrow{p_1p_0} + \overrightarrow{p_1p_i}$, из (32) получаем линейную зависимость

$$\mathbf{0} = \lambda_0\overrightarrow{p_1p_0} + \lambda_2\overrightarrow{p_1p_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{p_1p_k},$$

в которой $\lambda_0 := -\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_k = 0$. Тогда $\lambda_0 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = -\lambda_1 \neq 0$ и, значит, по предыдущему p_1 является барицентрической комбинацией точек $p_0, p_2, \ldots, p_k$. $\blacksquare$

Легко видеть, что система $\{p_0, \ldots, p_k\}$ точек из $(S,\, V,\, +)$ аффинно независима $\Leftrightarrow$ наименьшее (по включению) аффинное подпространство в $(S,\, V,\, +)$, содержащее эти точки, имеет размерность k, и в этом случае система векторов $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$ является базисом в направляющем подпространстве этого аффинного подпространства.

Чтобы упростить обозначения, мы далее в этом параграфе положим, что $S = (S,\, V,\, +)$ есть аффинная плоскость. Тогда максимальная аффинно независимая система в S состоит из трех точек. Возьмем такую систему $\{p_0, p_1, p_2\}$. Аффинная независимость в данном случае означает, что эти три точки не лежат в одном одномерном аффинном подпространстве (на одной прямой), и, в частности, никакие две из них не совпадают.

Предложение 3.46. *Для любой точки $p \in S$ существует единственная упорядоченная тройка чисел (x_0, x_1, x_2) с условием $x_0 + x_1 + x_2 = 1$, такая, что $p = x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2$ (барицентрическая линейная комбинация).*

Доказательство. Разложим вектор $\overrightarrow{p_0p} \in V$ по базису $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}\}$ в V, получим

$$\overrightarrow{p_0p} = x_1\overrightarrow{p_0p_1} + x_2\overrightarrow{p_0p_2}$$

для некоторых однозначно определенных $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$. Пусть $x_0 := 1 - x_1 - x_2$, тогда легко видеть что $p = x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2$, причем $x_0 + x_1 + x_2 = 1$.

Докажем единственность разложения. Пусть $p = x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2 = x_0'p_0 + x_1'p_1 + x_2'p_2$, причем $x_0 + x_1 + x_2 = 1 = x_0' + x_1' + x_2'$. Рассматривая векторизацию относительно p_0, получаем

$$\overrightarrow{p_0p} = x_1\overrightarrow{p_0p_1} + x_2\overrightarrow{p_0p_2} = x_1'\overrightarrow{p_0p_1} + x_2'\overrightarrow{p_0p_2},$$

откуда $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2'$. Значит, и $x_0 = 1 - x_1 - x_2 = x_0'$. $\blacksquare$

Произвольная система $\{p_0, p_1, p_2\}$ аффинно независимых точек плоскости S называется *барицентрической системой координат*, а для точки $p \in S$ тройка чисел (x_0, x_1, x_2) как в условии предыдущего предложения называется *барицентрическими координатами* точки p относительно системы координат $\{p_0, p_1, p_2\}$.

Барицентрические координаты x_0, x_1, x_2 точки p имеют простой физический смысл: они равны массам (не обязательно положительным, но удовлетворяющим условию $x_1 + x_2 + x_3 = 1$), которые нужно поместить в точки p_0, p_1, p_2, чтобы p была центром масс такой системы. В частности, все $x_i > 0$ тогда и только тогда, когда точка p лежит внутри треугольника с вершинами в точках $p_0,\, p_1,\, p_2$.

Продемонстрируем теперь применение барицентрических координат к решению задач. Во-первых, докажем следующую *теорему Чевы*:

Теорема 3.47. *Пусть точки u, v, w лежат на сторонах qr, rp, pq треугольника $\triangle pqr$ и делят их в отношении $\lambda : 1$, $\mu : 1$, $\nu : 1$ соответственно. Тогда прямые pu, qv, rw имеют общую точку тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu = 1$, см. Рис. 12.*

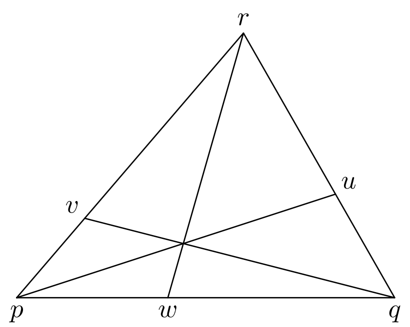


Рис. 12: Теорема Чевы

Доказательство. Найдем барицентрические координаты точек u, v, w относительно барицентрической системы координат $\{p, q, r\}$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1+\lambda}q + \frac{\lambda}{1+\lambda}r \quad \Rightarrow \quad u\left(0,\, \frac{1}{1+\lambda},\, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right); \\ v &= \frac{1}{1+\mu}r + \frac{\mu}{1+\mu}p \quad \Rightarrow \quad v\left(\frac{\mu}{1+\mu},\, 0,\, \frac{1}{1+\mu}\right); \\ w &= \frac{1}{1+\nu}p + \frac{\nu}{1+\nu}q \quad \Rightarrow \quad w\left(\frac{1}{1+\nu},\, \frac{\nu}{1+\nu},\, 0\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Точки, лежащие на прямой pu, являются барицентрическими линейными комбинациями вида $\alpha p + \beta u,\ \alpha + \beta = 1$, и, значит, в системе $\{p, q, r\}$ имеют барицентрические координаты

$$\left(\alpha,\, \beta\frac{1}{1+\lambda},\, \beta\frac{\lambda}{1+\lambda}\right).$$

Легко видеть, что барицентрические координаты $(x,\, y,\, z)$, этих точек характеризуются тем, что $z : y = \lambda$. Аналогично, барицентрические координаты $(x,\, y,\, z)$ точек, лежащих на прямой qv, характеризуются тем, что $x : z = \mu$, а точек прямой rw — тем, что $y : x = \nu$. Координаты $(x,\, y,\, z)$ общей точки трех данных прямых удовлетворяют системе $z : y = \lambda,\ x : z = \mu,\ y : x = \nu$, и такая точка существует $\Leftrightarrow \lambda\mu\nu = 1$. ■

Используя теорему Чевы, можно доказать известные школьные теоремы о медианах, биссектрисах и высотах треугольника.

