Интегрирование числовых и векторнозначных функций по конечно-аддитивной мере

Учебно-методическое пособие

В.Ж. Сакбаев

Москва, МФТИ, 2018

Аннотация

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов 3-6 курсов и аспирантов, проявляющих интерес к абстрактной теории меры и интеграла, теории континуального интеграла, интегралу Фейнмана и приложениям к задачам квантовой и статистической механики. Пособие послужит вспомогательным материалом для самостоятельной работы студентов, слушающих курсы лекций профессоров О.Г. Смолянова и В.Ж. Сакбаева.

Настоящее пособие посвящено

1) Ознакомлению с процедурой интегрирования по мере, заданной на алгебре (или кольце) подмножеств некоторого множества (под мерой на множестве всюду далее, если не оговариваются дополнительные предположения, понимается аддитивная функция, заданная на кольце подмножеств).

2) Ознакомлению с различными процедурами интегрирования векторнозначных функций по мере – интегрированию по Бохнеру, по Петтису, и их сопоставлению.

3) Ознакомлению с процедурой построения пространств интегрируемых по Бохнеру и по Петтису числовых функций и векторных функций.

1. Алгебры, кольца и другие системы множеств

Пусть Ω – произвольное множество. Через 2^{Ω} обозначим совокупность всех подмножеств множества Ω:

$$A \in 2^{\Omega} \;\Leftrightarrow\; A \subset \Omega$$

Множества Ω и $\oslash$ всегда входят в 2^{Ω} в качестве элементов.

Упражнение 1.1. Доказать, что

1) если множество Ω состоит из n элементов, то множество 2^{Ω} – из 2^n элементов;

2) если множество Ω счетно, то множество 2^{Ω} континуально.

Определение 1.1. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется алгеброй, если

1) $\oslash \in \mathcal{A}$;

2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$, где $\bar{A} = \Omega \backslash A$ – дополнение множества A;

3) если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \bigcup B \in \mathcal{A}$.

Заметим, что из 1) и 2) следует, что $\Omega \in \mathcal{A}$; что из 2) и 3) следует, что если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{A}$. (Поскольку $A \bigcap B = \overline{\bar{A} \bigcup \bar{B}}$).

Таким образом, семейство $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ является алгеброй подмножеств множества Ω, если $\oslash \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ является "замкнутым" относительно операций дополнения и объединения (пересечения) в том смысле, что применяя операцию дополнения к множеству из $\mathcal{A}$ или операцию объединения (пересечения) к паре множеств из $\mathcal{A}$ нельзя получить множество, не являющееся элементом $\mathcal{A}$.

Примеры алгебр подмножеств множества Ω.

Пример 1.1. Семейство $\mathcal{A} = \{\oslash, \Omega\}$ подмножеств множества Ω образует алгебру подмножеств множества Ω.

Пример 1.2. Семейство $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ подмножеств множества Ω образует алгебру подмножеств множества Ω.

Пример 1.3. Пусть $A \subset \Omega$, $A \neq \oslash$, $A \neq 2^{\Omega}$. Семейство $\mathcal{B} = \{A\}$ подмножеств множества Ω, единственным элементом которого является множество A, алгеброй подмножеств не является, поскольку семейство $\mathcal{B}$ не содержит множества $\oslash$. Семейство $\mathcal{C} = \{\oslash, A\}$ не является алгеброй поскольку не замкнуто относительно операции дополнения. А семейство $\{\oslash, A, \bar{A}, \Omega\}$ уже является алгеброй поскольку удовлетворяет всем условиям определения 1. Такую алгебру подмножеств множества будем называть алгеброй, порожденной подмножеством $A \subset \Omega$, и обозначать $\mathcal{A}(A)$.

Пример 1.4. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Пусть семейство $\mathcal{F}$, состоящее из всех подмножеств множества $\mathbb{N}$, которые либо конечны, либо имеют конечное дополнение. Тогда семейство $\mathcal{F}$ образует алгебру подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Пример 1.5. Пусть $\Omega = [0,1]$ и пусть $\mathcal{A}$ – семейство подмножеств отрезка $[0,1]$, представляющих собой объединение конечного числа промежутков вида $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b). Тогда семейство $\mathcal{A}$ является алгеброй.

Определение 1.2. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств множества Ω. Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества Ω называется подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$, если

1) семейство $\mathcal{B}$ является подсемейством алгебры $\mathcal{A}$, т.е. из $A \in \mathcal{B}$ следует $A \in \mathcal{A}$.

2) семейство $\mathcal{B}$ является алгеброй в смысле определения 1.1.

Алгебры подмножеств множества Ω являются множествами, элементами которого являются подмножества множества Ω, т.е. если $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств множества Ω, т.е. $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$. Поэтому можно говорить о теоретико-множественных операциях над алгебрами подмножеств как о соответствующих операциях над подмножествами множества 2^{Ω}.

Определение 1.3. Пусть $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}$ – произвольный набор алгебр подмножеств множества Ω, индексируемый некоторым параметром $t \in T$. Пересечением $\bigcap\limits_{t\in T} \mathcal{A}_t$ этого набора алгебр называется семейство, которое состоит из подмножеств, принадлежащих всем алгебрам одного набора, т.е.

$$A \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{A}_t \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{A}_t \ \forall \ t \in T.$$

При этом элементы множества $A \subset \Omega$ и множества $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ являются элементами разной природы.

Пример 1.6. Пусть $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ – единичный квадрат на плоскости. Рассмотрим две алгебры подмножеств этого квадрата.

Алгебра $\mathcal{C}_v$ всех вертикальных цилиндров – это семейство множеств вида $C_A^v = \{(x,y) : \ x \in A, y \in [0,1]\}$, где A – произвольное подмножество отрезка $[0,1]$. Совокупность $\mathcal{C}_v$ содержит пустое множества и, очевидно, замкнуто относительно операций дополнения и объединения, то есть является алгеброй. Аналогично определяется алгебра $\mathcal{C}_h$ всех горизонтальных цилиндров – семейство множеств вида $C_A^h = \{(x,y) : \ x \in [0,1], y \in A\}$, где A – произвольное подмножество отрезка $[0,1]$.

Пересечением алгебр $\mathcal{C}_v$ и $\mathcal{C}_h$ является семейство подмножеств единичного квадрата, являющихся одновременно как вертикальным, так и горизонтальным цилиндром. А такими подмножествами являются только пустое множество и единичный квадрат: $\mathcal{C}_v \bigcap \mathcal{C}_h = \{\emptyset, \Omega\}$.

Заметим, что пересечение двух алгебр (например, $\mathcal{C}_v$ и $\mathcal{C}_h$) отлично от семейства подмножеств, являющихся пересечением элементов этих алгебр. Заметим также, что пересечение $\mathcal{C}_v \bigcap \mathcal{C}_h$ алгебр $\mathcal{C}_v$ и $\mathcal{C}_h$ является алгебра $\{\emptyset, \Omega\}$ подмножеств единичного квадрата

Ω. Это наблюдение обобщает следующая теорема.

Теорема 1.1. Пересечение любого набора алгебр подмножеств произвольного множества Ω является алгеброй.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}$ – произвольный набор алгебр подмножеств множества Ω.

1. Семейство $\bigcap\limits_{t\in T}\mathcal{A}_t$ подмножеств множества Ω содержит множество $\oslash$ так как по определению 1 это множество входит в качестве элемента в любую из алгебр $\mathcal{A}_t,\ t\in T$.

2. Пусть A и B – любые два множества из $\bigcap\limits_{t\in T}\mathcal{A}_t$. По определению при каждом $t\in T$ имеем $A\in\mathcal{A}_t$ и $B\in\mathcal{A}_t$, а значит, и $A\bigcup B\in\mathcal{A}_t$, поскольку $\mathcal{A}_t$ – алгебра. Следовательно, $A\bigcup B\in\bigcap\limits_{t\in T}\mathcal{A}_t$.

3. Также легко доказывается, что из $A\in\bigcap\limits_{t\in T}\mathcal{A}_t$ следует, что $\bar{A}\in\bigcap\limits_{t\in T}\mathcal{A}_t$. $\Box$

Теорема 1.2. Для любого семейства $\mathcal{F}$ подмножеств произвольного множества Ω существует единственная алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, обладающая свойствами:

1) $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ содержит $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}(\mathcal{F})$, то есть из $A\in\mathcal{F}$ следует $A\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

2) $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ является подалгеброй любой алгебры, содержащей $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства.

Доказательство. Рассмотрим набор F алгебр подмножеств множества Ω, содержащих $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства. Этот набор не пуст, поскольку он содержит максимальную алгебру 2^Ω всех подмножеств множества Ω. В силу теоремы 1.1 пересечение алгебр $\bigcap\limits_{\mathcal{B}\in F}\mathcal{B}$ является алгеброй, которая содержит $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства и по определению операции пересечения является подалгеброй каждой алгебры, содержащей $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства. $\Box$

Алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ называется *минимальной алгеброй, содержащей семейство* $\mathcal{F}$, или алгеброй, порожденной семейством $\mathcal{F}$ (см. пример 1.3 для случая, когда семейство $\mathcal{F}$ состоит из одного элемента).

