Применение методов линейной алгебры в дифференциальных уравнениях.

А. М. Бишаев, В. Н. Диесперов

Изучение свойств и методов решения линейных дифференциальных уравнений занимает достаточно большое место в годовом курсе ‹‹Дифференциальные уравнения››, который читается для студентов 2го курса. Изучение этого раздела существенным образом опирается на сведения, которые получили студенты в первый год обучения, прослушав курс ‹‹Аналитической геометрии и линейной алгебры›› . К сожалению в настоящее время в упомянутом выше курсе уделяется либо мало времени, либо совсем не рассматриваются вопросы, на которых базируется построение методов решения линейных систем с постоянными коэффициентами. При чтении курса ‹‹Дифференциальные уравнения›› лекторы не имеют времени для углубленного рассмотрения упомянутых выше вопросов, что приводит к формальному, а значит не достаточно глубокому усвоению студентами этого имеющего базовое значение раздела упомянутого выше курса.

По мнению авторов, использование в читаемом курсе ‹‹Дифференциальные уравнения›› такого понятия алгебры, как кольцо сделает изложение этого раздела более целостным и приведет к его лучшему усвоению студентами.

Понятие кольца. Говорят, что на множестве M определена бинарная операция, если для каждой упорядоченной пары элементов этого множества однозначно определен третий элемент, который также принадлежит этому множеству ([1]).

Кольцом (*K*) называется множество, в котором определены два действия - ‹‹сложение›› и ‹‹умножение››, сопоставляющие упорядоченным парам элементов их ‹‹сумму›› и ‹‹произведение››, являющиеся элементами того же множества. При этом предполагается, что действия удовлетворяют следующим требованиям:

1. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения).
2. $a+b=b+a$ (коммутативность сложения).
3. Существует нулевой элемент 0 такой, что $\forall a\; a+0=a$.
4. Для каждого a существует противоположный $-a$ такой, что $a+(-a)=0$.
5. $(a+b)c=ac+bc$ (левая дистрибутивность).

$5'$. $c(a+b)=ca+cb$ (правая дистрибутивность).

Имеются следующие простейшие следствия из 1-4.

Предложение 1. Если $a+x=a+y$, то $x=y$.

Действительно, $(-a)+(a+x)=(-a)+(a+y)$. Откуда $((-a)+a)+x=((-a)+a)+y=$ $=0+x=x=0+y=y$. Из предложения 1 следуют единственность нуля и противоположного элемента. В самом деле, $0=a+(-a)=a+(-a)'\rightarrow(-a)=(-a)'$.

Предложение 2. $a\cdot 0=0\cdot a=0$ при любом то a.

Действительно, $a\cdot 0+0=a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$, и в силу предложения 1 $a\cdot 0$=0.

Аналогично, $0+0\cdot a=0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a$

Чаще всего возникает необходимость рассматривать кольца, в которых умножение удовлетворяет тем или другим дополнительным требованиям.

Наиболее употребительными являются:

6. $(ab)c=a(bc)$ (ассоциативность умножения).
7. $ab=ba$ (коммутативность умножения).
8. Существование единичного элемента 1 (т. е. такого, что $a\cdot 1=1\cdot a=a\;\forall a\in K$)
9. Существование обратного элемента $a^{-1}\;\forall a\neq 0$.

В конкретных кольцах эти требования могут выполняться как порознь, так и вместе. Кольцо называется ассоциативным, если выполнено условие 6, коммутативным, если выполнено 7, коммутативным и ассоциативным, если выполнены условия 6 и 7. Если выполнено условие 8, то говорят о кольце с единицей, снабжая слово ‹кольцо› прилагательным в зависимости от выполнения условия 6 и 7.

Если в кольце есть единица, то она единственна. Действительно, если 1 и $1'$ - две , то $1\cdot 1'=1'\cdot 1=1=1'$.

Ассоциативное кольцо называется областью целостности, если из равенства $a\cdot b=0$ следует, что хотя бы один из сомножителей a или b равен 0.

Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент a имеет обратный. Ясно, что любое поле есть область целостности. Действительно, пусть $a \cdot b = 0$ и $a \neq 0$. Тогда $a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b \Rightarrow b = 0$.

Расширение понятия многочлена от одной буквы x.
Пусть A есть коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Одночленом от буквы x с коэффициентами из A называется выражение $ax^m, a \in A, m$ - целое неотрицательное число. По определению положим $ax^0 = a$, так что элементы кольца A являются одночленами частного вида. Выражение вида ax^m пока рассматривается как некий символ, для которого определяются действие приведение подобных членов - $ax^m + bx^m = (a+b)x^m$ и действие умножения - $ax^m \cdot bx^n = abx^{m+n}$.

Выражение, состоящее из нескольких одночленов, соединенных знаком+, называется многочленом (полиномом) от x с коэффициентами из A. Порядок следования одночленов безразличен, подобные одночлены можно соединять, а также вставлять и выбрасывать одночлены с нулевыми коэффициентами. Без нарушения общности можно считать многочлен записанным в каноническом виде - $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (т. е. в порядке возрастания степеней) или в порядке убывания степеней - $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. При этом

1. Многочлены $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ считаются равными в том и только в том случае, если $n = m$ и они составлены в канонической записи из одинаковых одночленов, т. е.
$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$
2. Суммой двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен, получающийся посредством объединения одночленов, составляющие слагаемые. После объединения следует привести подобные члены. Таким образом,
$P_n(x) + Q_m(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \ldots + c_sx^s$, где $s = max\{n,m\}, c_s = a_s + b_s, a_s = 0$, если $s > n$ и $b_s = 0$, $s > m$. Ясно, что так определенное действие сложения многочленов коммутативно и ассоциативно. Имеется также нулевой элемент - $0 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^n$, а также противоположный - $(-P_n(x)) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
3. Произведением двух многочленов называется многочлен, составленный из произведений всех членов первого сомножителя на все члены второго.

После приведения подобных членов будем иметь

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)x^j + \ldots + a_nb_mx^{n+m}.$$

Так определенное действие умножения будет коммутативным и ассоциативным. Действительно,
$Q_m(x) \cdot P_n(x) = b_0a_0 + (b_1a_0 + b_0a_1)x + \ldots + (\sum_{j=k+l} b_ka_l)x^j + \ldots + b_ma_nx^{m+n}$. В сумме $\sum_{j=k+l} b_ka_l$ заменим индексы $k \Leftrightarrow l$. Получим $\sum_{j=k+l} b_ka_l = \sum_{j=k+l} b_la_k = \sum_{j=k+l} a_lb_k$, откуда в силу 1, имеем $P_n(x) \cdot Q_m(x) = Q_m(x) \cdot P_n(x)$. Пусть $R_s(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_sx^s$. Тогда

$(P_n(x)\cdot Q_m(x))\cdot R_s(x)=(a_0b_0)c_0)+(\sum_{\gamma=j+\sigma}(\sum_{j=k+l}a_kb_l)c_\sigma)x^\gamma+(a_nb_m)c_sx^{n+m+s}$, где $\gamma=1,...,n+m+s-1$. Имеем $\sum_{\gamma=j+\sigma}(\sum_{j=k+l}a_kb_l)c_\sigma)=\sum_{\gamma=k+l+\sigma}a_kb_lc_\sigma=\sum_{\gamma=k+l+\sigma}a_k(b_lc_\sigma)$. Положим $l'=l+\sigma$. Тогда $\sum_{\gamma=k+l+\sigma}a_k(b_lc_\sigma)=\sum_{\gamma=k+l'}a_k(\sum_{l'=l+\sigma}b_lc_\sigma)$. Учитывая 1, имеем $(P_n(x)\cdot Q_m(x))\cdot R_s(x)=P_n(x)\cdot(Q_m(x))\cdot R_s(x))$. Так как очевидно, что имеет место дистрибутивность введенного выше умножения по отношению к сложению, то так построенное множество многочленов от буквы x с коэффициентами из кольца A есть коммутативное и ассоциативное кольцо. Оно называется кольцом многочленов от буквы x над кольцом A и обозначается - $A(x)$. Роль единицы в этом кольце играет единица кольца A.

Если обратить внимание только на действия над коэффициентами многочленов, которые должны выполняться при действиях над самими многочленами, то можно описать эти действия, исходя из расположения многочленов по возрастающим степеням. Вместо многочленов рассмотрим бесконечные последовательности элементов кольца A - $(a_0,a_1,....,a_n,...)$, все элементы которых, начиная с некоторых, равны нулю. Определим равенство и основные действия над этими последовательностями.

I. $(a_0,a_1,....,a_n,...)=(b_0,b_1,....,b_n,...)$ тогда и только тогда, когда $a_i=b_i, i=0,1,...,n,...$.

II. $(a_0,a_1,....,a_n,...)+(b_0,b_1,....,b_m,...)=(a_0+b_0,a_1+b_1,....,a_s+b_s,...)$. Ясно, что так определенная последовательность будет принадлежать классу рассматриваемых выше последовательностей, ибо все члены этой последовательности с номерами большими , чем $s=max\{n,m\}$ будут равны нулю.

III. $(a_0,a_1,....,a_n,...)\cdot(b_0,b_1,....,b_m,...)=(a_0b_0,a_0b_1+a_1b_0,...,\sum_{j=k+l}a_kb_l,...,a_nb_m,0,0,...)$,

$j=1,...,n+m-1$. Из II и III следует коммутативность и ассоциативность сложения и умножения и дистрибутивность умножения со сложением.

IV. Отождествим $\forall a\in A$ с последовательностью $(a,0,.....0,...)$. Такое отождествление не противоречит I-III. Действительно, $(a,0,.....0,...)+$
$+(b,0,.....0,...)=(a+b,0,...,0,...)=a+b$. $(a,0,.....0,...)\cdot(b,0,.....0,...)=(ab,...,0,...)=ab$ и
$(a,0,.....0,...)\cdot(b_1,b_2,...,b_n...)=(ab_1,ab_2,...,ab_n,...)$.

Обозначим последовательность $(0,1,...,0,...)$ буквой x. Тогда $x^2=(0,0,1,...,0,...)$ и. т. д. Поэтому $(a_0,a_1,....,a_n,...)=$
$(a_0,0,....,0,...)+(0,a_1,0,....,0,...)+...+(0,0,....,a_n,0,...)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$.

Таким образом, описан способ построения кольца многочленов.

Ясно. что известный из анализа многочлен $P_n(x)$ есть многочлен над полем действительных или комплексных чисел. Следует отметить, что относительно буквы x требуется только те свойства одночлена ax^m, которые были приведены выше.

При построении кольца многочленов вместо x положим $p=\frac{d}{dx}$ - оператор дифференцирования, который действует на множестве бесконечно дифференцируемых комлекснозначных функций действительного переменного $f(x)$, т. е. $p\cdot f=p(f(x)=\frac{df}{dx}=f'$. Имеем $p^2(f)=p(p(f))=\frac{d}{dx}(f')=f''$, $p^n(f)=p(p^{n-1}(f))= \quad =p(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}})=f^{(n)}$. Последние формулы определяют степень оператора p. Причем справедлива формула $p^s\cdot p^m(f)=p^s(p^m(f))=p^s(f^{(m)})=f^{(s+m)}=p^{m+s}(f)$. Последнее равенство определяет формулу произведения степеней оператора и коммутативность такого произведения. Другими словами $p^s\cdot p^m=p^{m+s}, p^s\cdot p^m=p^m\cdot p^s$.

Очевидно, что множество бесконечно дифференцируемых комлекснозначных функций Ф является кольцом, содержащим поле комплексных чисел *С*. В качестве элементов кольца *А* будем брать комплексные числа. Роль операторного одночлена в нашем случае будет играть ap^m , где $a\in C$. Ясно, что $ap^m=p^m a$, т. е. порядок следования числа *а* и оператора p^m неважен. Действительно, $ap^m(f)=af^{(m)}=f^{(m)}a=p^m(f)a$. По определению положим $ap^0=a$. Это определение корректно, ибо $ap^0\cdot f=ap^0(f)=af=a\cdot f=a(f)$, т. е., если рассматривать *а* как оператор, действующий на Ф, поэтому элементы кольца *С* являются одночленами специального типа. Закон ‹‹приведения подобных членов›› операторных одночленов формулируется естественным образом - $ap^m+bp^m=(a+b)p^m$. Действительно, $(ap^m)(f)+(bp^m)(f)= \quad af^{(m)}+bf^{(m)}=(a+b)f^{(m)}=$ $=((a+b)p^m)(f)$.