Предложение 3.48. *Точки p, q, r аффинно независимы $\Leftrightarrow$ матрица, составленная из их барицентрических координат, невырождена.*

Доказательство. Пусть относительно некоторой барицентрической системы координат $\{p_0, p_1, p_2\}$ точки p, q, r имеют барицентрические координаты $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ соответственно. Имеем:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 - \alpha_1 & \gamma_1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \alpha_2 & \gamma_2 - \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \gamma_1 - \alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha_2 & \gamma_2 - \alpha_2 \end{vmatrix},$$

где мы, во-первых, к первой строке прибавили сумму второй и третьей, во-вторых, из второго и третьего столбцов вычли первый, и, наконец, использовали формулу разложения определителя по

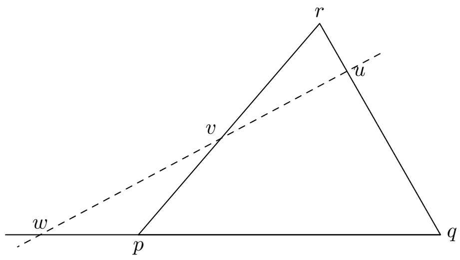


Рис. 13: Теорема Менелая

первой строке. Легко видеть, что последний определитель составлен из координат векторов $\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{pr}$ в базисе $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$. Действительно,

$$\overrightarrow{p_0p} = \alpha_1\overrightarrow{p_0p_1} + \alpha_2\overrightarrow{p_0p_2}, \quad \overrightarrow{p_0q} = \beta_1\overrightarrow{p_0p_1} + \beta_2\overrightarrow{p_0p_2}, \quad \overrightarrow{p_0r} = \gamma_1\overrightarrow{p_0p_1} + \gamma_2\overrightarrow{p_0p_2},$$

откуда следует требуемое. Значит, p, q, r аффинно независимы $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{pr}$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ определитель, составленный из их координат не равен нулю $\Leftrightarrow$ определитель, составленный из барицентрических координат точек p, q, r не равен нулю. ■

Докажем теперь следующую *теорему Менелая.*

Теорема 3.49. *Пусть точки u, v, w, лежащие на сторонах qr, rp, pq треугольника $\triangle pqr$ или их продолжениях, делят эти стороны в отношениях $\lambda : 1$, $\mu : 1$, $\nu : 1$ соответственно. Тогда точки u, v, w лежат на одной прямой $\Leftrightarrow$ $\lambda\mu\nu = -1$, см. Рис. 13.*

Доказательство. Барицентрические координаты точек u, v, w относительно барицентрической системы координат $\{p, q, r\}$ уже найдены нами в (33). Составим из них определитель и воспользуемся предыдущим предложением. Имеем:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{1+\lambda} & \frac{\lambda}{1+\lambda} \\ \frac{\mu}{1+\mu} & 0 & \frac{1}{1+\mu} \\ \frac{1}{1+\nu} & \frac{\nu}{1+\nu} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \mu & 0 & 1 \\ 1 & \nu & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}(1+\lambda\mu\nu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\mu\nu = -1. \quad ■$$

3.9 Добавление 3: Группа аффинных преобразований и ее подгруппы

Пусть $o \in S$ — фиксированная точка. Рассмотрим в $\mathrm{GA}(S)$ подгруппу G_o, состоящую из преобразований, оставляющих точку o на месте. Пусть $d'\colon G_o \to \mathrm{GL}(V)$ — ограничение на G_o дифференциала $d\colon \mathrm{GA}(S) \to \mathrm{GL}(V)$.

Предложение 3.50. *d' является изоморфизмом группы G_o на $\mathrm{GL}(V)$.*

Доказательство. То, что d' является гомоморфизмом, следует из того, что d — гомоморфизм, что было установлено выше. Покажем, во-первых, что d' инъективен. Заметим, что если $f \in G_o$, то есть $f(o) = o$, то $df(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{of(p)}$. Пусть $df = dg$ для f, $g \in G_o$; тогда имеем:

$$df(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{of(p)} = dg(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{og(p)} \;\; \forall\, p \in S \;\; \Rightarrow \;\; f(p) = g(p) \;\; \Rightarrow \;\; d' \text{ инъективен.}$$

Покажем теперь, что d' сюръективен. Для произвольного $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ обозначим через $\omega_o(\varphi)$ преобразование из G_o, заданное формулой $\omega_o(\varphi)(p) := o + \varphi(\overrightarrow{op}) \ \ \forall\, p \in S$. Пусть $q = p + \mathbf{v}$, тогда имеем:

$$\omega_o(\varphi)(q) = o + \varphi(\overrightarrow{oq}) = o + \varphi(\overrightarrow{op} + \mathbf{v}) = (o + \varphi(\overrightarrow{op})) + \varphi(\mathbf{v}) = \omega_o(\varphi)(p) + \varphi(\mathbf{v}),$$

