Функциональные последовательности и ряды

В пособии рассматриваются понятия функциональной последовательности и функционального ряда. Приведены основные определения и теоретические факты связанные с поточечной, равномерной и неравномерной сходимостью функциональных последовательностей и рядов, разобраны типовые задачи и методы их решения.

В пособии использованы задачи из сборника задач [1] и методических разработок кафедры высшей математики МФТИ.

Для студентов первого курса университетов и технических вузов с расширенной программой по математике.

Составитель Иванова С.В, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Основные обозначение:

$E \subset \mathbb{R}$ - промежуток числовой прямой.

$B(E)$ - множество функций, ограниченных на множестве E.

$C(E)$ - множество функций, непрерывных на множестве E.

$R(E)$ - множество функций, интегрируемых по Риману на множестве E.

$D(E)$ - множество функций, дифференцируемых на множестве E.

Нижний индекс (индексы) у переменной обозначают зависимость индексированной переменной от переменных-индексов, например, $N_{x,\varepsilon}$ - N зависит от x и от ε.

1 Поточечная, равномерная и неравномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

1.1 Основные определения

Пусть числовые функции $f_n(x)$ и $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, определены на множестве $E \subset \mathbb{R}$.

Последовательность $\{f_n(x), x \in E\}_{n=1}^{+\infty}$ будем называть функциональной последовательностью.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x), x \in E$ будем называть функциональным рядом.

Заметим, что при любом фиксированном $x_0 \in E$ для **числовой** последовательности $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{+\infty}$ и **числового** ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ применимы ранее изученные определения, свойства и приемы исследования.

Определение 1.1. Функциональная последовательность $\{f_n(x), x \in E\}_{n=1}^{+\infty}$ называется поточечно сходящейся на множестве E, если она сходится как числовая последовательность при каждом $x_0 \in E$. Если функциональная последовательность поточечно сходится на множестве E, то она определяет новую функцию $f(x)$ на множестве E: $\forall x \in E$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, называемую поточечным пределом последовательности $\{f_n(x)\}$. Обозначение: $f_n \overset{E}{\to} f$ при $n \to \infty$.

Задание 1.1.

1.Записать в кванторной форме определение поточечной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

2. Записать в кванторной форме: последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ поточечно сходится к функции $f(x)$ на множестве E.

В изучаемой теме внимание акцентируется на различении понятий «функциональная последовательность **сходится равномерно**» и «функцинальная последовательность **сходится неравномерно**». Подчеркнем, что в обоих случаях поточечная сходимость имеет место, поэтому в качестве основной формулировки, связаной с поточечной сходимостью, удобно выбрать поточечную сходимость к известной функции, а именно, $f_n(x) \overset{E}{\to} f(x)$:

$$\forall x \in E\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В определении поточечной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E число $N_{x,\varepsilon}$ зависит от точки x и от эпсилон. Равномерность сходимости функциональной последовательности понимается как независимость N от точки $x \in E$. То есть переменная x в определении равномерной сходимости определяется после переменной N:

Определение 1.2. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall x \in E\, \forall n \geqslant N \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Условие $\forall x \in E$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ можно сформулировать иначе:

Определение 1.2s. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N \mapsto \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Задание 1.2. Докажите эквивалентность приведенных определений равномерной сходимости.

Обозначение: $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ называют равномерно сходящейся на множестве E, если существует функция $f(x)$, к которой эта последовательность сходится равномерно.

Задание 1.3. Доказать, что из равномерной сходимости последовательности на множестве E следует поточечная сходимость.

Задание 1.4. Сформулировать отрицание кванторного определения равномерной сходимости и выбрать термин, который определяется полученной кванторной формулировкой:

- последовательность не сходится равномерно;

- последовательность сходится неравномерно.

Определение 1.3. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится неравномерно на множестве E, если выполнены два условия:

1) $f_n \xrightarrow{E} f$ (последовательность сходится поточечно на E);

2)$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\ \exists x \in E: \quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ (последовательность не сходится равномерно на множестве E).

Заметим, что в отрицании условия равномерной сходимости переменные n и x могут следовать в любом порядке. Почему?

Приведенные ниже примеры показывают, что выделение новых понятий **равномерной сходимости** и **неравномерной сходимости** содержательно. В примерах также показаны образцы **доказательства по определению** равномерной и неравномерной сходимости.

Пример 1.1.

1. Пусть $f_n(x) = \dfrac{1}{n},\ x \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $g_n(x) = \dfrac{x}{n},\ x \in [0;1]$.

3. Пусть $h_n(x) = \dfrac{x}{n},\ x \in [0;+\infty)$.

4. Пусть $p_n(x) = \dfrac{1}{xn},\ x \in (0;1]$.

$\rhd_1$ Решение любой задачи на исследование равномерной сходимости функциональной последовательности необходимо начать с нахождения поточечного предела, так как поточечный предел используется в анализируемых далее выражениях: поточечный предел $f(x) = 0$.

Запишем кванторное определение $f_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \geqslant N \mapsto \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Полученное заключительное неравенство легко решить и найти какое-то натуральное N, начиная с которого неравенство выполнено всегда.

Таким образом, выбирая в кванторном определении, например, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, завершаем доказательство по определению для первого примера. $\lhd_1$

$\rhd_2$ $g_n(x) \xrightarrow{[0;1]} 0$.

Запишем кванторное определение $g_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \geqslant N \mapsto \left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Нужно получить зависимость N только от ε, исключая зависимость от x. Выполним упрощающую неравенство оценку. Так как $x \in [0;1]$, то $\left|\frac{x}{n} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Выбирая в кванторном определении $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, завершаем доказательство по определению для второго примера. $\lhd_2$

Напомним, что прием упрощающих оценок использовался при проверке кванторных определений предела числовых последовательностей, предела функции в точке, непрерывности функции в точке.

В случае доказательства по определению равномерной сходимости функциональной последовательности цель упрощающих оценок - получить оценку выражением, независящим от x.

Так как показанный прием упрощающих оценок будет часто использоваться при решении задач его целесообразно обобщить (См. достаточное условие равномерной сходимости функциональных последовательностей (теорема 2.1.)).

$\triangleright_3$ $h_n(x) \overset{[0;+\infty)}{\to} 0 = h(x)$.

Для выражения $|h_n(x) - h(x)| = \frac{x}{n}$ при $x \in [0; +\infty)$ нет возможности получить оценку, независящую от x.

Запишем формальное отрицание определения равномерной сходимости без указания значений переменных под кванторами существования:

$$\exists \varepsilon = \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_N = \quad \exists x_N = \quad : |h_{n_N}(x_N) - 0| = .\overset{*}{.}. \geqslant \varepsilon.$$

Для доказательства неравномерной сходимости нужно для каждого натурального N подобрать номер функции $n \geqslant N$ и точку x_N такую, что выражение $|h_{n_N}(x_N) - h(x_N)|$ принимает значения, отделенные от нуля. Символ $.\overset{*}{.}.$ обозначает упрощающие оценки, направленные на полученние константы, отделяющей значения выражения от нуля. Эта константа может быть выбрана в качестве ε.

В частности, если существует последовательность $\{x_N\} \subset E$, такая, что выражение $|h_N(x_N) - h(x_N)|$ принимает значения, отделенные от нуля, то мы сможем доказать выполнение формального отрицания определения равномерной сходимости.

Подберем значения всех переменных под кванторами существования для последовательности $h_n(x)$. Часто можно выбрать $n_N = N$. Такой выбор будем использовать при предварительном анализе. (При необходимости, например, как в примере 3.3., для упрощения оценок снизу выражения вида $|h_{n_N}(x_N) - h(x_N)|$ будем подбирать другие зависимости.)

Выражение $|h_n(x) - h(x)| = \frac{x}{n}$. При $n_N = N$ и $x_N = N$ имеем $|h_{n_N}(x_N) - h(x_N)| = \frac{N}{N} = 1 = \varepsilon$.

Вопрос: почему при таком выборе ε можно считать не зависящим от остальных переменных при использовании в определении отсутсвия равномерной сходимости?

Итак, утверждение

$$\exists \varepsilon = 1\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_N = N\ \exists x_N = N : |h_n(x_N) - 0| = \frac{N}{N} = 1 = \varepsilon$$

доказывает, что последовательность не сходится равномерно.