Пусть на множестве Ω задано семейство $\mathcal{S}$ числовых функций $\phi:\ \Omega\to R$. В таком случае минимальной алгеброй $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ подмножеств множества Ω, порожденной семейством функций $\mathcal{S}$, называется алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{F}_\mathcal{S})$, порожденная семейством подмножеств $\{x\in\Omega:\phi(x)<c,\ \phi\in\mathcal{S},\ c\in R\}$.

Рассмотрим также такие семейства подмножеств множества Ω, как кольца и полукольца.

Определение 1.4. Семейство $\mathcal{R}$ подмножеств множества Ω называется кольцом, если

1) если $A, B \in \mathcal{R}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{R}$;

2) если $A, B \in \mathcal{R}$, то $A \Delta B \equiv (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A) \in \mathcal{R}$.

Заметим (доказать самим), что если $\mathcal{R}$ – кольцо подмножеств множества Ω, то

a) $\oslash \in \mathcal{R}$

b) из $A, B \in \mathcal{R}$ следует, что $A \backslash B \in \mathcal{R}$;

c) из $A, B \in \mathcal{R}$ следует, что $A \bigcup B \in \mathcal{R}$.

Всякая алгебра подмножеств множества Ω является кольцом. Кольцо $\mathcal{R}$ подмножеств множества Ω является алгеброй, если и только если $\Omega \in \mathcal{R}$. Если $\mathcal{R}$ – некоторое кольцо подмножеств множества Ω, то алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, порожденная кольцом $\mathcal{R}$, состоит из таких подмножеств A множества Ω, что либо $A \in \mathcal{R}$, либо $\Omega \backslash A \in \mathcal{R}$.

Пример 1.2. Семейство конечных подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ является кольцом подмножеств $\mathbb{N}$.

Утверждения теорем 1.1 и 1.2 о свойствах алгебр и алгебрах, порождаемых семействами подмножеств, переносятся на случай колец.

Теорема 1.1-r. Пересечение любого набора колец подмножеств произвольного множества Ω является кольцом.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{R}_t\}_{t \in T}$ – произвольный набор колец подмножеств множества Ω.

1. Пусть A и B – любые два множества из $\bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{R}_t$. По определению при каждом $t \in T$ имеем $A \in \mathcal{R}_t$ и $B \in \mathcal{R}_t$, а значит, и $A \bigcup B \in \mathcal{R}_t$, поскольку $\mathcal{R}_t$ – кольцо. Следовательно, $A \bigcup B \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{A}_t$.

2. Также легко доказывается, что из $A, B \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{R}_t$ следует, что $A \Delta B \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{R}_t$. Действительно, при каждом $t \in T$ имеем $A \in \mathcal{R}_t$ и $B \in \mathcal{R}_t$, а значит, и $A \Delta B \in \mathcal{R}_t$, поскольку $\mathcal{R}_t$ – кольцо. Следовательно, $A \Delta B \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{A}_t$. $\Box$

Теорема 1.2-r. Для любого семейства $\mathcal{F}$ подмножеств произвольного множества Ω существует единственное кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{F})$, обладающая свойствами:

1) $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ содержит $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$, то есть из $A \in \mathcal{F}$ следует $A \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$.

2) $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ является подкольцом любого кольца, содержащего $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства.

Кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{F})$, существование и единственность которого утверждает теорема 1.2-r, допускает представление $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \bigcap\limits_{\mathcal{R} \in F} \mathcal{R}$, где F – совокупность всех колец подмножеств множества Ω, содержащих $\mathcal{F}$ в качестве подсемейства. Такое кольцо называется *кольцом, порожденным семейством подмножеств $\mathcal{F}$.*

Определение 1.5. Семейство $\mathcal{P}$ подмножеств множества Ω называется полукольцом, если

1) $\oslash \in \mathcal{P}$;

2) если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{P}$;

3) если $A, B \in \mathcal{P}$, то существует такой конечный набор множеств $C_1, ..., C_m \in \mathcal{P}$, что $A \backslash B = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$.

Пример 1.3. Совокупность $\mathcal{P}$ промежутков вещественной прямой $\mathbb{R}$ образует полукольцо подмножеств прямой.

Лемма 1.1. Если $\mathcal{P}$ – некоторое полукольцо подмножеств множества Ω, то кольцо $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, порожденное полукольцом $\mathcal{P}$, является совокупностью конечных объединений множеств из полукольца $\mathcal{P}$.

Определим σ-алгебры подмножеств множества Ω.

Определение 1.6. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется σ-алгеброй, если

1) $\oslash \in \mathcal{A}$;

2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$, где $\bar{A} = \Omega \backslash A$ – дополнение множества A;

3) если $A_1, ..., A_k, ...$ – конечный или счетный набор подмножеств множества Ω такой, что $A_k \in \mathcal{A} \ \forall \ k$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Аналогично определение 1.4 кольца подмножеств множества Ω преобразуется в определение σ-кольца.

2. Меры.

Для согласования операции интегрирования с предельными переходами для последовательностей функций важную роль играют счетные операции над множествами и такие совокупности подмножеств, как σ-кольца. При этом мера рассматривается как счетно-аддитивная функция множества, заданная на σ-кольце подмножеств. Построению меры на множестве, обладающей перечисленными свойствами, посвящена теория меры Лебега. Однако, как утверждает теорема А. Вейля (см. [2], [1]), мера на бесконечномерных линейных нормированных пространствах не может обладать всеми свойствами меры Лебега. Поэтому в бесконечномерном анализе возникает необходимость изучать меры, не обладающими всеми свойствами меры Лебега. В том числе, представляет интерес изучение свойств мер, не обладающих свойством счетной аддитивности, и операции интегрирования по таким мерам скалярных и векторнозначных функций. Так, например, мера Фейнмана не является счетно аддитивной, но с ее помощью дается представление решений уравнения Шредингера, описывается процедура квантования классических гамильтоновых систем и т.п. (см. [12]). Конечно-аддитивные меры применяются также к описанию регуляризаций сингулярных задач, возникающих в уравнениях математической физики ([11]). Стоит заметить, что изучаемые в курсе математического анализа меры Жордана и интеграла Римана также являются примерами построения теории на основе конечно-аддитивных меры и интегрпла.

Измеримым пространством будем называть пару $(\Omega, \mathcal{A})$, где Ω – некоторое множество, $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра подмножеств множества Ω.

Вещественнозначной функцией множества, заданной на системе подмножеств $\mathcal{S} \subset 2^{\Omega}$ множества Ω называется отображение $\nu : \ \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

Функция множества ν, заданная на алгебре подмножеств $\mathcal{A}$ множества Ω, называется аддитивной, если для любых двух множеств $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ из $B_1 \bigcap B_2 = \oslash$ следует, что

$$\nu(B_1 \bigcup B_2) = \nu(B_1) + \nu(B_2).$$

Определение 2.1. Мерой на множестве Ω будем называть аддитивную функцию множества, заданную на некотором кольце $\mathcal{R}$ подмножеств множества Ω.

Всюду далее, если не оговаривается противное, будем предполагать, что кольцо $\mathcal{R}$ содержит множество Ω в качестве своего элемента, то есть кольцо $\mathcal{R}$ является алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω.

Определение 2.2. Для каждой алгебры $\mathcal{A}$ и множества $A \in \mathcal{A}$ $\mathcal{A}$-разбиением множества A называется конечный набор $\tau(A) = \{A_1, ..., A_n\}$ попарно непересекающихся подмножеств множества A из алгебры $\mathcal{A}$, объединение которых совпадает с A.

Определение 2.3. Вариацией меры μ, определенной на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, называется функция множества $v_\mu : \ \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, значение которой на произвольном множестве $A \in \mathcal{A}$ определяется равенством

$$v_\mu(A) = \sup_{\tau(A)} \sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)|,$$

где супремум берется по всем $\mathcal{A}$-разбиениям множества A. Полной вариацией меры μ называется величина $\|\mu\| = v_\mu(\Omega)$; мера μ называется мерой ограниченной вариации если $\|\mu\| < +\infty$.

Символом $ba(\Omega, \mathcal{A})$ будем (см. [3]) обозначать множество мер, заданных на алгебре подмножеств $\mathcal{A}$ и обладающих ограниченной вариацией. Множество $ba(\Omega, \mathcal{A})$ является линейным пространством над полем вещественных (комплексных чисел) с естественными операциями сложения двух функций множества и умножения функции множества на число. Функция $\| \cdot \| : \ ba(\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, действующая по правилу $\mu \to \|\mu\|$, является нормой на линейном пространстве $ba(\Omega, \mathcal{A})$. Линейное пространство $ba(\Omega, \mathcal{A})$, снабженное нормой-вариацией, является банаховым пространством (доказать полноту пространства $ba(\Omega, \mathcal{A})$ с указанной нормой).