откуда получаем, что $\omega_o(\varphi)$ аффинно и $d(\omega_o(\varphi)) = \varphi$, а, значит, d' сюръективен и, следовательно, изоморфизм. ■

Заметим, что определенное в доказательстве Предложения отображение $\omega_o\colon \mathrm{GL}(V) \to G_o$ — изоморфизм, обратный к d'. Проверим это независимо от предыдущего доказательства. Во-первых, то, что ω_o — гомоморфизм, следует из тождества $\omega_o(\psi \circ \varphi)(p) = (\omega_o(\psi) \circ \omega_o(\varphi))(p)\ \forall\, p \in S$, вытекающего непосредственно из определения ω_o. Действительно,

$$\omega_o(\psi \circ \varphi)(p) = o + \psi(\varphi(\overrightarrow{op})),$$

$$(\omega_o(\psi) \circ \omega_o(\varphi))(p) = \omega_o(\psi)(o + \varphi(\overrightarrow{op})) = o + \psi(\overrightarrow{oo} + \varphi(\overrightarrow{op})) = o + \psi(\mathbf{0} + \varphi(\overrightarrow{op})) = o + \psi(\varphi(\overrightarrow{op})).$$

То, что $d(\omega_o(\varphi)) = \varphi$, мы уже доказали. Пусть теперь $f \in G_o$, тогда имеем:

$$\omega_o(df)(p) = o + df(\overrightarrow{op}) = f(o) + df(\overrightarrow{op}) = f(p) \ \ \Rightarrow\ \ \omega_o(df) = f \ \ \forall\, f \in G_o.$$

Таким образом, для каждой точки $o \in S$ имеем вложение $\omega_o\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GA}(S)$ полной линейной группы векторного пространства V в качестве подгруппы группы аффинных преобразований, оставляющих точку o на месте.

Предложение 3.51. *Любой элемент $f \in \mathrm{GA}(S)$ единственным образом представляется в виде $f = t_{\mathbf{a}} \circ \omega_o(\varphi)$, где $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, $\mathbf{a} \in V$. Точнее, $\mathbf{a} = \overrightarrow{of(o)}$, $\varphi = df$.*

Доказательство. Пусть $f = t_{\mathbf{a}} \circ \omega_o(\varphi)$, тогда

$$f(o) = (t_{\mathbf{a}} \circ \omega_o(\varphi))(o) = t_{\mathbf{a}}(o) = o + \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \overrightarrow{of(o)},$$

откуда легко видеть, что $t_{\mathbf{a}}^{-1} \circ f \in G_o$, и, значит, представление в требуемом виде существует.

Проверим что оно единственно. Пусть $t_{\mathbf{a}} \circ \omega_o(\varphi) = t_{\mathbf{b}} \circ \omega_o(\psi)$, тогда, применяя обе части к точке o, получаем $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Далее, беря композицию с $t_{\mathbf{a}}^{-1}$, получаем $\omega_o(\varphi) = \omega_o(\psi)$, и так как гомоморфизм ω_o инъективен, $\varphi = \psi$.

Пусть теперь $\mathbf{a} = \overrightarrow{of(o)}$, $\varphi = df$. Проверим, что $f = t_{\overrightarrow{of(o)}} \circ \omega_o(df)$, применяя левую и правую части к произвольной точке $p \in S$. Имеем:

$$(t_{\overrightarrow{of(o)}} \circ \omega_o(df))(p) = t_{\overrightarrow{of(o)}}(o + df(\overrightarrow{op})) = o + \overrightarrow{of(o)} + \overrightarrow{f(o)f(p)} = f(p). \quad ■$$

Заметим, что в представлении

$$f = t_{\mathbf{a}} \circ \omega_o(\varphi) \tag{34}$$

элемент $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, будучи в силу доказанного предложения дифференциалом f, не зависит от выбора точки o, в то время как вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{of(o)}$ зависит. Данную зависимость описывает следующее Предложение.

Предложение 3.52. *При замене начальной точки o на точку o' вектор $\mathbf{a}$ в представлении (34) заменяется на вектор $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \varphi(\overrightarrow{oo'}) - \overrightarrow{oo'}$.*

Доказательство. Пусть $f = t_{\mathbf{a}} \circ \omega_o(\varphi) = t_{\mathbf{b}} \circ \omega_{o'}(\varphi)$. Тогда $\omega_{o'}(\varphi) = t_{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \circ \omega_o(\varphi)$. Применяя левую и правую части последнего равенства к точке o', получаем:

$$o' = (t_{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \circ \omega_o(\varphi))(o') = t_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(o + \varphi(\overrightarrow{oo'})) = o + \varphi(\overrightarrow{oo'}) + \mathbf{a} - \mathbf{b} = o' + \overrightarrow{o'o} + \varphi(\overrightarrow{oo'}) + \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

откуда все следует. ■

Для упрощения обозначений далее мы будем опускать знак композиции $\circ$. Таким образом, мы получили, что любой элемент $f \in \mathrm{GA}(S)$ представляется в виде (34). Чтобы описать групповую операцию в $\mathrm{GA}(S)$, нужно научиться перемножать элементы вида $t_{\mathbf{a}}\, \omega_o(\varphi)$, представляя произведение в таком же виде. Для этого нам понадобится следующее Предложение.