Поточечная сходимость указана выше. Значит, последовательность сходится неравномерно. $\triangleleft_3$

Подчеркнем, во-первых, при доказательстве неравномерной сходимости доказывается поточечная сходимость и условие неравномерной сходимости.

Во-вторых, в литературе можно найти образцы решения задач, где неравномерная сходимость доказывается предъявлением последовательности x_n таких что значения выражения $|h_n(x_n) - h(x_n)|$ отделены от нуля. Это утверждение требует доказательства! И, главное, использование аналогичного приема в доказательстве неравномерной сходимости функциональных рядов **часто приводит к ошибкам**. Соответствующий пример будет рассмотрен ниже (см. Контр-пример 2.2.).

Рассмотрим четвертый пример, не приводя эмпирических (очевидных) соображений по поиску x_N.

$\triangleright_4$ $p_n(x) \overset{(0;1]}{\to} 0 = p(x)$.

Утверждение

$$\exists \varepsilon = 1\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_N = N\ \exists x_N = \frac{1}{N} : |p_N(x_N) - 0| = \frac{1}{(1/N)\, N} = 1 = \varepsilon$$

доказывает, что последовательность не сходится равномерно.

Поточечная сходимость указана выше. Значит, последовательность сходится неравномерно. $\triangleleft_4$

Подчеркнем, что в отрицании определения равномерной сходимости последовательности переменные x и n под кванторами существования могут быть записаны в любом порядке (так как в положительной формулировке это возможно и не влияет на смысл). Следовательно, они зависят только от произвольного N и, вообще говоря, от ε, но не зависят друг от друга.

Рассмотрим основные определения, связанные с функциональными рядами.

Определение 1.4. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ называется поточечно сходящимся на множестве E, если при каждом $x_0 \in E$ сходится соответствующий числовой ряд. Если функциональный ряд поточечно сходится на множестве E, то он определяет новую функцию $S(x)$ на множестве E: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$, называемую суммой ряда.

Аналогично теории числовых рядов вводятся понятия

n-го члена ряда $u_n(x)$;

N-ой частичной суммы ряда $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x_0)$;

отрезка ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{N} u_n(x_0)$;

N-го остатка ряда $r_n(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x_0)$;

абсолютно сходящегося ряда;

условно сходящегося ряда.

Заметим, что, так как $S_n(x) - S(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = r_n(x)$, определения равномерной сходимости и неравномеой сходимости функционального ряда могут быть даны в терминах последовательностей частичных сумм ряда или в терминах остатка ряда. Последовательность остатков ряда поточечно сходится к нулю.

Определение 1.5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x),\ x \in E$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если

- последовательность его частичных сумм равномерно сходится к его поточечному пределу: $S_N(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$;

или

- последовательность остатков этого ряда равномерно сходится к нулю: $r_N(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Для использования в решении задач оба определения, как правило, не удобны. Определение в терминах частичных сумм требует знания суммы ряда, вычисление которой представляет не редко задачу более сложную, чем исследование на равномерную сходимость.

Несмотря на то, что остаток поточечно сходящегося функционального ряда сходится к функции, тождественно равной нулю, оценивание остатка ряда, как бесконечной суммы, также является сложной задачей. Поэтому определения нужны для решения теоретических задач.

Приемы и теоретические факты, используемые в решении типовых задач контрольной работы будут рассмотрены во втором параграфе.

Важно! Как и в исследовании числовых рядов в решении задач исследования сходимости функциональных рядов рассматриваются члены ряда или отрезки ряда. Операции к ряду (бесконечной сумме), в том числе, оценивание ряда, не применяется (за исключением применения теоремы Абеля, которая в данном пособии не используется при решении задач). В случае применения оценок к бесконечным суммам требуется обоснование!

1.2 Основые теоремы и приемы решения задач исследования на равномерную сходимость функциональных последовательностей и рядов

Типовые задачи контрольной работы формулируются «Исследовать последовательность на сходимость и равномерную сходимость» и «Исследовать ряд на сходимость и равномерную сходимость» и, как правило, включают исследование на двух множествах. Необходимо определить тип сходимости: равномерная или неравномерная сходимость и доказать предполагаемое утверждение.

1. **Поточечная сходимость и поточеный предел**.

В решении задач исследования на равномерную сходимость **последовательности** нахождение поточечного предела последовательности необходимо для получения выражения $(f_n(x) - f(x))$, которое используется во всех теоремах (приемах) доказательства равномерной и неравномерной сходимости последовательности.

В решении задач исследования на равномерную сходимость **ряда** сумма ряда, как правило, не нужна. В доказательстве равномерной сходимости ряда поточечная сходимоть не используется и, более того, является следствием равномерной сходимости.

В доказательстве неравнормерной сходимости ряда поточечная сходимость является частью определения и ее доказательство необходимо для решения задачи. Доказательство только выполнения отрицания условия равномерной сходимости показывает, что ряд не сходится равномено, но ничего не сообщает о сходимости ряда!

Поэтому при решении задач обоих типов рекомендуем всегда (во избежание типичной ошибки) доказывать поточечную сходимость.

Для нахождения поточечного предела последовательности используется замена на эквивалентную числовую последовательность при фиксированном x. Подробного обоснования вычисления предела не требуется.

Для доказательства поточечечной сходимости ряда используются:

- для знакопостоянных рядов признак замены на эквивалентную;

- для знакопостоянных рядов и для абсолютно сходящихся знакопеременных рядов признак сравнения (удобнее использовать, чем признак замены на эквивалентную, так как после получения упрощающих оценок часто видно, возможна ли равномерная упрощающая оценка);

- для знакопеременных (знакочередующихся) условно сходящихся рядов признак Дирихле (признак Лейбница) сходимости числового ряда.

2. **Доказательство равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов**.

Для доказательства **равномерной сходимости функциональных последовательностей** используются две основные теоремы:

- достаточное условие равномерной сходимости последовательности;

- критерий равномерной сходимости функциональной последовательности (в более сложных случаях).

Теорема 2.1. (Достаточное условие равномерной сходимости последовательности.)

Если существует числовая бесконечно малая последовательность $\{a_n\}$ и номер N_0, такие что

$$\forall n \geqslant N_0 \ \ \forall x \in E \ \ \mapsto \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$

то $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$.

При использовании достаточного условия равномерной сходимости мажорирующая бесконечно малая последовательность a_n может быть получена:

- упрощающими оценками, основанными на хорошо известных неравенствах (см. примеры 3.1., 3.2., 3.4.),

- упрощающими оценками, основанными на применении формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Оценивание применяется остаточному члену формулы Тейлора в форме Лагранжа, а именно к степени переменной остаточного члена (см. примеры 3.5. и 3.6.). Обращаем внимание, что применение именно формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа позволяет получить точное представление функции. Использование остаточного члена в форме Пеано не допустимо, так как не имея точного представления функции нет возможности получить необходимые для решения равномерные оценки.

После получения мажорирующей последовательности a_n отмечаем, что она является бесконечно малой и делаем ссылку на достаточное условие.

Заметим, что достаточное условие равномерной сходимости упрощает решение по определению, так как в этом случае не требуется доказательство выполнения кванторной формулировки (нахождение зависимости N от ε). Поэтому использование достаточного условия равномерной сходимости предпочтительнее доказательства по определению равномерной сходимости.

Доказательство достаточного условия осуществляется применением определений поточечной и равномерной сходимости в кванторной форме.

Задание 2.1. Доказать достаточное условие равномерной сходимости последовательности.

Далее ссылку на достаточное условие равномерной сходимости последовательности будем обозначать Д.У.

Теорема 2.2. (Критерий равномерной сходимости последовательности).

$$f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

При применении критерия равномерной сходимости получаем выражение $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$ как числовую последовательность и исследуем ее предел. См. пример 3.8.

Подчеркнем, что получение мажорирующей бесконечно малой последовательности упрощающими оценками (в проверке Д.У) обеспечивает нахождение верхней грани, но, вообще говоря, не точной верхней грани. Поэтому ссылка на критерий равномерной сходимости при нахождении мажорирующей последовательности будет ошибкой: не доказано, а, возможно, и не верно, что найдена точная верхняя грань. Критерием рекомендуется пользоваться для доказательства равномерной сходимости последовательности при условии, что получить мажорирующую последовательность упрощающими оценками затруднительно.

Для доказательства **равномерной сходимости функционального ряда** используются две основные теоремы:

- признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда;
- признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

В некоторых задачах (например, 3.13. и 3.14.) используются признак Лейбница равномерной сходимости рядов и исследование последовательности частичных сумм ряда.

