СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Самарова С.С.

II курс, теория вероятностей, лектор А.В. Булинский, гр. 855

СОДЕРЖАНИЕ

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часто в практических задачах возникает необходимость рассмотрения нескольких случайных величин одновременно.

Определение 1. Конечный набор случайных величин $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве, называют *случайным вектором* или *многомерной случайной величиной*.

Определение 2. *Совместным распределением случайных величин* $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ или *распределением случайного вектора* называют вероятности

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) \qquad (1)$$

где $B_1, B_2, \dots, B_n$ – произвольные борелевские множества из $\mathcal{B}(-\infty, +\infty)$.

Заметим, что распределение случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ полностью задает распределение каждой его компоненты ξ_i. Для того, чтобы это доказать, достаточно в формуле (1) в качестве множеств B_j при всех $j \neq i$ выбрать интервалы $(-\infty, +\infty)$.

С другой стороны, как показывают следующие примеры 1 и 2, знание закона распределения каждой из компонент случайного вектора не определяет его распределение.

Пример 1. Рассмотрим две случайные величины ξ и η, которые могут принимать значения 0 или 1, причем их совместное распределение задается формулами:

$$P\left(\xi=1,\,\eta=1\right)=0,25;\quad P\left(\xi=1,\,\eta=0\right)=0,5;$$
$$P\left(\xi=0,\,\eta=1\right)=0,2;\quad P\left(\xi=0,\,\eta=0\right)=0,05.$$

Тогда законы распределения случайных величин ξ и η имеют вид:

$$\begin{aligned}
&P\left(\xi=1\right)=P\left(\xi=1,\,\eta=1\right)+P\left(\xi=1,\,\eta=0\right)=0,25+0,5=0,75;\\
&P\left(\xi=0\right)=P\left(\xi=0,\,\eta=1\right)+P\left(\xi=0,\,\eta=0\right)=0,2+0,05=0,25;\\
&P\left(\eta=1\right)=P\left(\xi=1,\,\eta=1\right)+P\left(\xi=0,\,\eta=1\right)=0,25+0,2=0,45;\\
&P\left(\eta=0\right)=P\left(\xi=1,\,\eta=0\right)+P\left(\xi=0,\,\eta=0\right)=0,5+0,05=0,55.
\end{aligned}\tag{2}$$

Пример 2. Предположим теперь, что совместное распределение случайных величин ξ и η задано формулами:

$$P\left(\xi=1,\,\eta=1\right)=0,3;\quad P\left(\xi=1,\,\eta=0\right)=0,45;$$
$$P\left(\xi=0,\,\eta=1\right)=0,15;\quad P\left(\xi=0,\,\eta=0\right)=0,1.$$

Тогда законы распределения случайных величин ξ и η имеют вид:

$$\begin{aligned}
&P\left(\xi=1\right)=P\left(\xi=1,\,\eta=1\right)+P\left(\xi=1,\,\eta=0\right)=0,3+0,45=0,75;\\
&P\left(\xi=0\right)=P\left(\xi=0,\,\eta=1\right)+P\left(\xi=0,\,\eta=0\right)=0,15+0,1=0,25;\\
&P\left(\eta=1\right)=P\left(\xi=1,\,\eta=1\right)+P\left(\xi=0,\,\eta=1\right)=0,3+0,15=0,45;\\
&P\left(\eta=0\right)=P\left(\xi=1,\,\eta=0\right)+P\left(\xi=0,\,\eta=0\right)=0,45+0,1=0,55.
\end{aligned}\tag{3}$$

Сравнивая формулы (2) и (3), замечаем, что в примерах 1 и 2 распределения случайных величин ξ и η идентичны, в то время как совместные распределения пары случайных величин $\left(\xi,\eta\right)$ были выбраны разными.

Задача 1. Закон распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид:

ξ :

−2	0	1	2
0,1	0,5	0,1	0,3

Случайная величина $\eta=\left|\,\xi\,\right|$. Найти:

1) закон распределения случайной величины η;
2) совместное распределение случайных величин ξ и η.