Предложение 3.53. *Для любых $f \in \mathrm{GA}(S)$ и $\mathbf{a} \in V$ имеем:*

$$f t_{\mathbf{a}} f^{-1} = t_{df(\mathbf{a})}.$$

Доказательство. Пусть $p = f(q)$. Тогда имеем:

$$f t_{\mathbf{a}} f^{-1}(p) = f(q + \mathbf{a}) = f(q) + df(\mathbf{a}) = p + df(\mathbf{a}) = t_{df(\mathbf{a})}(p). \quad ■$$

Упростим обозначения, опуская в дальнейших выкладках символ ω_o. Теперь мы можем вывести закон умножения элементов группы $\mathrm{GA}(S)$, представленных в виде (34):

$$t_{\mathbf{b}}\, \psi\, t_{\mathbf{a}}\, \varphi = t_{\mathbf{b}}\, \psi\, t_{\mathbf{a}}\, \psi^{-1}\, \psi\, \varphi = t_{\mathbf{b}}\, t_{\psi(\mathbf{a})}\, \psi\varphi = t_{\mathbf{b}+\psi(\mathbf{a})}\, \psi\varphi.$$

В частности, для обратного элемента имеем:

$$t_{\mathbf{b}+\psi(\mathbf{a})}\, \psi\varphi = \mathrm{id}_S = t_{\mathbf{0}}\, \mathrm{id}_V \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = -\psi(\mathbf{a}),\ \psi = \varphi^{-1},$$

откуда

$$(t_{\mathbf{a}}\, \varphi)^{-1} = t_{-\varphi^{-1}(\mathbf{a})}\, \varphi^{-1}.$$

Фактически, элементы аффинной группы $\mathrm{GA}(S)$ — пары $(t_{\mathbf{a}},\, \varphi)$, где $t_{\mathbf{a}} \in \mathrm{Trans}(S) \cong (V,\, +)$, $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, с правилом умножения

$$(t_{\mathbf{b}},\, \psi)(t_{\mathbf{a}},\, \varphi) = (t_{\mathbf{b}+\psi(\mathbf{a})},\, \psi\varphi). \tag{35}$$

В теории групп данная конструкция называется *полупрямым произведением* групп $\mathrm{Trans}(S)$ и $\mathrm{GL}(V)$ и обозначается $\mathrm{Trans}(S) \leftthreetimes \mathrm{GL}(V)$ (подробнее о нем можно почитать в учебнике [6]). Таким образом, $\mathrm{GA}(S) = \mathrm{Trans}(S) \leftthreetimes \mathrm{GL}(V)$ или, в случае записи преобразований в координатах, $\mathbb{R}^n \leftthreetimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Заметим, что в группе $\mathrm{GL}(V)$ есть много интересных подгрупп, например группа ортогональных преобразований $\mathrm{O}(V)$ (в случае евклидова пространства V). Для всякой такой подгруппы $G \subset \mathrm{GL}(V)$ можно рассмотреть соответствующее полупрямое произведение $\mathrm{Trans}(S) \leftthreetimes G$, получая при этом группы преобразований пространства $(S,\, V,\, +)$, содержащиеся в $\mathrm{GA}(S)$. Например, $\mathrm{Iso}(S) = \mathrm{Trans}(S) \leftthreetimes \mathrm{O}(V)$ есть группа (всех) движений аффинного евклидова пространства $(S,\, V,\, +)$ (ср.

Предложение 3.24). Она состоит из всех пар $(t_{\mathbf{a}}, \varphi)$, где $t_{\mathbf{a}} \in \mathrm{Trans}(S)$, $\varphi \in \mathrm{O}(V)$, с правилом умножения (35).

Конструкция полупрямого произведения играет большую роль в теоретической физике: группа Пуанкаре, являющаяся группой движений пространства-времени, является полупрямым произведением группы параллельных переносов и группы Лоренца. Определим аналоги этих групп для двумерного пространства.

Пусть V — двумерное вещественное векторное пространство. Выберем в V базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; тогда любой вектор $\mathbf{v} \in V$ однозначно задается своим координатным столбцом $(v_1, v_2)^T$. Определим функцию $(\cdot, \cdot)_\Lambda \colon V \times V \to \mathbb{R}$ формулой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Lambda := u_1 v_1 - u_2 v_2 \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{36}$$

Легко проверяется, что функция $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ обладает такими свойствами скалярного произведения как *билинейность*, т.е. $(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}', \mathbf{v})_\Lambda = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Lambda + \mu(\mathbf{u}', \mathbf{v})_\Lambda$ и аналогично для второго аргумента; *симметричность*, т.е. $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Lambda = (\mathbf{v}, \mathbf{u})_\Lambda$ $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, но, в отличие от евклидова скалярного произведения, не является *положительно определенной*, то есть не обязательно из $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ следует $(\mathbf{v}, \mathbf{v})_\Lambda > 0$. Например, для вектора $\mathbf{u}$ с координатами $(0, 1)^T$ $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_\Lambda = -1$, а для вектора $\mathbf{v}$ с координатами $(1, 1)^T$ — $(\mathbf{v}, \mathbf{v})_\Lambda = 0$.

Заметим, что функцию (36) можно записать в виде (15) с матрицей Грама

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

откуда получается условие (16) того, что линейное преобразование $\varphi \colon V \to V$, имеющее матрицу $A = A_\varphi$ в выбранном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, сохраняет данное скалярное произведение.

Пусть $a_1 := (a_{11}, a_{21})^T$, $a_2 := (a_{12}, a_{22})^T$ — столбцы матрицы A.