Теорема 2.3. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда).

Если существует числовая последовательность $\{a_n\}$, такая что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ — сходится и номер N_0, такие что

$$\forall n \geqslant N_0 \;\; \forall x \in E \;\; \mapsto \;\; |u_n(x)| \leqslant a_n,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно.

Так как признак Вейерштрасса влечет абсолютную сходимость, то его применение целесообразно только для абсолютно сходящихся рядов.

Последовательность a_n получаем оцениванием **модуля** n-го члена ряда. Для полученного числового знакопостоянного ряда доказываем сходимость заменой на эквивалентные и применением эталонных числовых рядов.

Вопрос: почему нельзя оценки сверху проводить для члена функционального ряда вместо модуля члена функционального ряда?

Замечание! Типовой ошибкой неправильной проверки условий признака Вейерштрасса является доказательство того, что мажорирующая члены ряда последовательность является бесконечно малой.

Контр-пример. Гармонический ряд, рассмотренный как функциональный ряд на любом промежутке расходится и не может сходится равномерно, но его члены мажорируются бесконечно малой последовательностью:

$\triangleright$ Пусть $\forall x \in [0;1] \quad u_n(x) = \frac{1}{n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ расходится в каждой точке отрезка $[0;1]$. Но для любого $x \in [0;1]$ справедлива оценка $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} = a_n$. Числовая последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ является бесконечно малой.$\triangleleft$

Приведем основные отличия в применении достаточного условия равномерной сходимости последовательности и признака Вейерштрасса равномерной сходимости ряда:

- исследуем на равномерную сходимость последовательность (Д.У.) — проверяем, что мажоранта является бесконечно малой последовательностью.

- исследуем на равномерную сходимость ряд (признак Вейерштрасса) — проверяем, что полученный упрощающими оценками числовой ряд сходится.

Теорема 2.4. (Признак Дирихле).

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, если выполнены следующие условия:

1) последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ равномерно ограничена на множестве E:

$$\exists C > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \quad \mapsto \left| \sum_{n=1}^{N} v_n(x) \right| \leqslant C;$$

2) последовательность $\{u_n(x)\}$ монотонно убывает при каждом фиксированном $x \in E$:

$$\forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N} \ \mapsto u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x);$$

3) последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на множестве E:

$$u_n \overset{E}{\rightrightarrows} 0.$$

Замечание. (Идеи для запоминания формулировки, не являются математическими утверждениями!) Признак Дирихле равномерной сходимости ряда можно припомнить на основе признака Дирихле схомимости числового ряда, используя «мнемоническое правило» «все, что может быть «равномерным», формулируем равномерным», а именно,

– в формулировке ограниченности последовательности частичных сумм можно потребовать, чтобы ограничивающая константа не зависила от $x \in E$, значит требуем равномерной ограниченности последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$;

– последовательность может равномерно сходится к нулю, следовательно, включаем требование равномерной сходимости последовательности $u_n \overset{E}{\rightrightarrows} 0$;

– в формулировке требования монотонного убывания нет кванторов существования, поэтому равномерность, как независимость какого-либо параметра от x, сформулировать нельзя. Требуем монотонность при каждом $x \in E$.

При проверке условий признаков Дирихле поточечной и равномерной сходимости функционального ряда используются формулы:

$$\sum_{n=1}^{N} \sin n\alpha = \frac{\sin\left(\frac{(N+1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}; \qquad \sum_{n=1}^{N} \cos n\alpha = \frac{\cos\left(\frac{(N+1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}; \quad \alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Рекомендуется вычислить значения $\sum_{n=1}^{N} \sin n\alpha$ и $\sum_{n=1}^{N} \cos n\alpha$ при $\alpha = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Важно! При доказательстве равномерной сходимости последовательности и ряда **нельзя использовать замену на эквивалентную последовательность ни для функций – членов последовательности, ни для функций – членов ряда**. Почему?

Для полноты изложения приведем теоремы, которые могут использоваться для доказательства равномерной сходимости функциональных рядов, а именно, признак Абеля, критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Кроме того, сформулируем в качестве следствия критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Предварительно заметим, что применению признака Абеля и критерия Коши равномерной сходимости последовательности далее внимание уделено не будет. Критерий Коши и необходимое условие равномерной сходимости ряда будут использоваться в пособии только для доказательства отсутствия равномерной сходимости. Соответствующие формулировки отрицания условия Коши и отрицания необходимого условия равномерной сходимости ряда будут приведены ниже.

Теорема 2.5. (Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, если выполнены следующие условия:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на множестве E;

2) последовательность $\{u_n(x)\}$ монотонно убывает при каждом фиксированном $x \in E$;

3) последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве E.

Замечание. Для запоминания признака Абеля равномерной сходимости функциональных рядов на основе признака Абеля сходимости числовых рядов можно использовать мнемоническое правило аналогичное рассмотренному при формулировке признака Дирихле.

Теорема 2.6. (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной **последовательности**.)

Последовательность $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad \mapsto\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.7. (Критерий Коши равномерной сходимости функционального **ряда**.)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши равномерной сходимости функционального ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad \mapsto \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Следствие теоремы 2.7. (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$, то выбирая в условии Коши $p = 1$, получаем необходимое условие равномерной сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant N_\varepsilon \; \forall x \in E \quad \mapsto \; |u_n(x)| < \varepsilon.$$

Необходимое условие равномерной сходимости ряда можно сформулировать в терминах равномерной сходимости последовательности членов ряда: $u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0, \; n \to +\infty$.

Теорема 2.8. (Критерий равномерной сходимости функционального ряда в терминах остатка ряда.)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x\in E} |r_n(x)| \overset{E}{\to} 0, \; n \to +\infty$.

Замечание. В формулировках критериев Коши равномерной сходимости последовательности и ряда переменные под кванторами «любой» n, p, x могут быть записаны в любом порядке, поэтому при построении отрицаний условий Коши будем считать эти переменные независящими друг от друга, а зависящими только от предшествующих переменных N, ε.

Замечание. Так как $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$, то формулировку критерия Коши равномерной сходимости ряда можно восстановить используя формулировку критерия Коши равномерной сходимости последовательности для последовательности частичных сумм ряда.

Задание 2.2. Доказать критерий Коши, используя критерий Коши равномерной сходимости последовательности для последовательности частичных сумм ряда.

3. **Доказательство неравномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов**.

Напомним, что доказательство неравномерной сходимости последовательностей и рядов включает доказательсво поточечной сходимости и отсутствия равномерной сходимости.

Для доказательства **отсутствия равномерной сходимости последовательностей** используется доказательство выполнения кванторной формулировки определения (отрицание кванторной формулировки определения равномерной сходимости последовательности):

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists x_N \in E \; \exists n_N \geqslant N : \quad |f_{n_N}(x_N) - f(x_N)| \geqslant \varepsilon.$$

В примерах 1.1 (3,4) было показано, что
– переменные n и x не зависят друг от друга;
– как правило, удобно выбрать $n_N = N$, иногда, для упрощения оценок осуществляется другой выбор;
– для выбора x_N удобно использовать вспомогательную последовательность, такую что выражение $f_N(x_N) - f(x_N)$ отделено от нуля.

Использование отрицания условия Коши равномерной сходимости последовательности, как правило, приводит к громоздким формулам и затрудняет решение практических задач.

Для доказательства **отсутствия равномерной сходимости рядов** используются:
– кванторная формулировка отрицания необходимого условия равномерной сходимости ряда;
– отрицание условия Коши равномерной сходимости ряда (в более сложных случаях).

Также могут использоваться методы доказательства отсутствия равномерной сходимости к последовательности частичных сумм ряда (например, пример 3.14).

Сформулируем отрицание необходимого условия равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists x_N \in E \; \exists n_N \geqslant N : \quad |u_{n_N}(x_N)| \geqslant \varepsilon.$$

Применение отрицания необходимого условия равномерной сходимости ряда аналогично применению отрицания определения равномерной сходимости последовательности:
– переменные n и x не зависят друг от друга;

– как правило, удобно выбрать $n_N = N$;
– для выбора x_N удобно использовать вспомогательную последовательность, такую что выражение $u_N(x_N)$ отделено от нуля. (Построение такой последовательности не рекомендуется в качестве самостоятельного приема доказательства отсутствия равномерной сходимости ряда и требует доказательства.)

