ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.
ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Самарова С.С.

II курс, теория вероятностей, лектор А.В. Булинский, гр. 855

СОДЕРЖАНИЕ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 1. Пусть ξ − случайная величина, принимающая действительные значения. *Характеристической функцией случайной величины* ξ называют функцию

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \qquad t \in R\,.$$

Для непрерывных случайных величин характеристическая функция выражается формулой

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx$$

и представляет собой преобразование Фурье от плотности распределения случайной величины ξ.

Для дискретных случайных величин характеристическая функция выражается формулой

$$f_\xi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n}\, P(\xi = x_n) \tag{1}$$

где через $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ обозначены все значения случайной величины ξ.

Характеристическая функция случайной величины ξ обладает следующими *свойствами*:

1. $f_\xi(0) = 1$;
2. $\left|f_\xi(t)\right| \le 1$, $\quad \forall t \in R$;
3. $f_\xi(t)$ равномерно непрерывна на R;
4. Для характеристической функции случайной величины $\eta = a\xi + b$, где a и b – константы, справедлива формула
$$f_\eta(t) = e^{ibt} f_\xi(at)$$
5. Существует взаимно-однозначное соответствие между функциями распределения случайных величин и их характеристическими функциями.
6. Если у случайной величины ξ существует математическое ожидание $E\xi^k$, то ее характеристическая функция $f_\xi(t)$ дифференцируема k раз и справедлива формула
$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k \ .$$
В частности,
   - если случайная величина ξ имеет математическое ожидание $E\xi$, то
   $$E\xi = -i f_\xi'(0);$$
   - если случайная величина ξ имеет дисперсию $D\xi$, то
   $$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \ -f_\xi''(0) + \left(f_\xi'(0)\right)^2$$
7. Для независимых случайных величин ξ и η выполнено равенство
$$f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t) \cdot f_\eta(t)$$
8. Рассмотрим последовательность случайных величин
$$\xi_1\, , \xi_2\, , \dots , \xi_n\, , \dots$$
с характеристическими функциями
$$f_{\xi_1}(t), f_{\xi_2}(t), \dots \ , f_{\xi_n}(t), \dots$$
Если при каждом t существует предел
$$\lim_{n\to\infty} f_{\xi_n}(t) = f(t) \ ,$$
причем функция $f(t)$ непрерывна в нуле, то существует случайная величина ξ , для которой функция $f(t)$ является характеристической функцией и для любого числа a имеет место сходимость

$$P(\xi_n < a) \ \to \ P(\xi < a) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Центральная предельная теорема является одной из основных теорем курса теории вероятностей.

Центральная предельная теорема. Если случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то

$$P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \ \to \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $a = E\xi_n$, $\sigma^2 = D\xi_n$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1 [задание 11 б), в)]. Вычислить характеристические функции для:

1) распределения Пуассона с параметром λ;
2) нормального распределения с параметрами a и σ.

Решение.

1) Пусть случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Тогда ξ принимает значения $0, 1, 2, \dots$ с вероятностями

$$P(\xi = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем характеристическую функцию ξ

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(\xi = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

2) Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ), т.е. ее плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Рассмотрим случайную величину

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$$

Тогда

$$F_\eta(x) = P(\eta \le x) = P\left(\frac{\xi - a}{\sigma} \le x\right) = P(\xi \le x\sigma + a) = F_\xi(x\sigma + a);$$

$$p_\eta(x) = F'_\eta(x) = F'_\xi(x\sigma + a) \cdot \sigma = p_\xi(x\sigma + a) \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значит, случайная величина η распределена нормально с параметрами (0, 1).

Найдем характеристическую функцию η

$$f_\eta(t) = Ee^{it\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\eta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (\cos tx + i \sin tx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx\, dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx\, dx$$

Заметим, что при каждом t вследствие нечетности функции

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx$$

интеграл

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx\, dx = 0$$

Таким образом,

$$f_\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx\, dx$$

Формально продифференцировав этот интеграл по параметру t , получим

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx\, dx$$

Поскольку этот интеграл сходится равномерно, то по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру заключаем, что

$$f'_{\eta}(t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx\, dx$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f'_{\eta}(t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx\Big|_{0}^{+\infty} - \frac{2t}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx\, dx =$$

$$= -t f_{\eta}(t)$$

С учетом свойства 1 составляем задачу Коши

$$f'_{\eta}(t) = -t f_{\eta}(t), \quad f_{\eta}(0) = 1,$$

решение которой имеет вид

$$f_{\eta}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Применение свойства 4 позволяет найти характеристическую функцию случайной величины ξ

$$f_{\xi}(t) = f_{\eta\sigma+a}(t) = e^{iat} f_{\eta}(\sigma\, t) = e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Ответ: 1) $f_{\xi}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$; 2) $f_{\xi}(t) = e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