Задача 3.54. *Покажите, что преобразование φ с матрицей A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ сохраняет функцию $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} (a_1, a_1)_\Lambda = 1; \\ (a_1, a_2)_\Lambda = 0; \\ (a_2, a_2)_\Lambda = -1 \end{cases} \tag{38}$$

(ср. (8)).

Задача 3.55. *Покажите, что решения системы из предыдущей задачи распадаются на четыре семейства (ср. (9)):*

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha \\ -\operatorname{sh}\alpha & -\operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & -\operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ -\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Легко видеть, что линейные преобразования φ, сохраняющие функцию $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ (матрицы, полученные в предыдущей задаче) образуют группу относительно композиции (произведения), которая называется двумерной группой Лоренца и обозначается $\mathrm{O}(1, 1)$ (или в физической литературе $\Lambda(2)$).

Ясно, что группа Лоренца $\mathrm{O}(1,\,1)$ — подгруппа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Подробнее о группе Лоренца и ее роли в специальной теории относительности можно почитать в [10].

Заметим, что матрицы $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$ первого семейства из (39) образуют подгруппу в $\mathrm{O}(1,\,1)$, при этом задаваемые ими преобразования можно рассматривать как аналоги поворотов — *гиперболические повороты*. В частности, используя формулы сложения гиперболических функций, легко доказать, что при перемножении матриц такого вида их *гиперболические углы* α складываются.

Гиперболические повороты используются в специальной теории относительности для описания перехода в новую инерциальную систему отсчета, причем относительная скорость v (в системе единиц, в которой скорость света $c = 1$) связана с гиперболическим углом α соотношением $v = \operatorname{th}\alpha$, см. например популярное изложение с физической точки зрения в брошюре [8].

Если $(S,\,V,\,+)$ — аффинная плоскость, то, по определению, двумерная группа Пуанкаре есть $\mathrm{Iso}(1,\,1) := \mathrm{Trans}(S)\leftthreetimes\mathrm{O}(1,\,1) \subset \mathrm{GA}(S)$ — полупрямое произведение группы параллельных переносов и двумерной группы Лоренца.

3.10 Добавление 4: О геометрии в смысле Ф. Клейна

Пусть G — произвольная группа биективных преобразований евклидовой плоскости S. Например, $\mathrm{Iso}(S)$ — группа всех движений, $\mathrm{Sim}(S)$ — группа всех преобразований подобия, $\mathrm{GA}(S)$ — группа аффинных преобразований. Имеем вложения в качестве подгрупп: $\mathrm{Iso}(S) \subset \mathrm{Sim}(S) \subset \mathrm{GA}(S)$. Группа $\mathrm{GA}(S)$ содержит и другие подгруппы, например (двумерную) группу Пуанкаре $\mathrm{Iso}(1,\,1)$, введенную в предыдущем добавлении, или группу $\mathrm{SA}(S)$ эквиаффинных преобразований, состоящую из преобразований $f \in \mathrm{GA}(S)$ таких, что $\det df = \pm 1$ (то есть сохраняющих (неориентированную) площадь фигур).

Определение 3.56. Две фигуры $F,\,F' \subset S$ называются *эквивалентными* относительно группы G (или G-*эквивалентными*), если существует преобразование $g \in G$ такое, что $F' = g(F)$.

С использованием аксиом группы легко проверяется, что это действительно есть отношение эквивалентности. Например, все (невырожденные) треугольники на аффинной евклидовой плоскости S эквивалентны относительно аффинной группы $\mathrm{GA}(S)$, два треугольника эквивалентны относительно $\mathrm{SA}(S)$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую площадь, относительно $\mathrm{Sim}(S)$ — тогда и только тогда, когда они подобны, относительно $\mathrm{Iso}(S)$ тогда и только тогда, когда они равны. Примеры эквивалентных треугольников и эллипсов в *планиметрии Минковского*, отвечающей группе $\mathrm{Iso}(1,1)$, приведены на Рис. 14.

Замечание 3.57. Скажем пару слов о геометрии аффинной плоскости Минковского $(S,\,V,\,+)$. Определение (36) скалярного произведения в V означает, что в V найдется базис $\{\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2\}$, матрица Грама которого есть матрица (37), и квадрат длины вектора $\mathbf{v} \in V$ вычисляется как разность квадратов его координат $v_1^2 - v_2^2$. Такие базисы называются *ортонормированными*.[25] Соответствующим образом

[25] Заметим, что если матрица Грама скалярного произведения, заданного в базисе $\{\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2\}$ формулой (36), в некотором базисе имеет диагональный вид, то на ее главной диагонали стоят числа разных знаков ("закон инерции" квадратичных форм). То есть если базис ортогональный (скалярное произведение разных базисных векторов равно нулю), то скалярный квадрат одного из базисных векторов положительный, другого — отрицательный.