По аналогии, выражение, состоящее из нескольких операторных одночленов, соединенных знаком $+$, называется операторным многочленом (полиномом) от p с коэффициентами из *С*. Из свойств операции дифференцирования получаем, что порядок следования операторных одночленов безразличен, а подобные одночлены можно соединять и вставлять и выбрасывать одночлены с нулевыми коэффициентами. Без нарушения общности можно считать многочлен записанным в каноническом виде - $L_n(p)=a_0+a_1p+...+a_np^n$ (т. е. в порядке возрастания степеней оператора *р*) или в порядке убывания степеней - $L_n(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0$.

Дословно повторяя пункты 1-3, с содержащимися там доказательствами, заменяя при этом *х* на *р*, построим множество операторных многочленов от буквы *р*, которое будет кольцом от этой буквы над полем *С*. Если обратить внимание только на действия над коэффициентами этих операторных многочленов, которые абсолютно индентичны действиям над коэффициентами многочленов от буквы *х,* то исходя из I-IV (с заменой *х* на *р*), получим $(a_0,a_1,....,a_n,...)=(a_0,0,....,0,...)+(0,a_1,0,....,0,...)+...+(0,0,....,a_n,0,...)=a_0+a_1p+...+a_np^n$.

Пусть $z\in C$. Значением многочлена $P_n(x)$ в С (при *х*=*z*) называется число $P_n(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n\in C$. Очевидно, что если $F(x)=P_n(x)+Q_m(x)$, то $F(z)=$

$= P_n(z) + Q_m(z) = Q_m(z) + P_n(z)$, и в случае $F(x) = P_n(x) \cdot Q_m(x)$, $F(z) = P_n(z) \cdot Q_m(z) = Q_m(z) \cdot P_n(z)$.

Понятие значения многочлена можно обобщить на случай, когда *B* есть ассоциативное кольцо, содержащее кольцо *A,* в случае, когда элементы кольца *A* коммутируют со всеми элементами кольца *B*. В этом случае можно определить степень элемента кольца *B*. Пусть $a \in B$. Положим $a^1 = a, a^2 = a \cdot a, ..., a^n = a^{n-1} \cdot a$.

Теорема 1. $\forall k \in N$ и $\forall m \in N$ $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$.

Док-во

Если $m = 1$, то $a^k \cdot a = a^{k+1}$ в силу определения степени, и теорема верна. Предположим, что при $m > 1$ имеет место $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$. Рассмотрим $a^k \cdot a^{m+1} = a^k \cdot (a^m \cdot a) = (a^k \cdot a^m) \cdot a = a^{k+m} \cdot a = a^{k+m+1}$, согласно определению степени и ассоциативности кольца *B*. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что $a^k \cdot a^m = a^{k+m} = a^{m+k} = a^k \cdot a^m$.

Значение операторного многочлена $L_n(p)$ определим на коммутативном и ассоциативном кольце Ф - бесконечно дифференцируемых комлекснозначных функций действительного переменного $f(x)$, а именно – $L_n(f) = L_n(p)(f) = a_0 f + a_1 f' + ... + a_n f^{(n)} \in \Phi$ как действие дифференциального оператора $L_n(p)$ на множестве функций Φ. Если $F(p) = L_n(p) + M_m(p)$, то $F(p) = (a_0 + b_0) f + (a_1 + b_1) f' + ... + c_s f^{(s)} = L_n(p)(f) + M_m(p)(f) = (L_n(p) + M_m(p))(f)$ есть естественное определение суммы на множестве построенных дифференциальных операторов (коэффициент c_s определен также как при определении действия умножения в кольце многочленов). Очевидно, что $(L_n(p) + M_m(p))(f) = (M_m(p) + L_n(p))(f)$. Значение $L_n(P) \cdot M_m(p)$ в $f(x)$ тогда будет $(a_0 b_0 p^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) p + ... + (\sum\limits_{j=k+l} a_k b_l) p^j + ... + a_n b_m p^{n+m})(f) = a_0 b_0 f + (a_0 b_1 + a_1 b_0) f' + ... + (\sum\limits_{j=k+l} a_k b_l) f^{(j)} + ... + a_n b_m f^{(n+m)} = (a_0 p^0 + + a_1 p + ... + + a_n p^n)(b_0 f + b_1 f' + ... + b_m f^{(m)} = L_n(p)(M_m(f))$ - т. е. обычное определение действия произведения операторов на множестве функций. Так как $a_0 b_0 f + (a_0 b_1 + a_1 b_0) f' + ... + (\sum\limits_{j=k+l} a_k b_l) f^{(j)} + ... + a_n b_m f^{(n+m)} = M_m(p)(a_0 f + + a_1 f' + ... + + a_n f^{(n)}) = M_m(p)(L_n(p)(f))$, то операторы $L_n(p)$ и $M_m(p)$ коммутируют. Ассоциативность и дистрибутивность множества значений определенных выше дифференциальных операторов очевидна. В самом деле, $(L_n(P) \cdot M_m(p)) \cdot K_s(p))(f) = (L_n(P) \cdot (M_m(p)(K_s(f)) = L_n(P)(M_m(p) \cdot (K_s(p)(f)) = (L_n(P) \cdot M_m(p)) \cdot K_s(p))(f)) = L_n(P) \cdot (M_m(p) \cdot K_s(p))(f)$; $(L_n(p) + M_m(p)) \cdot K_s(p)(f) = L_n(p)(K_s(f) + M_m(p)(K_s(f)) = (L_n(p) \cdot K_s(p))(f) + (M_m(p) \cdot K_s(p))(f)$. Таким образом, множество значений операторных многочленов является кольцом, которое содержится в кольце Φ.

Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ есть многочлен, принадлежащий $A(x)$, записанный в порядке убывания степеней. Если $a_n \neq 0$, то говорят, что $P_n(x)$ является многочленом степени *n*.

Если для многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ из $A(x)$ существует многочлен

$R_s(x) \in A(x)$, такой, что $P_n(x) = Q_m(x) \cdot R_s(x)$, то говорят, что $P_n(x)$ делится на $Q_m(x)$. Многочлен $x - c$, где $c \in A$ называется линейным двучленом. Если $P_n(x) = (x-c)\cdot Q_m(x) + r$, то $r \in A$ называется остатком.

Теорема 2. Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \in A(x)$ и $c \in A$. Найдутся единственные полином $Q_m(x)$ и элемент $r \in C$ такие, что $P_n(x) = (x-c)\cdot Q_m(x) + r$.

Док-во

Будем искать $Q_m(x)$ в виде $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$. Тогда, из равенства $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_n = (x-c)\cdot b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0) + r$ получим в силу 1 цепочку равенств (1) (схема Хорнера)

$$b_m = 0, \forall m \geq n, a_n = b_{n-1}, a_{i+1} = b_i - cb_{i-1}, i = n-2, ...0, a_0 = r - cb_0. \qquad (1)$$

Отсюда последовательно определяются коэффициенты $Q_m(x)$ и остаток r. Можно заметить сразу, что остаток r равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = c$. Действительно, переходя в равенстве $P_n(x) = (x-c)\cdot Q_m(x) + r$ к значению при $x = c$, получим $P_n(c) = (c-c)\cdot Q_m(c) + r = (c-c)\cdot Q_m(c) + r = 0\cdot Q_m(c) + r = 0 + r = r$. Элемент кольца A c такой, что $P_n(c) = 0$, называется корнем $P_n(x)$. Отсюда сразу вытекает очевидное утверждение.

Теорема 3. (Безу) Для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на $x - c$, необходимо и достаточно , чтобы $P_n(c) = 0$.

Выше приведенными свойствами обладают многочлены над произвольными коммутативными ассоциативными кольцами с единицей.

Теорема 4. Если кольцо A есть область целостности, то число корней $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \in A(x)$ не превосходит его степени *n*.

Док-во

Применим метод математической индукции. База для индукции многочлен нулевой степени - $a_0 x^0 = a_0 \neq 0$ не имеет корней. Допустим, что $n \geq 1$и что теорема доказана для многочленов степени $n-1$. В этом предположении докажем ее для многочлена $P_n(x)$ степени *n*. Если $P_n(x)$ не имеет корней, то теорема доказана. Пусть корни есть и c_1 - -один из них. Тогда $P_n(x) = (x - c_1)\cdot Q_m(x)$, где $Q_m(x) = b_{m-1}x^{n-1} + b_{m-1}x^{n-2} + ... + b_0 \in A(x)$. Если c_2 корень $P_n(x)$, отличный от c_1, то

$0 = P_n(c_2) = (c_2 - c_1)\cdot Q_m(c_2)$, но $c_2 - c_1 \neq 0$. Так как кольцо A есть область целостности, то из последнего равенства следует, что $Q_m(c_2) = 0$. Таким образом, любой корень $P_n(x)$, кроме быть может c_1, является корнем $Q_m(x)$. В силу индуктивного предположения он имеет не более $n-1$ корней, следовательно $P_n(x)$ имеет не более *n* корней, что и требовалось доказать.

Имеет место **Основная теорема алгебры** – любой многочлен $P_n(x)$ положительной степени над полем комплексных чисел $C(x)$ имеет хотя бы один корень. Из основной теоремы и теоремы Безу нетрудно получить, что $\forall P_n(x)$ имеет место формула разложения этого многочлена на множители –

$P_n(x)=a_n(x-c_1).(x-c_2)\cdot(x\text{-}c_n),\, a_n\neq 0$, где $c_1,c_2,...,c_n$ суть корни $P_n(x)$. Так как кольцо комплексных чисел есть область целостности, то вышеприведенное разложение единственно. Среди сомножителей в разложении $P_n(x)=a_n(x-c_1).(x-c_2)\cdot(x\text{-}c_n)$ могут быть равные. Соединив их в виде степеней, получим разложение в виде

$$P_n(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdot...\cdot(x\text{-}c_k)^{l_k}\,, \qquad (2)$$

где $c_1,...,c_k$ уже разные. Показатели $l_1,...,l_k$ называются кратностями соответствующих корней. Корни кратности 1 называются простыми корнями, корни кратности 2 - двукратными, и. т. д.

Взаимно однозначное отображение φ кольца K на кольцо K' называется изоморфизмом, если $\forall a\in K$ и $\forall b\in K$

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)\,;\ \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b) \qquad (3)$$

Из (3) следует, что при изоморфизме образом нуля кольца K будет нуль кольца K'. В самом деле, пусть $\varphi(a)=a'\in K'$ и $\varphi(0)=c'$. Имеем $\varphi(a)=a'=\varphi(a+0)=\varphi(a)+\varphi(0)=a'+c'\ \forall a'\in K'$. Отсюда $c'=0'$. Если кольцо K имеет единицу, то $\varphi(1)$ будет единица кольца K'. Действительно, $\varphi(a)=a'=\varphi(1\cdot a)=\varphi(1)\cdot\varphi(a)=\varphi(1)\cdot a'$. Откуда $\varphi(1)$ есть единица кольца K'. Очевидно, что обратное отображение - φ^{-1} кольца K' на кольцо K существует и будет изоморфизмом.

Рассмотрим отображение φ, которое множеству значений $P_n(x)$ над полем комплексных чисел C ставит в соответствие множество значений $L_n(p)$ на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ, т. е. $\varphi(P_n(z))=\varphi(a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0z^0)=L_n(p)(f)=(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0p^0)(f)=$ $=a_nf^{(n)}+a_{n-1}f^{(n-1)}+...+a_0f$. Это отображение есть изоморфизм. Действительно: $\varphi(P_n(z)+Q_m(z))=\varphi(a_0+a_1z+...+a_nz^n+b_0+b_1z+...+b_mz^m)=(a_0+b_0+(a_1+b_1)z+...$ $....+(a_s+b_s)z^s)=(a_0+b_0+(a_1+b_1)p+....+(a_s+b_s)p^s)(f)=(L_n(p)+L_m(p))(f)$,

$\varphi(P_n(z)\cdot Q_m(z))=\varphi(a_0b_0+\sum\limits_{j=k+l}a_kb_lz^j+a_nb_mz^{n+m})=(a_0b_0+\sum\limits_{j=k+l}a_kb_lp^j+a_nb_mp^{n+m})(f)=L_n(p)\cdot Q_m(p)(f).$

Тогда из (3) следует, что $\varphi(P_n(x))=\varphi(a_n(z-c_1)^{l_1}\cdot...\cdot(z\text{-}c_k)^{l_k})=L_n(p)(f)=a_n(p-c_1)^{l_1}\cdot...\cdot(p\text{-}c_k)^{l_k}(f)$.