Сформулируем отрицание условия Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$:

$$\exists\varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists x_N \in E \; \exists n_N \geqslant N \; \exists p_N \in \mathbb{N} : \quad \left| \sum_{k=n_N+1}^{n_N+p_N} u_k(x_N) \right| \geqslant \varepsilon.$$

При применении отрицания условия Коши равномерной сходимости ряда следует учитывать:
– переменные n, p и x не зависят друг от друга, но каждая из них зависит от N;
– если удается подобрать вспомогательную последовательность x_N такую, что $u_N(X_N)$ отделено от нуля, целесообразно доказательство отрицания необходимого условия равномерной сходимости ряда;
– применение отрицания условия Коши равномерной сходимости ряда целесообразно, если удается подобрать вспомогательную последовательность x_N такую, что $u_N(X_N) \overset{const}{\sim} \frac{1}{N}$ (или члену другого расходящегося числового ряда, для которого в отрицании условия Коши числовых рядов рассматривается отрезок ряда, а не член ряда (см. пример 3.10.);
– в случае выбора последовательности x_N такой, что $u_N(X_N) \overset{const}{\sim} \frac{1}{N^\alpha}$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, то есть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ как правило, удобно выбрать $n_N = N,\ p_N = N$.
– члены рассматриваемого в отрицании условия Коши отрезка ряда зависят от двух переменных — индекса суммирования k и переменной N, через которую выражается x_N. Запись члена отрезка ряда через одну переменную K является ошибкой (см. контр-пример 2.1.).
– выбор последовательности x_n, такой, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_n)$ - расходится является ошибкой (см. контр-пример 2.1.).

Контр-пример 2.1. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x), x \in [1; +\infty)$, где $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [n; n+1); \\ 0, & x \bar{\in} [n; n+1). \end{cases}$$

$\triangleright$ В каждой точке $x \in [1; +\infty)$ отличен от нуля только один член ряда:
при $x \in [n; n+1) \quad \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{n}$.

Значит, для последовательности частичных сумм ряда имеем оценку равномерную оценку числовой последовательностью: $\sup\limits_{[1;+\infty)} |S_n(x) - S(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0$. Ряд сходится равномерно.

Но! Выберем последовательность $x_n = n$, тогда $u_n(x_n) = \frac{1}{n}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ — расходится (гармонический ряд).

Рассмотрим ошибочную форму записи отрезка ряда при $x_k = k$ в виде $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_k) = \sum\limits_{n+1}^{n+p} \dfrac{1}{k}$, что соответствует отрезку расходящегося гармонического ряда.

Правильная запись в этом примере: $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_{\mathbf{N}}) = \dfrac{1}{N}$, то есть, как и в приведенном выше доказательстве равномерной сходимости рассматриваемого ряда в отрезке ряда отличен от нуля только один член. $\triangleleft$

1.3 Примеры решения задач исследования на равномерную сходимость функциональных последовательностей и рядов

Замечание. Наибольшие сложности при решении задач исследования на равномерную сходимость связаны с вопросом «что доказывать». Соответствующие рассуждения вынесены в некоторых примерах в **анализ на черновике.** В части примеров этот анализ опущен, чтобы показать только оформление решений.

Пример 3.1.

Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+n^2x^6}$ на множествах $E_1 = [0;1]$ и $E_2 = [1;+\infty)$.

$\triangleright_{3.1.}$

Найдем **поточечный предел**. В задачах исследования функциональных последовательностей на равномерную сходимость поточечный предел, как правило, не известен. Для поиска поточечного предела используем замену на эквивалентную последовательность.

Заметим, что $f_n(0) = 0 = f(0)$. Рассмотрим при $x > 0$.

Выполним замену на эквивалентную последовательность при любом фиксированном $x > 0$ и $n \to +\infty$.

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x^6} \sim \frac{nx^3}{n^2x^6} = \frac{1}{nx^3} \to 0 = f(x).$$

Итак, $f(x) = 0,\ x \in E_1 \cup E_2$.

Анализ на черновике. Определим, равномерную или неравномерную сходимость будем доказывать на каждом исследуемом промежутке.

Заметим, что $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{nx^3}{n^2x^6} = \frac{1}{nx^3}$. Для получения равномерной оценки сверху полученного выражения x в знаменателе нужно оценить снизу ненулевой константой. Это легко сделать на множестве E_2. На множестве E_1 нужно либо делать другую оценку, либо подбирать последовательность x_N, такую, что выражение $f_N(x_N) - f(x_N)$ отделено от нуля.

Так как $f_n(x) - f(x) = \frac{nx^3}{1+(nx^3)^2}$, то при $x_N = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \mapsto f_N(x_N) - f(x_N) = \frac{1}{2} > 0$. Значит, выбираем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ в отрицании определения равномерной сходимости.

Доказательство равномерной сходимости на E_2.

Учитывая, что $x \in E_2$, имеем:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x^6} \overset{E_2}{<} \frac{nx^3}{n^2x^6} = \frac{1}{nx^3} \overset{E_2}{\leqslant} \frac{1}{n} = a_n \to 0.$$

По Д.У. $f_n(x) \overset{E_2}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство неравномерной сходимости на E_1.

Поточечная сходимость доказана.

Покажем выполнение отрицания определения равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n = N\ \exists x_N = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}: \quad |f_N(x_N) - 0| = \frac{1}{2} = \varepsilon. \triangleleft_{3.1.}$$

Замечание. В рассмотренном примере при доказательстве отсутствия равномерной сходимости легко получить запись, зависящую только от одного сочетания переменных x и n, а именно, nx^3. Такая запись упрощает поиск x_N. В нескольких следующих примерах такой удобной формы записи нет и придется подбирать x_N.

Пример 3.2. (17.8.7)

Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x^n}$ на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$.

$\triangleright_{3.2.}$

Найдем **поточечный предел**.

При $x \in E_1$ выражение $x^n \ll n$, следовательно, $f_n(x) = \frac{nx}{n+x^n} \sim \frac{nx}{n} = x \overset{n\to+\infty}{\to} x = f(x)$.

При $x \in E_2$ $x^n \gg n$, значит $f_n(x) = \frac{nx}{x^n} = \frac{n}{x^{n-1}} \overset{n\to+\infty}{\to} 0 = f(x)$.

Докажем равномерную сходимость на E_1.

$\left|\frac{nx}{n+x^n} - x\right| = \frac{x^n}{n+x^n} \overset{x\in(0;1)}{\leqslant} \frac{1}{n} = a_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$

По Д.У. равномерной сходимости $f_n(x) \overset{E_1}{\rightrightarrows} x = f(x)$.

Анализ на черновике. Заметим, что предположение о доказательстве именно равномерной сходимости в данном случае можно сделать аналогично предыдущему примеру, анализируя возможность упрощающей равномерной оценки сверху.

Но, после изучения свойств функции, определенной как поточечный предел функциональной последовательности (см. ниже теорема 4.?), можно рассуждать, исходя из свойств непрерывности этой функции на отрезке.

На отрезке $[0;1]$ аналогично E_1 имеем $f_n(x) = \frac{nx}{n+x^n} \sim \frac{nx}{n} = x \overset{n\to+\infty}{\to} x = f(x)$. Последовательность сходится к непрерывной на отрезке функции. Может быть равномерно, ищем равномерные по x оценки. Важно, что сходимость к непрерывной функции не означает, что последовательность сходится равномерно (см. пример 5.?.). Прием анализа непрерывности поточечного предела удобнее использовать для предварительного анализа неравномерной сходимости: нет непрерывности на отрезке поточечного предела последовательности непрерывных функций — доказываем неравномерную сходимость, причем последовательность x_N ищем сходящейся к точке разрыва.

Например, на отрезке $[1;2]$ имеем: $f_n(1) \to 1$, для любого $x > 1$ $\ f_n(x) \to 0$. Таким образом, на отрезке $[1;2]$ последовательность сходится к разрывной функции, причем $x = 1$ является точкой разрыва. Ищем последовательность $\{x_N\} \subset E_2$ такую, что $x_N \to 1$.