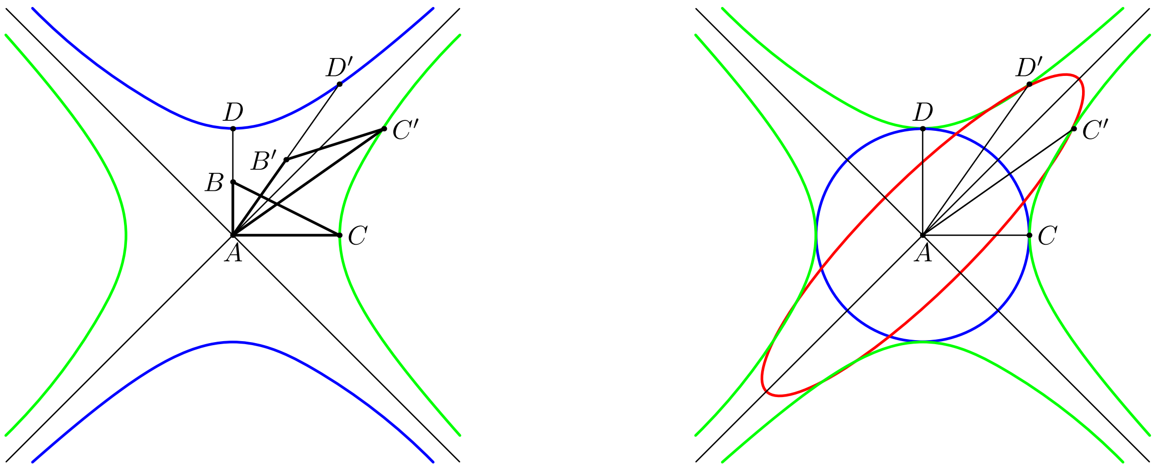


Рис. 14: На первом рисунке треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ эквивалентны в планиметрии Минковского (здесь B и B' — середины отрезков AD и AD' соответственно). Аналогично, изображенные на втором рисунке эллипс и окружность эквивалентны

определяется и квадрат расстояния (называемый в данном случае *квадратом интервала*) между точками аффинной плоскости Минковского S. Заметим, что, в отличие от евклидового случая, квадрат интервала между разными точками может быть как положительным, так и отрицательным или нулевым. Соответственно, геометрическое место точек, равноудаленных от фиксированной точки, в случае ненулевого интервала является равнобочной гиперболой, причем одно семейство гипербол отвечает положительным квадратам (зеленая гипербола на первой картинке Рис. 14), другое — отрицательным (синяя гипербола), а нулевому интервалу отвечает пара асимптот (“световой конус”). Преобразования группы Пуанкаре являются соответствующими движениями, сохраняющими квадрат интервала. При поворотах евклидовой плоскости вокруг точки o точки плоскости движутся по окружностям с центром в o. В случае гиперболических поворотов плоскости Минковского роль окружностей играют равнобочные гиперболы (см. Рис. 14).

Заметим, что если H — подгруппа группы G, то фигуры, эквивалентные относительно H, эквивалентны и относительно G, но, вообще говоря, не наоборот. То есть чем больше группа, тем больше элементов попадает в один класс эквивалентности и тем, соответственно, “грубее” разбиение множества фигур на классы эквивалентности, см. например Задачу 3.67 и частичный ответ к ней ниже.

Оказывается, с каждой группой преобразований плоскости связана своя геометрия. Что это такое, будет объяснено чуть ниже. Мы ограничимся подгруппами $G \subset \mathrm{GA}(S)$.

Чтобы геометрия, связанная с группой G (кратко: *G-геометрия*), была интересной, необходимо потребовать, чтобы все точки плоскости S были бы эквивалентны относительно группы G. Такая группа преобразований G называется *транзитивной*. Все упомянутые выше группы, а также содержащаяся в них группа параллельных переносов $\mathrm{Trans}(S)$, являются транзитивными (хотя геометрия, связанная с последней, не является особенно интересной).

Определение 3.58. Будем говорить, что класс фигур *принадлежит геометрии, связанной с группой G*, если любая фигура, эквивалентная (относительно группы G) фигуре из данного класса, также принадлежит данному классу.

Заметим, что если H — подгруппа группы G, то класс фигур, принадлежащих G-геометрии, принадлежит также и H-геометрии, но, вообще говоря, не наоборот.

Например, квадраты, окружности, равносторонние треугольники принадлежат "геометрии подобий" — геометрии, связанной с группой $\mathrm{Sim}(S)$ (и тем более с ее подгруппой $\mathrm{Iso}(S)$ — "евклидовой геометрии"), в то же время они не принадлежат аффинной геометрии, связанной с $\mathrm{GA}(S)$, поскольку при аффинном преобразовании квадрат может перейти в произвольный параллелограмм, окружность — в произвольный эллипс, а равносторонний треугольник — в произвольный треугольник.

Задача 3.59. *К каким из упоминавшихся выше геометрий принадлежат следующие классы фигур: треугольники, прямоугольники, трапеции, ромбы, параллелограммы, прямые, пары параллельных прямых, пары пересекающихся прямых, эллипсы, параболы, гиперболы?*

Заметим, что эллипсы, параболы и гиперболы принадлежат аффинной геометрии (так как при аффинном преобразовании они переходят в кривые того же класса), но обычное их определение через фокусы и расстояния при этом не подходит. Аффинное определение этих кривых дано, например, в [12].

Определение 3.60. Пусть λ — числовая функция, определенная на фигурах некоторого класса, принадлежащего G-геометрии. Тогда λ называется числовым *инвариантом группы* G, если она постоянна на классе G-эквивалентных фигур. Другими словами, если F — фигура из данного класса, то

$$\lambda(F) = \lambda(g(F)) \quad \forall\, g \in G.$$

Например, числовыми инвариантами группы движений являются расстояния между точками, углы (в частности, имеет смысл понятие перпендикулярности), площади, длины большой и малой полуосей эллипса и т.д., в то время как инвариантами группы подобий также являются углы, но только *отношение* расстояний, *отношение* площадей, эксцентриситет эллипса (параболы, гиперболы) но не сами длины полуосей; для аффинной группы углы уже́ не являются инвариантами, но инвариантами будут отношения направленных отрезков, лежащих на параллельных прямых, отношения площадей и т.д. Для геометрии Минковского инвариантом является квадрат интервала между точками.