Пусть $L_n(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0p^0$. Тогда многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ назовем характеристическим многочленом $L_n(p)$. В результате имеем, что для любого операторного многочлена $L_n(p)$ имеет место разложение

$$L_n(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0p^0=a_n(p-c_1)^{l_1}...(p-c_k)^{l_k}\,, \qquad (4)$$

где $c_1,...,c_k$ суть корни характеристического многочлена $P_n(x)$ кратности $l_1,....l_k$.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Применим изложенные выше сведения для построения решения дифференциального уравнения

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_0y=f(x),\, a_n\neq 0\,, \qquad (5)$$

где $a_i = const \in R, i \in [0,n], f(x) \in C_{[a,b]}$. Соответствующее уравнению (5) однородное уравнение имеет вид

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0 \qquad (6)$$

Из общей теории линейных уравнений известно, что решением (6) будут являться образующие фундаментальную систему решений (Ф. С. Р.) n раз непрерывно дифференцируемые функции $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$. Собственно, в определении этих функций и будет состоять наша задача.

Рассмотрим определенный выше операторный многочлен $L_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_0 p^0$. Левая часть (6) есть значение $L_n(p)$ на функции $y(x) \in \Phi$. Тогда (6) перепишем в виде

$$L_n(p)(y) = 0 \qquad (7)$$

Откуда ясно, что решением (7) являются корни (функции из Φ) многочлена $L_n(p)$. Для решения этой задачи воспользуемся тем, что многочлен $P_n(\lambda)$ может быть представлен в виде $P_n(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} ... (\lambda - \lambda_m)^{l_m} ... (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$, где $\lambda_1,...,\lambda_m,...\lambda_k$ суть, вообще говоря, комплексные корни $P_n(\lambda)$ кратности $l_1,...,l_k,...,l_s$ соответственно. Ясно, что $l_1 + ... + l_m ... + l_k = n$. Тогда

$$L_n(p) = \varphi(P_n(\lambda)) = a_0(p - \lambda_1)^{l_1} ... (p - \lambda_m)^{l_m} ... (p - \lambda_k)^{l_k}, \qquad (8)$$

Имеет место следующая формула.

Лемма.1 Для любой n раз дифференцируемой на некотором промежутке функции $f(x)$ имеет место

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} L_n(p + \lambda)(f) \qquad (9)$$

Док-во

Доказательство проведем по индукции. База индукции - пусть n=1 : имеем

$$L_1(p)((e^{\lambda x} f) = (a_1 p^1 + a_0 p^0)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x}(a_1(\lambda f + f') + a_0 f) = e^{\lambda x}(a_1(p + \lambda) + a_0(p + \lambda)^0)(f) = e^{\lambda x} L_1(p + \lambda)(f)$$

Допустим, что (9) справедлива для *к=n-1* : $L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(f)$. Обозначим $L_1(p) = p - \lambda_1$. Тогда, согласно (8) будем иметь $L_n(p) = a_n(p - {} - \lambda_1)(p - \lambda_1)^{l_1 - 1} ... (p - \lambda_m)^{l_m} ... (p - \lambda_k)^{l_k} = L_1(p) \cdot L_{n-1}(p)$. Получим $L_n(p)(e^{\lambda x} f) =$
$= L_1(p) \cdot L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} f(x)) = L_1(p)(e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(f)) = e^{\lambda x} L_1(p + \lambda)(L_{n-1}(p + \lambda)(f)) =$
$= e^{\lambda x} L_1(p + \lambda) \cdot L_{n-1}(p + \lambda)(f) = e^{\lambda x} L_n(p + \lambda)(f))$. Теорема доказана.

Формулу (9) называют формулой сдвига. С помощью этой формулы легко находятся решения (7).

Теорема 5. Если λ_m корень $L_n(\lambda)$ кратности l_m, то функции $x^s e^{\lambda_m x}$ для всех $s = 0,1,...,l_m - 1$ являются решениями уравнения (6)

Док-во

Действительно, исходя из коммутативности и ассоциативности кольца операторных многочленов и формулы сдвига, имеем $L_n(p)(x^s e^{\lambda_m x}) = e^{\lambda_m x}(p - \lambda_1 + \lambda_m)^{l_1} ...$

$$...(p - \lambda_k + \lambda_m)^{l_k}(p - \lambda_m + \lambda_m)^{l_m}(x^s) = e^{\lambda_m x} L_{n-l_m}(p + \lambda_m) p^{l_m}(x^s) = e^{\lambda_m x} L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}(x^s) = 0 \ \forall s \le l_m - 1.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 5 следует, что если характеристический многочлен имеет вид $L_n(\lambda) = = a_0(\lambda-\lambda_1)^{l_1}...(\lambda-\lambda_k)^{l_{k+}}$, то все функции

$$\{(e^{\lambda_1 x},...,x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}),...,(e^{\lambda_m x},...,x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}),...,(e^{\lambda_k x},...,x^{l_k-1}e^{\lambda_k x})\} \quad (10)$$

будут решениями уравнения (7). Их будет n штук. Докажем линейную независимость системы функций (10).

Лемма 2. Система функций $1, x, ..., x^n$ линейно независима.

Док-во

Рассмотрим линейную комбинацию выше определенных функций

$$C_0 + C_1 x + ... + C_n x^n = 0 \quad (11)$$

Предположим, что существуют не все равные нулю числа $C_0,...,C_j$, $j \le n$ такие, что (11) выполнено для любого x. Это предположение противоречит теореме 4, так как многочлен степени j, будет в этом случае иметь более чем j корней.

Теорема 6. Система функций $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x},...,P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x}$, где $P_{n_i}(x)$- суть многочлены степени n_i, а все $\lambda_i \in C$ разные, линейно независима.

Док-во

Рассмотрим $(P_n(x)e^{\lambda x})' = e^{\lambda x}((P_n(x)' + \lambda P_n(x)) = \tilde{P}_n(x)e^{\lambda x}$, где $\tilde{P}_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$. Доказательство проведем по индукции. При *s=1* теорема верна. Это следует из леммы 2. Пусть теорема верна для *s-1*. т. е. функции $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x},...,P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ линейно независимы. Предположим, что система функций $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x},...,P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}, P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x}$ линейно зависима. Тогда существуют $C_1,..,C_l,...,C_s$ такие, что

$$C_1 P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x} + ... + C_l P_{n_l}(x)e^{\lambda_l x} + ... + C_s P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x} = 0 \quad (12)$$

и хотя бы одна константа - $C_l \ne 0$. Из (12) получим $\bar{C}_1 P_{n_1}(x)e^{\omega_1} + ... + \bar{C}_s P_{n_s}(x)e^{\omega_s x} = -P_{n_l}(x)$, где $\bar{C}_i = C_i / C_l, \omega_i = \lambda_i - \lambda_l$, $i = 1,...,l-1,\ \ ,l+1,...,s.$ Продифференцируем $n_l + 1$ раз последнее тождество. Перенумеровав *s-1* слагаемое в левой части, получим $\bar{C}_1\tilde{P}_{n_1}(x)e^{\omega_1 x} + ... + \bar{C}_{s-1}\tilde{P}_{n_{s-1}}(x)e^{\omega_{s-1}x} = 0$. По предположению индукции последнее равенство возможно только, если все $\bar{C}_i$=0. Откуда следует, что $C_i = 0$ для $i = 1,...,l-1,l+1,...,s$. Тогда из (12) следует, что $C_l = 0$. А это противоречие – система линейно независима.

В итоге получено, что Ф. С. Р. дифференциального уравнения (6) будет состоять из функций$\{(e^{\lambda_1 x},...,x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}),...,(e^{\lambda_m x},...,x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}),...,(e^{\lambda_k x},...,x^{l_k-1}e^{\lambda_k x})\}$, где $\lambda_1,...,\lambda_m,...\lambda_k$ корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ кратности $l_1,...,l_m,...,l_k$ соответственно.

Если корни характеристического многочлена будут комплексными, то соответствующие им решения (6) будут комплекснозначными. Если изначально ставится задача - найти решение дифференциального уравнения во множестве действительных функций действительного переменного, то в случае комплексных корней характеристического многочлена возникает задача выделить из множества комплексных решений действительные. Решение этой задачи осуществимо, так как коэффициенты характеристического многочлена (коэффициенты дифференциального уравнения) суть действительные числа. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. Если $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$ - корень многочлена с действительными коэффициентами $P_{n_i}(x)$ кратности l, то $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже корень $P_{n_i}(x)$ той же кратности.

Док-во

Известно, что операция перехода к комплексно сопряженной величине коммутирует со сложением и умножением, т. е. для $\forall z_1 \in C$ и $\forall z_2 \in C$ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2, \overline{z^n} = \overline{z}^n$. Известно также, что $z \in C$ является действительным тогда и только тогда, когда $z = \overline{z}$. Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - корень многочлена с действительными коэффициентами $P_{n_i}(x)$, то $P_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0$. Откуда $\overline{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0} = \overline{0} = 0 = \overline{a_n\lambda^n} + \overline{a_{n-1}\lambda^{n-1}} + ... + \overline{a}_0 \Rightarrow P_n(\overline{\lambda}) = 0$, т. е. $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже корень. Согласно теореме Безу $P_n(\lambda) = (\lambda - \alpha - \beta i)(\lambda - \alpha + \beta i)P_{n-2}(\lambda) = (x^2 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2)P_{n-2}(\lambda)$, откуда $P_{n-2}(\lambda)$ есть многочлен с действительными коэффициентами. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ - корень многочлена с действительными коэффициентами $P_{n_i}(x)$ кратности l, а $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ кратности m и $l \neq m$. Предположим, что $l < m$. Тогда $P_n(\lambda) = (\lambda - \alpha - \beta i)^l(\lambda - \alpha + \beta i)^l P_{n-2l}(\lambda) = (x^2 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2)^l P_{n-2l}(\lambda)$. Откуда следует, что только $\alpha - \beta i$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами $P_{n-2l}(\lambda)$ кратности $m - l$, что противоречит ранее доказанному. Тогда $l > m$. Но в этом случае только $\alpha + \beta i$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами $P_{n-2m}(\lambda)$ кратности $l - m$. Тогда $l = m$.

Пусть $\lambda_m = \alpha + i\beta$ и $\overline{\lambda}_m = \alpha - i\beta$ корни характеристического многочлена кратности l. В Ф. С. Р. им соответствуют функции $\varphi_m^i = e^{(\alpha+\beta i)x}x^i = e^{\alpha x}(cos\beta x + i\sin x)x^i$ и $\overline{\varphi}_m^i = e^{(\alpha-\beta i)x}x^i = e^{\alpha x}(cos\beta x - i\sin x)x^i$, $i = 0,...,l-1$. Эти функции линейно независимы.