Решение. 1). Случайная величина $\eta = |\xi|$ может принимать значения 0, 1 и 2. Найдем вероятности, с которыми принимается каждое из этих значений:

$$P(\eta = 0) = P(\xi = 0) = 0,5; \quad P(\eta = 1) = P(\xi = 1) = 0,1;$$
$$P(\eta = 2) = P(\xi = -2) + P(\xi = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $\eta = |\xi|$ имеет вид:

η:

0	1	2
0,5	0,1	0,4

2). Теперь найдем совместное распределение случайных величин ξ и η:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\xi = 0) = 0,5; \quad P(\xi = 0, \eta = 1) = P(\xi = 0, \eta = 2) = 0;$$
$$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(\xi = 1) = 0,1; \quad P(\xi = 1, \eta = 0) = P(\xi = 1, \eta = 2) = 0;$$
$$P(\xi = 2, \eta = 2) = P(\xi = 2) = 0,3; \quad P(\xi = 2, \eta = 0) = P(\xi = 2, \eta = 1) = 0;$$
$$P(\xi = -2, \eta = 2) = P(\xi = -2) = 0,1;$$
$$P(\xi = -2, \eta = 0) = P(\xi = -2, \eta = 1) = 0.$$

Поскольку ξ и η являются дискретными случайными величинами, то их совместное распределение удобно представить в виде таблицы:

η \ ξ	−2	0	1	2
0	0	0,5	0	0
1	0	0	0,1	0
2	0,1	0	0	0,3

Решение задачи 1 завершено.

МНОГОМЕРНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. МНОГОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Определение 3. *Функцией распределения случайного вектора* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ или *многомерной функцией распределения* называют функцию n переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, определяемую равенством

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n) \qquad (4)$$

Важным классом случайных векторов являются абсолютно непрерывные случайные векторы.

Определение 4. Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называют *непрерывным* (*абсолютно непрерывным*), если для него существует такая неотрицательная функция $p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(R^n)$ выполнено равенство

$$P\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B\} = \int_B p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n \qquad (5)$$

Функцию $p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют *плотностью распределения случайного вектора* $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ или *многомерной плотностью*.

Замечание. Далее рассматриваются только такие непрерывные случайные векторы, плотности распределения которых являются функциями, непрерывными на множестве R^n за исключением, быть может, конечного числа точек. Кроме того, здесь и далее рассматриваются только такие борелевские множества $B \in \mathcal{B}(R^n)$, для которых интеграл, стоящий в правой части формулы (2), существует и совпадает с интегралом Римана.

В частности, для непрерывных случайных векторов из формул (4) и (5) вытекают следующие важные соотношения:

1. Для любых $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ выполнено равенство:

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n \qquad (6)$$

2. Многомерная плотность удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1 \qquad (7)$$

3. Во всех точках непрерывности функции $p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполнено равенство:

$$p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \qquad (8)$$

4. Одномерные распределения и одномерные плотности компонент случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ можно найти по формулам:

$$(x-1)f(x) = 1$$

$$F_{\xi_k}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1\xi_2,\dots,\xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)\, dt_1 \dots\, dt_{k-1}dt_{k+1} \dots dt_n\right)dt_k$$

$$p_{\xi_k}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1\xi_2,\dots,\xi_n}(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)\, dt_1 \dots\, dt_{k-1}dt_{k+1} \dots dt_n$$

НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определение 5. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называют *независимыми (независимыми в совокупности),* если для любых борелевских множеств $B_1, B_2, \dots, B_n$ из $\mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ выполнено равенство:

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

Другими словами, случайные величины независимы, если для любых борелевских множеств $B_1, B_2, \dots, B_n$ независимыми являются события

$$\{\xi_1 \in B_1\}, \dots, \{\xi_n \in B_n\}.$$

Из определения 5 следуют два важных *свойства* для функций распределения независимых случайных величин и плотностей распределения (в случае, когда независимые случайные величины были непрерывными).

1. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ выполнено равенство

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n) \qquad (9)$$

2. Непрерывные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ выполнено равенство

$$p_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot p_{\xi_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot p_{\xi_n}(x_n) \qquad (10)$$

Нетрудно заметить, что равенство (10) легко получить из равенства (9) путем дифференцирования (см. формулу (8)).

Задача 2. Совместное распределение двух дискретных случайных величин ξ и η задано при помощи таблицы:

η \ ξ	–5	–1,5
–7	0,08	0,32
8	0,12	0,48

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Решение. Найдем одномерные распределения случайных величин ξ и η. Для того, чтобы найти закон распределения случайной величины η, сложим вероятности в каждой строке таблицы и запишем результаты в дополнительном столбце справа. Для того, чтобы найти закон распределения случайной величины ξ, сложим вероятности в каждом столбце таблицы и запишем результаты в дополнительной строке снизу.