Лемма 2.1. *Вариация меры $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$ является неотрицательной конечно-аддитивной мерой на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть $E, F \in \mathcal{A}$ и $E \bigcap F = \oslash$. Для любой конечной системы $\{A_j\}$ множеств, являющейся $\mathcal{A}$-разбиением множества $E \bigcup F$, положим $E_j = A_j \bigcap E$ и $F_j = A_j \bigcap F$. Тогда

$$\sum |\mu(A_j)| \leq \sum |\mu(E_j)| + \sum |\mu(F_j)| \leq v_\mu(E) + v_\mu(F),$$

следовательно, $v_\mu(E \bigcup F) \leq v_\mu(E) + v_\mu(F)$.

Поэтому если $v_\mu(E \bigcup F) = +\infty$, то $v_\mu(E \bigcup F) = v_\mu(E) + v_\mu(F)$. Если же $v_\mu(E \bigcup F) < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные системы $\{E_k\}$, $\{F_k\}$ непересекающихся множеств из $\mathcal{A}$, что $E_k \subset E,\ F_k \subset F$ и

$$v_\mu(E) \leq \sum |\mu(E_k)| + \varepsilon; \quad v_\mu(F) \leq \sum |\mu(F_k)| + \varepsilon;$$

поэтому

$$v_\mu(E) + v_\mu(F) \leq \sum |\mu(E_k)| + \sum |\mu(F_k)| + 2\varepsilon \leq v_\mu(E \bigcup F) + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $v_\mu(E) + v_\mu(F) \leq v_\mu(E \bigcup F)$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

Таким образом $v_\mu(E) + v_\mu(F) = v_\mu(E \bigcup F)$, что и доказывает аддитивность функции множества v_μ. $\square$

По каждой мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$ определяются функции множества $v_{\pm,\mu} = \frac{1}{2}(v_\mu \pm \mu)$, которые являются аддитивными функциями множества на алгебре $\mathcal{A}$ и называются положительной и отрицательной вариациями меры μ.

Теорема 2.1. (Разложение меры по Жордану. см. [3]) *Если μ – ограниченная аддитивная функция множества, определенная на алгебре $\mathcal{A}$ множества Ω, то для каждого $A \in \mathcal{A}$*

$$v_{+,\mu}(A) = \sup_{F \subset A, F \in \mathcal{A}} \mu(F); \quad v_{-,\mu}(A) = -\inf_{F \subset A, F \in \mathcal{A}} \mu(F).$$

При этом функции множества $v_{\pm,\mu}$ аддитивны, неотрицательны и для каждого $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = v_{+,\mu}(A) - v_{-,\mu}(A), \qquad v_\mu(A) = v_{+,\mu}(A) + v_{-,\mu}(A).$$

3. Интеграл от числовой функции

Пример 3.1. Пусть μ – мера, определенная на σ-алгебре 2^Ω всех подмножеств множества Ω, неотрицательная и нормированная условием $\mu(\Omega) = 1$ (из условий неотрицательности и нормировки следует, что вариация меры равна единице). Тогда если $B(\Omega)$ – банахово пространство ограниченных функций $\Omega \to \mathbb{R}$, наделенное нормой

$\|u\|_{B(\Omega)} = \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)|$, то мера μ задает на пространстве $B(\Omega)$ непрерывный линейный функционал I_μ, определяемый так.

Для каждой функции $f \in B(\Omega)$ выберем отрезок $[A, B]$ такой, что $f(\Omega) \in [A, B]$. Разбиением отрезка $[A, B]$ будем называть всякую конечную совокупность $\tau = \{\Delta_1, ..., \Delta_m\}$ непустых попарно непересекающихся множеств такую, что $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \Delta_k = [A, B]$. Мелкостью разбиения $\tau = \{\Delta_1, ..., \Delta_m\}$ называется число

$$|\tau| = \max_{k\in\{1,...,m\}} \operatorname{diam}(\Delta_k). \tag{3.1}$$

Выборкой точек ξ^τ, подчиненной разбиению τ отрезка $[A, B]$ называется такой конечный набор чисел $\{\xi_1^\tau, ..., \xi_m^\tau\}$, что для любого $\Delta_k \in \tau$ найдется единственное $\xi_k^\tau \in \xi^\tau$ такое, что $\xi_k^\tau \in \Delta_k$. Для каждого разбиения $\tau = \{\Delta_1, ..., \Delta_m\}$ отрезка $[A, B]$ и каждой выборке ξ^τ точек, подчиненной разбиению τ, положим

$$\sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)}) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(\tau)} \mu(f^{-1}(\Delta_k)). \tag{3.2}$$

Число $I_\mu(f)$ будем называть интегралом по мере μ от функции $f \in B(\Omega)$, если $I_\mu(f) = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)})$, то есть, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения τ множества значений функции f с мелкостью $|\tau| < \delta$ и всякой выборки ξ^τ, подчиненной разбиению τ, выполняется условие $|\sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)}) - I_\mu(f)| < \varepsilon$.

Так как мера μ имеет конечную (единичную) вариацию $\|\mu\|_{ba}$, то для любого разбиения τ и любых двух подчиненных ему выборок $\xi^{(\tau)}$ и $\eta^{(\tau)}$ справедливо неравенство

$$|\sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)}) - \sigma(f, \mu, \tau, \eta^{(\tau)})| \le |\tau| \|\mu\|_{ba}. \tag{3.3}$$

Действительно, $|\sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)}) - \sigma(f, \mu, \tau, \eta^{(\tau)})| = |\sum\limits_{k=1}^{m} (\xi_k^\tau - \eta_k^\tau) \mu(f^{-1}(\Delta_k))| \le \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{diam}(\Delta_k) \mu(f^{-1}(\Delta_k)) \le |\tau| \mu(\Omega) = |\tau| \|\mu\|_{ba}$ поскольку для неотрицательной меры μ выполняется равенство $\|\mu\|_{ba} = \mu(\Omega)$.

Кроме того, если τ' и τ'' – два разбиения множества $f(\Omega)$, то существует третье разбиение τ, являющееся продолжением первых двух (утверждение доказывается также, как в курсе математического анализа). Тогда также, как и неравенство (3.3), доказывается, что для любых выборок ξ', ξ'', ξ, подчиненных разбиениям τ', τ'', τ соответственно, выполняются неравенства $|\sigma(f, \mu, \tau', \xi') - \sigma(f, \mu, \tau, \xi)| \le |\tau'| \|\mu\|_{ba}$ и $|\sigma(f, \mu, \tau'', \xi'') - \sigma(f, \mu, \tau, \xi)| \le |\tau''| \|\mu\|_{ba}$.

Поэтому если $\{\tau_k\}$ – некоторая последовательность разбиений множества $f(\Omega)$ значений функции f с мелкостью, стремящейся к нулю, то последовательность $\{\sigma(f, \mu, \tau_k, \xi^{\tau_k})\}$

сходится. Следовательно, предел последовательности $\{\sigma(f,\mu,\tau_k,\xi^{\tau_k})\}$ не зависит от выбора последовательности разбиений $\{\tau_k\}$ с стремящейся к нулю мелкостью (почему?).

Следовательно, для любой функции $f \in B(\Omega)$ существует интеграл $I_\mu(f)$, причем из условия нормировки неотрицательной меры μ следует неравенство

$$|I_\mu(f)| \leq \|f\|_{B(\Omega)}\|\mu\|_{ba}. \tag{3.4}$$

Таким образом, для каждой неотрицательной нормированной меры $\mu \in ba(\Omega, 2^\Omega)$ на пространстве $B(\Omega)$ определен функционал I_μ, который является ограниченным условием (3.4).

Функционал I_μ является линейным. Чтобы доказать линейность функционала $I_\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ предлагается установить следующие утверждения 1. и 2. и воспользоваться неравенством (3.4). (Напомним, что функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется простой, если множество ее значений конечно).

1. Множество простых функций является плотным в банаховом пространстве $B(\Omega)$ линейным подпространством.

2. Если $f, g \in B(\Omega)$ – простые функции, то $I_\mu(f+g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$ и $I_\mu(\alpha f) = \alpha I_\mu(f)$ для любого числа $\alpha \in \mathbb{C}$.

Линейный ограниченный условием (3.4) функционал I_μ является непрерывным линейным функционалом на банаховом пространстве $B(\Omega)$, причем его норма равна вариации меры μ.

Кроме того, функционал I_μ является неотрицательным в том смысле, что если $f \in B(\Omega)$ и $f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \Omega$, то $I_\mu(f) \geq 0$ (доказать самим).

Интеграл по знакопеременной мере $\nu \in ba(\Omega)$ ограниченной вариации $|\nu|$ от ограниченной функции f определяется равенством

$$I_\nu(f) = I_{\nu_+}(f) - I_{\nu_-}(f) \ \forall\ f \in B(\Omega),$$

где $\nu_\pm = \frac{1}{2}(|\nu| \pm \nu)$.