Предложение 4. Пусть функция $\varphi_1(x)$ и функция $\varphi_2(x)$ линейно независимы. Функции $\psi_1(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)$ и $\psi_1(x) = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Док-во

Рассмотрим тождество $C_1\psi_1(x) + C_2(x)\psi_2(x) \equiv 0$. Воспользовавшись условиями предложения, приведем это тождество к виду $(C_1a_1 + b_1C_2)\varphi_1(x) + (C_1a_2 + b_2C_2)\varphi_2(x) \equiv 0$ Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы, поэтому из выше приведенного тождества имеем следующую систему линейных однородных уравнений относительно C_1, C_2 - $\begin{cases} C_1a_1 + C_2b_1 = 0 \\ C_1a_2 + C_2b_2 = 0 \end{cases}$. Эта система имеет единственное решение -

$C_1 = C_2 = 0$ тогда и только тогда, когда определитель системы - $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим функции $\psi_m^i = \dfrac{\varphi_m^i + \overline{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} x^i cos\beta x = Re(\varphi_m^i)$ и $\chi_m^i = \dfrac{\varphi_m^i - \overline{\varphi}_m^i}{2i} = e^{\alpha x} x sin\beta x = Im(\varphi_m^i)$. Так как любая суперпозиция решений уравнения (7) является его решением, то функции ψ_m^i и χ_m^i суть линейно независимые и вещественные решения (7). Тогда, чтобы получить вещественную Ф. С. Р. , надо все функции $\varphi_m^i = e^{(\alpha+\beta i)x} x^i = e^{\alpha x}(cos\beta x + i\sin x)x^i$, и $\overline{\varphi}_m^i = e^{(\alpha-\beta i)x} x^i = e^{\alpha x}(cos\beta x - i\sin x)x^i$, $i = 0,...,l-1, l = 1,...,k$, отвечающие паре комплексных корней характеристического многочлена - $\alpha \pm i\beta$ кратности l заменить на вещественные функции $Re(\varphi_m^i)$ и $Im(\varphi_m^i)$. Будем считать, что $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ суть все корни характеристического многочлена кратности $l_i, i = 1,...,k$. Если $\beta_i = 0$, то корень действительный. Тогда общее решение (7) может быть записано в виде

$$\overline{y}^G = e^{\alpha_1 x}(\sum_{j=0}^{l_1-1} x^j (A_j^1 cos(\beta_1 x) + B_j^1 sin(\beta_1 x)))... + ... + e^{\alpha_k x}(\sum_{j=0}^{l_k-1} x^j (A_k^j cos(\beta_k x) + B_k^j sin(\beta_k x))) \qquad (13)$$

Рассмотрим уравнение (5) , записанное в виде $L_n(p)(y(x)) = f(x)$

Лемма 3. Пусть неоднородность в (5) имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$ и $y_k^s(x)$ суть частные решения уравнений $L_n(p)(y(x)) = f_k(x), k \in [1,m]$, т. е. $L_n(p)(y_k^s(x)) = f_k(x)$. Тогда частное решение (5) имеет вид $y^s(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k^s(x)$

Док-во

Имеем $L_n(p)(\sum_{k=1}^{m} y_k^s(x)) = \sum_{k=1}^{m} L_n(p)(y_k^s(x)) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) = f(x)$

Утверждение Леммы 3 остается верным и в случае переменных коэффициентов в операторе $L_n(p)$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_{n_i}(x) e^{\lambda x}$, где $P_{n_i}(x)$ есть многочлен степени n_i с комплексными, вообще говоря, коэффициентами, а λ -комплексное число. Тогда $f(x)$ называется квазимногочленом.

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = L_n(p)(y(x)) = (b_i x^l + b_{i-1} x^{l-1} + ... + b_0) e^{\lambda x} = P_l(x) e^{\lambda x} \qquad (14)$$

Теорема 7. Если правая часть (5) есть квазимногочлен, то частное решение (14) может быть найдено в виде

$$y^s(x) = x^r (c_l x^l + c_{l-1} x^{l-1} + ... + c_0) e^{\lambda x}, \qquad (15)$$

где $r = l_m$, если $\lambda = \lambda_m, m = 1,2,...,k$, есть корень характеристического уравнения $L_n(\lambda)$ кратности l_m; если $\lambda \neq \lambda_m, m = 1,2,...,k$, то r=0. Неопределенные константы $c_0, c_1, ..., c_l$ находятся из системы линейных уравнений с треугольной матрицей.

Док-во

Пусть $\lambda = \lambda_m = r$. Поставим представление (15) в (14) и воспользуемся результатами леммы 2 и теоремы 5. Получим
$L_n(p)(y^s(x)) = a_n(p-\lambda_1)^{l_1}...(p-\lambda_k)^{l_k}(y^s(x)) = L_{n-l_m}(p)(p-\lambda_m)^{l_m}(y^s(x)) = e^{\lambda_m x}L_{n-l_m}(p+$
$+\lambda_m)\dfrac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}(c_l x^{r+i} + c_{l-1}x^{r+l-1} + ... + c_0 x^r) \equiv e^{\lambda_m x}(b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + ... b_0)$. Разделим обе части полученного тождества на одинаковые множители $e^{\lambda_m x}$ и выполним дифференцирование, получим - $L_{n-l_m}(p+\lambda_m)\left(c_l A(l,r)x^l + c_{l-1}A(l-1,r)x^{l-1} + ... + c_0 r!\right) =$
$= b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + ... b_0$, где $A(l,r) = (l+r)(l+r\text{ - }1)...(l+1)$. Операторный многочлен $L_{n-l_m}(p+\lambda_m)$ имеет следующий вид $L_{n-l_m}(p+\lambda_m) =$
$d_{n-l_m}(p+\lambda_m)^{n-l_m} + d_{n-l_m-1}(p+\lambda_m)^{n-l_m-1} + ... + d_0 \quad = \overline{d}_{n-l_m}p^{n-l_m} + \overline{d}_{n-l_m-1}p^{n-l_m-1} + ... + \overline{d}_0$, где коэффициенты $\overline{d}_s, s = 0,1,...,n-l_m$ известны. Тогда получим - $(\overline{d}_{n-l_m}p^{n-l_m} + \overline{d}_{n-l_m-1}p^{n-l_m-1} + ...$
$... + \overline{d}_0)\left(c_l A(l,r)x^l + c_{l-1}A(l-1,r)x^{l-1} + ... + c_0 r!\right) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + ... b_0$. Откуда $\overline{d}_0 c_l A(l,r)x^l +$
$+(\overline{d}_1 c_n A(l,r) + \overline{d}_0 c_{l-1}A(l-1,r))x^{l-1} + ... = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + ... b_0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему для определения - $\overline{d}_0 c_l A(l,r) = b_l$,
$\overline{d}_1 c_n A(l,r) + \overline{d}_0 c_{l-1}A(l-1,r) = b_{l-1}, ...$, и других коэффициентов $c_{l-2}, ..., c_0$.

Ясно, что матрица так полученной системы треугольная. Случай $\lambda \neq \lambda_m$ рассматривается аналогично.

Следует отметить, что выражение $P_n(x)\cdot Q(cos\alpha x, sin\alpha x)$, где $Q(cos\alpha x, sin\alpha x) = \sum_{k=0}^{s}\sum_{l=0}^{m} a_{kl}cos^k(\alpha x)sin^l(\alpha x)$ есть многочлен от $cos\alpha x$ и $sin\alpha x$, является квазимногочленом. Действительно, из формулы Эйлера имеем

$$cos\alpha x = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha x}}{2}, sin\alpha x = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha x}}{2i} = -\frac{i}{2}(e^{\alpha i} - e^{-\alpha x})$$

Поэтому, если выразить тригонометрические функции по формулам Эйлера, то выше приведенное выражение превратится в квазимногочлен.

На примере нахождения решения уравнения $y'' + 4y = 2cos2x - 8xsin2x$ дадим в общих чертах метод решения любого линейного дифференциального уравнения такого типа.

Как известно, структура общего решения любого линейного уравнения есть сумма общего решения линейного однородного уравнения и частного решения линейного неоднородного. Поэтому первым делом ищется общее решение однородного уравнения. В нашем случае это $y'' + 4y = 0$ - уравнение с постоянными коэффициентами, поэтому, применяя описанную выше процедуру, получим характеристическое уравнение - $\lambda^2 + 4 = 0$. Его корни суть $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$. Тогда общее решение есть $\overline{y}^g = C_1 cos2x + C_2 sin2x$. При решении задачи определения частного решения неоднородного уравнения замечаем, что правая часть с помощью формул (15) может быть приведена к квазимногочлену. Применение (15) дает $y''+4y=(4ix+1)e^{2ix}+(1-4ix)e^{-2ix}=f_1(x)+f_2(x)$. Применяя лемму 3, получим, что надо найти решения следующих уравнений $(y_1^s)''+4y_1^s=(4ix+1)e^{2ix}$ и $(y_2^s)''+4y_2^s=(1-4ix)e^{-2ix}$. Согласно теореме 7, частное решение ищется в виде $y_1^s=x(Ax+B)e^{2ix}$. Подстановка его в уравнение (при этом удобно для вычисления производных высших порядков пользоваться формулой Лейбница) приводит к равенству $8Aix+2A+4Bi=4xi+1$. Откуда $\begin{cases}8Ai=4i\\2A+4Bi=1\end{cases}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}, b=0$. Тогда $y_1^s=\dfrac{1}{2}x^2e^{2ix}$. Проделав аналогичную процедуру со вторым уравнением, получим, что $y_2^s=\dfrac{1}{2}x^2e^{-2ix}$. Нетрудно видеть, что проделывать все выкладки для получения решения уравнения $(y_2^s)''+4y_2^s=(1-4ix)e^{-2ix}$ нет необходимости, так как, взяв комплексное сопряжение от левой и правой части первого уравнения, получим $\overline{(y_1^s)''+4y_1^s}=\overline{(4ix+1)e^{2ix}}=\overline{(y_1^s)}+\overline{4y_1^s}=(\overline{y}_1^s)+4\overline{y}_1^s=(1-4ix)e^{-2ix}$. Откуда $\overline{y}_1^s=y_2^s$ - решению второго уравнения, т. е., чтобы получить решение второго уравнения достаточно взять комплексное сопряжение от первого. Этот факт является общим, ибо при переходе от тригонометрических выражений к показательным по формулам Эйлера всегда будут получаться слагаемые, связанные соотношением комплексного сопряжения (в нашем случае $\overline{f_1(x)}=f_2(x)$). Линейный дифференциальный оператор в левой части имеет только действительные коэффициенты, поэтому, как и в случае предложения 3 $\overline{L_n(p)(y(x)}=L_n(p)(\overline{y(x)})$. Частное решение исходного уравнения есть $y^s=y_1^s+y_2^s=\dfrac{1}{2}x^2e^{2ix}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-2ix}=x^2cos2x$ - надо вернуться к действительным тригонометрическим выражениям (ответ не должен содержать комлекснозначные функции).

Представленный выше метод является оптимальным, ибо, если не избавляться от тригонометрических выражений, а сразу писать вид частного решения, то могут возникнуть трудности с определением этого вида частного решения. В данном случае - $y^s=x((A_1x+B_1)cos2x+(A_2x+B_2)sin2x)$. Около половины студентов не могли правильно этот вид написать. На первый взгляд количество неопределенных констант одно и тоже, но система уравнений, откуда эти константы определяются, не будет треугольной, да и дифференцировать экспоненту удобнее, чем что либо еще. Если же учитывать, что в случае применения формул Эйлера нужно находить только одно частное решение, а второе будет равно комплексно сопряженному от него, то предложенный выше метод является по меньшей мере вдвое менее трудозатратным. В случае же решений уравнений типа $L_n(p)(y)x)=cos^4(x)$ сомнения в эффективности предложенного метода сразу отпадут, так как в противном случае $cos^4(x)$ придется выражать конечным отрезком ряда Фурье.

Подводя итог, следует заметить, что задача получения решения линейного дифференциального уравнения в случае , когда правая часть его есть квазимногочлен, была решена применением исключительно алгебраических методов, описание которых приводится в начале работы. Именно так и проводится изложение этого вопроса в [2], которое отличается от представленного здесь, тем, что формула (8) принималась как хорошо известный факт. В учебнике по дифференциальным уравнениям [3] приводится ряд соображений для обоснования формулы (8). В [4] основная формула $L_n(p)(x^r e^{\lambda_m x}) = \begin{bmatrix} 0, r \le l_m - 1 \\ d_0 x^{r-l_m} + ... \end{bmatrix}$, на которой базируются теорема 6 и теорема 7, выводится без использования алгебраических свойств операторного многочлена $L_n(p)$. Это сразу разбивает процедуру нахождения решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами на две слабо между собой связанные методики, что приводит к недостаточно глубокому усвоению студентами этого материала. Методика, представленная в [2] и в предлагаемом пособии, свободна от этого.

Системы линейных дифференциаальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Основные положения.