Доказательство отсутствия равномерной сходимости на E_2.

$$\exists\varepsilon = \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n = N \exists x_N = 1 + \frac{1}{N}:$$

$$|f_N(x_N) - f(x_N)| = \frac{N\left(1+\frac{1}{N}\right)}{N + \left(1+\frac{1}{N}\right)^N} = \frac{N+1}{N + \left(1+\frac{1}{N}\right)^N} \overset{1}{\geqslant} \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2}.$$

При выполнении оценки $\overset{1}{\geqslant}$ учитывались следующие соображения: $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N \overset{n\to+\infty}{\to} e < N+2$. Так как для доказательства достаточно грубой оценки выражения $|f_N(x_N) - f(x_N)|$ снизу, увеличиваем знаменатель так, чтобы было удобно получить число, отделяющее это выражение от нуля.

Полученная оценка снизу позволяет зафиксировать $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Итак, последовательность сходится неравномерно на E_2. $\triangleleft_{3.2.}$

Пример 3.3.

Исследовать на равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{nx^2}$ и $g_n(x) = \dfrac{\ln nx^2}{nx}$ на множестве $E_1 = (0;1)$.

$\triangleright_{3.3.}$ **Поточечная сходимость и предел последовательности.**

Можно вычислить соответствующий предел $f_n(x)$ при любом фиксированном $x > 0$, например, рассмотрев соответствующие функции и применив, правило Лопиталя.

Но для развития интуиции полезно заметить, что логарифмическая функция на бесконечности растет медленнее многочлена любой степени (это следует из применения правила Лопиталя). В данной задаче сравнение скоростей роста мы применяем к логарифмической последовательности $\ln nx$ и последовательности nx^2. Значит, $f_n(x) \overset{n\to+\infty}{\to} 0 = f(x)$.

Аналогично, $g_n(x) \overset{n\to+\infty}{\to} 0 = g(x)$.

Анализ на черновике.

Учитывая, что функции последовательности нельзя продолжить до непрерывных функции на отрезке $[0;1]$: при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ и $x \to 0{+}0 \quad f_n(x) \to -\infty$, предположим, что обе последовательности сходятся неравномерно.

Так как в обоих случаях имеем сочетания вида nx и nx^2, то возникает вопрос можно ли подобрать последовательность x_N из условиия $Nx_N = const$ или $Nx_N^2 = const$? Для обеих рассматриваемых последовательностей можно поставить условие: знаменатель выражений $f_N(x_N)$ и $g_N(x_N)$ является (или стремиться к константе), а числитель неограничен (тогда не придется сравнивать скорости роста числителя и знаменателя). Получаем, что для последовательности $f_n(x)$ можно использовать в отрицании отпределения равномерной сходимости последовательность $x_N = \frac{1}{\sqrt{N}}$, а для последовательности $g_n(x)$ — последовательность $x_N = \frac{1}{N}$.

Доказательство неравномерной сходиости последовательности $f_n(x)$.

При получении итоговой оценки отрицания определения получаем, что эта оценка либо выполнена при $N \geqslant 2$, что влечет вопрос правильно ли мы проверили отрицание определения:

$$\exists\varepsilon = \ln 2\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n = N \exists x_N = \frac{1}{\sqrt{N}}: \quad |f_N(x_N) - 0| = \frac{\ln\sqrt{N}}{1} \overset{N\geqslant 2}{\geqslant} \ln 2.$$

Формально полученная запись доказывает отрицание определения не для всех натуральных N, но ее легко исправить (самостоятельно).

Учитывая возникшую проблему можно решить ее выбором n и x_N для второй последовательности:

$$\exists\varepsilon = \ln 2\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n = N+1 \exists x_N = \frac{1}{N+1}: \quad |g_N(x_N) - 0| = \left|\frac{\ln\frac{1}{N+1}}{1}\right| \geqslant \ln 2.$$

Итак, обе последовательности сходятся неравномерно на $(0;1)$. $\triangleright_{3.3.}$

Замечание. Выбор значений переменных под кванторами существования можно осуществить, естественно, не однозначно. Поэтому предлагаемы рекомендации, типа $n = N$, следует рассматривать, как оринтировки, а не правила, и использовать их в соответствии с особенностями задач.

Пример 3.4. Исследовать на равномерную сходимость последовательность
$f_n(x) = \dfrac{n^3x^7}{n + x^2n^3 + x^5n^4}$ на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$.

$\triangleright_{3.4.}$ **Поточечная сходимость.**

$$\frac{n^3x^7}{n + x^2n^3 + x^5n^4} \overset{E_1\cup E_2}{\sim} \frac{x^2}{n} \to 0 = f(x),\ n \to 0.$$

Следовательно, $f_n(x) \overset{E_1\cup E_2}{\to} 0 = f(x)$.

Равномерная сходмость на E_1. Результат замены на эквивалентную последовательность при поиске поточечного предела позволяет предположить, что на E_1 последовательность сходится равномерно. Докажем, используя Д.У.:

$$\left|\frac{n^3x^7}{n + x^2n^3 + x^5n^4}\right| \leqslant \frac{x^2}{n} \overset{E_1}{\leqslant} \frac{1}{n} \to 0.$$

Последовательность сходится равномерно.

Анализ на черновике. На E_2 будем доказывать неравномерную сходимость. Имеем несколько сочетаний: $n^3x^7,\ n^3x^2,\ n^4x^5,\ nx^2$, которые можно пробовать устремить к константе (или принять равными, например, единице) для поиска последовательности x_N. Рассмотрим последовательность с параметром α, что позволит проанализировать все случаи вместе.

Пусть $x_N = N^{\alpha},\ \alpha > 0$, тогда $0 \leqslant f_N(x_N) - 0 = \frac{N^{3+7\alpha}}{N+N^{3+2\alpha}+N^{4+5\alpha}} \overset{*}{\geqslant} \frac{N^{3+7\alpha}}{3N^{4+5\alpha}} = \frac{1}{3}N^{2\alpha-1} \overset{\text{требуем}}{=} \frac{1}{3}$.

Учитывая, что подбираем $\alpha > 0$, оценка $\overset{*}{\geqslant}$ выполнена путем замены двух слагаемых на третье, наибольшее из них.

Получаем, что можно выбрать $\alpha = \frac{1}{2}$, то есть $x_N = \sqrt{N}$ и $\varepsilon = \frac{1}{3}$, например, или меньше.

Доказательство неравномерной сходимости на E_2.

Поточечная сходимость доказана выше. Оформим доказательство выполнения отрицания определения равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{3}\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_N = N\ \exists x_N = \sqrt{N}: \quad |f_{n_N}(x_N) - f(x_N)| = \frac{N^{3+7/2}}{N + N^{3+1} + N^{4+5/2}} \geqslant \frac{1}{3}N^0 = \frac{1}{3}.$$

$\lhd_{3.4.}$

В следующем примере рассмотрим случай более сложной оценки с помощью представления оцениваемого выражения формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при доказательстве равномерной сходимости.

Пример 3.5. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = \sqrt{n}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$ на множествах $E_1 = [0;1]$ и $E_2 = (1;+\infty)$.

$\rhd_{3.5.}$ **Поточечная сходимость.**

Так как $\operatorname{arctg} t \sim t - \frac{t^3}{3},\ t \to 0$, и $\frac{x}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to +\infty,\ x \geqslant 0$ — фиксированно, то при поиске поточечного предела последовательности используем два члена представления функции арктангенс:

$$\sqrt{n}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \sim \sqrt{n}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^3}{3\sqrt{n^3}}\right) = \frac{x^3}{3n} \to 0 = f(x),\ n \to +\infty.$$

Анализ на черновике. Заметим, что при $x_N = \sqrt{N}$ выражение $f_N(x_N) - 0 = \sqrt{N}\,(1 - \operatorname{arctg} 1)$ отделено от нуля. На E_2 доказываем неравномерную сходимость.

Эквивалентность членов последовательности выражению $\frac{x^3}{3n}$ и равенство нулю поточечного предела позволяют предположить возможность равномерной оценки сверху выражения $|f_n(x) - 0|$ на E_1. Обращаем внимание, эквивалентность использована только для получения предположения. Замены на эквивалентные последовательности в доказательстве равномерной сходимости не допустимы!

Равномерная сходимость последователности на E_1.