Заметим, что приведенная выше конструкция интеграла применима для любой конечно аддитивной меры ограниченной вариации, а не только для неотрицательной меры с вариацией 1.

Исследуем теперь меры на множестве Ω, определенные не на всей алгебре 2^Ω его подмножеств, а на некоторой ее подалгебре $\mathcal{A}$.

Числовую функцию $f : \Omega \to R$ назовем измеримой относительно алгебры $\mathcal{A}$, если $f^{-1}(-\infty, c) \in \mathcal{A}$ для каждого $c \in R$. Пусть $\mathcal{A}_R$ – минимальная алгебра подмножеств числовой прямой, содержащая все интервалы $(-\infty, c)$, $c \in R$. Если числовая функция

$f : \Omega \to R$ измерима относительно алгебры $\mathcal{A}$, то для любого $B \in \mathcal{A}_R$ выполняется условие $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Обозначим через $B(\Omega, \mathcal{A})$ банахово пространство ограниченных измеримых относительно алгебры $\mathcal{A}$ числовых функций, снабженное супремум-нормой.

Разбиением множества $f(\Omega)$ значений функции $f \in B(\Omega, \mathcal{A})$ называется такая конечная совокупность попарно непересекающихся множеств $\tau = \{\Delta_1, ..., \Delta_m\}$, что $f^{-1}(\Delta_j) \in \mathcal{A}$ для любого $\Delta_j \in \tau$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \Delta_j = f(\Omega)$. Мелкость разбиения τ множества $f(\Omega)$ определяется равенством (3.1).

Выборкой точек ξ^τ, подчиненной разбиению τ множества $f(\Omega)$ называется такой конечный набор чисел $\{\xi_1^\tau, ..., \xi_m^\tau\}$, что для любого $\Delta_k \in \tau$ найдется единственное $\xi_k^\tau \in \xi^\tau$ такое, что $\xi_k^\tau \in \Delta_k$. Для каждого разбиения $\tau = \{\Delta_1, ..., \Delta_m\}$ множества $f(\Omega)$ и каждой выборке ξ^τ точек, подчиненной разбиению τ, положим

$$\sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)}) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(\tau)} \mu(f^{-1}(\Delta_k)). \qquad (3.5)$$

Определение 3.1. Функция $f : \Omega \to R$ называется интегрируемой по мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, если существует число $I_\mu(f)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения τ множества значений функции f с мелкостью $|\tau| < \delta$ и всякой выборке ξ^τ, подчиненной разбиению τ, выполняется условие $|\sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)}) - I_\mu(f)| < \varepsilon$.

Лемма 3.1. Пусть $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$. Тогда для любой функции $f \in B(\Omega, \mathcal{A})$ существует интеграл $I_\mu(f)$.

Поскольку функция $f \in B(\Omega, \mathcal{A})$, то для любого промежутка Δ выполняется условие $\Delta \bigcap f(\Omega) \in \mathcal{A}$. Поэтому существуют последовательности $\{\tau_k\}$ разбиений множества $f(\Omega)$ значений функции f с мелкостью, стремящейся к нулю.

Так как мера μ имеет конечную вариацию, то для любого разбиения τ и любых двух подчиненных ему выборок $\xi^{(\tau)}$ и $\eta^{(\tau)}$ справедливо неравенство $|\sigma(f, \mu, \tau, \xi^{(\tau)}) - \sigma(f, \mu, \tau, \eta^{(\tau)})| \leq |\tau| \|\mu\|_{ba}$.

Кроме того, если τ' и τ'' – два разбиения множества $f(\Omega)$, то существует третье разбиение τ, являющееся продолжением первых двух. Тогда для любых выборок ξ', ξ'', ξ, подчиненных разбиениям τ', τ'', τ соответственно, выполняются неравенства $|\sigma(f, \mu, \tau', \xi') - \sigma(f, \mu, \tau, \xi)| \leq |\tau'| \|\mu\|_{ba}$ и $|\sigma(f, \mu, \tau'', \xi'') - \sigma(f, \mu, \tau, \xi)| \leq |\tau''| \|\mu\|_{ba}$.

Поэтому если $\{\tau_k\}$ – некоторая последовательность разбиений множества $f(\Omega)$ значений функции f с мелкостью, стремящейся к нулю, то последовательность $\{\sigma(f, \mu, \tau_k, \xi^{\tau_k})\}$ сходится. Следовательно, предел последовательности $\{\sigma(f, \mu, \tau_k, \xi^{\tau_k})\}$ не зависит от выбора последовательности разбиений $\{\tau_k\}$ с стремящейся к нулю мелкостью (почему?).

Таким образом, существует интеграл $I_\mu(f)$, причем $|I_\mu(f)| \leq \|f\|_{B(\Omega)} \|\mu\|$. $\square$

Теорема 3.1. (Свойства интеграла).

1) Если $\Omega = \Omega' \bigcup \Omega''$, где $\Omega' \bigcap \Omega'' = \oslash$ и $\mu' = \mu|_{\Omega'}$, $\mu'' = \mu|_{\Omega''}$, то для любой функции $f \in B(\Omega)$ выполняется равенство $I_\mu(f) = I_{\mu'}(f) + I_{\mu''}(f)$, где $I_{\mu'}(f)$, $I_{\mu''}(f)$ – интегралы от функции f по мерам μ' и μ'' соответственно.

2) Если мера $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$ неотрицательна, то интеграл I_μ является неортицательным функционалом на пространстве $B(\Omega, \mathcal{A})$ и, следовательно, обладает свойством монотонности.

3) $I_\mu(\alpha f) = \alpha I_\mu(f)$ для любых $f \in B(\Omega, \mathcal{A})$ и $\alpha \in R$;

4) для любых $f, g \in B(\Omega, \mathcal{A})$ выполняется равенство $I_\mu(f + g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$.

Доказать самим (см. пример 3.1).

В монографиях [3, 7] (см. также статью [8]) показано, что каждый линейный непрерывный функционал l на пространстве $B(\Omega)$ имеет вид I_{ν_l}, где $\nu_l \in ba(\Omega)$ – мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ ограниченной вариации. Более того, установлен изометрический изоморфизм банахова пространства $(B(\Omega))^*$ и пространства $ba(\Omega, \mathcal{A})$ конечно-аддитивных мер ограниченной вариации, норма на котором определяется вариацией.

Замечание 3.1. Приведем пример, показывающий, что двухзначные неотрицательные меры единичной вариации, заданные на σ-алгебре всех подмножеств множества Ω, представляют ультрафильтры на множестве Ω, при этом пределы по ультрафильтру представляют собой интеграл по представляющей ультрафильтр мере.

Ультрафильтром на множестве Ω называется (см. [9]) такая совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω, что

1) $\oslash \notin \mathcal{F}$;

2) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{F}$;

3) если $A \in \mathcal{F}$, $B \in 2^\Omega$ и $A \subset B$, то $B \in \mathcal{F}$;

4) если $A \in 2^\Omega$ и $A \notin \mathcal{F}$, то $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}$.

Если $f : \Omega \to \mathbb{R}$, то элемент $c \in \bar{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f по ультрафильтру $\mathcal{F}$ на множестве Ω, если

$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ A \in \mathcal{F} \ : \ \forall \ x \in A \quad f(x) \in O_{\varepsilon(c)}$,

где $O_\varepsilon(c)$ – ε-окрестность элемента расширенной числовой прямой c. Обозначается $\lim_{\mathcal{F}} f = c$.

С каждым ультрафильтром $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω связана двухзначная мера $\mu_{\mathcal{F}} \in ba(\Omega, 2^\Omega)$ такая, что для любого $A \in \mathcal{F}$ выполняется равенство $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1$, а для любого $A \notin \mathcal{F}$ выполняется равенство $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$ (то есть $\mu_{\mathcal{F}}(A) = \chi_{\mathcal{F}}(A)$, $A \in 2^\Omega$, где $\chi_{\mathcal{F}}$ – индикаторная функция множества $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$: $\chi_{\mathcal{F}}(A) = 1$ если $A \in \mathcal{F}$, и $\chi_{\mathcal{F}}(A) = 0$ если $A \notin \mathcal{F}$). Наоборот, с каждой двухзначной мерой $\mu \in ba(\Omega, 2^\Omega)$, принимающей значения 0 и 1, связан ультрафильтр $\mathcal{F}_\mu = \mu^{-1}(\{1\})$ подмножеств множества Ω, имеющих меру 1.

Упражнение 1. Доказать, что если $f \in B(\Omega)$ и $\mathcal{F}$ – некоторый ультрафильтр на Ω, то существует единственный предел функции f по ультрафильтру $\mathcal{F}$, принадлежащий замыканию множества значений функции f. Доказать, что при этом $\lim_{\mathcal{F}} f = \int\limits_{\Omega} f d\mu_{\mathcal{F}}$.