Помимо *числовых* можно определить также *геометрические* инварианты фигур из данного класса, принадлежащего G-геометрии. А именно, некоторое геометрическое понятие, связанное с фигурами данного класса, является их *геометрическим G-инвариантом*, если оно сохраняется преобразованиями из группы G. Например, медианы или центр тяжести треугольника а также центр эллипса (или гиперболы) — аффинные инварианты, в то время как высоты, биссектрисы треугольника а также фокусы и директрисы эллипса (параболы, гиперболы) — инварианты группы подобий, но не аффинные (действительно, как нетрудно убедиться, при аффинных преобразованиях эллипс переходит в эллипс, но его фокусы, вообще говоря, не в фокусы).

Заметим, что если $H \subset G$, то любой G-инвариант является также H-инвариантом, но, вообще говоря, не наоборот.

Задача 3.61. *Инвариантами каких групп являются следующие понятия: высоты, медианы, биссектрисы треугольника; чевианы, пересекающиеся в одной точке; центр тяжести треугольника; фокусы, главные диаметры, сопряженные диаметры и центр эллипса; длины полуосей, эксцентриситет эллипсов и гипербол?*

Задача 3.62. *Докажите, что площади четырех секторов, на которые внутренность эллипса разбивается парой сопряженных диаметров, равны.*

Задача 3.63. *Пусть C — некоторый эллипс на плоскости S. Выберем дск o, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в S следующим образом: o является центром C, а векторы e_1, e_2 имеют представители с началом в o и концом в вершинах эллипса. Доказать, что в выбранной дск эллипс задается уравнением $x^2+y^2=1$. (Указание: для любого эллипса существует аффинное преобразование, отображающее его в окружность).*

Теперь мы можем объяснить, что такое геометрия, связанная с группой G. Такая геометрия изучает связь между G-инвариантами фигур из классов, принадлежащих G-геометрии. Теоремы G-геометрии — соотношения между G-инвариантами таких фигур. Заметим, что если H — подгруппа группы G, то всякая теорема G-геометрии является также теоремой H-геометрии (но, вообще говоря, не наоборот).

Примером известной теоремы аффинной (а, значит, и любой другой из рассматриваемых нами) геометрии является теорема о медианах треугольника (что они пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $2:1$). Другие примеры аффинных теорем — теоремы Чевы и Менелая.

Задача 3.64. *Пусть треугольник $\triangle ABC$ образован тремя касательными к эллипсу. Доказать, что тогда прямые AP, BQ, CR, соединяющие его вершины A, B, C с точками P, Q, R касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке O.*

Пример теоремы геометрии подобий — теорема о том, что отношение, в котором биссектриса треугольника делит противоположную сторону, равно отношению прилежащих сторон. Понятие биссектрисы не определено в аффинной геометрии (аффинные преобразования не сохраняют биссектрисы), но остается инвариантным понятие отношения, в котором точка делит отрезок. В частности, произведение отношений, в которых биссектрисы треугольника делят его стороны, равно 1 (ср. теорему Чевы). То есть при расширении группы до аффинной остается свойство биссектрис треугольника пересекаться в одной точке. Аналогичный результат имеет место и для высот.

Задача 3.65. *При аффинном преобразовании треугольник $\triangle ABC$ переходит в треугольник $\triangle A'B'C'$, причем точка пересечения медиан треугольника $\triangle ABC$ переходит в точку пересечения высот треугольника $\triangle A'B'C'$. Что можно сказать про треугольник $\triangle A'B'C'$?*

Задача 3.66. *Объяснить, почему теорема Пифагора — теорема геометрии подобий (но не аффинной геометрии), в то время как теоремы из Задач 3.62 и 3.64 — теоремы аффинной геометрии (а, значит, и остальных рассматриваемых геометрий).*

Аффинные свойства фигур (теоремы аффинной геометрии) можно рассматривать как наиболее фундаментальные, поскольку они выполняются и во всех других рассматриваемых геометриях (например, в евклидовой, связанной с группой движений $\mathrm{Iso}(S)$, или в геометрии Минковского, связанной с группой Пуанкаре $\mathrm{Iso}(1,\,1)$).

Таким образом, вложения групп преобразований плоскости определяют иерархию свойств геометрических фигур. Возникает вопрос, нет ли еще более "фундаментальной" геометрии, чем аффинная?[26] Ответ на этот вопрос — "да" и это — *проективная геометрия.* Правда, нужно уточнить, что при ее определении к аффинной плоскости S следует добавить некоторые точки, образующие "бесконечно удаленную прямую", и тогда аффинные преобразования среди проективных характеризуются тем, что для них эта бесконечно удаленная прямая инвариантна.[27] Мы не будем здесь останавливаться на этих вопросах подробнее, отметим лишь, что проективных преобразований достаточно, чтобы все невырожденные кривые второго порядка (то есть эллипсы, параболы и гиперболы) образовывали бы один класс эквивалентности.[28] Классическим примером проективной теоремы о кривых второго порядка является теорема Паскаля. Элементарное изложение основ проективной геометрии можно найти в [13], см. также [5], [12], [14], [15].

Классифицировать фигуры данного класса в геометрии, связанной с данной группой преобразований G — значит описать их классы G-эквивалентности. Из определения следует, что числовые G-инварианты принимают одинаковые значения на G-эквивалентных фигурах. Таким образом, если для двух фигур данного класса мы нашли G-инвариант, принимающий на них разные значения, то эти фигуры не являются G-эквивалентными.

