ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Самарова С.С.

II курс, теория вероятностей, лектор А.В. Булинский, гр. 855

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Самыми важными числовыми характеристиками случайной величины являются ее математическое ожидание, имеющее смысл среднего значения, и дисперсия, характеризующая разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Дадим определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.

Определение 1. *Математическим ожиданием* $E\xi$ *дискретной случайной величины* ξ, принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, называют число, определяемое по формуле:

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P\left\{\xi = x_k\right\}, \tag{1}$$

если ряд в правой части формулы (1) сходится абсолютно.

Замечание 1. Для математического ожидания случайной величины ξ также используют и обозначение $M\xi$, принятое, в основном, в отечественной литературе.

Замечание 2. В случае, когда случайная величина ξ принимает конечное число значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ с равными вероятностями, формула (1) превращается в среднее арифметическое возможных значений случайной величины ξ.

Замечание 3. Физическая интерпретация математического ожидания дискретной случайной величины ξ заключается в следующем. Введем обозначения

$$p_k = P\{\xi = x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и рассмотрим систему материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ с массами $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, расположенных в точках числовой оси с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ соответственно. Тогда формула (1), записанная в виде

$$E\xi = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k}$$

с учетом условия

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = 1$$

представляет собой координату центра масс системы материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

Определение 2. *Математическим ожиданием* $E\xi$ *непрерывной случайной величины* ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ называют число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_\xi(x)\, dx, \tag{2}$$

если интеграл в правой части формулы (2) сходится абсолютно.

Теорема 1. Для случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, все компоненты которого являются дискретными случайными величинами со значениями

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \left(x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\right), \quad k_i = 1, 2, \ldots \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и произвольной функции *n* переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеет место равенство

$$Ef(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1=1,\\ k_2=1,\\ \ldots\\ k_n=1}}^{\infty} f\left(x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\right) \cdot P\left(\xi_1 = x_{k_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{k_2}^{(2)}, \ldots, \xi_n = x_{k_n}^{(n)}\right) \tag{3}$$

при условии, что ряд в правой части формулы (3) сходится абсолютно.

Теорема 2. Для непрерывного случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с плотностью распределения $p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и произвольной функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет место равенство

$$Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int\limits_{R^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, p_{\xi_1\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \qquad (4)$$

при условии, что интеграл в правой части формулы (4) сходится абсолютно.

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1) $E(C) = C$ для любой случайной величины, принимающей единственное значение C;

2) $E(C \cdot \xi) = C \cdot E\xi$ для любого числа $C \in R$ и любой случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание;

3) $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ для любых случайных величин ξ и η, имеющих математические ожидания;

4) $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$ для любых *независимых* случайных величин ξ и η, имеющих математические ожидания.

ДИСПЕРСИЯ. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Определение 3. *Дисперсией* $D\xi$ *случайной величины* ξ называют число, определяемое по формуле:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \qquad (5)$$

если математическое ожидание в правой части формулы (5) существует.

Замечание. Использование свойств математического ожидания позволяет переписать формулу (5) в эквивалентном виде:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \qquad (6)$$

Действительно,

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\left(\xi^2 - 2\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2\right) =$$

$$= E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2,$$

что и требовалось доказать

Дисперсия случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1) $D\xi \geq 0$ для любой случайной величины, имеющей дисперсию;

2) $D(C) = 0$ для любой случайной величины, принимающей единственное значение C;

3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D\xi$ для любого числа $C \in R$ и любой случайной величины ξ, имеющей дисперсию;

4) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ для любых *независимых* случайных величин ξ и η, имеющих дисперсии.

Определение 4. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(\xi)$ *случайной величины* ξ называют число, определяемое по формуле:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСНОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

На примере основных распределений дискретных и непрерывных случайных величин продемонстрируем приемы, наиболее часть применяемые для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайных величин.

Задача 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ, имеющей *геометрическое распределение с параметром* p $(0 < p < 1)$.