4. Интеграл от векторной функции

В настоящем разделе мы исследуем различные свойства измеримости и интегрируемости векторнозначных отображений $f : \Omega \to H$, где $(\Omega, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, снабженное мерой $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, и H – сепарабельное гильбертово пространство. Более общие конструкции для отображений со значениями в банаховых и топологических векторных пространствах не входят в объем этого пособия; их можно изучить по монографиям [3, 4, 5].

Пусть H – гильбертово пространство, $\mathcal{B}(H)$ – σ-алгебра борелевских относительно топологии гильбертовой нормы подмножеств пространства H.

Для отображений $\mathbf{f} : \ \Omega \to H$ можно ввести различные определения измеримости выбирая различные топологии на пространстве H.

Определение 4.1. Отображение $\mathbf{f}$ называется измеримым, если $\mathbf{f}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для любого множества $B \in \mathcal{B}(H)$.

Определение 4.2. Отображение $\mathbf{f}$ называется слабо измеримым, если $\mathbf{f}^{-1}(\{x \in H : (\phi, x) \in B\}) \in \mathcal{A}$ для любого множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ и любого функционала $\phi \in H^* = H$.

Определение 4.3. Функция $\mathbf{f} : \ \Omega \to H$ называется интегрируемой в смысле Петтиса по мере μ, если для любого $\phi \in H_*$ скалярная функция $(\phi, \mathbf{f}) : \ \Omega \to \mathbb{C}$ интегрируема по мере μ в смысле определения 3.1.

Через H^* обозначаются соответственно сопряженное пространство к пространству H, а через H_* – предсопряженное, т.е. $(H_*)^* = H$. Если H – гильбертово пространство, то $H^* = H_* = H$.

Определение 4.4. Вектор $\mathbf{J} \in H$ такой, что $(\phi, \mathbf{J}) = I_\mu(\phi, \mathbf{f}) \ \forall \ \phi \in H$ называется интегралом Петтиса от функции $\mathbf{f}$ по мере μ.

Лемма 4.1. Пусть вектор-функция $\mathbf{f}$ слабо измерима и ограничена в том смысле, что $\sup\limits_{\omega\in\Omega} \|\mathbf{f}(\omega)\|_H < +\infty$. Тогда функция $\mathbf{f}$ интегрируема по Петтису по мере μ.

Действительно, для любого вектора $\phi \in H$ числовая функция $(\phi, \mathbf{f}) : \ \Omega \to \mathbb{C}$ измерима и ограничена. Следовательно, для каждого $\phi \in H$ определено число $I_\mu(\phi, \mathbf{f})$, причем

1) для любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любых $\phi_1, \phi_2 \in H$ выполняется равенство $I_\mu(a\phi_1 + b\phi_2, \mathbf{f}) = aI_\mu(\phi_1, \mathbf{f}) + bI_\mu(\phi_2, \mathbf{f})$ в силу свойства линейности интеграла от числовой функци;

2) $|I_\mu(\phi, \mathbf{f})| \leq \|\mu\|_{ba} \|\phi\|_H \|\mathbf{f}\|_{B(\Omega,H)}$.

Таким образом, определен линейный непрерывный функционал $\phi \to I_\mu(\phi, \mathbf{f})$ на пространстве H. Следовательно, существует единственный элемент $\mathbf{J} \in H$ такой, что $(\phi, \mathbf{J}) = I_\mu(\phi, \mathbf{f})$. Такой элемент $\mathbf{J}$ является интегралом Петтиса от вектор-функции $\mathbf{f}$ по мере μ по определению 4.2. $\square$

Замечание 4.1. В банаховом пространстве X, имеющем предсопряженное пространство X_*, существуют два определения слабого интеграла – интеграл Петтиса и интеграл Гельфанда от функции $f:\ \Omega \to X$.

Определение 4.5. Функция $\mathbf{f}:\ \Omega \to X$ называется интегрируемой в смысле Гельфанда по мере μ, если для любого $\phi \in X^*$ скалярная функция $\phi(\mathbf{f}):\ \Omega \to \mathbb{C}$ интегрируема по мере μ в смысле определения 3.1. Вектор $\mathbf{J} \in X^{**}$ такой, что $\mathbf{J}(\phi) = I_\mu(\phi(\mathbf{f}))\ \forall\ \phi \in X^*$ называется интегралом Гельфанда от функции $\mathbf{f}$ по мере μ.

Функция $\mathbf{f}:\ \Omega \to X$ называется интегрируемой в смысле Петтиса по мере μ, если для любого $\phi \in X_*$ скалярная функция $\mathbf{f}(\phi):\ \Omega \to \mathbb{C}$ интегрируема по мере μ в смысле определения 3.1. Вектор $\mathbf{F} \in X$ такой, что $\mathbf{F}(\phi) = I_\mu(\mathbf{f}(\phi))\ \forall\ \phi \in X_*$ называется интегралом Петтиса от функции $\mathbf{f}$ по мере μ.

В случае гильбертова пространства H определения интегралов в смысле Петиса и в смысле Гельфанда для вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве H совпадают. Но они различаются в случае функций со значениями в нерефлексивном банаховом пространстве X (см. [3, 6, 10]).

Для определения интеграла Гельфанда используется функционалы из сопряженного пространства X^* и значением интеграла Гельфанда от функции $\mathbf{f}:\Omega \to X$ служит элемент пространства X^{**}. Для определения интеграла Петтиса используется функционалы из предсопряженного пространства X_* и значением интеграла Гельфанда от функции $\mathbf{f}:\Omega \to X$ служит элемент пространства X.

Перейдем к рассмотрению интеграла Бохнера. Напомним, что измеримая функция $f:\Omega \to H$ называется простой если она имеет конечное множество значений.

Измеримым разбиением измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ называется конечная совокупность попарно непересекающихся множеств $\tau(\Omega) = \{D_1, ..., D_n\}$ таких, что $D_j \in \mathcal{A}\ \forall\ j = 1, ..., n$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{n} D_j = \Omega$.

Если измеримая относительно алгебры $\mathcal{A}$ функция $f:\Omega \to H$ является простой, то существует такое измеримое разбиение $\tau(\Omega) = \{D_1, ..., D_n\}$ множества Ω и такие векторы $c_1, ..., c_k \in H$, что $f(x) = c_j\ \forall\ x \in D_j$. Интегралом от простой измеримой относительно алгебры $\mathcal{A}$ функции $f:\Omega \to H$ по мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$ называется вектор $\mathbf{F} = \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbf{c}_j \mu(D_j) \equiv \int\limits_\Omega f d\mu$.

Лемма 4.2. Если $f : \Omega \to H$ – простая измеримая (относительно алгебры $\mathcal{A}$) функция, то функция $\|f\|_H : \Omega \to R$, определенная равенством $\|f\|_H(x) = \|f(x)\|_H$ является простым измеримым отображением Ω в R (доказать самим).

Определение 4.5. Измеримая функция $\mathbf{f} : \Omega \to H$ называется интегрируемой по Бохнеру по мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, если существует такая последовательность простых измеримых функций $\{f_k\}$, что $I_\mu(\|f - f_k\|) \to 0$ при $k \to \infty$, где $I_\mu(\|f - f_k\|)$ – интеграл от числовой функции $\|f(\omega) - f_k(\omega)\|_H$, $\omega \in \Omega$, определенный в разделе 3.

Лемма 4.3. Если измеримая функция $\mathbf{f} : \Omega \to H$ интегрируема по Бохнеру по мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, то для любой последовательности простых функций $\{f_k\}$ такой, что $I_\mu(\|f - f_k\|) \to 0$ при $k \to \infty$, последовательность векторов $\{\int\limits_\Omega f_k d\mu\}$ сходится по норме пространства H. (Доказать самим).

Определение 4.6. Если измеримая функция $\mathbf{f} : \Omega \to H$ интегрируема по Бохнеру по мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, то вектор $\mathbf{F} \in H$ называется интегралом Бохнера от функции $\mathbf{f}$ по мере μ, если для любой последовательности простых функций $\{f_k\}$ такой, что $I_\mu(\|f - f_k\|) \to 0$ при $k \to \infty$, выполняется равенство $\mathbf{F} = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \mathbf{f}_k d\mu$.

Упражнение 4.1. Доказать, что если измеримая функция $\mathbf{f} : \Omega \to H$ интегрируема по Бохнеру по мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, то она интегрируема по Петтису и интегралы от функции f по Бохнеру и по Петтису совпадают.

Следующий пример покажет, что из интегрируемости функции $\mathbf{f} : \Omega \to H$ по Петтису не следует ее интегрируемость по Бохнеру.

Пример 4.1. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^\mathbb{N}$ и μ – некоторая чисто конечно аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $2^\mathbb{N}$ (напомним, что нетривиальная мера μ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется чисто конечно аддитивной, если $\mu(K) = 0$ для любого конечного множества $K \subset \mathbb{N}$). Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $\mathcal{E} = \{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормированный базис в пространстве H.