Задача 2 [задание 12]. Являются ли следующие функции характеристическими функциями и, если являются, то найти законы распределения, которым они соответствуют:

1. $f(t) = \cos^2 t$;
2. $f(t) = \cos(t^2)$;
3. $f(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

Решение.

1. Преобразуем функцию $f(t)$

$$f(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2}e^{it\cdot 0} + \frac{1}{4}\left(e^{it\cdot 2} + e^{it\cdot(-2)}\right) = \frac{1}{2}e^{it\cdot 0} + \frac{1}{4}e^{it\cdot 2} + \frac{1}{4}e^{it\cdot(-2)}$$

Воспользовавшись формулой (1), замечаем, что $f(t)$ является характеристической функцией дискретной случайной величины ξ , которая принимает три значения $0, 2, -2$ с вероятностями

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{2}\ ; \quad P(\xi = 2) = \frac{1}{4}\ ; \quad P(\xi = -2) = \frac{1}{4}\ .$$

2. Если функция $f(t)$ является характеристической функцией какой-нибудь случайной величины, то по свойству 3 функция $f(t)$ должна быть равномерно непрерывной на R.

Покажем, что функция

$$f(t) = \cos(t^2)$$

не является равномерно непрерывной на R. Для этого на языке кванторов запишем отрицание того, что функция $f(t)$ является равномерно непрерывной на R:

$$\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall\delta > 0\ \exists\ t_1, t_2 \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad \to \quad |f(t_1) - f(t_2)| \geq \varepsilon$$

Найдем точки, в которых $f(t) = 1$:

$$\cos(t^2) = 1$$

$$t^2 = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = \sqrt{2\pi n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем точки, в которых $f(t) = -1$:

$$\cos(t^2) = -1$$

$$t^2 = -\pi + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$t = \sqrt{-\pi + 2\pi n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для одного и того же значения n обозначим

$$t_1 = \sqrt{2\pi n} \ \text{ и } \ t_2 = \sqrt{-\pi + 2\pi n}\,,$$

тогда

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |1 - (-1)| = 2 = \varepsilon$$

$$|t_1 - t_2| = \left|\sqrt{2\pi n} - \sqrt{-\pi + 2\pi n}\right| = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{-\pi + 2\pi n}} < \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} < \delta \quad \leftrightarrow \quad n > \frac{\pi}{\delta^2}$$

Следовательно,

$$\exists\ \varepsilon = 2 : \ \forall \delta > 0 \ \ \exists\ t_1 = \sqrt{2\pi n},\ t_2 = \sqrt{-\pi + 2\pi n}\,,$$
$$n = \left[\frac{\pi}{\delta^2}\right] + 1, \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad \to \quad |f(t_1) - f(t_2)| \geq \varepsilon$$

Таким образом, $f(t)$ не является равномерно непрерывной на R и поэтому не может быть характеристической функцией.

3. Преобразуем функцию $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2 - e^{it}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{e^{it}}{2}}$$

Поскольку

$$\left|\frac{e^{it}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

то по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно записать

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{itn}}{2^{n+1}}$$

Воспользовавшись формулой (1) для характеристической функции дискретной случайной величины, заметим, что функция $f(t)$ является характеристической функцией случайной величины ξ , которая принимает значения

$$x_n = 0, 1, 2, \ldots$$

с вероятностями

$$P(\xi = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Решение задачи закончено.