Для выражения вида $(t - \operatorname{arctg} t)$ нет известных упрощающих оценок сверху. Поэтому оценку выполним с использованием точного представления рассматриваемых функций – элементов последовательности формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Величина $t = \frac{x}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to +\infty$. Определим точность представления: остаточный член представления формулой Маклорена функции $\operatorname{arctg} t$ имеет вид $\frac{t^k}{k!} \cdot h_{(k)}(\xi)$, где $h_{(k)}(\xi) = (\operatorname{arctg} t)^{(k)}_{t=\xi},\ \xi \in (0;x)$. Учитывая, что функция $y = \operatorname{arctg} t$ — бесконечно дифференцируема, следовательно, ее производные любого порядка непрерывны и ограничены на $[0;x] \subset [0;1]$, на скорость стремления к нулю влияет только t^k. Учитывая умножение на $\sqrt{n}$, достаточно представления до второго порядка: $t^2 = \frac{x^2}{n}$.

Итак,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{n}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|\sqrt{n}\left(\frac{x^2}{2n} \cdot h_{(2)}(\xi)\right)\right| \overset{x\in E_1, \xi \in (0;x)}{\leqslant} \frac{C_h}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

Где C_h - константа, ограничивающая функцию $h_{(2)}(\xi) = (\operatorname{arctg} t)^{(2)}_{t=\xi}$ на отрезке $[0;1]$.

$f_n(x) \overset{E_1}{\rightrightarrows} 0$ по Д.У.

Неравномерная сходимость на E_2 доказывается проверкой отрицания определения равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon = 1 - \frac{\pi}{4} \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n_N = N \ \exists x_N = \sqrt{N}: \quad \left|\sqrt{N}\,(1 - \operatorname{arctg} 1)\right| \geqslant 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Учитывая поточечную сходимость, последовательность сходится неравномерно на E_2.$\lhd_{3.5.}$

Пример 3.6. Исследовать на равномерную сходимость последовательность
$f_n(x) = n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ на множестве $E = [0;1]$.

$\rhd_{3.6.}$ **Поточечная сходимость.** Аналогично предыдущему примеру имеем $f_n(x) \overset{E}{\to} 0 = f(x)$.

Равномерная сходимость последовательности на E.

Выполним оценку с использованием точного представления рассматриваемых функций – элементов последовательности формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Аналогично примеру 3.5. и учитывая умножение на n, используем представление до третьего порядка: $t^3 = \frac{x^3}{\sqrt{n^3}}$ и $\operatorname{arctg} t = t + \frac{t^3}{3!}\cdot h_{(3)}(\xi)$.

Итак,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|n\left(\frac{x^3}{6\sqrt{n^3}}\cdot h_{(3)}(\xi)\right)\right| \overset{x\in E_1, \xi\in(0;x)}{\leqslant} \frac{C_h}{6\sqrt{n}} \to 0.$$

Где C_h - константа, ограничивающая непрерывную производную функции арктангенс $h_{(3)}(\xi) = (\operatorname{arctg} t)^{(3)}_{t=\xi}$ на отрезке $[0;1]$.

$f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$ по Д.У.

$\lhd_{3.7.}$

В следующем примере рассмотрим применение критерия равномерной сходимости функциональной последовательности.

Пример 3.8. Исследовать на равномерную сходимость последовательности
$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ и $g_n(x) = x^n - x^{2n}$ на интервале $E = (0;1)$.

$\rhd_{3.8.}$ Учитывая, что обе последовательности эквивалентны последовательности $h_n(x) = x^n \overset{(0;1)}{\to} 0$ при $n \to +\infty$, получаем:
$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \overset{(0;1)}{\to} 0 = f(x)$ и
$g_n(x) = x^n - x^{2n} \overset{(0;1)}{\to} 0 = g(x)$.

Очевидных упрощающих равномерных оценок нет, найдем для обеих последовательностей супремум модуля разности n-го члена и поточечного предела.

Для $f_n(x) - 0$. $(f_n(x))' = (x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$. Тогда $(f_n(x) - f(x))' = 0$ при $x_n = \frac{n}{n+1}$. Докажите самостоятельно, что это точка максимума неотрицательных на интервале $E = (0;1)$ функций $f_n(x) - f(x)$, а, следовательно,

$$\sup_E |f_n(x) - f(x)| = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Супремум представлен в виде произведения ограниченной последовательности на бесконечно малую, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_E |f_n(x) - f(x)| = 0$. По критерию равномерной сходимости последовательность $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Для $g_n(x) - 0$. $(g_n(x))' = (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n)$. Тогда $(g_n(x) - g(x))' = 0$ при $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Докажите самостоятельно, что это точка максимума неотрицательных на интервале $E = (0;1)$ функций $g_n(x) - g(x)$, а, следовательно,

$$\sup_E |g_n(x)-g(x)| = g_n(x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_E |g_n(x)-g(x)| = \dfrac{1}{4} \neq 0$. Учитывая, что $g_n(x) \xrightarrow{E} 0$, по критерию равномерной сходимости последовательность сходится на E неравномерно. $\lhd_{3.8.}$

Рассмотрим примеры исследования на равномерную сходимости функциональных рядов.

Пример 3.9. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{n^2}$ на множествах $E_1=[0;a],\ a>0$ и $E_2=[0;+\infty)$.

$\rhd_{3.9.}$ **Поточечная сходимость ряда**.

В силу необходимого условия сходимости ряда, поточечный предел последовательности членов сходящегося числового ряда равен нулю. В доказательстве поточечной сходимости, в отличие от поиска поточечного предела последовательности, нужно оценить скорость сходимости членов ряда к нулю для проверки сходимости соответствующего числового ряда с помощью эталонных числовых рядов.

Рассмотрим два способа записи.

1. Замена на эквивалентные.

$0 \leqslant u_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2} \overset{E_1\cup E_2}{\sim} \frac{x}{n^2}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n^2}$ — сходится при любом $x\in E_1\cup E_2$. Вывод о поточечной сходимости можно офомить короче, главное — ссылка на условие сходимости ряда.

Важно. Типичной ошибкой является указание, что члены ряда стремятся к нулю. Это не влечет сходимость ряда!

Также обращаем внимание на обоснование применения признака замены на эквивалентную, а именно, оценку члена ряда нулем снизу.

2. Использование признака сравнения.

$0 \leqslant u_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2} \overset{E_1\cup E_2}{\leqslant} \frac{x}{n^2}$.

Дальнейшее решение аналогично. Второй способ записи часто позволяет сразу продолжить на одном из подмножеств доказательство равномерной сходимости по признаку Вейерштрасса.

Равномерная сходимость на E_1.

$0 \leqslant u_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2} \leqslant \frac{x}{n^2} \overset{E_1}{\leqslant} \frac{1}{n^2}$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ — сходится, следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд сходится равномерно на E_1.

Анализ на черновике. Доказательство отсутствия равномерной сходимости ряда можно проводить двумя основными способами: проверкой выполнения отрицания необходимого условия равномерной сходимости или проверкой отрицания условия Коши равномерной схоимости ряда. Для применения отрицания необходимого условия на черновике подбираем последовательность x_N, такую что числовая последовательность $u_N(x_N)$ отделена нуля (аналогично приему доказательства отсутствия равномерной сходимости последовательности, рассмотренному выше).

Заметим, что при $x_N = N^2 \mapsto u_N(x_N) = \operatorname{arctg}\frac{N^2}{N^2} = \frac{\pi}{4}$.

Неравномерная сходимость на E_2. Покажем, что выполнено отрицание необходимого условия равномерной сходимости ряда:

$$\exists\varepsilon=\frac{\pi}{4}\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n=N\ \exists x_N=n^2:\quad |u_N(x_N)| = \operatorname{arctg}\frac{N^2}{N^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, с учетом поточечной сходимости, на E_2 ряд сходится неравномерно. $\lhd_{3.9.}$

Пример 3.10. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx^2}{1+n^{5/2}x^4}$ на множествах $E_1=(0;1]$ и $E_2=[1;+\infty)$.

$\triangleright_{3.10.}$ **Поточечная сходимость**.

$0\leqslant\frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^4}\overset{E_1\cup E_2}{\leqslant}\frac{nx^2}{n^{5/2}x^4}=\frac{1}{n^{3/2}x^2}$, так как $\frac{3}{2}>1$, то ряд сходится поточечно.

Замечание. При выводе о поточечной сходимости использована характеристика сходимости эталонного числового ряда.

Равномерная сходимость на E_2. Так как в полученной при доказательстве поточечной сходимости оценке x находится в знаменателе дроби, то равномерную оценку получаем на E_2:

$0\leqslant\frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^4}\leqslant\frac{nx^2}{n^{5/2}x^4}=\frac{1}{n^{3/2}x^2}\overset{E_2}{\leqslant}\frac{1}{n^{3/2}}$. Так как $\frac{3}{2}>1$, то по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на E_2.