η \ ξ	–5	–1,5	
–7	0,08	0,32	0,4
8	0,12	0,48	0,6
	0,2	0,8	

Случайные величины ξ и η независимы в том, и только в том, случае, если вероятности, стоящие в каждой клетке исходной таблицы их совместного распределения равны произведению соответствующих вероятностей, записанных в дополнительной строке и дополнительном столбце. Непосредственная проверка показывает, что для рассматриваемого в задаче совместного распределения случайных величин ξ и η эти условия выполнены.

Ответ: случайные величины ξ и η независимы.

Задача 3. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайных величин:

1) $\eta_1 = \max\left\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right\}$, 2) $\eta_2 = \min\left\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right\}$.

Решение. 1). Функция распределения случайной величины η_1 имеет вид:

$$F_{\eta_1}(x) = P(\eta_1 \le x) = P\left(\max\left\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right\} \le x\right) =$$
$$= P\left(\xi_1 \le x, \xi_2 \le x, \ldots, \xi_n \le x\right).$$

Воспользовавшись независимостью случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, получаем:

$$F_{\eta_1}(x) = P(\xi_1 \le x, \ \dots, \xi_n \le x) = P(\xi_1 \le x) \cdot P(\xi_2 \le x) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x) =$$
$$= F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(x) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x).$$

Поскольку все случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют одно и то же распределение, то их функции распределения равны между собой. Поэтому

$$F_{\eta_1}(x) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(x) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x) = \left(F_{\xi_1}(x)\right)^n .$$

Отсюда вытекает, что плотность распределения случайной величины η_1 равна

$$p_{\eta_1}(x) = F'_{\eta_1}(x) = n \cdot \left(F_{\xi_1}(x)\right)^{n-1} \cdot p_{\xi_1}(x) \tag{11}$$

Воспользовавшись формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases} \tag{12}$$

задающей функцию распределения для показательного распределения с параметром λ, и формулой

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

задающей плотность показательного распределения с параметром λ, формулу (11) можно преобразовать к виду

$$p_{\eta_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \lambda n \cdot e^{-\lambda x} \cdot \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

2) Функция распределения случайной величины η_2 имеет вид:

$$F_{\eta_2}(x) = P(\eta_2 \le x) = P\left(\min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \le x\right) =$$
$$= 1 - P\left(\min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} > x\right) = 1 - P(\xi_1 > x, \xi_2 > x, \dots, \xi_n > x).$$

Воспользовавшись тем, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ (см. формулу (12)), получаем:

$$F_{\eta_2}(x) = 1 - P(\xi_1 > x) \cdot P(\xi_2 > x) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n > x) = 1 - \left(P(\xi_1 > x)\right)^n =$$

$$= 1 - \left(1 - F_{\xi_1}(x)\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda n x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Отсюда следует, что плотность распределения случайной величины η_2 равна

$$p_{\eta_2}(x) = F'_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \lambda n e^{-\lambda n x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}.$$

Ответ:

1) $p_{\eta_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \lambda n \cdot e^{-\lambda x} \cdot \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$

2) $p_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \lambda n e^{-\lambda n x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУММЫ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2, законы распределений которых известны. Часто при решении задач требуется выяснить, как распределена их сумма $\xi_1 + \xi_2$.

В случае, когда обе случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются непрерывными случайными величинами с плотностями $p_{\xi_1}(x)$ и $p_{\xi_2}(x)$ соответственно, можно получить формулу для плотности распределения их суммы. С этой целью рассмотрим функцию распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = P\left(\xi_1 + \xi_2 \le x\right) = \iint\limits_{y+z \le x} p_{\xi_1,\xi_2}(y, z)\, dy\, dz.$$

В силу независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 с помощью формулы (10) получаем:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \iint\limits_{y+z \le x} p_{\xi_1,\xi_2}(y, z)\, dy\, dz = \iint\limits_{y+z \le x} p_{\xi_1}(y) \cdot p_{\xi_2}(z)\, dy\, dz \tag{13}$$

Сделаем в правой части формулы (11) замену переменных

$$y = s, \quad z = t - s,$$

и перейдем от двойного интеграла к повторным:

$$\iint\limits_{t\le x} p_{\xi_1}(s)\cdot p_{\xi_2}(t-s)\,dt\,ds=\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s)\,p_{\xi_2}(t-s)\,ds\right)dt \qquad (14)$$

Продифференцировав интеграл, стоящий в правой части формулы (14), по верхнему пределу, получим плотность распределения суммы $\xi_1+\xi_2$:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s)\; p_{\xi_2}(x-s)\,ds \qquad (15)$$

Замечание. Формула (15) означает, что плотность суммы двух непрерывных независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 является сверткой их плотностей $p_{\xi_1}(x)$ и $p_{\xi_2}(x)$.