Задача 3 [задание 18]. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ . Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right), \quad x \in R$$

Решение. Найдем характеристическую функцию случайной величины

$$\eta_\lambda = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\xi_\lambda - \sqrt{\lambda}$$

Для этого воспользуемся формулой для характеристической функции случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром λ , полученной в задаче 1:

$$f_{\xi_\lambda}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

По свойству 4 характеристических функций

$$f_{\eta_\lambda}(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)} = e^{-it\sqrt{\lambda}+\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)}$$

Найдем предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} f_{\eta_\lambda}(t) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-it\sqrt{\lambda}+\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-it\sqrt{\lambda}+\lambda\left(1+\frac{it}{\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)^2+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)-1\right)} =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} e^{-it\sqrt{\lambda}+\lambda\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}-\frac{t^2}{2\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-it\sqrt{\lambda}+it\sqrt{\lambda}-\frac{t^2}{2}+o(1)} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+o(1)} = e^{-\frac{t^2}{2}} = f_\eta(t)$$

При решении задачи 1 мы установили, что, если характеристическая функция случайной величины η имеет вид

$$f_{\eta}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

то случайная величина η имеет нормальное распределение с параметрами (0, 1). Отсюда по свойству 8 характеристических функций получаем

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right) = P(\eta < x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi(x)$$

Ответ:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Задача 4 [задание 19]. Пусть $\xi_{m,n}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения

$$p_n(x) = \lambda n e^{-\lambda n x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0$$

Найти предельное распределение при $n \to \infty$ для случайной величины

$$\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \cdots + \xi_{m,n}$$

Решение. Найдем сначала характеристическую функцию случайной величины $\xi_{m,n}$

$$f_{\xi_{m,n}}(t) = Ee^{it\xi_{m,n}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_n(x)dx = \int_{0}^{+\infty} e^{itx} \lambda n e^{-\lambda n x} dx = \lambda n \int_{0}^{+\infty} e^{(it - \lambda n)x} dx =$$

$$= \lambda n \left. \frac{e^{(it-\lambda n)x}}{it - \lambda n} \right|_{0}^{+\infty} = -\frac{\lambda n}{it - \lambda n} = 1 - \frac{it}{it - \lambda n}$$

Поскольку случайные величины $\xi_{m,n}$ независимы и одинаково распределены, то с учетом свойства 7 характеристических функций получаем

$$f_{\xi_n}(t) = f_{\xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \cdots + \xi_{m,n}}(t) = f_{\xi_{1,n}}(t) \cdot f_{\xi_{2,n}}(t) \cdot \ldots \cdot f_{\xi_{m,n}}(t) = \left(f_{\xi_{m,n}}(t)\right)^n = \left(1 - \frac{it}{it - \lambda n}\right)^n$$

Найдем характеристическую функцию предельного распределения

$$\lim_{n\to\infty} f_{\xi_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{it}{it-\lambda n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{it}{it-\lambda n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{itn}{it-\lambda n}} = e^{\frac{it}{\lambda}}$$

Характеристическая функция

$$f(t) = e^{\frac{it}{\lambda}}$$

является характеристической функцией дискретной случайной величины ξ, которая принимает единственное значение $\frac{1}{\lambda}$ с вероятностью 1.

Ответ: Предельное распределение – это распределение случайной величины ξ, которая принимает единственное значение $\frac{1}{\lambda}$ с вероятностью 1.

Определение 2. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (0, 1). Распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$$

называют распределением χ^2 (хи-квадрат) с n степенями свободы.

Задача 5 [задание 20].

1. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$$

2. Найти

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\chi_n^2 - E\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}} \le x\right), \qquad x \in R$$

Решение.

1. Найдем математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ_k^2

$$E\xi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

$$E\xi_1^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 3$$

$$D\xi_k^2 = E\xi_k^4 - (E\xi_k^2)^2 = 2$$

Поскольку существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D\xi_1^2 + D\xi_2^2 + \cdots + D\xi_n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = 0\,,$$

то к последовательности

$$\xi_1^2, \xi_2^2, \dots$$

применим закон больших чисел, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}{n} - \frac{E\xi_1^2 + E\xi_2^2 + \cdots + E\xi_n^2}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}{n} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

Доказано.

2. Поскольку $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы и одинаково распределены, то

$$E\chi_n^2 = E(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2) = E\xi_1^2 + E\xi_2^2 + \cdots + E\xi_n^2 = nE\xi_1^2 = n$$

$$D\chi_n^2 = D(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2) = D\xi_1^2 + D\xi_2^2 + \cdots + D\xi_n^2 = nE\xi_1^2 = 2n$$

Применяя центральную предельную теорему, получаем

$$P\left(\frac{\chi_n^2 - E\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}} \leq x\right) = P\left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 - n}{\sqrt{2}\sqrt{n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Решение задачи закончено.