Анализ на черновике. В записи n-го члена присутствуют два сочетания nx^2 и $n^{5/2}x^4$. Рассмотрим первое из них и построим зависимость $x_N=\frac{1}{\sqrt{N}}$, тогда $u_N(x_N)=\dfrac{N\cdot\frac{1}{N}}{1+N^{5/2}\cdot\frac{1}{N^2}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{N}}$. Получили, что выражение $u_N(x_N)$ равно (или эквивалентно) члену расходящегося числового ряда, для которого отрезок ряда из N членов отделен от нуля. Оформляем решение доказательством выполениния отрицания условия Коши.

Неравномерная сходимость на E_1.

$$\exists\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2^7}}\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n=N\ \exists p=N\ \exists x_N=\frac{1}{\sqrt{N}}:\quad\left|\sum_{k=N+1}^{2N}u_k(x_N)\right|=\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{k\cdot\frac{1}{N}}{1+k^{5/2}\cdot\frac{1}{N^2}}\overset{*}{\geqslant}$$

Обращаем внимание, что член рассматриваемого отрезка ряда явно зависит от переменных k — индекса суммирования и N.

В отрезке ряда всего N членов. Оценим каждый из них снизу:

$$\overset{*}{\geqslant}N\cdot\frac{N\cdot\frac{1}{N}}{2(2N)^{5/2}\cdot\frac{1}{N^2}}=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2^7}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2^7}}$$

Следовательно, с учетом поточечной сходимости, ряд сходится неравномерно.$\triangleleft_{3.10.}$

Замечание. Аналогично можно было использовать второе соотношение $n^{5/2}x^4=1$.

Задание 3.1. Проверьте, можно ли используя параметризованную зависимость $x_N=\frac{1}{N^\alpha}$ доказать неравномерную сходимость, используя отрицание необходимого условия равномерной сходимости ряда.

Рассмотрим примеры исследования на равномерную сходимость условно сходящихся рядов.

Пример 3.11. Исследовать на равномерную сходимость ряды

$F(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx\sin x}{\ln(n+x+1)}$ и $G(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln(n+x+1)}$ на множестве $E=(0;+\infty)$

$\triangleright_{3.11.}$ **Доказательство поточечной сходимости**. Два ряда отличаются только множителем $\sin x$, который не влияет на поточечную сходимость первого ряда. Так как в знаменателе дроби последовательность логарифмического роста, то ряды сходятся условно. Докажем это используя признак Дирихле сходимости числового ряда.

1. Ограниченность последовательности частичных сумм синусов. Заметим, что при $x=2\pi k$ рассматриваемые суммы равны нулю и могут быть ограничены, например, $C_x=1$. Для остальных неотрицательных x воспользуемся формулой суммирования синусов и, с учетом замечания, получим:

$$\exists C_x=\max\{1;\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\}\ \forall N\in\mathbb{N}:\quad \left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|=\begin{cases}\left|\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}\cdot\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 2\pi k,\ k\in\mathbb{N};\\ 0\leqslant 1, & x=2\pi k,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

2. Последовательность $\frac{1}{\ln(n+x+1)}$ — монотонна при каждом $x>0$, так как $(\ln(n+x+1))'=\frac{1}{n+x+1}>0$.
3. Последовательность $\frac{1}{\ln(n+x+1)}$ — бесконечно малая.

Значит, по признаку Дирихле оба ряда сходятся поточечно при $x>0$.

Анализ на черновике. Нетрудно видеть, что при применении признака Дирихле равномерной сходимости ряда для $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx\sin x}{\ln(n+x+1)}$ при оценке $\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\sin x\right|$ полученные выше $C_x=\max\{1;\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\}$ умножатся на $\sin x$, что позволяет получить равномерную ограниченность.

Для ряда $G(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln(n+x+1)}$ получить равномерную ограниченность не удается. Поэтому для $F(x)$ доказываем равномерную сходимость.

Для $G(x)$ предполагаем неравномерную сходимость. «Ососбенность» есть, в частности, при $x=0$. Поэтому для упрощения оценок функции $\sin nx$ будем рассматривать $x_N=\frac{1}{N}$ в отрицании условия Коши.

Равномерная сходимость $F(x)$. При $x=2\pi k, k\in\mathbb{N}$ все частичные суммы равны нулю, следовательно, ограниченны по модулю $C=2$.

$$\exists C=2\ \forall N\in\mathbb{N}:\quad \left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\sin x\right|=\begin{cases}\left|\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}\cdot\sin\frac{Nx}{2}\cdot\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 2, & x\neq 2\pi k,\ k\in\mathbb{N}\\ 0\leqslant 2, & x=2\pi k,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

2. Последовательность $\frac{1}{\ln(n+x+1)}$ — монотонна при каждом $x>0$, так как $(\ln(n+x+1))'=\frac{1}{n+x+1}>0$.
3. Так как $\left|\frac{1}{\ln(n+x+1)}\right|\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}\overset{n\to+\infty}{\to}0$, то $\dfrac{1}{\ln(n+x+1)}\rightrightarrows 0$ по Д.У.

Значит, по признаку Дирихле ряда $F(x)$ сходятся равномерно при $x>0$.

Неравномерная сходимость ряда $G(x)$. Докажем выполнение отрицания условия Коши.

$$\exists\varepsilon=\frac{\sin 1}{1000}\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_N=N;\ \exists p_N=N;\ \exists x_N=\frac{1}{N}:$$
$$\left|\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{\sin\left(\frac{1}{N}\cdot k\right)}{\ln\left(\frac{1}{N}+k+1\right)}\right|\geqslant N\frac{\sin\left(\frac{1}{N}\cdot\frac{N}{3}\right)}{\ln\left(N+2N+N\right)}=\frac{N\sin\frac{1}{3}}{\ln 4N}\geqslant\frac{\sin\frac{1}{3}}{1000}.$$

В последней оценке нам нужна любая постоянная, отделяющая от нуля.

Ряд $G(x)$ сходится неравномерно.

$\triangleleft_{3.11.}$

Рассмотрим вопрос, как связаны равномерная сходимость ряда и последовательности членов ряда.

Пример 3.12. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=x\sin\frac{1}{(nx)^2}$ и ряд $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x\sin\dfrac{1}{(nx)^2}$ на множествах $E_1=(0;1))$.

$\triangleright_{3.12.}$ **Поточечная сходимость**.

$0 \leqslant x\sin\frac{1}{(nx)^2} \overset{E_1\cup E_2}{\leqslant} \frac{1}{xn^2}$.

Так как $\frac{1}{xn^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, то последовательность $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)=0$ на $E_1\cup E_2$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{xn^2}$ сходится при любом $x\in E_1\cup E_2$, то ряд $F(x)$ поточечно сходится на $E_1\cup E_2$.

Равномерная сходимость последовательности и ряда E_2.

Продолжая полученную при доказательстве поочечной сходимости оценку $\frac{1}{xn^2} \overset{E_2}{\leqslant} \frac{1}{n^2}$, имеем:
– так как числовая последовательность $\frac{1}{n^2}$ — бесконечно малая, то последовательность $f_n(x) \overset{E_2}{\rightrightarrows} 0$ по Д.У.;
– так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ — сходится, то ряд $F(x)$ — сходится равномерно на E_2 по признаку Вейерштрасса.

Анализ на черновике. Для определения типа сходимости последовательности и ряда на E_1 рассмотрим параметризованную последовательность $x_N=\frac{1}{N^\alpha}, \alpha>0$ точек из E_1. Вспомогательная числовая последовательность $f_N(x_N)=\frac{1}{N^\alpha}\sin\frac{N^\alpha}{N^2}$ является произведением бесконечно малой последовательности на ограниченную, то есть бесконечно малой последовательностью.

Полученные бесконечно малые последовательности не позволяют воспользоваться отрицанием определения равномерной сходимости последовательности, а также отрицанием необходимого условия равномерной сходимости ряда.

Для доказательства неравномерной сходимости ряда достаточно подобрать α, при котором ряд с членами – элементами этой последовательности – расходится и показать выполнение отрицания условия Коши. Выберем, например, $x_N=\frac{1}{N}$ для простоты работы с аргументом синуса.