Решение. Поскольку случайная величина ξ принимает значения 1, 2, 3, ... с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = p \cdot q^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $q = 1 - p$, то для подсчета математического ожидания ξ воспользуемся формулой (1):

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}. \tag{7}$$

Ряд в правой части формулы (7) представляет собой производную степенного ряда для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем p, поэтому

$$E\xi = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\,\frac{1}{\left(1-q\right)^2} = \frac{1}{p}\,. \qquad (8)$$

Перейдём к вычислению $E\xi^2$. С этой целью выведем сначала формулу

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot p_k + E\xi\,, \qquad (9)$$

справедливую для случайных величин ξ, принимающих целые неотрицательные значения. Формулой (9) мы будем пользоваться далее неоднократно. Для того, чтобы получить формулу (9), воспользуемся формулой (3):

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot p_k + \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot p_k + E\xi$$

Теперь преобразуем ряд, стоящий в правой части получившейся формулы:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq\left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right)'' =$$

$$= pq\left(\frac{q^2}{1-q}\right)'' = \frac{2pq}{\left(1-q\right)^3} = \frac{2q}{p^2}\,,$$

откуда с помощью формулы (8) получаем равенство:

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot p_k + E\xi = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1+q}{p^2}\,.$$

Из формулы (6) находим дисперсию $D\xi$:

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}\,.$$

После того, как дисперсия вычислена, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ вычислить легко

$$\sigma\left(\xi\right) = \sqrt{D\xi} = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Ответ: $E\xi = \dfrac{1}{p}$, $D\xi = \dfrac{q}{p^2}$, $\sigma(\xi) = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$.

Задача 2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ, имеющей *биномиальное распределение с параметром* $p \quad (0 < p < 1)$.

Решение.

1 способ. Искомые характеристики можно вычислить непосредственно, используя формулу бинома Ньютона. Действительно, для дискретной случайной величины ξ, принимающей значения 0, 1, 2, 3, ..., *n* с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n),$$

где $q = 1 - p$, то формуле (1) находим:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \cdot p^k q^{n-k} \tag{10}$$

$$= np\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l} \cdot p^l q^{(n-1)-l} = np(p+q)^{n-1} = np.$$

Теперь найдем $D\xi$, действуя аналогично тому, как это было сделано при решении задачи 1. Поскольку

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) p_k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1) \cdot n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} \cdot p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{l=0}^{n-2} C_{n-2}^{l} \cdot p^l q^{(n-2)-l} = n(n-1)\, p^2 (p+q)^{n-2} = n(n-1)\, p^2,$$

то из формул (9) и (10) получаем:

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k + E\xi = n(n-1)\, p^2 + np = (np)^2 + npq$$

Теперь по формуле (6) находим дисперсию $D\xi$:

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = \left(np\right)^2 + npq - \left(np\right)^2 = npq\,. \tag{13}$$

Среднее квадратическое отклонение ξ равно

$$\sigma\left(\xi\right) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{npq}\,.$$

2 способ. Для получения характеристик биномиального распределения часто используют другой, более изящный, способ, не требующий проведения большого количества выкладок. Этот способ заключается в следующем. Рассмотрим *n* независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, каждая из которых может принимать только два значения 0 и 1, причем

$$P\left\{\xi_k = 1\right\} = p, \quad P\left\{\xi_k = 0\right\} = 1 - p = q, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Тогда случайная величина

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

будет иметь биномиальное распределение с параметром *p*.

Действительно, ξ может принимать только значения 0, 1, 2, 3, ..., *n*. Выясним, с какой вероятностью принимается каждое из этих значений.

Для этого заметим, что случайная величина ξ принимает значение *k* в том, и только в том, случае, если *k* из *n* случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равны 1, а остальные $n-k$ случайных величин равны 0. Число способов выбрать *k* случайных величин $\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \dots, \xi_{m_k}$ из *n* случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равно C_n^k, причем вероятность того, что выбранные случайные величины $\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \dots, \xi_{m_k}$ равны 1, а остальные равны 0, в силу их независимости равна

$$p^k q^{n-k}\,.$$

Поэтому,

$$p_k = P\left\{\xi = k\right\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \left(k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n\right).$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ_1:

$$E\xi_1 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p;$$
$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - \left(E\xi_1\right)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p - p^2 = pq.$$

Случайные величины $\xi_2, \cdots, \xi_n$ будут иметь такие же характеристики, поскольку они имеют то же самое распределение, что и ξ_1.

Найдем теперь $E\xi$ и $D\xi$, используя свойства математических ожиданий и дисперсий случайных величин:

$$E\xi = E\left(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\right) = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_n = nE\xi_1 = np;$$
$$D\xi = D\left(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\right) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n = nD\xi_1 = npq.$$

Ответ: $E\xi = np,\ D\xi = npq,\ \sigma\left(\xi\right) = \sqrt{npq}$.

Задача 3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ, имеющей *распределение Пуассона с параметром* $\lambda \quad \left(\lambda > 0\right)$.