Система линейных ДУ с постоянными коэффициентами – это система вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \qquad (16)$$

где $A = \left\| a^i_j \right\|, i, j = 1, 2, ..., n$ есть матрица системы, причем все a^i_j суть числа, $\vec{f}(t) = \begin{Vmatrix} f^1(t) \\ .... \\ .... \\ .... \\ f^n(t) \end{Vmatrix}$ есть вектор –столбец правой части (неоднородность системы),

соответственно $\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x^1(t) \\ .... \\ .... \\ .... \\ x^n(t) \end{Vmatrix}$ - вектор- столбец искомых функций.

Наряду с приведенной выше записью будет также использоваться следующая $\dfrac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j(t) + f^i, i \in [1, n]$.

Основная идея решения систем ДУ (16) состоит в следующем: будем рассматривать матрицу системы как матрицу линейного преобразования линейного пространства $\vec{R}^n$ (присоединенного к аффинному пространству R^n), заданную в исходном базисе. Пусть матрица $S = \left\| \sigma^i_j \right\|, i, j = 1, ..., n$ есть матрица перехода от исходного базиса $\|\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\|$ к базису $\|\vec{\bar{e}}_1,...,\vec{\bar{e}}_n\|$. Из курса аналитической геометрии известно, что $\|\vec{\bar{e}}_1,...,\vec{\bar{e}}_n\| = \|\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\| S$ или $\vec{\bar{e}}_i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_i^k \vec{e}_k$, а координаты векторов в новом и старом базисе связаны формулой

$$\vec{x} = S\vec{\bar{x}} \ \ (x^i = \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^i \bar{x}^l = \sigma_l^i \bar{x}^l) \qquad (17)$$

Как известно, матрица перехода обратима, т. е. S имеет обратную матрицу - $S^{-1} = \|\tau_j^i\|, i, j = 1,...,n$. Напомним, что $SS^{-1} = S^{-1}S = E, (\sum_{k=1}^{n} \tau_k^i \sigma_j^k = \delta_j^i)$. Тогда

$$\vec{\bar{x}} = S^{-1}\vec{x} (\bar{x}^i = \sum_{l=1}^{n} \tau_l^i x^l) \qquad (18)$$

Преобразуем исходную систему, умножив ее слева на S^{-1}, учитывая (17) и (18), получим

$$S^{-1}\dot{\vec{x}} = (S^{-1}\vec{x})' = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}f(t) = S^{-1}AS\vec{\bar{x}} + \vec{\bar{f}} = \vec{\bar{x}}' = \bar{A}\vec{\bar{x}} + \vec{\bar{f}}, \qquad (19)$$

где $\vec{\bar{f}} = S^{-1}\vec{f}(t)$, а $\bar{A} = S^{-1}AS$ есть матрица преобразования A в новом базисе. Таким образом, задача свелась к задаче линейной алгебры – найти базис, в котором заданная матрица линейного преобразования имела бы наиболее простой вид.

Пусть A матрица системы (16) есть матрица линейного преобразования линейного пространства $\vec{R}^n$, т. е. $\forall \vec{x} \in \vec{R}^n \ A\vec{x} = \vec{y} \in \vec{R}^n$. Тогда $A = \|A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, ..., A\vec{e}_n\|$, т.е. столбцы матрицы A суть компоненты образов базисных векторов.

Подпространство $L \subseteq \vec{R}^n$ называется инвариантным подпространством относительно преобразования A, если $\forall \vec{x} \in L \ \ A\vec{x} \in L$. Пусть $\vec{e}_1,...\vec{e}_s, \vec{e}_{s+1},...,\vec{e}_n$ - базис $\vec{R}^n$, а $\vec{e}_1,...\vec{e}_s$ - базис в *L*. Тогда $\forall i \in [1,s] \ \ A\vec{e}_i = \sum_{k=1}^{s} \gamma_i^k \vec{e}_k$ и матрица A в этом базисе будем иметь вид

$A = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ \mathrm{O} & A_3 \end{Vmatrix}$, где $A_1 = \begin{Vmatrix} \gamma_1^1 \cdots \gamma_s^1 \\ .... \\ \gamma_1^s \cdots \gamma_s^s \end{Vmatrix}$, O - нулевая матрица, размеров $(n-s)\times s$. Если пространство $\vec{R}^n$ удается разложить на прямую сумму инвариантных подпространств, т. е. $\vec{R}^n = L^1 \oplus L^2 \oplus ... \oplus L^k$, где $L^i \ \forall i \in [1,k]$ инвариантные подпространства, то $A = \begin{Vmatrix} A_1 \ 0 .... \ 0 \\ 0 \ A_2 \ 0...0 \\ .... \\ 0.........A_k \end{Vmatrix}$ в базисе, который является объединением базисов инвариантных подпространств, прямая сумма которых равна $\vec{R}^n$, т. е. имеет клеточно-диагональный вид. Ясно, что, если матрица системы (16) имеет клеточно-диагональный вид, то система распадается на *к* независимых друг от друга систем меньшего числа неизвестных - а именно

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{l_1} a_{1j}^i x^j + f^i, \qquad\qquad i = 1,\ldots,l_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx^i}{dt} = \sum\limits_{j=n-l_1-\ldots-l_{k-1}+1}^{n} a_{kj}^i x^j + f^i, \forall i = n-l_1-\ldots-l_{k-1},\ldots,n \end{cases} \tag{19}$$

В (19) a_{sj}^i суть элементы матриц $A_s, s=1,\ldots,k$; $l_1,\ldots,l_k$ - порядки этих матриц.

Для приведения матрицы линейного преобразования к клеточно-диагональному виду можно найти собственные векторы линейного преобразования. Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором линейного преобразования, матрица которого есть A, если

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{20}$$

Число λ, фигурирующее в (20), называется собственным числом преобразования A, которому соответствует собственный вектор $\vec{x}$. Пусть $A = \left\| a_i^j \right\|, i,j \in [1,n]$, а $\left\| \begin{matrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{matrix} \right\|$ - компоненты собственного вектора. Тогда из (20) нетрудно получить, что компоненты вектора $\vec{x} \neq \vec{0}$ должны удовлетворять следующей системе однородных линейных уравнений $\left\| A - \lambda E \right\| \vec{x} = \vec{0}$. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $det\left\| A - \lambda E \right\| = P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} trA + \ldots \ +detA = 0$, где $trA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^k$. $P_n(\lambda)$ называется характеристическим многочленом матрицы A.

Число λ тогда и только тогда является собственным числом матрицы A, когда оно является корнем характеристического уравнения $P_n(\lambda)$=0. Определив его, можно найти собственный вектор $\vec{h}$, соответствующий этому собственному числу. Линейное пространство, натянутое на этот вектор, является одномерным инвариантным подпространством преобразования A.

Все приведенные выше рассуждения применимы как к неоднородной системе линейных уравнений (16), так и к однородной системе линейных уравнений. Ниже будем рассматривать соответствующую однородную систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{21}$$

В этом случае задача состоит в том, что нужно найти вектор-функции $\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)$, которые будут образовывать Ф.С. Р. системы (21), т. е. такие функции, каждая из которых была бы решением системы (21), и система из этих функций была бы линейно независимой.

Пусть корни характеристического многочлена $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ - простые и действительные. Им соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_n$ $(A\vec{h}_i = \lambda_i\vec{h}_i)$. Известно, что собственные векторы, соответствующие разным собственным числам линейно независимы, поэтому существует базис из собственных векторов

$\vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} h_1^1 \\ \dots \\ \dots \\ h_1^n \end{Vmatrix}, \dots, \vec{h}_n = \begin{Vmatrix} h_n^1 \\ \dots \\ \dots \\ h_n^n \end{Vmatrix}$. В этом случае $\vec{R}^n = L^1 \oplus \dots L^s \oplus \dots \oplus L^n$, где $L_s, s = 2,\dots,n$ суть собственные подпространства, натянутые на собственные векторы. В базисе из собственных векторов матрица A имеет следующий вид $\overline{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1\ 0 \dots\dots\dots 0 \\ 0\ \lambda_2\ 0 \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots\dots\dots\dots \lambda_n \end{Vmatrix}$. Тогда система (21) в этой системе координат распадется, т. е. будет иметь следующий вид $\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}^1}{dt} = \lambda_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{d\overline{x}^n}{dt} = \lambda_n \end{cases}$. Вектор-функции $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ 0 \end{Vmatrix} e^{\lambda_1 t}, \dots, \begin{Vmatrix} 0 \\ .. \\ .. \\ 1 \end{Vmatrix} e^{\lambda_n t}$ образуют Ф.С.Р. этой системы. Матрица перехода в этом случае есть $S = \begin{Vmatrix} h_1^1\ h_2^1, \dots\dots h_n^1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ h_1^n\ h_2^n \dots\dots h_n^n \end{Vmatrix} = \left\| \vec{h}_1 \dots\dots \vec{h}_n \right\|$. Согласно (18), получим, что $\vec{x}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{x}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$ есть Ф. С. Р. (21), т. е. любое решение (21) дается в виде

$$\vec{x} = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}, \qquad (22)$$

где $C_1, \dots, C_n$ суть произвольные постоянные. Линейная независимость вектор-функций $\vec{x}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{x}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$ очевидна.

Пусть среди разных простых действительных собственных чисел имеется простое комплексное собственное число $\lambda_k = r_k + i\omega_k$ и ему соответствующий комплексный собственный вектор $\vec{h}_k + i\vec{d}_k$, $\vec{h}_k, \vec{d}_k$ суть действительные вектора. Тогда $\overline{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$ также корень характеристического уравнения. Взяв комплексное сопряжение над равенством $A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k) = (r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)$, получим $\overline{A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = A(\vec{h}_k - i\vec{d}_k) = \overline{(r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = \; = (r_k - i\omega_k)(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)$, откуда следует, что $\vec{h}_k - i\vec{d}_k$ есть собственный вектор, соответствующих собственному числу $\overline{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$.

Ф. Р. С. системы $\begin{cases} \dfrac{dx'^1}{dt} = \lambda_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx'^k}{dt} = r_k + i\omega_k \\ \dfrac{dx'^{k+1}}{dt} = r_k - i\omega_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx'^n}{dt} = \lambda_n \end{cases}$ есть $e^{\lambda_1 t},\ldots, \left\| \begin{matrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{matrix} \right\| e^{r_s t}(cos\omega_s t + isin\omega t),$ $\left\| \begin{matrix} 0 \\ .. \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{matrix} \right\| e^{r_s t}(cos\omega_s t - isin\omega t),\ldots, \left\| \begin{matrix} 0 \\ .. \\ .. \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{\lambda_n t}$. Так как матрица перехода $S = \left\| \vec{h}_1 \ldots \vec{h}_k + i\vec{d}_k \ \vec{h}_k - i\vec{d}_k \ldots . \vec{h}_n \right\|$ является комплексной, то и Ф. С. Р. системы (21) - $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t},\ldots,\ (\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t), (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t),\ldots, \vec{h}_n e^{\lambda_n t}\}$ будет комплексной. Рассмотрим систему функций, у которой первые *к*-1 функций суть функции построенной выше системы. В качестве функции с номером к возьмем $\vec{q}_k = \dfrac{1}{2}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t) + (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t) = e^{r_k t}(\vec{h}_k cos\omega_k t - \vec{d}_k sin\omega_k t)$, а с номером (к+1) - $\vec{q}_{k+1} = \dfrac{1}{2i}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t) - (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t) =$ $= e^{r_k t}(\vec{h}_k sin\omega_k t + \vec{d}_k cos\omega_k t)$, остальные вектор-функции будут прежние. Так построенная система будет линейно независима и каждая ее функция будет решением (21), т. е. это система будет Ф. С. Р. (21) и она содержит только действительные функции. Отсюда любое действительное решение системы (21) имеет следующий вид

$$\vec{x} = C_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots C_k e^{r_k t}(\vec{h}_k cos\omega_k t - \vec{d}_k sin\omega_k t) + C_{k+1}e^{r_k t}(\vec{h}_k sin\omega_k t + \vec{d}_k cos\omega_k t) + \ldots + C_n\vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (23)$$

В общем случае характеристический многочлен представим в виде - $P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}trA + \ldots + detA = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}\ldots(\lambda - \lambda_m)^{k_m}$, где $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ суть собственные числа матрицы A, а $k_i \geq 1, i = 1,2,\ldots,m$, т. е. собственные числа могут быть кратными. В этом случае количество собственных векторов может быть меньше размерности пространства, поэтому не существует базис, в котором матрица системы имела бы диагональный вид. Тогда матрица системы будет приводиться к жордановой форме. Рассмотрим алгоритм построения соответствующего базиса.