Рассмотрим вектор-фунции $\mathbf{f} : \mathbb{N} \to H$, заданные равенствами

$$\mathbf{f}(k) = e_k,\ k \in \mathbb{N}; \quad \mathbf{g}(k) = k^a e_k,\ k \in \mathbb{N},\ a < 0.$$

Функция $\mathbf{f}$ не является интегрируемой по Бохнеру, а функция $\mathbf{g}$ интегрируема по Бохнеру при этом $\int\limits_\Omega \mathbf{g} d\mu = \theta_H$, где θ_H – нулевой элемент пространства H (доказать). Функция $\mathbf{f}$ является слабо измеримой и интегрируемой по Петтису, причем $\int\limits_\mathbb{N} \mathbf{f} d\mu = \theta_H$.

5. Пространства Лебега интегрируемых скалярных функций

Целью 5-го раздела является рассмотрение пространств измеримых числовых функций на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, интегрируемых в степени $p \in [1, +\infty)$ по мере $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$ по Бохнеру и по Петтису. Пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ интегрируемых в степени $p \in [1,+\infty)$ по мере μ по Бохнеру скалярных функций $f: \ \Omega \to \mathbb{C}$ определяется как пополнение линейного нормированного пространства $S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$ простых измеримых функций, в то время как пространство $\Lambda_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$ интегрируемых в степени $p \in [1,+\infty)$ по мере μ по Петтису скалярных функций $f: \ \Omega \to \mathbb{C}$ определяется как пополнение линейного нормированного пространства $B(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$ ограниченных измеримых функций. Будет показано, что пространства $L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$ и $\Lambda_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$ совпадают. В разделах 6 и 7 будет показано, что пространства измеримых векторных функций на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{A})$, интегрируемых в степени $p \in [1,+\infty)$ по мере $\mu \in ba(\Omega,\mathcal{A})$ по Бохнеру и по Петтису различны.

1) *Интеграл Бохнера.* Пусть Ω – некоторое непустое множество и $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра подмножеств множества Ω. Обозначим через $W(\Omega,\mathcal{A})$ множество неотрицательных нормированных на единицу конечно аддитивных мер на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{A})$.

Пусть на алгебре $\mathcal{A}$ множества Ω задана конечно аддитивная неотрицательная нормированная мера $\mu \in W(\Omega,\mathcal{A})$. Тогда на линейном пространстве простых функций $S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$ задан линейный функционал $I_\mu = \int\limits_\Omega f d\mu$, $f \in S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$.

Тогда для каждого числа $p \in [1,+\infty)$ на линейном пространстве $S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$ определена полунорма

$$\nu_p(f) = \left(\int\limits_\Omega |f(\omega)|^p d\mu(\Omega) \right)^{1/p}, \ f \in S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C}).$$

Упражнение 5.1. Доказать, что функционал $\nu_p: \ S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C}) \to R$ является полунормой.

Упражнение 5.2. Доказать, что если $f \in S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$, $p \in [1,+\infty)$ и $\nu_p(f) = 0$, то существует множество $A \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A) = 0$ и $f(x) = 0 \ \forall \ x \in \Omega \backslash A$.

Обозначим через $\mathcal{N}_\mu$ линейное подпространство пространства $S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$, такое, что для каждого $f \in \mathcal{N}_\mu$ найдется множество $A \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A) = 0$ и $f(x) = 0 \ \forall \ x \in \Omega \backslash A$. Тогда при любом $p \in [1,+\infty)$ следующие условия эквивалентны: $\nu_p(f) = 0$ и $f \in \mathcal{N}_\mu$.

Назовем простые функции $f, g \in S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$ μ-эквивалентными, если $f - g \in \mathcal{N}_\mu$. Положим $S(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C}) = S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C}) \backslash \mathcal{N}_\mu$ – линейное пространство классов эквивалентности функций из пространства $S(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{C})$. Тогда для каждого числа $p \in [1,+\infty)$ функционал $\nu_p: \ S(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C}) \to [0,+\infty)$ является нормой на пространстве $S(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$.

Обозначим через $S_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$ линейное пространство $S(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$ наделенное нормой ν_p, а через $L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$ – пополнение по Хаусдорфу пространства $S_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C})$.

Упражнение 5.3. Доказать, что если $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ – алгебра измеримых по Жордану подмножеств множества $[0,1]$ и μ – мера Жордана на $[0,1]$, то $L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,\mathbb{C}) = L_p([0,1])$.

2) *Интеграл Петтиса.* Пусть на алгебре $\mathcal{A}$ множества Ω задана конечно аддитивная неотрицательная нормированная мера $\mu \in W(\Omega, \mathcal{A})$. Тогда на линейном пространстве ограниченных измеримых функций $B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ задан линейный функционал I_μ, действующий по правилу $I_\mu(f) = \int\limits_\Omega f d\mu$, $f \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$.

Лемма 5.1. Любая ограниченная измеримая функция $f \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ аппроксимируется некоторой последовательностью простых измеримых функций $\{f_k\}$ в смысле равномерной сходимости $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x) - f_k(x)| = 0$. (Доказать самим).

Лемма 5.2. Пусть $f \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ и $\{f_k\}$ – такая последовательность простых измеримых функций, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x) - f_k(x)| = 0$. Тогда числовая последовательность $\{I_\mu(f_k)\}$ сходится. (Доказать самим).

Определение 5.1. Для любой функции $f \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ интегралом от функции f по мере μ называется число $I_\mu(f) = \lim\limits_{k\to\infty} I_\mu(f_k)$, где $\{f_k\}$ – такая последовательность простых измеримых функций, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x) - f_k(x)| = 0$.

Заметим, что корректность определения 5.1 следует из леммы 5.2. Т.е. согласно лемме 5.2 для произвольной функции $f \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ величина $I_\mu(f)$ не зависит от выбора такой последовательности простых измеримых функций, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x) - f_k(x)| = 0$.

Тогда, также, как и выше, для каждого числа $p \in [1, +\infty)$ на линейном пространстве $B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ определена полунорма

$$\nu_p(f) = \left(\int\limits_\Omega |f(\omega)|^p d\mu(\Omega) \right)^{1/p}, \; f \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C}).$$

Упражнение 5.4. Доказать, что функционал $\nu_p: \; B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C}) \to R$ является полунормой.

Упражнение 5.5. Доказать, что если $f \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$, $p \in [1, +\infty)$ и $\nu_p(f) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A_\varepsilon) = 0$ и $|f(x)| < \varepsilon \; \forall \; x \in \Omega \backslash A_\varepsilon$.

В случае, если мера μ не является счетно аддитивной, из утверждения упражнения 2' не следует, что если $\nu_p(f) = 0$, то существует множество $A_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A_0) = 0$ и $f(x) = 0 \; \forall \; x \in \Omega \backslash A_0$.

Пример 5.1. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}}$ и $\mu \in W_0(\mathbb{N})$ – чисто конечно аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $2^{\mathbb{N}}$. Тогда если функция $f: \; \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(\{x \in \mathbb{N} : \; f(x) \neq 0\}) = 1$ и $\int\limits_{\mathbb{N}} |f(n)|^p d\mu(n) = 0$ при любом $p \in [1, +\infty)$.

Обозначим через $\mathcal{M}_\mu$ линейное подпространство пространства $B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$, такое, что для каждого $f \in \mathcal{M}_\mu$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A_\varepsilon) = 0$ и $|f(x)| < \varepsilon \; \forall \; x \in \Omega \backslash A_\varepsilon$. Тогда при любом $p \in [1, +\infty)$ следующие условия эквивалентны:

$\nu_p(f) = 0$ и $f \in \mathcal{M}_\mu$.

Назовем простые функции $f, g \in B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ μ-эквивалентными, если $f - g \in \mathcal{M}_\mu$. Положим $B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) = B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C}) \backslash \mathcal{M}_\mu$ – линейное пространство классов эквивалентности функций из пространства $B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$. Тогда для каждого числа $p \in [1, +\infty)$ функционал $\nu_p : \ B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \to [0, +\infty)$ является нормой на пространстве $B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$.

Обозначим через $B_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ линейное пространство $B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ наделенное нормой ν_p, а через $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ – пополнение по Хаусдорфу пространства $B_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$.

Упражнение 5.4. Доказать, что для любой меры $\mu \in W(\Omega)$ и любого $p \in [1, +\infty)$ выполняется равенство $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$.

Пример 5.2. Пусть Ω – некоторое множество и мера μ – некоторая двухзначная мера, определенная на σ-алгебре 2^Ω и принимающая на множествах σ-алгебры 2^Ω два значения – 0 или 1. Тогда пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ одномерно и базисом в пространстве $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ может служить индикаторная функция ξ_A любого множества $A \in 2^\Omega$ такого, что $\mu(A) = 1$ (доказать самим).