Задача 4 (*распределение суммы двух независимых непрерывных случайных величин*). Найти плотность распределения суммы независимых случайных величин ξ и η, если ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$, а η имеет показательное распределение с параметром $\lambda=1$.

Решение. Подставим плотности распределений ξ и η

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\infty<x<0,\\ 1 & \text{при} \quad 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{при} \quad 1<x<+\infty,\end{cases} \qquad p_\eta(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\infty<x<0,\\ e^{-x} & \text{при} \quad 0\le x<+\infty,\end{cases}$$

в формулу (15) для плотности суммы двух независимых случайных величин:

$$p_{\xi+\eta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(s)\; p_\eta(x-s)\,ds=\int\limits_0^1 p_\eta(x-s)\,ds \qquad (16)$$

Замечая, что $p_\eta(x-s)\ne 0$ в том, и только в том случае, когда $s\le x$, получим следующие результаты:

1) при $x<0$ справедливо равенство $p_{\xi+\eta}(x)=0$;

2) при $0\le x\le 1$ формула (16) принимает вид

$$p_{\xi+\eta}(x)=\int\limits_0^1 p_\eta(x-s)\,ds=\int\limits_0^x e^{s-x}ds=e^{s-x}\Big|_0^x=1-e^{-x};$$

3) при $x>1$

$$p_{\xi+\eta}(x)=\int_0^1 p_\eta(x-s)\,ds=\int_0^1 e^{s-x}ds=e^{s-x}\Big|_0^1=e^{1-x}-e^{-x}.$$

Ответ: $$p_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty<x<0, \\ 1-e^{-x} & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ e^{1-x}-e^{-x} & \text{при} \quad 1<x<+\infty. \end{cases}$$

Задача 5 (*распределение суммы двух независимых случайных величин, одна из которых непрерывная, а другая дискретная*). Случайные величины ξ и η независимы. Случайная величина ξ непрерывная и имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, а случайная величина η дискретная и задана законом распределения

η:

–2	1	2
0,3	0,2	0,5

Найти закон распределения суммы $\xi+\eta$.

Решение. Выразим функцию распределения суммы случайных величин $\xi+\eta$ через функцию распределения случайной величины ξ, пользуясь независимостью случайных величин ξ, η и законом распределения случайной величины η:

$$\begin{aligned} &F_{\xi+\eta}(x)=P(\xi+\eta\le x)= \\ &=P(\eta=-2,\ \xi\le x+2)+P(\eta=1,\ \xi\le x-1)+P(\eta=2,\ \xi\le x-2)= \\ &=P(\eta=-2)P(\xi\le x+2)+P(\eta=1)P(\xi\le x-1)+P(\eta=2)P(\xi\le x-2)= \\ &=0,3\cdot F_\xi(x+2)+0,2\cdot F_\xi(x-1)+0,5\cdot F_\xi(x-2) \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти плотность распределения суммы случайных величин $\xi+\eta$, продифференцируем полученное равенство:

$$p_{\xi+\eta}(x)=F'_{\xi+\eta}(x)=0,3\cdot p_\xi(x+2)+0,2\cdot p_\xi(x-1)+0,5\cdot p_\xi(x-2)$$

Ответ: $p_{\xi+\eta}(x)=0,3\cdot p_\xi(x+2)+0,2\cdot p_\xi(x-1)+0,5\cdot p_\xi(x-2)$

Задача 6 (*распределение суммы двух независимых дискретных случайных величин*). Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2, распределенных по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

Решение. Поскольку каждая из случайных величин ξ_1 и ξ_2 может принимать только целые неотрицательные значения, то и их сумма $\xi_1+\xi_2$ может принимать только значения

0,1,2,3,... Найдем вероятности, с которыми сумма $\xi_1 + \xi_2$ будет принимать эти значения. С учетом независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 и формулы

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \left(k = 0, 1, 2, 3, \ldots\right).$$

описывающей закон распределения случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона с параметром λ, для произвольного целого неотрицательного числа *n* получаем:

$$p_n = P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_1 = k, \xi_2 = n-k\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_1 = k\} P\{\xi_2 = n-k\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} =$$
$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k},$$

где через C_n^k обозначено число сочетаний из *n* элементов по *k* элементов. Применение формулы бинома Ньютона позволяет получить окончательный результат:

$$p_n = \frac{\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Таким образом, сумма $\xi_1 + \xi_2$ также имеет распределение Пуассона, параметр которого равен сумме $\lambda_1 + \lambda_2$.

Ответ: сумма $\xi_1 + \xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.