Известно, что $\dfrac{1}{P_n(\lambda)} = \dfrac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}\ldots(\lambda - \lambda_m)^{k_m}} \equiv \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_i}\dfrac{A_l^i}{(\lambda - \lambda_i)^l}$, где A_l^i суть числа. Выполним сложение дробей во внутренней сумме, получим

$\frac{1}{P_n(\lambda)}=\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}...(\lambda-\lambda_m)^{k_m}}\equiv\frac{f_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}}+...+\frac{f_s(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{k_s}}+...+\frac{f_m(\lambda)}{(\lambda-\lambda_m)^{k_m}}$, где $f_s(\lambda)$ суть многочлены степени не выше k_s-1 s=1,2 …,m. Из выше приведенного тождества можно получить,что

$$1\equiv Q_1(\lambda)+...+Q_m(\lambda),\ Q_s(\lambda)=f_s(\lambda)\frac{P_n(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{k_s}}=f_s(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{k_1}...(\lambda-\lambda_{s-1})^{k_s-1}(\lambda-\lambda_{s+1})^{k_s+1}...(\lambda-\lambda_m)^{k_m} \quad (24)$$

Рассмотрим множество квадратных матриц одного размера. Это множество является ассоциативным кольцом с единицей (единичная матрица), поэтому $A^n\cdot A^m=A^{n+m}=A^m\cdot A^n$. По определению положим $A^0=E$. Так как все матрицы из этого множества имеют один размер, то на этом множестве определено обычное действие сложения матриц, которое ,как известно, коммутативно и ассоциативно. Нулевую квадратную матрицу примем за ноль этого множества. Согласно свойствам умножения матриц на числа будем иметь $A^k\alpha=\alpha A^k$ и $\alpha A^k+\beta A^k=(\alpha+\beta)A^k$. Откуда следует, что правила приведения подобных членов, такие же, как у многочленов. Ясно, что $A^k+(-1\cdot A^k)=A^k+(-A^k)=0$. Поэтому в качестве символа x в определении многочлена можно взять квадратную матрицу A и получить множество матричных многочленов $\{P_n(A)\}$, где $P_n(A)=a_0E+a_1A+...+a_nA^n$ есть многочлен от квадратной матрицы A. На множестве многочленов $\{P_n(A)\}$ сложение и умножение определяются как обычные матричные действия, поэтому множество многочленов $\{P_n(A)\}$ есть кольцо. В самом деле, нетрудно видеть, что

1. $P_n(A)+P_m(A)=P_m(A)+P_n(A)$
2. $(P_n(A)+P_m(A))+P_s(A)=P_n(A)+(P_m(A))+P_s(A))$
3. $P_n(A)\cdot P_m(A)=P_m(A)\cdot P_n(A)$
4. $(P_n(A)\cdot P_m(A))\cdot P_s(A)=P_n(A)\cdot(P_m(A)\cdot P_s(A))$
5. $P_n(A)\cdot(P_m(A)+P_s(A))=P_n(A)\cdot P_m(A)+P_n(A)\cdot P_s(A)$

За ноль в этом множестве принимается нулевая матрица - O.

Отображение φ кольца K на кольцо K' называется гомоморфизмом, если $\forall a\in K$ и $\forall b\in K$

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b);\ \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

В отличии от изоморфизма гомоморфизм является не обязательно взаимно отображением, т. е. не предполагается, что образы кольца K заполняют все кольцо K', и различным элементам из кольца K соответствуют обязательно различные элементы из кольца K'.

Кольцо многочленов $\{P_n(A)\}$ гомоморфно кольц у многочленов $\{P_n(\lambda)\}$ (гомоморфизм $\varphi:\varphi(P_n(\lambda))\to P_n(A)$). Неоднозначность отображения φ возникает из-за того, что существуют такие квадратные матрицы - $A\neq\mathrm{O}$, для которых $\exists n\in N$ такое, что $A^m=\mathrm{O}\ \forall m\geq n$.

Известна теорема Гамильтона-Кэли. Если $P_n(\lambda)$ есть характеристический многочлен матрицы A, то $P_n(A)=0$, т. е. $P_n(A)=\begin{Vmatrix}0......0\\ ....\\ 0......0\end{Vmatrix}=\mathrm{O}$. Тогда для матричного многочлена $P_n(A)$ имеет место следующее разложение $P_n(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_0 E = (A - \lambda_1 E)^{k_1} \ldots (A - \lambda_m E)^{k_m}$ где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ корни характеристического многочлена матрицы A , E – единичная матрица. Подействуем гомоморфизмом φ на (24). Получим

$$E \equiv Q_1(A) + \ldots + Q_m(A), Q_s(A) = f_s(A)(A - \lambda_1 E)^{k_1} \ldots (A - \lambda_{s-1} E)^{k_s - 1}(A - \lambda_{s+1} E)^{k_s + 1} \ldots (A - \lambda_m E)^{k_m} \qquad (25)$$

Определенные в (25) $Q_s(A), \mathrm{s} = 1, \ldots, m$ суть линейные преобразования. Заметим, что порядок сомножителей в формуле (25) неважен, так как матрицы вида $A - \lambda_s E$ перестановочны между собой. Рассмотрим преобразование $Q_i(A)$, матрица его определена в (25). $\forall i, j \in [1, m]$ имеют место формулы

$$Q_i(A) Q_j(A) = \begin{bmatrix} \mathrm{O}, i \neq j \\ Q_i^2, i = j \end{bmatrix}, \quad \text{и } Q_i(A) = Q_i^2(A) \qquad (26)$$

В самом деле, $Q_i(A) \cdot Q_j(A) = f_i(A) \cdot f_j(A)(A - \lambda_1 E)^{k_1} \ldots (A - \lambda_{i-1} E)^{k_i - 1}(A - \lambda_{i+1} E)^{k_i + 1} \ldots (A - \lambda_m E)^{k_m} \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \ldots (A - \lambda_{j-1} E)^{k_j - 1}(A - \lambda_{ji+1} E)^{k_j + 1} \ldots (A - \lambda_m E)^{k_m} =$ $= M(A) \cdot P_n(A) = M(A) \cdot O = O$. В силу (25) имеем $\vec{x} = E\vec{x} = Q_1(\vec{x}) + \ldots + Q_i(\vec{x}) + \ldots + Q_m(\vec{x})$. Тогда $Q_i(\vec{x}) = (Q_i \cdot Q_1)(\vec{x}) + \ldots + Q_i^2(\vec{x}) + \ldots + (Q_i \cdot Q_n)(\vec{x}) = Q_i^2(\vec{x})$.

Пусть $R_i = \operatorname{Im} Q_i(A)\ \forall i = 1, \ldots m$ -образ преобразования $Q_i(A)$. Из (26) следует, что R_i есть инвариантное подпространство A, ибо $Q_i(A) \cdot A = A \cdot Q_i(A)$. Тогда, если $\vec{x} \in R_i \to \exists \vec{y} \in A, Q_i(\vec{y}) = \vec{x}$, то $A(\vec{x}) = A(Q_i(\vec{y})) = (A \cdot Q_i)(\vec{y})) = (Q_i \cdot A)(\vec{y}) = Q_i(A(\vec{y})) \in R_i$ есть инвариантное подпространство A. При доказательстве (26) было получено, что $\forall \vec{x} \in \vec{R}^n$

$$\vec{x} = E\vec{x} = Q_1(\vec{x}) + \ldots + Q_i(\vec{x}) + \ldots + Q_m(\vec{x}) = \vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_i + \ldots + \vec{x}_m, \qquad (27)$$

где $x_i = Q_i(\vec{x}) \in R_i,\ i = 1, \ldots, m$. Формула (27 означает, что $\vec{R}^n$ есть сумма подпространств R_i. Предположим, что хотя бы для одного $k = 1, \ldots, m$ $\exists \vec{y}_k = Q_k(\vec{z}_k) \neq \vec{x}_k$, такой, что $\vec{x} = \sum_{k=1}^{m} Q_k(\vec{z}_k) = \vec{y}_1 + \ldots + \vec{y}_i + \ldots + \vec{y}_m$. Тогда $Q_i(\vec{x}) = \vec{x}_i = Q_i(\sum_{k=1}^{m} Q_k(\vec{z}_k)) = Q_i^2(\vec{z}_i) = Q_i(\vec{z}_i) = \vec{y}_i$, т.е. $\vec{R}^n = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_m$ есть прямая сумма $\vec{R}^n$.Тогда, если составить базис из базисов в R_i, то в этом базисе матрица A будет иметь клеточно- диагональный вид - $A = \begin{Vmatrix} A_1\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\ A_2\ 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0\ A_m \end{Vmatrix}$

Подпространства R_i называются корневыми подпространствами преобразования A.

<u>Теорема 9.</u> $\forall s = 1, \ldots, m \quad R_s = Ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$, т. е. $\forall \vec{x} \in R_i\ (A - \lambda_i E)^{k_i} \vec{x} = \vec{0}$.

Доказательство

Пусть $\vec{x} \in R_s \Rightarrow \exists \vec{y} \in R_s$ такой, что $\vec{x} = Q_i(\vec{y})$. Тогда $(A - \lambda_s E)^{k_s} \vec{x} = (A - \lambda_s E)^{k_s} f_s(A)(A - \lambda_1 E)^{k_1} \ldots (A - \lambda_{s-1} E)^{k_s - 1}(A - \lambda_{s+1} E)^{k_s + 1} \ldots (A - \lambda_m E)^{k_m} \vec{y} = f_s(A) P_n(A) \vec{y} = \vec{0}$

Откуда следует, что $R_s \subseteq Ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$. Пусть $\vec{x} \in Ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$. Тогда $\forall j \neq s\ Q_j(\vec{x}) = \vec{0}$, так как $(A - \lambda_s E)^{k_s}$ как множитель входит в представление Q_j.

Поэтому из (27) в этом случае получим, что $\vec{x}=\vec{0}+...+Q_i(\vec{x})+...+\vec{0}$, т. е. $\vec{x}\in R_i$ и тогда $Ker(A-\lambda_s E)^{k_s}\subseteq R_s$. Теорема доказана.

Рассмотрим структуру корневого подпространства.

Размерность $R_s=Ker(A-\lambda_s E)^{k_s}$ равна k_s. Покажем это.

Лемма 4. Пусть B есть линейное преобразование L_n и $R=KerB^l, l<n$. Тогда, если $\exists\vec{x}\in R$ такое, что $B^{l-1}\vec{x}\neq\vec{0}$, то $dimR\geq l$.

Док-во

Рассмотрим систему векторов $\vec{x},B\vec{x},...,B^{l-1}\vec{x}$. Ни один из векторов этой систему не равен нулю. Покажем, что эта система линейно независима. С этой целью рассмотрим равную нулю линейную комбинацию этих векторов

$$a_0\vec{x}+a_1(B\vec{x})+...+a_{n-1}(B^{l-1}\vec{x})=\vec{0} \qquad (28)$$

Подействуем последовательно $l-1$ раз преобразованием B на равенство (28).

Получим соответственно $\begin{cases} a_0(B\vec{x})+a_1(B^2\vec{x})+...+a_{n-2}(B^{l-1}\vec{x})=\vec{0} \\ .... \\ a_0(B^{l-2}\vec{x})+a_1(B^{l-1}\vec{x})+\vec{0}...+\vec{0}=\vec{0} \\ a_0(B^{l-1}\vec{x})=\vec{0} \end{cases}$. Откуда следует, что $a_0=a_1=...=a_{l-1}=0$, что доказывает линейную независимость введенной выше системы векторов. Само же утверждение леммы следует из того, что базис в R не может содержать число векторов, меньшее, чем l.

Подпространства $R_i, i=1,...,s$, образуют прямую сумму, равную L_n, поэтому размерность L_n есть сумма размерностей подпространств, которые составляют эту прямую сумму. Так как $k_1+k_2+...+k_s=n$, то $\forall i \dim R_i=k_i$, ибо, если $\exists j$ такое, что $\dim R_j>k_j$, то тогда должно существовать R_i, у которого размерность меньше, чем k_i. В силу Леммы 4 этого быть не может.