6. Пространства Лебега интегрируемых по Бохнеру векторных функций

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств множества Ω и $\mu \in W(\Omega, \mathcal{A})$. Обозначим через $S(\Omega, \mathcal{A}, H)$ линейное пространство простых измеримых отображений $\mathbf{f} : \ \Omega \to H$.

Для каждого числа $p \in [1, +\infty)$ определим на пространстве $S(\Omega, \mathcal{A}, H)$ функционал $\nu_p(\mathbf{f}) = \left(\int\limits_\Omega \|\mathbf{f}(\omega\|_H^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$ (заметим, что согласно лемме 4.2 для любого $\mathbf{f} \in S(\Omega, \mathcal{A}, H)$ выполняется условие $\|\mathbf{f}\| \in S(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$). Как и в случае скалярных функций, обозначим через $\mathcal{N}_\mu$ линейное подпространство пространства $S(\Omega, \mathcal{A}, H)$, состоящее из таких простых измеримых вектор-функций $\mathbf{f}$, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A_\varepsilon) = 0$ и $\|\mathbf{f}(\omega)\|_H < \varepsilon \ \forall \ \omega \in \Omega \backslash A_\varepsilon$. То есть $\mathcal{N}_\mu$ – линейное подпространство пространства $S(\Omega, \mathcal{A}, H)$, состоящее из таких простых измеримых вектор-функций $\mathbf{f}$, которые принимают отличное от нулевого вектора значения на множестве нулевой меры.

Тогда при любом $p \in [1, +\infty)$ и любой функции $f \in S(\Omega, \mathcal{A}, H)$ следующие условия эквивалентны: $\nu_p(\mathbf{f}) = 0$ и $\mathbf{f} \in \mathcal{N}_\mu$. Действительно, если $\mathbf{f} \in \mathcal{N}_\mu$, то $\nu_p(\mathbf{f}) \leq \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$ и, значит, $\nu_p(\mathbf{f}) = 0$. Если же $\nu_p(\mathbf{f}) = 0$, то в силу условия $f \in S(\Omega, \mathcal{A}, H)$ функция $\|f(\cdot\|_H : \ \Omega \to R$ может быть отлична от нуля только на множестве нулевой меры.

Назовем простые функции $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in S(\Omega, \mathcal{A}, H)$ μ-эквивалентными, если $\mathbf{f} - \mathbf{g} \in \mathcal{N}_\mu$. Положим $S(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H) = S(\Omega, \mathcal{A}, H) \backslash \mathcal{N}_\mu$ – линейное пространство классов эквивалентности функций из пространства $S(\Omega, \mathcal{A}, H)$. Тогда для каждого числа $p \in [1, +\infty)$ функционал $\nu_p : \ S(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H) \to [0, +\infty)$ является нормой на пространстве $S(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

Обозначим через $S_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ линейное пространство $S(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ наделенное нормой ν_p.

Определение 6.1. Пространством Лебега $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ интегрируемых в степени $p \in [1, +\infty)$ по мере μ по Бохнеру вектор-функций $\mathbf{f}: \ \Omega \to H$ называется пополнение линейного нормированного пространства $S_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ классов эквивалентности простых измеримых функций.

Для каждого элемента $\mathbf{f} \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ найдется последовательность $\{\mathbf{f}_k\}$ со значениями в пространстве $S_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \nu_p(\mathbf{f}_{n+l} - \mathbf{f}_n) = 0$. Тогда величина $\|\mathbf{f}\|_{L_p} = \lim\limits_{k\to\infty} \nu_p(\mathbf{f}_k)$ не зависит от выбора последовательности $\{\mathbf{f}_k\}$ из класса эквивалентности фундаментальных последовательностей $\mathbf{f}$ и отображение $\|\cdot\|_{L_p}: \ L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H) \to \mathbb{R}$ является нормой на пространстве $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$, относительно которой пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ является полным.

Рассмотрим отдельно случай гильбертова пространства – случай $p = 2$. Норма пространства $S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ является евклидовой, а пространство $S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ – предгильбертовым, ибо норма пространства $S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ порождается скалярным произведением $(,)_{S_2}$ на пространстве $S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$, определяемым так: $(u, v)_{S_2} = \int\limits_\Omega (u(\omega), \bar{v}(\omega))_H d\mu(\omega)$ для любых двух простых функций $u, v \in\in S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ (интеграл в правой части равества – интеграл от простой измеримой комплекснозначной функции по конечно-аддитивной мере). Очевидно, что для любого класса эквивалентности функций $u \in S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ выполняется равенство $n_2(u) = \sqrt{(u, u)_{S_2}}$.

Пространство, сопряженное к предгильбертову, унитарно эквивалентно его пополнению. Поэтому пространство линейных непрерывных функционалов $(S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H))^*$ совпадает с пространством $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$. Таким образом, каждый элемент $\mathbf{f} \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $S_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ и однозначно определяется своими значениями на совокупности индикаторных функций измеримых множеств $\{\chi_A, \ A \in \mathcal{A}\}$.

Следующий пример показывает конечномерность или сепарабельность пространства функций со значениями в конечномерном или сепарабельном пространстве H, интегрируемых по Бохнеру по двухзначной мере.

Пример 6.1. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}}$ и $\mu \in W_0(\mathcal{A})$ – чисто конечно аддитивная двухзначная неотрицательная нормированная мера, принимающая на σ-алгебре 2^Ω два значения – 0 или 1. Тогда

1) если пространство H одномерно, то пространство $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ одномерно. Причем если $\mathbf{e}_1$ – ненулевой вектор в H и $A \in \mathcal{A}$ – некоторое множество такое, что $\mu(A) = 1$, то простая функция $\chi_A \mathbf{e}_1$ является базисом в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

2) если пространство H бесконечномерно и сепарабельно, то пространство $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ сепарабельно. При этом ортонормированным базисом в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ является система элементов $\mathbf{e}_k\chi_A$, $k \in \mathbf{N}$, где $A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 1$; $\{\mathbf{e}_k\}$ – ортонормированный базис в пространстве H.

Действительно, поскольку мера $\mu \in W_0(\mathcal{A})$ двухзначная, то существует такой ультрафильтр $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω, что $\mu(A) = 1 \ \forall \ A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0 \ \forall \ A \notin \mathcal{F}$ и для любого множества $A \in 2^\Omega$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}$ (см. замечание 3.1). Фиксируем некоторое множество $A_0 \in \mathcal{F}$. Пусть $\{\mathbf{e}_j\}$ – ОНБ в пространстве H. Покажем, что тогда $\{\mathbf{e}_j\chi_{A_0},\, j \in \mathbb{N}\}$ – ОНБ в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

Легко видеть, что система элементов $\{\mathbf{e}_j\chi_{A_0},\, j \in \mathbb{N}\}$ – ортонормированная система в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

Пусть $\mathbf{f} \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$. Пусть $\{\mathbf{f}_n\}$ – некоторая фундаментальная последовательность простых вектор-функций, входящая в класс эквивалентности $\mathbf{f}$. При каждом $n \in \mathbf{N}$ функция $\mathbf{f}_n$ имеет вид $\sum\limits_{j=1}^{m_n} \mathbf{a}_{j,n}\chi_{A_{j,n}}$, где $A_{j,n} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{a}_{j,n} \in H$. Поскольку $\mathcal{F}$ – ультрафильтр, то при каждом $n \in \mathbb{N}$ не более чем одно множество $A_{j,n}$, $j = 1, ..., m_n$, входит в ультрафильтр $\mathcal{F}$. Тогда для каждого $n \in \mathbf{N}$ выполняется условие $\mathbf{f}_n = (\sum\limits_{j=1}^{m_n} \mathbf{a}_{j,n})\chi_{A_0} = \mathbf{c}_n\chi_{A_0}$, где $\mathbf{c}_n \in \{\theta_H, \mathbf{a}_{1,n}, ..., \mathbf{a}_{m_n,n}\}$. При этом для любых $n, l \in \mathbf{N}$ выполняется равенство $\|\mathbf{f}_{n+l} - \mathbf{f}_n\|_{L_2(\Omega,\mathcal{A},\mu,H)} = \|\mathbf{c}_{n+l} - \mathbf{c}_n\|_H$. Следовательно, каждый класс эквивалентности $\mathbf{f}$ фундаментальных последовательностей простых функций содержит стационарную последовательность все значения которой равны $\mathbf{c}\chi_{A_0}$, где $\mathbf{c}$ – некоторый вектор пространства H. Таким образом, система элементов $\{e_j\chi_{A_0},\, j \in \mathbf{N}\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

7. Пространства Лебега вектор-функций, интегрируемых по Петтису.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $\mathcal{A}$ – σ-алгебра подмножеств множества Ω и $\mu \in W(\Omega, \mathcal{A})$. Далее полагаем, что совокупность измеримых подмножеств $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй. При изучении простых измеримых функций этого свойства совокупности измеримых подмножеств $\mathcal{A}$ не требовалось в силу леммы 4.2, но это свойство потребуется при изучении ограниченных измеримых функций.