Для полного решения задачи классификации достаточно найти *полную систему* G-инвариантов, то есть такой набор инвариантов, равенство которых для двух фигур из данного класса (не только) необходимо (но) и достаточно для эквивалентности этих фигур. Например, в школе проходятся критерии ("признаки") равенства (= эквивалентности в евклидовой геометрии) и подобия (= эквивалентности в геометрии подобий) треугольников.

Другой пример: для эллипсов в евклидовой геометрии полную систему инвариантов образуют длины их полуосей (большой и малой). Точнее, каждый класс эквивалентности эллипсов в евклидовой геометрии имеет единственного представителя, имеющего каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geq b>0$$

в данной декартовой прямоугольной системе координат.

Задача 3.67. *Классифицировать треугольники, параллелограммы, трапеции, эллипсы, параболы, гиперболы в трех рассматриваемых геометриях.*

Вот частичный ответ к последней задаче. Каждый класс эквивалентности эллипсов, парабол и гипербол в евклидовой геометрии имеет единственного представителя, задаваемого в данной пдск

[26]конечно, можно рассмотреть грандиозную группу всех биекций плоскости, или все еще огромную группу непрерывных биекций. Здесь же мы ограничиваемся рассмотрением только тех геометрий, которые отвечают группам непрерывных преобразований, переводящих прямые в прямые.

[27]с точки же зрения проективной геометрии эта бесконечно удаленная прямая ничем не выделяется среди других прямых.

[28]то есть классы эллипсов, парабол и гипербол по отдельности не принадлежат проективной геометрии, так же как, например, класс параллельных прямых.

уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a\geq b>0; \quad y^2=2px, \quad p>0; \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,\ b>0$$

соответственно.

В геометрии подобий каждый класс эквивалентности эллипсов, парабол и гипербол имеет единственного представителя, задаваемого в данной пдск уравнением

$$x^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=1, \quad 0\leq\varepsilon<1; \quad y^2=2x; \quad x^2-\frac{y^2}{\varepsilon^2-1}=1, \quad \varepsilon>1$$

соответственно.

В аффинной геометрии все эллипсы между собой эквивалентны (в частности, эквивалентны эллипсу, имеющему уравнение $x^2+y^2=1$ в данной дск); аналогичное верно для парабол и гипербол.

Читателю предлагается подумать, как сформулированные результаты связаны со следующими (легко проверяемыми) фактами.

1) Аффинное преобразование плоскости зависит от шести параметров (т.е. группа аффинных преобразований плоскости шестимерна), преобразование подобия — от четырех, движение — от трех.

2) Семейства эллипсов и гипербол на плоскости являются пятипараметрическими, парабол — четырехпараметрическим[29].

Заметим, что окружности на плоскости образуют трехпараметрическое семейство, но при этом их евклидова классификация приводит к однопараметрическому семейству классов эквивалентности (радиус окружности является инвариантом группы движений и поэтому каждый класс содержит единственного представителя, имеющего уравнение $x^2+y^2=r^2$ в выбранной пдск). Как это согласуется с тем, что для четырехпараметрического семейства парабол также существует единственный евклидов инвариант (параметр p), и, таким образом, их евклидова классификация также приводит к однопараметрическому семейству классов эквивалентности?

В заключение отметим, что подход к геометрии с точки зрения групп преобразований, намеченный нами в этом разделе, впервые был изложен Ф. Клейном в 1872 году в лекции "Сравнительное рассмотрение новейших геометрических исследований" при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета, известной теперь под названием "Эрлангенской программы".

Список литературы

[1] В.И. Арнольд Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2002.— 40 с.

[29] тот факт, что парабол "меньше" чем эллипсов и гипербол, объясняется тем, что коэффициенты квадратичной части $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ уравнения, задающего кривую параболического типа, удовлетворяют уравнению $\delta:=\det\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}=0$.

[2] В.И. Арнольд Математические методы классической механики: Учебное пособие. Изд. 5-е, стереотипное.— М.: Едиториал УРСС, 2003.— 416 с.

[3] Д.В. Беклемишев Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. — 12-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 — 312 с.

[4] Д.В. Беклемишев Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014 — 192 с.

[5] А.П. Веселов, Е.В. Троицкий Лекции по аналитической геометрии. — М.: МЦНМО, 2016. — 150 с.

[6] Э.Б. Винберг Курс алгебры. — 2-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2013.— 592 с.

[7] Э.Б. Винберг Симметрия многочленов. (Серия «Библиотека “Математическое просвещение”», выпуск 11) — М.: МЦНМО, 2001.— 24 с.

[8] М.Г. Иванов Геометрия и тригонометрия на плоскости Минковского. — М.: МФТИ, 2007.— 28 с.

[9] А.И. Кострикин Введение в алгебру: Ч. I: Основы алгебры. — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009.— 272 с.

[10] А.И. Кострикин, Ю.И. Манин Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.— 320 с.

[11] И.М. Парамонова Симметрия в математике. (Серия «Библиотека “Математическое просвещение”», выпуск 7) — М.: МЦНМО, 2000.— 16 с.

[12] Я.П. Понарин Аффинная и проективная геометрия. — М.: МЦНМО, 2009.— 288 с.

[13] М.В. Потоцкий Что изучает проективная геометрия? — М.: Просвещение, 1982.— 80 с.

[14] В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров Геометрия. — М.: МЦНМО, 2007.— 328 с.

[15] А.Б. Сосинский Геометрии (на англ. языке). — М.: МЦНМО, 2008.— 101 с.

[16] И.Р. Шафаревич Основные понятия алгебры.— Ижевск, Ижевская республиканская типография, 1999.—348 с.