Решение. Случайная величина ξ принимает значения 0, 1, 2, 3, ... с вероятностями

$$p_k = P\left\{\xi = k\right\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

поэтому по формуле (1) с учетом разложения в ряд Тейлора функции $f\left(\lambda\right) = e^{\lambda}$ получаем:

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\left(k-1\right)!} = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned} \tag{11}$$

Кроме того,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\left(k-2\right)!} =$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2.$$

Воспользовавшись формулой (9), с учетом формулы (11) получаем:

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot p_k + E\xi = \lambda^2 + \lambda.$$

Отсюда по формуле (6) находим дисперсию $D\xi$:

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma\left(\xi\right) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\lambda}.$$

Ответ: $E\xi = \lambda,\ D\xi = \lambda,\ \sigma\left(\xi\right) = \sqrt{\lambda}$.

Задача 4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ, имеющей *равномерное распределение на отрезке* $\left[a,\ b\right]$.

Решение. Для вычисления математического ожидания $E\xi$ воспользуемся формулой (2), в которую подставим плотность равномерного распределения на отрезке $\left[a,\ b\right]$:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_\xi\left(x\right)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left.\frac{x^2}{2\left(b-a\right)}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

Вычислив $E\xi^2$ по формуле (4),

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ p_\xi\left(x\right)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \left.\frac{x^3}{3\left(b-a\right)}\right|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

находим дисперсию $D\xi$ по формуле (6):

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{\left(a+b\right)^2}{4} = \frac{\left(a-b\right)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma\left(\xi\right) = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Ответ: $E\xi = \dfrac{a+b}{2}$, $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(\xi) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Задача 5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ, имеющей *показательное распределение с параметром* λ $(\lambda > 0)$.

Решение. Подставляя в формулу (2) плотность показательного распределения с параметром λ

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

найдем математическое ожидание $E\xi$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_\xi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lambda x\, e^{-\lambda x}\, dx = -x\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{e^{-\lambda x}}{(-\lambda)}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Теперь вычислим $E\xi^2$ по формуле (4):

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p_\xi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2\, e^{-\lambda x}\, dx = -x^2\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x\, e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{-2x\, e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{2e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Найдем дисперсию $D\xi$ по формуле (6):

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda}$$

Ответ: $E\xi = \dfrac{1}{\lambda}$, $D\xi = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(\xi) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Задача 6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ, имеющей *нормальное распределение с параметрами* $a,\ \sigma \quad (\sigma > 0)$.

Решение. Для того, чтобы найти математическое ожидание $E\xi$, подставим в формулу (2) плотность нормального распределения с параметрами $a,\ \sigma$:

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, p_{\xi}(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx .$$

Сделав в полученном интеграле замену переменной

$$y = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}; \quad dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\, dx \tag{12}$$

и воспользовавшись равенствами

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-y^2}\, dy = \left.\frac{e^{-y^2}}{2}\right|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$$ (интеграл Пуассона),

находим

$$E\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(y \cdot \sigma\sqrt{2} + a\right) e^{-y^2}\, dy = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-y^2}\, dy + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = a .$$

Для вычисления дисперсии $D\xi$ используем формулы (5) и (4):

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2\, p_{\xi}(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной (12), получаем

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2y^2 e^{-y^2}\, dy = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-y\, e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \right) = \sigma^2$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sigma .$$

Ответ: $E\xi = a,\ D\xi = \sigma^2,\ \sigma(\xi) = \sigma$.

КОВАРИАЦИЯ. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

В качестве числовых характеристик зависимости случайных величин используют их *ковариацию* и *коэффициент* их *корреляции*.

Определение 5. *Ковариацией* случайных величин ξ и η называют число, определяемое по формуле

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\left[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\right] \tag{13}$$

Замечание. Формулу (13) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta \tag{14}$$

Действительно, воспользовавшись свойствами математического ожидания случайных величин, получаем:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\left[\xi\eta - \eta \cdot E\xi - \xi \cdot E\eta + E\xi \cdot E\eta\right] =$$
$$= E(\xi\eta) - 2E\xi \cdot E\eta + E\xi \cdot E\eta = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta,$$

что и требовалось доказать.

Ковариация случайных величин обладает следующими *свойствами*, выполненными для любых случайных величин, имеющих дисперсию:

1) $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi \geq 0$;
2) $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$
3) $\operatorname{cov}(C\xi, \eta) = C\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ для любого числа $C \in R$;
4) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$;
5) если случайные величины ξ и η *независимы*, то $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.
6) справедливо неравенство

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) \leq \sqrt{D\xi \cdot D\eta}.$$

Определение 6. *Матрицей ковариаций случайного вектора* $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называют матрицу с элементами $\left\{\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\right\}$.