Обозначим через $B(\Omega, \mathcal{A}, H)$ линейное пространство ограниченных слабо измеримых отображений $\mathbf{f} : \ \Omega \to H$. Вместо леммы 4.2 для ограниченных измеримых вектор-функций справедливо утверждение.

Лемма 7.1. Если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра подмножеств множества Ω и $\mathbf{f} \in B(\Omega, \mathcal{A}, H)$, то функция $\|\mathbf{f}\|$ принадлежит пространству $B(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ (является ограниченной и измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$).

Для каждого числа $p \in [1, +\infty)$ определим на пространстве $B(\Omega, \mathcal{A}, H)$ функционал $\nu_p(\mathbf{f}) = \left(\int\limits_{\Omega}(\|\mathbf{f}\|_H(\omega))^p d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$, где $\|\mathbf{f}\|_H(\omega) = \|\mathbf{f}(\omega)\|_H$, $\omega \in \Omega$. Так как функция $\mathbf{f}$ является ограниченной и слабо измеримой, то для любого ортонормированного базиса $\{e_k\}$ в пространстве H функция $f_k = (\mathbf{f}, e_k)_H$ является ограниченной измеримой функцией $\Omega \to \mathbb{C}$. А поскольку для любого $\omega \in \Omega$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k(\omega)|^2 \leq \|\mathbf{f}\|^2_{B(\Omega,\mathcal{A},H)}$ сходится и поскольку совокупность множеств $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй, то функция $\|\mathbf{f}\|_H(\omega) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k(\omega)|^2\right)^{1/2} : \Omega \to \mathbb{R}$, является измеримой и ограниченной. Поэтому для любого $p \in [1, +\infty)$ функционал ν_p определен на пространстве $B(\Omega, \mathcal{A}, H)$. $\Box$

Как и в случае скалярных функций, обозначим через $\mathcal{M}_\mu$ линейное подпространство пространства $B(\Omega, \mathcal{A}, H)$, состоящее из таких ограниченных измеримых вектор-функций $\mathbf{f}$, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A_\varepsilon) = 0$ и $\|\mathbf{f}(\omega)\|_H < \varepsilon \ \forall\ \omega \in \Omega \backslash A_\varepsilon$.

Тогда при любом $p \in [1, +\infty)$ и любой функции $f \in B(\Omega, \mathcal{A}, H)$ следующие условия эквивалентны: $\nu_p(\mathbf{f}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{f} \in \mathcal{M}_\mu$. Действительно, если $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_\mu$, то $\nu_p(\mathbf{f}) \leq \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$ и, значит, $\nu_p(\mathbf{f}) = 0$. Если же $\nu_p(\mathbf{f}) = 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(A_\varepsilon) = 0$ и $\|\mathbf{f}(\omega)\|_H < \varepsilon \ \forall\ \omega \in \Omega \backslash A_\varepsilon$. Предположим противное. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\mu(A_{\|\mathbf{f}\| \geq \varepsilon}) > 0$ для измеримого множества $A_{\|\mathbf{f}\| \geq \varepsilon} = \{\omega \in \Omega : \ \|\mathbf{f}(\omega)\|_H \geq \varepsilon\}$. Следовательно, $\nu_p(\mathbf{f}) \geq \varepsilon(\mu(A_{\|\mathbf{f}\| \geq \varepsilon}))^{1/p}$, и получаем противоречие.

Назовем ограниченные функции $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in B(\Omega, \mathcal{A}, H)$ μ-эквивалентными, если $\mathbf{f} - \mathbf{g} \in \mathcal{M}_\mu$. Положим $B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H) = B(\Omega, \mathcal{A}, H) \backslash \mathcal{M}_\mu$ – линейное пространство классов эквивалентности функций из пространства $B(\Omega, \mathcal{A}, H)$. Тогда для каждого числа $p \in [1, +\infty)$ функционал $\nu_p : \ B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H) \to [0, +\infty)$ является нормой на пространстве $B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

Как и в случае скалярных функций (см. пример 4.1), отношение эквивалентности измеримых числовых по конечно-аддитивной мере отличается от отношения эквивалентности по счетно аддитивной. Как известно, две функции, эквивалентные по счетно аддитиной мере, могут отличатся одна от другой лишь на множестве нулевой меры. Но как показывает пример 4.1, две функции, эквивалентные по конечно-аддитивной мере, могут иметь различные значения в точках множества полной меры: $\|\mathbf{g}(k)\|_H > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, но $g \in \mathcal{M}_\mu$ и $g \sim \theta_B$ – нулевой функции пространства $B(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ (см. пример 4.1).

Обозначим через $B_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ линейное пространство $B(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ наделенное нормой ν_p, а через $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ – пополнение по Хаусдорфу пространства $B_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

Определение 7.1. Пространством Лебега $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ интегрируемых $p \in [1, +\infty)$ по мере μ по Петтису вектор-функций $\mathbf{f} : \ \Omega \to H$ называется пополнение линейного нормированного пространства $B_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ классов эквивалентности ограниченных измеримых функций.

Поскольку $B(\Omega, \mathcal{A}, H) \supset S(\Omega, \mathcal{A}, H)$, то справедливо включение

$$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H) \subset \Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H). \tag{7.1}$$

В случае конечномерного пространства H имеет место равенство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H) = \Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ (см. упражнение 5.4). Приведем пример, когда включение (7.1) является строгим.

Пример 7.1. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}}$ и $\mu \in W_0(\mathbb{N})$ – чисто конечно аддитивная двухзначная неотрицательная нормированная мера на измеримом пространстве $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$.

1) Тогда если пространство H одномерно, то пространства $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ и $\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ совпадают и являются одномерными. (См. упражнение 5.4 и пример 5.2.)

2) А если пространство H бесконечномерно и сепарабельно, то пространство $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ сепарабельно, а пространство $\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ – несепарабельно.

Утверждение о сепарабельности пространства установлено в примере 6.1. Докажем утверждение о несепарабельности пространства $\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$. Приведем пример континуальной ортонормированной системы элементов пространства $\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

Пусть $\{\mathbf{e}_n\}$ – ОНБ в пространстве H. Фиксируем некоторое вещественное число $a \in (0, 1)$ и положим $\mathbf{u}_a(k) = \mathbf{e}_{[ak]}$, $k \in \mathbb{N}$, где $[ak]$ – целая часть числа ak.

Тогда $\mathbf{u}_a \in B(\Omega, \mathcal{A}, H)$ – ограниченная измеримая вектор-функция и $\|\mathbf{u}_a(k)\|_H = 1 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$, поэтому $\mathbf{u}_a \in \Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$ и $\|\mathbf{u}_a\|_{\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)} = 1$.

При этом для любых двух чисел $a, b \in (0, 1);\ a \neq b$, элементы $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b$ являются ортогональными в гильбертовом пространстве $\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$. Действительно, если $a \neq b$, то существует такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $k \geq k_0$, $k \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство $|(a - b)k| > 2$. Поэтому для любых $k \geq k_0$ выполняется неравенство $[ak] \neq [bk]$. Следовательно, $(\mathbf{u}_a(k), \mathbf{u}_b(k))_H = 0 \,\forall\, k \geq k_0$, то есть $\mu(\{k \in \mathbb{N} :\ (\mathbf{u}_a(k), \mathbf{u}_b(k))_H = 0\}) = 1$ и $(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)_{\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)} = 0$. Таким образом, континуальная система элементов $\mathbf{u}_a$, $a \in (0, 1)$, является ортонормированной в пространстве $\Lambda_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, H)$.

В заключении отметим, что пространства интегрируемых по Петтису векторнозначных функций, подобные рассматриваемым в настоящем пособии, были введены и исследованы в монографии [13] и применялись в ряде задач, возникающих в теории нелинейных дифференциальных уравнений и оптимального управления.

Автор выражает благодарность С.В. Ивановой за интерес к работе и ряд конструктивных критических замечаний.

Список литературы

[1] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Физматлит. 1985.

[2] Weil A. l'Integration dans les group topologiques et ses application. Paris. 1940.

[3] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М.: УРСС. 2004.

[4] N. Danculeanu.

[5] В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ. Университетский курс. М.-Ижевск: РХД. 2011.

[6] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир. 1969.

[7] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир. 1967.

[8] Yosida K., Hewitt E. Finitely additive measures. Trans. Amer. Math. Soc., 1952. V. 72. P. 46-66.

[9] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 3.

[10] Сакбаев В.Ж. *О динамике вырожденной квантовой системы в пространстве функций, интегрируемых по конечно аддитивной мере.* Труды МФТИ. 2009. Т. 1. № 4. С. 126-147.

[11] Сакбаев В.Ж. *Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций* СМФН, **43**, (2012), С. 3–172.

[12] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. М.: УРСС. 2015.

[13] Сухинин М.Ф. Избранные главы нелинейного анализа. М.: Изд. РУДН. 1992.