Пусть $\{\vec{e}_1^{(\lambda_l)},...,\vec{e}_{k_i}^{(\lambda_l)}\}, l=1,...,m$ есть базис в корневом подпространстве $R_i=Ker(A-\lambda_i E)^{k_i}$. Тогда в базисе, образованным из объединения базисов корневых подпространств система (21) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\overline{x}^s}{dt}=\sum_{j=1}^{k_l}\gamma_j^s\overline{x}^j,\ s=1,...,k_l;\ l=1,...,m, \qquad (29)$$

где γ_j^s определяется из соотношения $A\vec{e}_j^{(\lambda_l)}=\sum_{s=1}^{k_l}\gamma_j^s\vec{e}_s^{(\lambda_l)}$. Дальнейшее рассмотрение будет связано с выбором базиса (жорданового)в корневом подпространстве R_i так, чтобы упростить систему (29).

Рассмотрим сужение преобразования A на подпространство R_l. Обозначим $k_l=l, \lambda_i=\overline{\lambda}$, а $A-\overline{\lambda}E=B$. Согласно определению, имеем $\forall\vec{x}\in R_i\ B^l(\vec{x})=\vec{0}$.

Ясно, что $\vec{0}\subseteq KerB\subseteq KerB^2\subseteq...\subseteq KerB^{i-1}\subseteq KerB^i\subseteq...\subseteq KerB^l$. В самом деле $\forall\vec{x}$ такого, что $B^{i-1}(\vec{x})=\vec{0}\to B^i(\vec{x})=B(B^{i-1}(\vec{x}))=B(\vec{0})=\vec{0}$. Обозначим $T_i=KerB^i$ для $i=1,...,l$, и определим множества v^i - $v^i=\{\vec{x}\in v^i, B^i(\vec{x})=\vec{0}, B^{i-1}(\vec{x})\neq\vec{0}\}$. Для $i=1,2,...,m\leq l$. Неравенство $m\leq l$ в последней формуле связаны с тем, что может случиться, что R_l таково, что уже $\forall\vec{x} \in R_l\ B^m(\vec{x}) = \vec{0}$ и $m < l.$ Ясно, что множества $v^i = T_i \setminus T_{i-1}, i = 2,3,...,m$ и их структура определяется следующей теоремой.

<u>*Теорема*</u> 10. Пусть $j < i \le m$, тогда $\forall\vec{h}_i \in v^i\ \exists\,\vec{h}_j \in v^j$ такой, что

$$\vec{h}_j = B^{i-j}(\vec{h}_i) \tag{30}$$

Док-во

В самом деле, $B^j(\vec{h}_j) = B^j(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = B^j \cdot B^{i-j}(\vec{h}_i) = B^i(\vec{h}_i) = 0$, и $B^{j-1}(\vec{h}_j) = B^{j-1}(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = B^{j-1} \cdot B^{i-j}(\vec{h}_i) = B^{i-1}(\vec{h}_i) \ne 0$. Теорема доказана.

<u>Определение.</u> Система векторов $\{\vec{h}_i^\alpha\} \in v^i, \alpha = 1,...,r$ называется линейно независимой относительно T_{i-1}, если $\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r \in T_{i-1}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.

Из теоремы 10 непосредственно следует, что, если система векторов $\{\vec{h}_i^\alpha\} \in v^i, \alpha = 1,...,r$ линейно независима относительно T_{i-1}, то система векторов $\{\vec{h}_j^\alpha = B^{i-j}(\vec{h}_i^\alpha)\} \in v^j, \alpha = 1,...,r$ будет линейно независимой относительно T_{j-1}. Действительно, пусть вектор $\alpha_1\vec{h}_j^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_j^r \in T_{j-1}$. Тогда $B^{j-1}(\alpha_1\vec{h}_j^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_j^r) = \vec{0} = B^{j-1}(B^{i-j}(\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r)) = B^{i-1}(\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r)$, откуда следует, что $\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r \in T_{i-1}$ и тогда $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.

Непосредственно жорданов базис строится следующим образом. Положим в (30) $i = 1, j = 0$. Получим $B\vec{h}_1 = \vec{0}$. Тогда $v^1 = KerB = T_1$ есть собственное пространство преобразования A и векторы $\vec{h}_1^\alpha, \alpha = 1,...r$ суть линейно независимые собственные векторы преобразования *A,* соответствующие собственному числу $\bar{\lambda}$. Если ранг B (сужения $A - \bar{\lambda}E$ на $Ker(A - \bar{\lambda}E)^l$) есть $m \le l - 1$, то $r = l - m \ge 1$, и векторы $\vec{h}_1^1,...,\vec{h}_1^r$ образуют базис в T_1.

Пусть $rangB = l - 1$. Тогда существует только один собственный вектор $\vec{h}_1^1$, и T_1 есть одномерное собственное пространство. Дальнейшее построение будем вести по индукции. При $i = 1$ базис в $v^1 = T_1$ состоит из одного вектора $\vec{h}_1^1$. Предположим, что при $k = i - 1 < l$ базис в v^{i-1} также состоит из одного вектора - $\vec{h}_{i-1}^1$. В силу теоремы 10 уравнение $B\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}^1$ имеет решение. Общий вид этого решения следующий $\vec{h}_i = \vec{h}_i^1 + C^1\vec{h}_1^1$, где $B\vec{h}_i^1 = \vec{h}_{i-1}^1$, а $C^1 -$ произвольная постоянная. Покажем, что в нашем случае множество v^i может быть представлено в виде

$$v^1 = \{\vec{h}_i \in v^1, \vec{h}_i = \alpha_1\vec{h}_i^1 + C^1\vec{h}_1^1, \alpha_1 \in R, \alpha_1 \ne 0\} \tag{31}$$

Действительно $B^i(\alpha_1\vec{h}_i^1 + C^1\vec{h}_1^1) = B^{i-1}(B(\alpha_1\vec{h}_i^1) + \vec{0} = B^{i-1}(\alpha_1\vec{h}_{i-1}^1) = \vec{0}$, $B^{i-1}(\alpha_1\vec{h}_i^1 + C^1\vec{h}_1^1) =$ $B^{i-2}(B(\alpha_1\vec{h}_i^1) + \ +\vec{0} = B^{i-2}(\alpha_1\vec{h}_{i-1}^1) \ne \vec{0}$. Для любого вектора $\vec{y} \in v^i$ существует такое α_1, что $\vec{y}$ удовлетворяет уравнению $B\vec{y} = \alpha_1\vec{h}_{i-1}^1$. Откуда $\vec{y}$ как решение этого уравнения имеет представление (31).

Система линейно независимых векторов в v^i относительно T_{i-1} будет состоять из одного вектора $\vec{h}_i^1$, так как $\forall \vec{y} \in v^i \ \vec{y} - \alpha_1 \vec{h}_i^1 = C^1 \vec{h}_1^1 \in T_1 \subseteq T_{i-1}$.

Продолжая описанный выше процесс, построим векторы $\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_i^1, ..., \vec{h}_l^1$. Эти векторы линейно независимы и образуют базис в T_i, так как нетрудно видеть, что $R_i = v^1 \oplus ... \oplus v^i \oplus ... \oplus v^l$. Все эти векторы удовлетворяют следующей системе уравнений

$$(A - \overline{\lambda} E)\vec{h}_1^1 = \vec{0}, (A - \overline{\lambda} E)\vec{h}_i^1 = \vec{h}_{i-1}^1, i = 2, ..., l \tag{32}$$

Вектор $\vec{h}_2^1$ называется первым присоединенным вектором к $\vec{h}_1^1$ (собственному); соответственно $\vec{h}_i^1$ - *i*-1 присоединенный вектор к $\vec{h}_1^1$.

Из (32) имеем $A\vec{h}_1^1 = \overline{\lambda}\vec{h}_1^1, A\vec{h}_i^1 = \overline{\lambda}\vec{h}_i^1 + \vec{h}_{i-1}^1, i = 2, ..., l$. Тогда матрица сужения преобразования A на R_i в построенном базисе имеет следующий вид $A = \begin{Vmatrix} \overline{\lambda}\, 1\, 0 \dots \ 0 \\ 0\ \overline{\lambda}\, 1\, 0 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0 \dots 0\ \overline{\lambda}\ 1 \\ 0 \dots\dots 0\ \ \overline{\lambda} \end{Vmatrix}$. Матрицы такого вида называются жордановыми клетками порядка ее размера.

Если матрица системы дифференциальных уравнений в соответствующем базисе является жордановой клеткой порядка *n,* то система приводится к следующему виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}^1}{dt} = \lambda \overline{x}^1 + \overline{x}^2 \\ .... \\ \dfrac{d\overline{x}^{n-1}}{dt} = \lambda \overline{x}^{n-1} + \overline{x}^n \\ \dfrac{d\overline{x}^n}{dt} = \lambda \overline{x}^n \end{cases}$$

Положим $\overline{x}^i = y^i e^{\lambda t}$. Относительно новых искомых функций система будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} = y^2 \\ \dfrac{dy^2}{dt} = y^3 \\ .... \\ \dfrac{dy^{n-1}}{dt} = y^n \\ \dfrac{dy^n}{dt} = 0 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что общее решение исходной системы будет иметь следующий вид

$$\vec{y} = \left\| \begin{matrix} C_n \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-1}\dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} ... C_2\dfrac{t}{1!} + C_1 \\ .... \\ C_n t + C_{n-1} \\ C_n \end{matrix} \right\|,$$ соответственно

$$\vec{\bar{x}} = \left\| \begin{matrix} C_n \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-1}\dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} ... + C_2\dfrac{t}{1!} + C_1 \\ .... \\ C_n t + C_{n-1} \\ C_n \end{matrix} \right\| e^{\lambda t}$$

Если матрица перехода есть $\left\|\vec{h}_1^1,....,\vec{h}_n^1\right\|$, то общее решение системы можно записать в виде

$$\vec{x} = (C_1\vec{h}_1^1 + C_2(t\vec{h}_1^1 + \vec{h}_2^1) + ... + C_n(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\vec{h}_1^1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\vec{h}_2^1 + ... + \vec{h}_n^1))e^{\lambda t} \quad (33)$$

Полагая в (33) последовательно одну из произвольных констант единицей, а остальные нулями, получим, что Ф. С. Р. системы есть

$$\vec{h}_1^1 e^{\lambda t}, (t\vec{h}_1^1 + \vec{h}_1^2)e^{\lambda t}, ..., (\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\vec{h}_1^1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\vec{h}_1^2 + ... + \vec{h}_1^n))e^{\lambda t}.$$

В случае, если ранг B равен $m < l-1$, то существует $r = l - m > 1$, линейно независимых собственных векторов $\vec{h}_1^1,...,\vec{h}_1^r$, которые образуют базис в $v^1 = T_1$

Предположим, что при $i-1 < l$ имеется $\vec{h}_{i-1}^1,...,\vec{h}_{i-1}^p, p \le r$ векторов, образующих базис в v^{i-1}, т. е. максимальная линейно независимая относительно T_{i-2} система векторов из v^{i-1}. Из теоремы 10 следует, что система уравнений $B\vec{h}_i = \gamma_1\vec{h}_{i-1}^1 + ... + \gamma_p\vec{h}_{i-1}^p$ должна иметь решение, поэтому , согласно теореме Кронекера-Капелли, ранг матрицы B должен равняться рангу расширенной матрицы системы. Элементарными преобразованиями со строками матриц сделаем нулевыми последние r строк матрицы B. Чтобы ранги матриц совпали, числа $\gamma_1,...,\gamma_p$ должны удовлетворять системе из r однородных линейных уравнений, которая получается из требования обращения в ноль всех последних r элементов дополнительного столбца матрицы B. Из теоремы 10 следует, что эта система уравнений относительно $\gamma_1,...,\gamma_p$ будет иметь хотя бы одно ненулевое решение. Тогда ранг этой системы равен $q \le p-1$ и будет существовать $p-q$ наборов $\vec{\gamma}^1 = \left\| \begin{matrix} \gamma_1^1 \\ ... \\ \gamma_p^1 \end{matrix} \right\|, ..., \vec{\gamma}^{p-q} = \left\| \begin{matrix} \gamma_1^{p-q} \\ ... \\ \gamma_p^{p-q} \end{matrix} \right\|$, при которых уравнения $B\vec{h}_1 = \vec{h}_{i-1}^k = \gamma_1^k\vec{h}_{i-1}^1 + ... + \gamma_p^k\vec{h}_{i-1}^p, k = 1,..., p\text{ - }q$ будут иметь решения. Необходимо отметить, что каждый из этих наборов определен с точностью до константы и столбцы, представляющие соответствующие наборы, линейно независимы.