Для исследования типа сходимости последовательности используем критерий равномерной сходимости последовательности (исследование $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{E_1}|f_n(x)-f(x)|$).

Неравномерная сходимость ряда на E_1.

$$\exists\varepsilon=\sin\frac{1}{4}\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_N=N;\ \exists p_N=N\ \exists x_N=\frac{1}{N}:$$
$$\left|\sum_{k=n_N+1}^{n_N+p_N} f_k(x_N)\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{N}\sin\frac{1}{\left(\frac{1}{N}\cdot k\right)^2}\right| \geqslant N\frac{1}{N}\sin\frac{N^2}{(2N)^2}=\sin\frac{1}{4}.$$

Равномерная сходимость последовательности на E_1. Докажем существавание точки максимума для каждой функции – элемента последовательности. Исследуем нули производной.

$f_n(x)'=\sin\frac{1}{(nx)^2}-2\cos\frac{1}{(nx)^2}\cdot\frac{1}{(nx)^2}=0$

Пусть $t=\frac{1}{(nx)^2}>0$. Тогда уравнение имеет вид: $\sin t-2t\cos t=0$. Или, учитывая, что корень уравнения не может быть нулем косинуса, $\operatorname{tg} t=2t$.

Из графиков функций видно, что на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ есть корень. Предлагается самостоятельно доказать теоретически существование корня на указанном промежутке. Обозначим корень уравнения C. Тогда, в силу замены переменной при каждом $n\in\mathbb{N}$ точка вида $x_n=\frac{\sqrt{C}}{n}\in(0;1)=E_1$ являются точкой экстремума функции $f_n(x)$. Докажите, что это точка максимума функции $|f_n(x)|$.

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{E_1}(|f_n(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{C}{N}}\cdot\sin C=0$. По критерию равномерной сходимости функциональных последовательностей сходимость равномерная. $\lhd_{3.12.}$

Пример 3.14. (18.45) Исследовать ряды $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ и $G(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$ на равномерную сходимость, где $u_n(x) = (-1)^n x^x (1-x)$ на множестве $E = (0;1)$.

$\triangleright_{3.14.}$ **Поточечная сходимость и поточечная абсолютная сходимость.**

Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда из модулей для любого $x \in E$:

$S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} x^n(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(x^n - x^{n+1}\right) = x - x^{N+1} \overset{n\to+\infty}{\to} x.$

В силу поточечной сходимости последовательности частичных сумм ряда из модулей, ряд $G(x)$ сходится поточечно, следовательно, ряд $F(x)$ — сходится поточечно абсолютно и сходится поточечно.

Равномерная сходимость ряда $F(x)$. В примере 3.8. доказана оценка

$$\sup_E |u_n(x)| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую стремится к нулю, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_E |f_n(x) - f(x)| = 0$. По критерию равномерной сходимости последовательность $|u_n(x)| \overset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Монотонность последовательности $|u_n(x)| = x^n - x^{n+1}$ — очевидна (доказать самостоятельно).

По признаку Лейбница равномерной сходимости рядов ряд $F(x)$ сходится равномерно на E.

Анализ на черновике. Рассмотрим n-ый член ряда из модулей $G(x)$. Так как $\sup_E |u_n(x)| = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$, то можно доказывать неравномерную сходимость, используя отрицание условия Коши.

Отрезок ряда из N членов имеет вид: $G_{2N}(x) - G_N(x) = \sum\limits_{k=N+1}^{2N} \left(x^k - x^{k+1}\right) = x^{N+1} - x^{2N+1}$.

Рассмотрим $x_N = \dfrac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$.

Неравномерная сходимость $G(x)$.

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{4};\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_N = N\ \exists p_N = N\ \exists x_N = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}:$$
$$\left| \sum_{k=N+1}^{2N} \left(x_N^k - x_N^{k+1}\right) \right| = x_N^{N+1} - x_N^{2N+1} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, ряд $G(x)$ сходится на E неравномерно. $\triangleleft_{3.14.}$

1.4 Некоторые теоретические вопросы

В последнем пункте параграфа рассмотрим некоторые теоретические вопросы, связанные с понятиями равномерной и неравномерной сходмости функцональных последовательностей и рядов.

Вопрос 4.1.

а) Пусть последовательности $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ и $g_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} g(x)$.

Верно ли, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ последовательность $(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) \overset{E}{\rightrightarrows} (\alpha f(x) + \beta g(x))$?

б) Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} U(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} V(x)$.

Верно ли, что $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\alpha u_n(x) + \beta v_n(x)) \overset{E}{\rightrightarrows} \alpha U(x) + \beta V(x)$?

Вопрос 4.2.

а) Пусть последовательность $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ и $g(x) \in B(E)$[1].

Верно ли, что последовательность $(g(x)f_n(x)) \overset{E}{\rightrightarrows} (g(x)f(x))$?

б) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} U(x)$ и $g(x) \in B(E)$. Верно ли, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (g(x)f_n(x)) \overset{E}{\rightrightarrows}$?

Вопрос 4.3.

а) Пусть последовательности $f_n(x) \overset{E}{\to} f(x)$ и $g_n(x) \overset{E}{\to} g(x)$ неравномерно, причем $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ f_n(x) + g_n(x)$ не является тождественно равной нулю функцией.

Верно ли, что последовательность $(f_n(x) + g_n(x)) \overset{E}{\to} (f(x) + g(x))$ неравномерно?

б) Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{E}{\to} U(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \overset{E}{\to} V(x)$ — сходятся неравномерно на множестве E, причем $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ u_n(x) + v_n(x)$ не является тождественно равной нулю функцией. Верно ли, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n(x) + v_n(x)) \overset{E}{\to} U(x) + V(x)$ неравномерно?

Вопрос 4.4.

а) Пусть последовательность $f_n(x)$ сходится неравномерно на $(0;1)$, но $\forall\delta > 0$ сходится равномерно на $(\delta;1)$. Верно ли, что для любой $g(x) \in C(0;1) \cap B(0;1)$ последовательность $g(x)f_n(x)$ сходится неравномерно на $(0;1)$?

б) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на $(0;1)$, но $\forall\delta > 0$ сходится равномерно на $(\delta;1)$. Верно ли, что для любой $g(x) \in C(0;1) \cap B(0;1)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g(x)f_n(x)$ сходится неравномерно на $(0;1)$?

Рассмотреть случаи, когда функция $g(x)$ отделена от нуля в некоторой правой окрестности нуля, а также случай $g(x) \overset{x\to 0+}{\to} 0$.

Вопрос 4.5.

а) Последовательность $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$, верно ли, что существует неотрицательная бесконечно малая последовательность $\{a_n\}:\ \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in E \mapsto |f_n(x)| \leqslant a_n$;

б) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[0;1]$, верно ли что существует неотрицательная числовая последовательность $\{a_n\}$, такая что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ — сходится и $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in [0;1] \mapsto |u_n(x)| \leqslant a_n$?

Вопрос 4.6.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ — сходится равномерно на множестве E. И $\forall x \in E\ \forall n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства: $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$.

а) Верно ли, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ — сходится равномерно на E?

[1]см. обозначения в начале пособия

б) Верно ли, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ — сходится равномерно на E?

Вопрос 4.7.
Следует ли из равномерной сходимости ряда из модулей, равномерная сходимость ряда?

Вопрос 4.8. Ряд сходится равномерно и поточечно сходится абсолютно на множестве E. Верно ли, что ряд из модулей сходится абсолютно?

Вопрос 4.9.
а) Ряд сходится равномерно, верно ли, что последовательность его членов сходится равномерно?
б) Ряд сходится неравномерно, верно ли, что последовательность его членов сходится неравномерно?
в) Верно ли, что из равномерной сходимости последовательности членов ряда и поточечной сходимости ряда следует равномерная сходимость ряда?

Вопрос 4.10.
Пусть последовательность $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ и $\forall x \in E\ f_n(x) \sim g_n(x),\ n \to +\infty$. Верно ли, что посдежлвательность $g_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$? Верно ли, что $\forall x \in E\ g_n(x) \to f(x)$?

Вопрос 4.11. Последовательность (ряд) из непрерывных на отрезке $[0;1]$ сходится равномерно на интервале $(0;1)$. Имеет ли место равномерная сходимость на отрезке $[0;1]$?

Литература:

1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интеграла. Ряды: Учеб. пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с. —ISBN 5-9221-0307-5.