Матрица ковариаций обладает следующими *свойствами*, вытекающими из свойств ковариации двух случайных величин:

1) матрица ковариаций является симметричной матрицей;

2) матрица ковариаций неотрицательно определена;

3) элементы, стоящие на главной диагонали матрицы ковариаций, неотрицательны.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 7. Случайные величины ξ и η независимы. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0,\ 6]$, а случайная величина η имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}5$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2\xi - \eta$.

Решение. Воспользовавшись свойствами математических ожиданий и дисперсий случайных величин, а также результатами задач 4 и 5, в которых вычислены характеристики равномерного и показательного распределений, получим

$$E(2\xi - \eta) = 2E\xi - E\eta \ = \ 2 \cdot \frac{(0+6)}{2} - 2 = 4;$$

$$D(2\xi - \eta) = 4D\xi + (-1)^2 \cdot D\eta \ = \ 4 \cdot \frac{(6-0)^2}{12} + 4 = 16.$$

Ответ: $E\eta = 4,\ D\eta = 16$.

Задача 8. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросаний игральной кости до первого выпадения «шестерки».

Решение. Пусть $\xi -$ случайная величина, равная числу бросаний игральной кости до первого появления «шестерки». Тогда ξ может принимать значения 1, 2, 3, ... Выясним, с какой вероятностью принимается каждое из этих значений. Для этого обозначим через A_i событие, состоящее в том, что при i-ом бросании выпадает «шестерка». Тогда вероятность

$$p_k = P\{\xi = k\} = P\{\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{k-1}A_k\} =$$
$$= P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_{k-1})\cdot P(A_k) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Таким образом, случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p = \dfrac{1}{6}$. Воспользовавшись результатами задачи 1, получаем

$$E\xi = 6,\ D\xi = 30\ .$$

Ответ: $E\xi = 6,\ D\xi = 30$.

Задача 8. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$, а случайные величины $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$. Найти математические ожидания $E\eta_1$, $E\eta_2$ и ковариацию $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)$. Являются ли случайные величины η_1 и η_2 независимыми?

Решение. По формуле (2) математическое ожидание $E\eta_1$ равно

$$E\eta_1 = E(\cos\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\ p_\xi(x)\, dx$$

Поскольку по условию случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0,2\pi]$, то ее плотность $p_\xi(x)$ имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{при} \quad x \in [0,2\pi], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0,2\pi]. \end{cases}$$

Поэтому

$$E\eta_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos x\ dx = \frac{\sin x}{2\pi}\bigg|_0^{2\pi} = 0\,.$$

Действуя аналогичным образом, находим $E\eta_2$

$$E\eta_2 = E(\sin\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\ p_\xi(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\ dx = -\frac{\cos x}{2\pi}\bigg|_0^{2\pi} = 0\,.$$

Теперь по формуле (14) вычислим ковариацию $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)$

$$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = E(\eta_1\eta_2) - E(\eta_1)E(\eta_2) = E(\cos\xi\sin\xi)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \sin x\ p_\xi(x)\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2x\ dx = -\frac{\cos 2x}{8\pi}\bigg|_0^{2\pi} = 0$$

Заметим, что из того, что ковариация случайных величин оказалась равной нулю, еще не следует, что они независимы, и случайные величины η_1 и η_2 как раз подтверждают этот факт.

Действительно,

$$P\left(\eta_1 > \frac{1}{2},\ \eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(\cos\xi > \frac{1}{2},\ \sin\xi < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= P\left(\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} p_\xi(x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} p_\xi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$P\left(\eta_1 > \frac{1}{2}\right) = P\left(\cos\xi > \frac{1}{2}\right) = P\left(\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)\right) = \frac{1}{3}.$$

$$P\left(\ \eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(\sin\xi < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)\right) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} p_\xi(x)\,dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} p_\xi(x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} p_\xi(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$P\left(\eta_1 > \frac{1}{2},\ \eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq P\left(\eta_1 > \frac{1}{2}\right) \cdot\ P\left(\ \eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

В соответствии с определением независимости случайных величин заключаем, что случайные величины η_1 и η_2 не являются независимыми.

Ответ: $E\eta_1 = 0,\ E\eta_2 = 0,\ \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0$, случайные величины η_1 и η_2 не являются независимыми.