Множество v^i в этом случае представимо в виде

$$\nu^i = \{\vec{h} \in \nu^i, \vec{h} = \sum_{k=1}^{p-q} \alpha_k \vec{h}_i^k + \sum_{k=1}^{r} C_k h_1^k\} \qquad (34)$$

В (34) $\alpha_k \in R, k = 1,..., p-q; B\vec{h}_i^k = \vec{h}_{i-1}^k, C_k \in R$, и все $\alpha_k \neq 0$ одновременно. Нетрудно проверить, что любой вектор из (33) есть вектор из ν^i. Если $\vec{y} \in \nu^i$, то существуют такие $\alpha_k, k = 1,..., p-q$, что $\vec{y}$ удовлетворяет уравнению $B\vec{y} = \sum_{k=1}^{p-q} \alpha_k \vec{h}_{i-1}^k$. Тогда $\vec{y}$ как решение этого уравнения имеет представление (34).

Покажем, что так полученные векторы $\vec{h}_i^1,...,\vec{h}_i^{p-q}$ линейно независимые относительно T_{i-1}. Рассмотрим $\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_{p-q}\vec{h}_i^{p-q} = \vec{0}$. Так как столбцы $\vec{\gamma}^1 = \begin{Vmatrix} \gamma_1^1 \\ ... \\ \gamma_p^1 \end{Vmatrix}, ..., \vec{\gamma}^{p-q} = \begin{Vmatrix} \gamma_1^{p-q} \\ ... \\ \gamma_p^{p-q} \end{Vmatrix}$ линейно независимы, то и векторы $\vec{h}_{i-1}^1,..,\vec{h}_{i-1}^{p-q}$ линейно независимы относительно T_{i-2}. Имеем $B(\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_{p-q}\vec{h}_i^{p-q}) = \vec{0} = \alpha_1\vec{h}_{i-1}^1 + ...$ $... + \alpha_{p-q}\vec{h}_{i-1}^{p-q}$. Откуда, в силу линейной независимости векторов $\vec{h}_{i-1}^1,..,\vec{h}_{i-1}^{p-q}$ относительно T_{i-2}, имеем $\alpha_1 = ... = \alpha_{p-q}$=0, что доказывает линейную независимость векторов $\vec{h}_i^1,...,\vec{h}_i^{p-q}$ относительно T_{i-1}. Из (33) следует, что векторы $\vec{h}_i^1,..,\vec{h}_i^{p-q}$ образуют базис в ν^i, так как $\forall \vec{y} \in \nu^i\ \exists \alpha_k \neq 0$ одновременно, такие, что $\vec{y} - \sum_{k=1}^{p-q} \alpha_k \vec{h}_i^k \in T_1 \subseteq T_{i-1}$.

Таким образом, построен базис в ν^i. Непосредственно из доказательства следует, что в нашем случае $\forall i \ dim\nu^i < dim\nu^{i-1}$. Тогда, если $i = 2$, то $dim\nu^2 < r$, и сделанное в начале предположение, что $p<r$ обосновано. Полагая $i = 2,...,m < l$, построим базис в $R_l = \nu^1 \oplus ... \oplus \nu^i \oplus ... \oplus \nu^m$, который является объединением базисов всех $\nu^1,...,\nu^m$. Отметим, что количество базисных векторов должно равняться *l*. *В* [1] показано, как выбирать базисные векторы в $\nu^i, i = 1,...,m$ и как должны быть занумерованы эти базисные векторы, чтобы матрица сужения преобразования *A* на R_l в так построенном базисе состояла бы из жордановых клеток меньшего порядка.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решить следующую систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x}^1 = x^1 + x^4 \\ \dot{x}^2 = -x^1 + 2x^2 + x^3 - x^4 \\ \dot{x}^3 = -2x^1 + 2x^3 + x^4 \\ \dot{x}^4 = -x^1 + 3x^4 \end{cases}$. Матрица системы в этом случае есть $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$,

$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^4$. В нашем случае $\vec{R}^4 = Ker\|A-2E\|^4$.

$Rg\|A-2E\| = Rg\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix} = Rg\begin{Vmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix} = 2$. Нетрудно получить, что имеется два собственных вектора - $\vec{e}_1 = \begin{Vmatrix}1\\0\\2\\1\end{Vmatrix}$ и $\vec{e}_2 = \begin{Vmatrix}0\\1\\0\\0\end{Vmatrix}$.

Если применить описанную выше процедуру, то для нахождения присоединенных векторов получим следующую систему

$\|A-2E\|\vec{h} = \gamma_1\vec{e}_1 + \gamma_2\vec{e}_2 \Rightarrow \begin{cases}-x^1 + x^4 = \gamma_1\\ -x^1 + x^3 - x^4 = \gamma_2\\ -2x^1 + 2x^4 = 2\gamma_1\\ -x^1 + x^4 = \gamma_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x^1 + x^4 = \gamma_1\\ -x^1 + x^3 - x^4 = \gamma_2\end{cases}$. Полагая в последней системе последовательно $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$, а затем $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$, получим соответственно векторы $\vec{h}_1 = \begin{Vmatrix}0\\0\\1\\1\end{Vmatrix}$, присоединенный к $\vec{e}_1$ и $\vec{h}_2 = \begin{Vmatrix}0\\0\\1\\0\end{Vmatrix}$, присоединенный к $\vec{e}_2$.

В нашем случае $\vec{R}^4 = \nu^1 \oplus \nu^2$, где $\nu^1 = \{C^1\vec{e}_1 + C^2\vec{e}_2\}, \nu^2 = \{C^1\vec{h}_1 e + C^2\vec{h}_2\}$.

В базисе из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{h}_1, \vec{h}_2$ матрица системы будет следующей $\overline{A} = \begin{Vmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{Vmatrix}$. Эта матрица, хотя и не жорданова клетка, но является верхнетреугольной матрицей, что для решения системы дифференциальных уравнений вполне достаточно, ибо тогда система приводится к виду $\begin{cases}\dot{\overline{x}}^1 = 2\overline{x}^1 + \overline{x}^3\\ \dot{\overline{x}}^2 = 2\overline{x}^2 + \overline{x}^4\\ \dot{\overline{x}}^3 = 2\overline{x}^3\\ \dot{\overline{x}}^4 = 2\overline{x}^4\end{cases}$. Решение этой системы может быть легко получено и есть

$\vec{\overline{x}} = \begin{Vmatrix}C^1 + C^3 t\\ C^2 + C^4 t\\ C^3\\ C^4\end{Vmatrix} e^{2t}$. Окончательно решение рассматриваемой системы будет

$\vec{x} = \left\| \vec{e}_1 \; \vec{e}_2 \; \vec{h}_1 \; \vec{h}_2 \right\| \vec{\bar{x}} = e^{2t} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} (C^1 + C^3 t) + e^{2t} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} (C^2 + C^4 t) + C^3 e^{2t} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} + C^4 e^{2t} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Ф С. Р. системы можно получить в виде $e^{2t} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $e^{2t} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $e^{2t} (t \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix})$, $e^{2t} (t \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix})$.

Если в качестве базиса выбрать векторы $\vec{e}_1, \vec{h}_1, \vec{e}_2, \vec{h}_2$, то матрица системы будет состоять из жордановых клеток длины два - $\bar{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

Пример 2. Решить систему ДУ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^1 + x^3 - x^4 \\ \dot{x}^2 = -x^1 + 2x^2 + x^3 - x^4 \\ \dot{x}^3 = -2x^1 + 4x^3 - 2x^4 \\ \dot{x}^4 = -x^1 + x^3 + x^4 \end{cases}. \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8) = (\lambda - 2)^4$. И в этом случае $\vec{R}^4 = Ker \left\| A - 2E \right\|^4$. $Rg \left\| A - 2E \right\| = Rg \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} = Rg \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 1$. Собственные векторы получаются решением уравнения $-x^1 + x^3 - x^4 = 0$. И результате имеем три собственных вектора - $\vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ и $\vec{e}_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

Собственное подпространство трехмерно, поэтому присоединенное подпространство одномерно и натянуто на вектор, который находится из следующей системы уравнений $\left\| A - 2E \right\| \vec{h} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3 \Rightarrow \begin{cases} -x^1 + x^3 - x^4 = \gamma_1 - \gamma_2 \\ -x^1 + x^3 - x^4 = \gamma_3 \\ -2x^1 + 2x^3 - 2x^4 = \gamma_1 \\ -x^1 + x^3 - x^4 = \gamma_2 \end{cases}$. Для совместности полученной системы коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ должны удовлетворять следующей система $\begin{cases}-\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0\\ -\gamma_1+2\gamma_2=0\end{cases}$. Откуда $\begin{Vmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{Vmatrix}=C\begin{Vmatrix}2\\1\\1\end{Vmatrix}$. Теперь нетрудно получить, что вектор $\vec{h}$ присоединяется к вектору $\vec{e}=\begin{Vmatrix}1\\1\\2\\1\end{Vmatrix}$, и его компоненты находятся из уравнения $-x^1+x^3-x^4=1$, решения которого есть $\vec{h}=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\\0\end{Vmatrix}+C^1\vec{e}_1+C^2\vec{e}_2+C^3\vec{e}_3$. В базисе из векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{h}$ матрица системы есть

$\overline{A}=\begin{Vmatrix}2&0&0&2\\0&2&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{Vmatrix}$. В этом базисе система перепишется в виде $\begin{cases}\dot{\overline{x}}^1=2\overline{x}^1+2\overline{x}^4\\ \dot{\overline{x}}^2=2\overline{x}^2+\overline{x}^4\\ \dot{\overline{x}}^3=2\overline{x}^3+\overline{x}^4\\ \dot{\overline{x}}^4=2\overline{x}^4\end{cases}$. Ее решение есть $\vec{\overline{x}}=\begin{Vmatrix}C^1+2C^4t\\ C^2+C^4t\\ C^3+C^4t\\ C^4\end{Vmatrix}e^{2t}$. Окончательно

$$\vec{x}=\begin{Vmatrix}\vec{e}_1&\vec{e}_2&\vec{e}_3&\vec{h}\end{Vmatrix}\vec{\overline{x}}=e^{2t}\begin{Vmatrix}1\\0\\1\\0\end{Vmatrix}(C^1+2C^4t)+e^{2t}\begin{Vmatrix}-1\\0\\0\\1\end{Vmatrix}(C^2+C^4t)+e^{2t}\begin{Vmatrix}0\\1\\0\\0\end{Vmatrix}(C^3+C^4t)+C^4e^{2t}\begin{Vmatrix}0\\0\\1\\0\end{Vmatrix}.$$

Матрица системы приводится к жордановой форме, если за базисные векторы взять, например, $\vec{e},\vec{h},\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Тогда $\overline{A}=\begin{Vmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{Vmatrix}$.

Заключение

В пособии было приведено общее определение многочлена степени *n* от одной буквы, а также дано определение его значения над ассоциативным кольцом. Пользуясь тем фактом, что множество значений многочленов над полем комплексных чисел изоморфно множеству его значений над множеством бесконечно дифференцируемых комлекснозначных функций действительного переменного, удается сравнительно просто найти нули операторного многочлена, которые и будут являться решениями линейного однородного уравнения.

Множество значений многочленов над полем комплексных чисел гомоморфно множеству значений многочлена над ассоциативным кольцом квадратных матриц. Используя это, удается получить разложение линейного пространства на прямую сумму корневых подпространств матрицы системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что позволяет получить в явном виде решение этой системы.

Значительную часть пособия занимает проблема построения жорданова базиса. Надо отметить, что в указанной ссылке литературы, этот вопрос явно не решается. Поэтому студенты, причем сильные, часто его задают. Авторы полагают, что на этот вопрос они дали ответ.

Авторы также выражают глубокую признательность И. А. Чубарову, который взял на себя труд прочитать рукопись и сделать важные замечания.

Литература

1. Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре.
2. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. А. Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений.