Несобственные интегралы.

В пособии использованы задачи из сборника задач [1] и методических разработок кафедры высшей математики МФТИ.

Для студентов первого курса университетов и технических вузов с расширенной программой по математике.

Составитель Иванова С.В.

Основные обозначение:

$E \subset \mathbb{R}$ - промежуток числовой прямой.

$B(E)$ - множество функций, ограниченных на множестве E.

$C(E)$ - множество функций, непрерывных на множестве E.

$C^1(E)$ - множество функций, непрерывно-дифференцируемых на множестве E.

$R(E)$ - множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке E.

Определения.

Определение 1.1. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$, где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого $\beta \in [a;b)$ $f \in R[a;\beta]$. Рассмотрим функцию, определенную, как интеграл Римана с переменным верхним пределом: $F(\beta) = \displaystyle\int_a^\beta f(x)dx$. Если $b = +\infty$ или функция f — неограничена в любой левой окрестности точки b, то будем называть точку b — особой.

Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, если существует конечный предел слева функции $F(\beta)$ в точке b. Тогда, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b-0} F(\beta) = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx$.

В противном случае несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ называется расходящимся.

Замечание. Представление несобственного интеграла, как предела числовой функции, удобно при припоминании некоторых теорем, например, теорем связанных с предельным переходом в неравенствах и критерия Коши.

Принцип локализации. Определение сходимости и расходимости несобственного интеграла с одной особой точкой опирается на понятие конечного предела непрерывной функции — интеграла с переменным верхним пределом от интегрируемой по Риману функции. Учитывая свойство аддитивности интеграла Римана относительно отрезка интегрирования, сходимость и расходимость несобственного интеграла зависит только от поведения подынтегральной функции в любой фиксированной окрестности особой точки (докажите самостоятельно). Это позволяет формулировать различные теоремы, связанные с исследованием на сходимость несобственного интеграла в произвольной фиксированной окрестности особой точки. Это свойство будем называть принципом локализации.

Замечание. Аналогично, как предел справа интеграла Римана с переменным нижним пределом, определяется несобственный интеграл с одной особой точкий в левом конце промежутка интегрирования.

Определение 1.2. Несобственный интеграл с двумя особыми точками. Пусть функция f определена на промежутке $(a,\ b)$, где точки $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$ — особые, функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha,\ \beta] \subset (a,\ b)$.Тогда для произвольной точки $c \in (a,\ b)$ функция f удовлетворяет условиям определения 1.1 на промежутках $(a,\ c]$ и $[c,\ b)$. Несобственным интегралом с двумя особыми точками a и b назовается символ $\displaystyle\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx$. Интеграл $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — сходится, если интегралы $\displaystyle\int_a^c f\ dx$ и $\displaystyle\int_c^b f\ dx$ — оба сходятся.

Интеграл $\int_a^b f\ dx$ — расходится, если хотя бы один из интегралов $\int_a^c f\ dx$ или $\int_c^b f\ dx$ расходится.

Замечание. Требуется доказательство корректности определения 1.2: сходимость/расходимость интеграла $\int_a^b f\ dx$ и его значение в случае сходимости не зависит от выбора точки c. (Доказать самостоятельно).

Замечание. Аналогично, как сумму несобственных интералов с одной особой точкой на конце промежутка интегрирования, можно определить несобственые интегралы с любым конечным числом особых точек.

Исследование на сходимость интегралов от знакопостоянных функций.

Основные теоретические сведения.

Формулировки и доказательства приводятся для несобственного интеграла с одной особой точкой в правом конце промежутка интегрирования. Для несобственного интеграла с одной особой точкой в левом конце промежутка интегрирования формулировки и доказательства аналогичны с точностью до соответствующих обозначений.

Заметим, что, если подынтегральная функция $f(x)$ — неотрицательна, то функция $F(x)$, определенная как интеграл с переменным верхним пределом, является неотрицательной и неубывающей. Для доказательства существования конечного предела в определении несобственного интеграла, то есть сходимости несобственного интеграла, достаточно доказать ограниченность функции F.

Теорема 1.1 (признак сравнения). Пусть функция f и g определены на промежутке $[a;b)$, где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого $\beta \in [a;b)$ $f \in R[a;\beta]$. Пусть для любого $x \in [a;\ b)$ выполнено: $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда

1) Сходимость интеграла $\int_a^b g(x)\ dx$ влечет сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\ dx$.

2) Расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\ dx$ влечет расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\ dx$.

Задание 1.1. Доказать признак сравнения.

Замечание. В сооответствии с принципм локализации в принципе локализации неравенство $0 \leqslant f \leqslant g$ достаточно проверять в некоторой окрестности особой точки b.

Следствие 1.1. Признак замены на эквивалентную. Пусть функция f и g определены на промежутке $[a;b)$, где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого $\beta \in [a;b)$ $f \in R[a;\beta]$. Пусть $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$ в некоторой левой окрестности особой точки b, а также $f \sim g,\ x \to b-0$.

Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\ dx$ и $\int_a^b g(x)\ dx$ — сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 1.2. Пусть функция f и g определены на промежутке $[a;b)$, где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого $\beta \in [a;b)$ $f \in R[a;\beta]$. Пусть $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$ в некоторой левой окрестности особой точки b, а также

1) $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ и интеграл $\int_a^b g(x)\ dx$ – сходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\ dx$ сходится;

2) $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ и интеграл $\int_a^b g(x)\ dx$ – расходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\ dx$ расходится.

Применение признака замены на эквивалентную функцию основано на использовании следующих эталонных интегралов, зависящих от параметров:

	эталон	сходится	расходится
1.	$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$	$\alpha < 1$	$\alpha \geqslant 1;$
2.	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$	$\alpha > 1$	$\alpha \leqslant 1;$
3.	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x}}$	$\alpha > 0$	$\alpha \leqslant 0$;
4.	$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha \lvert \ln x\rvert^\beta}$	$\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R};$ или $\alpha = 1, \beta > 1;$	$\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R};$ или $\alpha = 1, \beta \leqslant 1;$
5.	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$	$\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R};$ или $\alpha = 1, \beta > 1;$	$\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R};$ или $\alpha = 1, \beta \leqslant 1;$
6.	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^\alpha x^\beta}$	$\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R};$ или $\alpha = 0, \beta > 1;$	$\alpha < 0, \beta \in \mathbb{R};$ или $\alpha = 0, \beta \leqslant 1.$

Замечания о припоминании условий сходимости эталонных интегралов(не являются математическими утверждениями).

Для эталонных интегралов 1 и 2 можно заметить, что при $\alpha = 1$ оба интеграла расходятся. Делим множество значений параметра точкой 1 на две части и припоминаем, на которой из частей есть сходимость/расходимость.

Первый вариант припоминания. Для интеграла 1: при $\alpha < 0$ подынтегральная функция ограничена, интеграл сходится, при всех $\alpha < 1$, при остальных расходится.

Для интеграла 2. При $\alpha = 0$ интеграл очевидно расходится, при всех α из промежутка $(-\infty,\ 1]$ — расходится.

Второй вариант припоминания: промежуток интегрирования содержится в множестве $(-\infty,\ 1)$ или $(1,\ +\infty)$ — соответствующий интеграл сходится, иначе — соответствующий интеграл расходится.

Для эталона 3 приемы припоминания можно построить аналогично, но «точкой деления» множества значений параметра является $\alpha = 0$, в этом случае интегрируется константа по бесконечному промежутку, а при отрицательных α: $\frac{1}{e^{\alpha x}} > 1$ при всех $x \in [1,\ +\infty)$ — интеграл засходится.

Для эталонов 4 и 5: при $\alpha \neq 1$ сходится, если сходится при $\beta = 0$, как эталон 1 и 2 соответственно. Расходимость аналогично. Можно сказать, что в этом случае сходимость определяется сходимостью основного однопараметрического эталона.

При $\alpha = 1$ оба эталона сходятся при $\beta > 1$ и расходятся при остальных β.

Для эталона 6 при $\alpha \neq 0$ аналогично используем эталон 3 при $\beta = 0$.

При $\alpha = 0$ эталон также сходятся при $\beta > 1$ и расходятся при остальных β.

Условия сходимости/расходимости эталонных интегралов следует доказать (см. примеры 1 и 2) и далее использовать без доказательства, в том числе в экзаменационной контрольной работе.

Приведем доказательства условий сходимости двух эталонных интегралов.

Пример 1.1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

$\triangleright_{1.1.}$ Исследовать на сходимость несобственный интеграл в зависимости параметра значит найти все значения параметра, при которых интеграл сходится, а также доказать, что при остальных значениях параметра интеграл расходится.

Для доказательства условий сходимости вычислим интеграл по определению:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 x^{-\alpha}dx = \lim_{t\to 0+} \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_t^1, & \alpha < 1; \\ \ln x|_t^1; & \alpha = 1; \\ \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_t^1, & \alpha > 1; \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \text{ инт. сх.}; \\ +\infty, & \alpha = 1, \text{ инт. расх.}; \\ +\infty, & \alpha = 1, \text{ инт. расх.} \end{cases} \quad \triangleleft_{1.1.}$$

Пример 1.2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$.

$\triangleright_{1.2.}$ При $\alpha = 1$ выполним замену переменной: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x|\ln x|^\beta} = \left| \begin{array}{c} \ln x = -t \\ 0 \to +\infty \\ \frac{1}{2} \to \ln 2 \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$. Полученный интеграл отличается от эталонного интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ промежутком интегрирования и обозначением. В соответствии с принципом локализации промежуток интегрирования не влияет на сходимость. Значит интеграл сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$ (см. таблицу эталонов).

Для доказательства сходимости интеграла при $\alpha < 1$ рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$, где $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

Так как $\gamma < 1$, интеграл $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ — сходится, как эталон (см. таблицу).

Так как $\alpha < \gamma$, то $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^\gamma}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{\gamma-\alpha}}{|\ln x|^\beta} = 0.$

По следствию 1.2. признака сравнения исследуемый интеграл сходится.

Для доказательства расходимости интеграла при $\alpha > 1$ тоже рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$, где $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

Здесь $\gamma > 1$, интеграл $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ — расходится, как эталон (см. таблицу).

Кроме того, $\alpha > \gamma$ и $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^\gamma}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{\gamma-\alpha}}{|\ln x|^\beta} = +\infty.$

По следствию 1.2. признака сравнения исследуемый интеграл расходится. $\triangleleft_{1.2.}$

Задание 1.3. Исследовать на сходимость эталонные интегралы 2, 3, 5 и 6.

Типовая задача исследования интеграла от знакопостоянной функции и алгоритм ее решения.

В типовых задачах исследования на сходимость интеграла от знакопостоянной функции предлагается, как правило, исследовать интеграл с двумя особыми точками на концах промежутка интегрирования в зависимости от параметра. Ключевым методом решения таких задач является сведение к эталону с помощью признака замены на эквивалентную функцию.

Алгоритм

0. Для удобства записей обозначаем подынтегральную функцию, например, через f.

1. Обосновываем использование методов исследования несобственных интегралов от знакопостоянных функций, т.е. указываем что подынтегральная функция является знакопостоянной при каждом значении параметра. Специальных обоснований письменно приводить не нужно, но проверить знакопостоянство обязательно.

2. Анализируем особые точки интеграла и изолируем их в соответствии с определение интеграла с двумя особыми точками. Специальных обоснований письменно приводить не

нужно, но проверить, что концы промежутка интегрирования являются особыми и других особых точек нет — обязательно.

3. Каждый из полученных интегралов с одной особенностью исследуем на сходимость отдельно. Для **подынтегральной функции** заменой на эквивалентную функцию выделяем главную часть и приводим ее к виду подынтегральной функции одного из эталонных интегралов. Применяем признак замены на эквивалентную (следствие 1.1.), указываем все значениея параметра, при которых полученный интеграл сходится и при которых расходится.

4. После исследования обоих несобсвенных интегралов с одной особой точкой применяем определение несобственного интеграла с двумя особенностями. Вывод о сходимости исследуемого интеграла достаточно написать только для промежутка сходимости, так как по определению интеграла с двумя особыми точками исследованием интегралов с одной особой точкой доказано, что при остальных значениях параметра расходится хотя бы один из интегралов-слагаемых, а значит, и исследуемый интеграл.

Важно: если в решении не указазаны промежутки значений параметра, при которых интегралы с одной особой точкой расходятся, то в решении не обосновано почему получены **все значения параметра, при которых исследуемый интеграл сходится**! То есть, задача в этом случае не решена.

Замечание о типичных ошибках. Подчеркнем, что условия теорем и следствий, используемых при исследовании несобственных интегралов на сходимость, сформулированы для **подынтегральных функций**, а выводы — для **интегралов**. Часто встречающимися ошибками являются проверки аналогичных «условий» для интегралов:
Обоснованное сравнение интегралов требует их вычисления (что, по крайней мере, существенно сложнее сравнения функций) или применения теоремы сравнения, то есть сравнения функций.
Применение замены на эквивалентную функции для несобственного интеграла невозможно, так как интеграл — это или число, в случае сходимости, или $+\infty$. Поэтому невозможно записать предел в определении эквивалентности двух функций.

Отношение для интегралов «интегралы эквивалентны по сходимости» $\left(\overset{\text{сх.}}{\sim}\right)$, определяемое лектором для существенного сокрашения записей, требует внимательного использования и не упрощает записей при решении практических задач.

Обратите внимание, что в образце оформления решений символы несобственного интеграла используются только в условии и при изолировании особенностей в определении интеграла с двумя особенностями!

Пример 1.3. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln^{\alpha-21}(1+\operatorname{sh} x)\cdot \operatorname{arctg}^{\alpha}\frac{x}{3+x}\,dx.$

$\triangleright_{1.3.}$ **Решение с рассуждениями.**

Пусть $f = \ln^{\alpha-21}(1+\operatorname{sh} x)\cdot \operatorname{arctg}^{\alpha}\dfrac{x}{3+x}$.

Так как аргумент логарифмической функции на рассматриваемом промежутке больше или равен 1, то логарифм принимает неотрицательные значения, причем обращается в ноль только в точке $x = 0$. Аргумент арктангенса тоже неотрицателен на промежутке интегрирования и обращается в ноль только при $x = 0$. Значит подынтегральная функция f неотрицательна.

Учитывая, что степени логарифмической функции и арктангенса зависят от параметра, функция f — неограничена в любой окрестности нуля при некоторых значениях параметра. Точка $x = 0$ — особая, точка $x = +\infty$ — особая всегда.

Изолируем особенности $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\,dx = \int_0^1 f\,dx + \int_1^{+\infty} f\,dx.$

Исследуем на сходимость при $x \to 0+$.

$\operatorname{sh} x \sim x$
$\ln(1+\operatorname{sh} x) \sim x$
$\ln^{\alpha-21}(1+\operatorname{sh} x) \sim x^{\alpha-21}$;

$\frac{x}{3+x} \sim \frac{x}{3}$. Для получения этого результата можно рассуждать двумя способами: во-первых, $x \to 0$, тогда $x \ll 3$ (x много меньше трех), при замене на эквивалентную малое слагаемое можно отбросить; во-вторых, можно выполнить деление при получении представления формулой Маклорена: $\frac{x}{x+3} = \frac{x}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)} = \frac{x}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + o(x)\right), x \to 0+$, далее отбросить все члены, малые по сравнению с главной частью.
$\operatorname{arctg} \frac{x}{3+x} \sim \frac{x}{3}$
$\operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{x}{3+x} \sim \left(\frac{x}{3}\right)^{\alpha}$.

Итак, $f \sim \frac{x^{2\alpha-21}}{3^{\alpha}}$.

$3^{-\alpha}$ не может повлиять на сходимость, так как этот множитель нигде не обращается в ноль, его можно обозначить постоянной C.

Подчеркнем, что в некоторых задачах выражение независящее от x, но зависящее от α может влиять на решение. См. примеры 1.4, 1.5 и 1.6.

Преобразуем полученную функцию к виду записи первого эталона: $f \sim \frac{C}{x^{21-2\alpha}}$.
Интеграл вида $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится, если показатель степени меньше 1, то есть $21 - 2\alpha < 1$.
При $\alpha > 10$ — интеграл сходится, при $\alpha \leqslant 10$ — расходится.

По признаку замены на эквивалентную мы получили условия сходимости/расходимости исследуемого интеграла в окрестности особой точки $x = 0$.

Исследуем при $x \to +\infty$.

$\ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln\left(1 + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right) \overset{(1)}{\sim} \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) \sim x$.

Замену не эквивалентную (1) можно получить рассуждая, например, следующими двумя способами: во-первых, $1 \ll e^x$, $e^{-x} \ll e^x$, при $x \gg 1$, малые слагаемые можно отбросить; во-вторых, $\ln\left(1 + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right) = \ln\frac{e^x}{2} + \ln\left(\frac{2}{e^x} + 1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = x - \ln 2 + \frac{2}{e^x} + o\left(\frac{1}{e^x}\right) \sim x$. На последнем шаге отброшены все слагаемые, малые по сравнению с главной частью выражения.

$\frac{x}{3+x} \sim 1$ (делим числитель и знаменатель на x и переходим к пределу или замечаем, что $3 \ll x$ и отбрасываем малое слагаемое)
$\operatorname{arctg} \frac{x}{3+x} \sim \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Так как $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\alpha}$ не обращается в ноль ни при каких начениях α, то не влияет на сходимость.

Итак, $f \sim Cx^{\alpha-21} = \frac{C}{x^{21-\alpha}}$.
Эталон $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится, если показатель степени в знаменателе больше 1 и расходится в остальных случаях: $21 - \alpha > 1$.

При $\alpha < 20$ интегралы сходятся, при $\alpha \geqslant 20$ — расходятся.

Применяя определение несобственного интеграла с двумя особенностями получаем, что интеграл сходится только при $\alpha \in (10,\ 20)$.

В заключение отметим, что записи несобственных интегралов использовались только для изолирования особенностей и напоминания эталонов в решении с комментариями.$\triangleleft$

$\triangleright$ **Оформление решения примера 1.3.**

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\ln^{\alpha-21}(1 + \operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{x}{3+x}}_{f \geqslant 0} \, dx = \int_0^1 f \, dx + \int_1^{+\infty} f \, dx.$$

Исследуем на сходимость при $x \to 0+$.

$\ln(1 + \operatorname{sh} x) \sim \ln(1 + x) \sim x$
$\ln^{\alpha-21}(1 + \operatorname{sh} x) \sim x^{\alpha-21}$;

$\operatorname{arctg} \frac{x}{3+x} \sim \frac{x}{3}$
$\operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{x}{3+x} \sim \left(\frac{x}{3}\right)^{\alpha}$.

Итак, $f \sim \frac{x^{2\alpha-21}}{3^{\alpha}} = \frac{C}{x^{21-2\alpha}}$. При $21 - 2\alpha < 1$ – сх.
При $\alpha > 10$ — инт. сх., при $\alpha \leqslant 10$ — расх.

Исследуем при $x \to +\infty$.

$\ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln\left(1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \sim \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) \sim x$, так как $1 \ll e^x$ и $e^{-x} \ll e^x$.

$\operatorname{arctg}\frac{x}{3+x} \sim \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Итак, $f \sim Cx^{\alpha-21} = \frac{C}{x^{21-\alpha}}$. При $21-\alpha > 1$ сх.

При $\alpha < 20$ инт. сх., при $\alpha \geqslant 20$ — расх.

Ответ: сходится только при $\alpha \in (10,\ 20)$. $\lhd_{1.3.}$.

В примерах акцентируются особенности применения метода замены на эквивалентную функцию.

Примеры.

В следующем примере комментируются только новые рассуждения:

Пример 1.4. Иссследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\ln\cos\frac{x}{x+1}\right|^{\alpha-1} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{e^x} dx.$

$\rhd_{1.4.}$ Рассуждения о знакопостоянстве подынтегральной функции при каждом значении параметра α и особых точках на концах промежутка интегрирования провести самостоятельно.

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\left|\ln\cos\frac{x}{x+1}\right|^{\alpha-1} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{e^x}}_{f\cdot\operatorname{sign}\alpha\geqslant 0} dx = \int_0^1 f\ dx + \int_1^{+\infty} f\ dx.$$

Важно: при $\alpha = 0$ $f(x) = 0$, интеграл сходится. Находить значения параметра, при которых подынтегральная функция равна нулю обязательно, так как невнимание к таким значаниям параметра на предварительном этапе решения, как правило, усложняет основной этап.

Исследуем на интеграл при $x \to 0+$.

$\ln\cos\frac{x}{1+x} = \ln\cos\left(x + o(x)\right) = \ln\left(1 - \frac{(x+o(x))^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \sim -\frac{x^2}{2}$.

Так как случай $\alpha = 0$ рассмотрен отдельно, здесь рассуждения проводим при $\alpha \neq 0$.

$\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{e^x} = \frac{\alpha x}{1+x+o(x)} \sim \alpha x$. Здесь важно, что $\alpha \neq 0$. (Почему?)

$f \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\alpha-1}(\alpha x) = C\alpha x^{2(\alpha-1)+1} = \frac{C\alpha}{x^{1-2\alpha}}$.

Так как особенность в точке $x = 0$, интеграл сходится при $1 - 2\alpha < 1$, то есть $\alpha > 0$ по признаку замены на эквивалентную и при $\alpha = 0$. Расходится при $\alpha < 0$.

Исследуем при $x \to +\infty$.

$\ln\cos\frac{x}{1+x} \sim \ln\cos 1 = C$.

Так как $\operatorname{sh}\alpha x = \frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2}$, то главная часть выражения в зависимости от знака параметра $\alpha \neq 0$ определяется либо первым слагаемым, при $\alpha > 0$, либо — вторым при $\alpha < 0$. Объединить эти результаты можно следующим образом: $\operatorname{sh}\alpha x \sim \frac{e^{|\alpha|x}}{2}$.

$f \sim \frac{C\cdot e^{|\alpha|x}}{e^x} = \frac{C}{e^{(1-|\alpha|)x}}$.

Соответствующий эталон сходится при $1 - |\alpha| > 0$, то есть $|\alpha| < 1$. И расходится при $|\alpha| \geqslant 1$.

Подчеркнем, что в данной задаче в силу результатов исследования в окрестности особой точки $x = 0$ достаточно было рассматривать только $\alpha > 0$ при исследовании в окрестности точки $x = +\infty$. Полное исследование приведено, так как варьированием показателя степени первого сомножителя подынтегральной функции легко получить задачу с другим промежутком сходимости для параметра.

Используя определение несобственного интеграла с двумя особенностями, имеем: интеграл сходится только при $0 \leqslant \alpha < 1$. $\lhd_{1.4.}$

Перед анализом следующего примера рассмотрим прием представления суммы функций на примерах выделения главной части в выражениях $x + x^2$ и $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ при $x \to 0+$ и при $x \to +\infty$.

В случае затруднений может быть полезным вынести за скобку множитель так, чтобы выражение в скобках имело вид: константа + величина стремящаяся к нулю.

При $x \to 0+$

$x + x^2 = x(1+x) \sim x$;

$\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}\sqrt{1+\sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x}$). В обоих случаях при переходе к эквивалентной при $x \to 0+$ функции отброшено малое по сравнению с 1 слагаемое в скобках.

Аналогично при $x \to +\infty$
$x + x^2 = x^2(1 + \frac{1}{x}) \sim x^2$
$\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$).

Рассмотрим примеры, в котором главная часть подынтегральной функции различна, при различных значениях параметра α.

Пример 1.5. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^\alpha)}{\sqrt{x^3}}\, dx.$

$$\triangleright_{1.5.} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln(1+x+x^\alpha)}{\sqrt{x^3}}}_{f\geqslant 0}\, dx = \int_0^1 f\, dx + \int_1^{+\infty} f\, dx.$$

При $x \to 0+$

$$\ln(1+x+x^\alpha) \sim \begin{cases} \ln(1+x), & \alpha > 1; \\ \ln(1+2x), & \alpha = 1; \\ \ln(1+x^\alpha), & \alpha < 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x, & \alpha > 1; \\ 2x,, & \alpha = 1; \\ x^\alpha, & 0 < \alpha < 1; \\ \ln 2, & \alpha = 0; \\ \alpha \ln x, & \alpha < 0. \end{cases}$$

$$f \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}-1}}, & \alpha > 1; \\ \dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}-1}}, & \alpha = 1; \\ \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}-\alpha}}, & 0 < \alpha < 1; \\ \dfrac{\ln 2}{x^{\frac{3}{2}}}, & \alpha = 0; \\ \dfrac{\alpha}{x^{\frac{3}{2}}\ln^{-1} x}, & \alpha < 0. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{C}{x^{\frac{1}{2}}}, & \alpha \geqslant 1, & \left|\ \frac{1}{2} < 1, \right| & \text{сх.;} \\ \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}-\alpha}}, & 0 < \alpha < 1, & \left|\ \frac{3}{2} - \alpha < 1, \right| & \begin{matrix} \frac{1}{2} < \alpha < 1, & \text{сх.,} \\ 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2} & \text{расх.;} \end{matrix} \\ \dfrac{\ln 2}{x^{\frac{3}{2}}}, & \alpha = 0, & \left|\ \frac{3}{2} > 1 \right| & \text{расх;} \\ \dfrac{\alpha}{x^{\frac{3}{2}}\ln^{-1} x}, & \alpha < 0, & \left|\ \frac{3}{2} > 1 \right| & \text{расх.} \end{cases}$$

В последнем случае логарифм в любой степени не влияет на сходимость.

Итак, интеграл с особой точкой при $x = 0$ сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$ и расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

При $x \to +\infty$

$1 \ll x$, поэтому в анализе ее можно не учитывать.

$$\ln(1+x+x^\alpha) \sim \begin{cases} \ln x^\alpha, & \alpha > 1; \\ \ln 2x, & \alpha = 1; \\ \ln x, & \alpha < 1 \end{cases} \sim C \ln x.$$

$f \sim \dfrac{C}{x^{\frac{3}{2}}\ln^{-1} x}$. $\frac{3}{2} > 1$, логарифм на сходимость не влияет. Интеграл с особенность в бесконечно удаленной точке сходится при всех значениях параметр α.

Исследуемый интеграл сходится только при $\alpha > \frac{1}{2}$.$\triangleleft_{1.5.}$.

Следующий пример обращает внимание на аккуратность представления формулой Тейлора и недопущение недоборов членов представления.

Пример 1.6. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{\alpha}{x}} (\cos x)^{\frac{1}{x^3}}\, dx.$

$\triangleright_{1.6.}$ Подынтегральная функция неотрицательна и единственной особой точкой является $x = 0$.

Предаварительный анализ показывает, что член порядка $\frac{1}{x}$ — может быть равен нулю при некотором значении параметра α, которое мы найдем при получении представления. Значит при этом значении нужно получить еще один член представления, этот член определит сходимость при таком исключительном значении параметра.

Найдем главную часть функции

$$f = e^{\frac{\alpha}{x}} \left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^3}} = \exp\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\ln\cos x}{x^3}\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} o\left(x^5\right)\right)}{x^3}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o\left(x^5\right)}{x^3}\right) = \exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} - \frac{x}{12} + o(x)\right).$$

Получили, что при $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad f \sim \dfrac{1}{e^{\frac{x}{12}}}$ — интеграл сходится.

Обращаем внимание на представление логарифма: потеря члена $-\frac{x^2}{8}$ приведет к неправильному результату при $\alpha = \frac{1}{2}$, так как при этом меняется знак коэффициента в показателе экспоненты.

При $\alpha \neq \frac{1}{2}$ введем обозначение $\beta = \frac{1}{2} - \alpha$, тогда $f \sim e^{-\frac{\beta}{x}}$ и выполним замену переменной $y = \frac{1}{x}$ в интеграле $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{\beta}{x}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{e^{\beta y} y^2}$. Так как $\beta = 0$, то полученный интгерал сходится при $\beta > 0$ и расходится при $\beta < 0$. То есть, сходится при $\alpha < \frac{1}{2}$ и расходится при $\alpha > \frac{1}{2}$.

Подчеркнем, что рассматривать последний интеграл при $\beta = 0$ в решении нельзя, так как главная часть подынтегральной функции f при $\beta = 0$, то есть $\alpha = \frac{1}{2}$ равна $\dfrac{1}{e^{\frac{x}{12}}}$ и не имеет отношения к рассматриваему интегралу.

Итак, интеграл сходится только при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. $\triangleleft$.

Пример 1.7. Привести пример положительной непрерывной неограниченной в любой окрестности точки $x = +\infty$ функции, интегрируемой на луче $[0,\ +\infty)$.

Несобственные интегралы от знакопеременной функции.

В параграфе рассматриваются функции, для которых определен несобственный интеграл на лучах вида $[a,\ +\infty)$ с одной особой точкой. (Определение 1.1.).

Для анализа сходимости таких интегралов требуется ввести новые понятия, более точно характеризующие сходимость несобственного интеграла от знакопеременной функции.

Определение 2.1. Несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл от модуля подынтегральной функции.

Абсолютная сходимость несобственного интеграла влечет его сходимость. (Сравните с аналогичным свойством определенного интеграла Римана).

Определение 2.2. Несобственный интеграл называется условно сходящимся, если интеграл от подынтегральной функции сходится, а интеграл от модуля расходится.

Основные методы исследования несобственных интегралов:

1. «Четырехступенчатая схема».
2. Метод выделения главной части.
3. Методы сведения к эталонам (тригонометрический признак и следствие признака Абеля).

Замечание. В пособии рассматриваются первые два метода.

«Четырехступенчатая схема» в обучении представляет интерес с двух основных точек зрения: во-первых, с точки зрения развития мышления, так как она требует усилий для понимания всей схемы в целом и необходимости и роли каждой ступени (этапа). Во-вторых, на каждом этапе отрабатываются приемы работы с теоремами, которые продолжают развиваться здесь и в дальнейшем в новых, нередко более сложных, темах — признак Дирихле, критерий Коши и признак сравнения.

Метод выделения главной части позволяет обратить внимание на границы применения метода замены на эквивалентную, применимый только для знакопостоянных подынтегральных функций.

Методы сведения к эталану в пособии не рассмотрены, так как состоят в проверке условий теоремы и применении эталона, что повторяет методы, рассмотренные в первой части исследования и может быть легко освоено самостоятельно.

Теоретические основы метода «Четырехступенчатая схема».

Постановка задачи. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственный интеграл от знакопеременной функции, зависящей от параметра.

Метод состоит из четырех этапов:

1. Доказательство сходимости интеграла применением признака Дирихле при некоторых значениях параметра.
2. Применение отрицания условия Коши для доказательства расходимости интеграла при остальных значениях параметра.
3. Доказательство абсолютной сходимости на некотором подмножестве множества значений параметра, для которых интеграл сходится. Абсолютная сходимость доказывается применением признаков сравнения (оценка сверху модуля подынтегральной функции неотрицательной функцией) и замены на эквивалентную функцию, для которой известны условия сходимости и расходимости («эталон» для интегралов от знакопостоянных функций).
4. На оставшемся подмножестве множества значений параметра, при которых интеграл сходится, доказывается условная сходимость. Для доказательства условной сходимости применяется признак сравнения (оценка снизу) и алгебраические преобразования полученного выражения. В результате получаем сумму (разность) знакопостоянной функции, интеграл от которой расходится, и знакопеременной функции, интеграл от которой сходится по признаку Дирихле.

При использовании метода в учебных задачах полезно визуальное представление разбиения множества значений параметра на указанные выше части. Для этого воспользуемся моделью «неориентированной» прямой (для понимания модели можно заменить знак у параметра на противоположный и картинка «перевернется»).

СДЕЛАТЬ И ВСТАВИТЬ РИСУНОК ???

При изучении «четырехступенчатой схемы» **важно**:

— понять причины использования каждого этапа! Этап исследования может быть опущен только при условии, что соответствующее ему множество значений параметра пусто.

— понять принцип получения точки α_1, разделяющей множества значений параметра, при которых интеграл сходится и расходится, соответственно;

— понять принцип получения точки α_2, разделяющей множество «сходимости» на два подмножества: абсолютной сходимости и условной сходимости.

Задание 2.1. Приведите примеры задач, когда, например, интеграл вида $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin x\; f(x)dx$ сходится при всех значениях параметра (не нужно применение отрицания условия Коши), или, если интеграл вида $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin x\; f(x)dx$ сходится, то сходится абсолютно (не нужно доказательство условной сходимости — четвертый этап).

Сформулируем теоремы, используемые на каждом этапе.

Замечание. Формулировки теорем приводятся в пособии в форме, наиболее удобной для применения при решении задач, не претендуя на общность. Для каждого условия после его формулировки приводится в общем виде алгоритм его проверки при решении задач.

Теорема 2.1. (Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла).

Интеграл вида $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ — сходится **если**,

1) $f \in C[a;+\infty)$, $g \in C^1[a;+\infty)$;

2) функция f - обладает ограниченной первообразной, то есть $\exists C = \quad \forall x \geqslant a \hookrightarrow$

$\left|\int_a^T f(x)dx\right| \leqslant C$. Для получения искомого значения верхней грани используем вычисление **определенного** интеграла и/или упрощающие оценки;
3) функция $g(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$, для доказательства используется, например, замена на эквивалентную функцию при $x \to +\infty$;
4) функция $g(x)$ монотонна (без обраничения общности можно считать, что $g(x) > 0$ и монотонно убывает, для доказательства используется оценка знака производной $g'(x)$ или $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$.

Вопрос 2.1. Можно ли использовать признак Дирихле для доказательства расходимости несобственного интеграла?

Теорема 2.2. (Критерий Коши). Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ с особенностью в точке $b \in \overline{\mathbb{R}}$ — сходится тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \beta(\varepsilon) \in [a;b)\ \forall \xi_1 \in [\beta;b)\ \forall \xi_2 \in [\beta;b) \hookrightarrow \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание. Формулировка критерия Коши сходимости несобсвенного интеграла может быть получена из формулировки критерия Коши существования конечного предела слева функции $F(\beta) = \displaystyle\int_a^\beta f(x)dx$ из определения 1.1.

В решении типовых задач критерий Коши применяется для доказательства расходимости несобственного интеграла, то есть, проверяется выполнение отрицания условия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \beta(\varepsilon) \in [a;b)\ \exists \xi_1 \in [\beta;b)\ \exists \xi_2 \in [\beta;b) \hookrightarrow \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Задание 2.2. Используя критерий Коши докажите, что их абсолютной сходимости несобственного интеграла следует его сходимость.

Повторим формулировку признака сравнения:
Теорема 1.1. (Признак сравнения.) Пусть $\forall \beta \in [a;b)\ f, g \in R[a;\beta]$ и $\forall x \in [a;b)\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда,
если интеграл $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ — сходится, то $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ — сходится;
если интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ — расходится, то $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ — расходится.

При применении признака сравнения обращаем внимание на:
— применение для знакоопределенных функций, в «четырехступенчатой схеме» признак сравнения применяется для доказательства абсолютной сходимости оценкой модуля исследуемой функции сверху и в доказательстве условной сходимости оценкой модуля исследуемой функции снизу;
— признак сравнения в каждом случае обеспечивает достаточное условие, необходимость не рассматривается, поэтому в доказательстве абсолютной и условной сходимости приходится делать две оценки (этапа).

А также повторим формулировку признака замены на эквивалентную:
Следствие 1.1. (Замена на эквивалентную функцию, следствие признака сравнения). Пусть $\forall \beta \in [a;b)\ f, g \in R[a;\beta]$ и $\forall x \in [a;b)\ f(x) \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b - 0$. Тогда, интегралы $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ и $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ — сходится или расходятся одновременно.

Признак замены на эквивалентную может применяться при необходимости после оценок в доказательстве абсолютной и условной сходимости с целью получения эталонного интеграла, для которого условия сходимости (расходимости) считаются известными.

Теорема 2.3. Пусть $f = f_1 + f_2$. Тогда,

1) $\displaystyle\int_a^b f_i\ dx,\ i = \overline{1,2}$ — сходятся, то $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — сходится;

2) один из интегралов $\displaystyle\int_a^b f_i\ dx,\ i = \overline{1,2}$ — сходятся, другой расходится, то $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — расходится;

3) $\displaystyle\int_a^b f_i\ dx,\ i = \overline{1,2}$ — расходятся, то для $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — может сходится, а может расходится.

Теорема используется на этапе доказательства условной сходимости.

Рассмотрим применение всех этапов алгоритма на простом примере.

Анализ алгоритма метода на простом примере.

Пример 2.1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.

$\triangleright_{2.1}$ 1. Выбор множества значение параметра, при котором интеграл сходится и доказательство сходимости по признаку Дирихле.

1.1. Пусть $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

1.2. Доказательство существования ограниченной первообразной непрерывной функции осуществляется проверкой определения ограниченности для явно полученной первообразной, как интеграла с переменным верхним пределом. Так как получение оценки модуля первообразной в большинстве задач не вызывает сложностей, сразу пишем требуемую кванторную формулировку

$$\exists C = 2\ \forall x > 1 \hookrightarrow \left|\int_1^x \sin t dt\right| = |\cos x - \cos 1| \leqslant C = 2.$$

В более сложных случаях (см. примеры ниже) могут потребоваться более подробные вычисления или упрощающие оценки.

1.3. Исследование предела функции $g(x)$ и выбор значения параметра α_1 (см. рис.1.).

В формулировке признака Дирихле (Теорема 2.1) требуется, чтобы функция $g(x)$ была бесконечно малой в окрестности особой точки интеграла. Однако, так как необходимо выбрать значение параметра α_1, разделяющее все множество значений параметра α, то найдем предел функции при всех значениях параметра α и, при применении признака Дирихле используем такие значения параметра α, при которых $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Значения параметра α, при котором $g(x)$ стремится к константе, отличной от нуля или к $+\infty$, используем при доказательстве выполнения отрицания условия Коши на втором этапе исследования.

В данном случае вычисление предела функции $g(x)$ при $x \to +\infty$ не требует преобразования выражения:

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \to \begin{cases} 0, & \alpha > 0; \\ 1, & \alpha = 1; \\ +\infty, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Доказательство монотонности функции $g(x)$ осуществим при $\alpha > 0$, то есть на множестве значений параметра, при которых предел функции $g(x)$ равен нулю.

1.4. Пусть $\alpha > 0$. Для доказательства монотонности функции $g(x)$ достаточно доказать неотрицательность (или положительность) производной функции $\frac{1}{g(x)}$.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} > 0.$$

Более сложные случаи анализа знака производной, требующие обоснования, будут рассмотрены ниже.

Итак, по признаку Дирихле интеграл сходится при $\alpha > 0$.

При $\alpha \leqslant 0$ о сходимости или расходимости интеграла признак Дирихле ничего не сообщает.

2. Доказательство, что интеграл расходится при $\alpha \leqslant 0$. Применение отрицания условия Коши.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ +\infty, & \alpha < 0. \end{cases}$ Тогда, существует $x_0 > 1$ такое, что $\forall x \geqslant x_0$ имеем оценку снизу: $g(x) \geqslant \frac{1}{2}$. (Доказать самостоятельно).

Предварительный анализ. Для получения значений переменных под кванторами существования в отрицании условия Коши рассмотрим сначала оценку снизу отрезка интеграла и подберем соответствующие значения переменных. Для удобства обозначений будем считать, что концы рассматриваемого отрезка интегрирования упорядочены: $\xi_2 > \xi_1 \geqslant \max\{x_0, x_1\}$.

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin x\ g(x)dx\right| \overset{\exists x_0\ \forall x > x_0 \hookrightarrow g(x)\geqslant\frac{1}{2}}{\geqslant} \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin x dx =$$

Выберем произвольный отрезок неотрицательности подынтегральной функции например:

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \sin x dx = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 = \varepsilon.$$

Так как произвольный отрезок интегрирования, рассматриваемый в отрицании условия Коши зависит от вспомогательной переменной k, определим эту переменную при записи отрицания условия Коши, предварительно заметив, что требуется $\xi_1 = 2\pi k \geqslant \max\{x_0, x_1\}$. Найдем k упрощающими оценками (здесь можно найти явно): $\xi_1 = 2\pi k > k = [x_0] + [x_1] + 2 \geqslant \max\{x_0, x_1\}$.

Итак, оформим решение:

$$\exists\varepsilon = 1\ \forall x_1 \geqslant 1\ \exists k = [x_0] + [x_1] + 2\ \exists \xi_2 = \pi + 2\pi k \geqslant \xi_1 = 2\pi k \geqslant \max\{x_0, x_1\}:$$
$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin x\ g(x)dx\right| \overset{\exists x_0\ \forall x > x_0 \hookrightarrow g(x)\geqslant\frac{1}{2}}{\geqslant} \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin x dx = \frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \sin x dx = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 = \varepsilon.$$

Итак, по критерию Коши интеграл расходится при $\alpha \leqslant 0$.

3. Абсолютная сходимость. Выбор подмножества соответствующих значений параметра. Рассматриваем множество значений параметра, при которых интеграл сходится: $\alpha > 0$.

Выполним оценку сверху модуля подынтегральной функции и найдем все значения параметра, при которых интеграл от мажорирующей функции сходится.

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}.$$

Обратим внимание на выбор оценки $|f(x)| = |\sin x| \leqslant 1$, то есть оценки константой. Такой выбор будет ясен при доказательстве условной сходимости.

Полученная мажорирующая функция, в данном случае, является эталонной функцией, интеграл от которой сходится только при $\alpha > 1$.

Итак, при $\alpha > 1$ интеграл сходится абсолютно по признаку сравнения.

В силу использования оценки, сходимость при остальных положительных значениях параметра α не исследована.

4. Условная сходимость на промежутке $(0; 1]$.

Выполним оценку снизу модуля подынтегральной функции.

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

Получили разность (или сумму) двух функций, причем знакопостоянная функция отличается от мажоранты пункта 3 только на числовой множитель.

При $\alpha \in (0;1]$ интеграл от первого слагаемого минорирующей функции расходится, как интеграл от эталонной функции. Интеграл от второго слагаемого сходится по признаку Дирихле. Так как второе слагаемое отличается от исследуемой функции $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ числовым множителем и функцией $\hat{f}(x) = \cos 2x$, дополнительное исследование проводить не нужно.

Для минорирующей функции интеграл расходится (теорема 2.3), так как интеграл от одного слагаемого сходится, а от другого — расходится. Значит интеграл от модуля подынтегральной функции расходится. Исследуемый интеграл сходится условно.

Две рассмотренные в пунктах 3 и 4 оценки позволяют исследовать все множество значений параметра α, при которых интеграл сходится на абсолютную сходимость и условную сходимость.

Ответ: при $\alpha \in (0;1]$ — сходится условно, при $\alpha > 1$ — сходится абсолютно. $\triangleleft_{2.1.}$

Примеры.

Пример 2.2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x\ dx}{x^2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}$.

$\triangleright_{2.2.}$ 1. Выбор множества значение параметра, при котором интеграл сходится и доказательство сходимости по признаку Дирихле.

1.1. Пусть $f(x) = \sin^3 x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x^2 \cdot \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}$.

1.2. Доказательство существования ограниченной первообразной функции $f(x)$.

$\exists C = 4\ \forall x > 1 \hookrightarrow$

$$\left|\int_1^x \sin^3 t dt\right| \overset{\cos t = u}{=} \left|\int_{\cos 1}^{\cos x} \left(1 - u^2\right) dt\right| \leqslant$$
$$\overset{*}{\leqslant} |\cos x| + |\cos 1| + \left|\frac{\cos^3 x}{3}\right| + \left|\frac{\cos^3 1}{3}\right| \leqslant 4 = C.$$

Оценка $\overset{*}{\leqslant}$ выполнена по неравенству треугольника.

1.3. Исследование предела функции $g(x)$ и выбор значения параметра α_1 (см. рис.1.).

Найдем предел функции при всех значениях параметра α и, при применении признака Дирихле используем все такие значения α, при которых $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Значения параметра α, при котором $g(x)$ стремится к константе, отличной от нуля или к $+\infty$, используем при доказательстве выполнения отрицания условия Коши на втором этапе исследования.

При вычислении предела при $x \to +\infty$ воспользуемся методом замены на эквивалентную функцию. Так как $\frac{1}{x} \to 0+$, имеем :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}} \to \begin{cases} 0, & \alpha < 2; \\ 1, & \alpha = 2; \\ +\infty, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Доказательство монотонности функции $g(x)$ осуществим при $\alpha < 2$, то есть на множестве значений параметра, при которых предел функции $g(x)$ равен нулю.

1.4. Пусть $\alpha < 2$.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \left(x^2 \cdot \operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x \operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{1}{x} - \alpha x^2 \operatorname{arctg}^{\alpha-1} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$\operatorname{arctg}^{\alpha-1} \frac{1}{x} \left(2x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = .$$

Первый и второй сомножители положительны при $x > 1$. Для определения знака третьего сомножителя воспользуемся принципом локализации и найдем главную часть выражения в скобках.

$$\overset{x\to+\infty}{=} \operatorname{arctg}^{\alpha-1} \frac{1}{x} \left(2x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \alpha\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = x \operatorname{arctg}^{\alpha-1} \frac{1}{x} \left(2 - \alpha + o\left(1\right)\right).$$

Итак, $2 - \alpha > 0$, а $o(1)$ при достаточно больших значениях переменной x мало по сравнению с $(2 - \alpha)$ при любом фиксированном $\alpha < 2$. То есть, о-малое не влияет на знак выражения в скобках при достаточно больших значениях x.

Тогда, $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' > 0$ при достаточно больших значениях x.

Итак, по признаку Дирихле интеграл сходится при $\alpha < 2$.

2. Доказательство, что интеграл расходится при $\alpha \geqslant 2$. Применение отрицания условия Коши.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} 1, & \alpha = 2, \\ +\infty, & \alpha > 2. \end{cases}$ Тогда, существует $x_0 > 1$ такое, что $\forall x \geqslant x_0$ имеем оценку снизу: $g(x) > \frac{1}{2}$.

Предварительный анализ. Рассмотрим оценку снизу отрезка интеграла и подберем соответствующие значения переменных. Для удобства обозначений будем считать, что концы рассматриваемого отрезка интегрирования упорядочены: $\xi_2 \geqslant \xi_1 \geqslant \max\{x_0, x_1\}$.

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin^3 x \ g(x)dx\right| \overset{\exists x_0 \ \forall x > x_0 \hookrightarrow g(x) \geqslant \frac{1}{2}}{\geqslant} \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin^3 x dx =$$

Выберем произвольный отрезок неотрицательности подынтегральной функции.

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \sin^3 x dx \overset{*}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} = \varepsilon.$$

* Рассматриваемый интеграл можно вычислить (это уже сделано при доказательстве ограниченности первообразной). Можно оценить снизу положительным числом.

Найдем k упрощающими оценками. Учитывая , что $\xi_1 \geqslant x_0$ и $\xi_1 \geqslant x_0$, имеем, например: $\xi_1 = 2\pi k > k = [x_0] + [x_1] + 2$.

Итак, оформим решение:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{20} \ \forall x_1 \geqslant 1 \ \exists k = [x_0] + [x_1] + 2 \ \exists \xi_2 = \pi + 2\pi k \geqslant \xi_1 = 2\pi k \geqslant \max\left\{x_0; x_1\right\} :$$

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin^3 x \ g(x)dx\right| \overset{\exists x_0 \ \forall x > x_0 \hookrightarrow g(x) \geqslant \frac{1}{2}}{\geqslant} \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin^3 x dx = \frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \sin^3 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} = \varepsilon.$$

Итак, по критерию Коши интеграл расходится при $\alpha \geqslant 2$.

3. Абсолютная сходимость. Выбор подмножества соответствующих значений параметра. Рассматриваем множество значений параметра, при которых интеграл сходится: $\alpha < 2$.

Выполним оценку сверху модуля подынтегральной функции и найдем все значения параметра, при которых интеграл от мажорирующей функции сходится, используя признак замены на эквивалентную функцию для знакопостоянной мажорирующей функции.

$$\left|\frac{\sin^3 x}{x^2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}\right| \leqslant \frac{1}{x^2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}.$$

Интеграл от полученной эталонной функции сходится только при $2-\alpha > 1$, то есть $\alpha < 1$.

Итак, при $\alpha < 1$ интеграл сходится абсолютно по признаку сравнения.

В силу использования оценки, сходимость при $1 \leqslant \alpha < 2$ не исследована.

4. Условная сходимость на промежутке $[1; 2)$.

Выполним оценку снизу модуля подынтегральной функции. Для упрощения преобразований оценку тригонометрической функции знакопостоянной функций выполним **повышением степени на единицу**. Заметим, что в первом примере возведение функции $\sin x$ в квадрат также удобнее рассматривать, как повышение степени на единицу.

$$\left|\frac{\sin^3 x}{x^2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}\right| \geqslant \frac{\sin^4 x}{x^2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} = \frac{3}{8x^2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} + \frac{\cos 4x - 4\cos 2x}{8x^2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}.$$

(Дважды применена тригонометрическая формула понижения степени).

Тогда при $\alpha \in [1; 2)$ первое слагаемое минорирующей функции сходится, как интеграл от эталонной функции. Интеграл от второго слагаемого сходится по признаку Дирихле при $\alpha < 2$. Дополнительное исследование проводить не нужно.

Существование ограниченной первообразной функции $(\cos 4x - 4\cos 2x)$ рекомендуется доказать самостоятельно.

Интеграл от модуля подынтегральной функции расходится. Исследуемый интеграл сходится условно.

Ответ: при $\alpha \in [1; 2)$ — сходится условно, при $\alpha < 1$ — сходится абсолютно. $\triangleleft_{2.2.}$

Для исследования задач вида $\displaystyle\int_a^{+\infty} f\left(h(x)\right)\ g(x)dx$, то есть, таких, что аргументом функции с ограниченной первообразной является нелинейная монотонная, в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, функция $h(x)$, применяется два типовых приема:
— замена переменной $t = h(x)$ и применение, при возможности, «четырехступенчатой схемы».
— умножение числителя и знаменателя подынтегрального выражения на производную аргумента функции $f(x)$.

Заметим, что похожие задачи, где $h(x)$ не монотонна, могут также относится к методу «выделения главной части».

Рассмотрим особенности применения алгоритма «четырехступерчатой схемы» во втором приеме.

1 и 2. Применение признака Дирихле и отрицания условия Коши.

$$\int_a^{+\infty} f(h(x))g(x)dx = \int_a^{+\infty} \left(f(h(x))h'(x)\right) \cdot \frac{g(x)}{h'(x)}\ dx.$$

Если в некоторых точках $\{x_i\}$, принадлежащих конечному подотрезку промежутка интегрирования функция $h'(x_i)$ — обращается в ноль, предварительно используем аддитивность интеграла и принцип локализации, чтобы не создавать новых особых точек интеграла.

При проверке условий признака Дирихле и отрицания условия Коши будем рассматривать $\tilde{f}(x) = f(h(x))h'(x)$ и $\tilde{g}(x) = \dfrac{g(x)}{h'(x)}$. Далее две части «четырехступенчатой схемы» выполняются для полученных функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$, как обычно.

3 и 4. В доказательствах абсолютной и условной сходимости умножение числителя и знаменателя подынтегральной функции на производную $h'(x)$ не производится. Решение выполняется как рассмотрено ранее.

Рассмотрим прием умножения числителя и знаменателя на производную на примере.

Пример 2.3. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3 \, dx}{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}$.

$\triangleright_{2.3.}$ Аргумент синуса является нелинейной и монотонной функцией.

1. Выбор множества значение параметра, при котором интеграл сходится и доказательство сходимости по признаку Дирихле.

1.1. Пусть $\tilde{f}(x) = x^2 \sin^3 x$ и $\tilde{g}(x) = \dfrac{1}{x^2 \ \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}$. (Числовой множитель на решение не влияет).

1.2. Доказательство существования ограниченной первообразной функции $\tilde{f}(x)$.

$$\exists C = 2 \ \forall x > 1 \hookrightarrow \left| \int_1^x t^2 \sin t^3 dt \right| \overset{u=t^3}{=} \left| \int_1^{x^3} \sin u \ du \right| \leqslant 2.$$

1.3. Исследование предела функции $\tilde{g}(x)$ и выбор значения параметра α_1 совпадает с решением примера 2.

1.4. См. решение примера 2.

Итак, по признаку Дирихле интеграл сходится при $\alpha < 2$.

2. Доказательство, что интеграл расходится при $\alpha \geqslant 2$. Применение отрицания условия Коши.

Как в примере 2 получаем оценку снизу: $\tilde{g}(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

Приведем только оформление решения:

$$\exists \varepsilon = 1 \ \forall x_1 \geqslant 1 \ \exists k = [x_0] + [x_1] + 2 \ \exists \xi_2 = \sqrt[3]{\pi + 2\pi k} \geqslant \xi_1 = \sqrt[3]{2\pi k} \geqslant \max\{x_0; x_1\} :$$
$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} x^2 \sin x^3 \ \tilde{g}(x) dx \right| \overset{\exists x_0 \ \forall x > x_0 \hookrightarrow \tilde{g}(x) \geqslant \frac{1}{2}}{\geqslant} \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} x^2 \sin x^3 \ dx \overset{x^3 = t}{=} \frac{1}{2} \int_{2\pi k}^{\pi + 2\pi k} \sin t dt = 1 = \varepsilon.$$

Итак, по критерию Коши интеграл расходится при $\alpha \geqslant 2$.

3. Абсолютная сходимость. Выбор подмножества соответствующих значений параметра. Рассматриваем множество значений параметра, при которых интеграл сходится: $\alpha < 2$.

$$\left| \frac{\sin x}{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} \right| \leqslant \frac{1}{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} \sim \frac{1}{x^{-\alpha}}.$$

Интеграл от полученной эталонной функции сходится только при $-\alpha > 1$, то есть $\alpha < -1$.

Итак, при $\alpha < -1$ интеграл сходится абсолютно по признаку сравнения.

В силу использования оценки, сходимость при $1 \leqslant \alpha < 2$ не исследована.

4. Условная сходимость на промежутке $[-1; 2)$.

$$\left| \frac{\sin x}{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} \right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}} - \frac{\cos 2x}{2 \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}.$$

Тогда при $\alpha \in [-1; 2)$ первое слагаемое минорирующей функции сходится, как интеграл от эталонной функции. Интеграл от второго слагаемого сходится по признаку Дирихле при $\alpha < 2$. Дополнительное исследование проводить не нужно.

Интеграл от модуля подынтегральной функции расходится. Исследуемый интеграл сходится условно.

Ответ: при $\alpha \in [-1; 2)$ — сходится условно, при $\alpha < -1$ — сходится абсолютно. $\triangleleft_{2.3.}$.

Задание 2.3. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3 \, dx}{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}$, используя замену переменной.

Задание 2.4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x} \, dx}{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}$.

Задание 2.5. Проверить существование ограниченной первообразной функций $\sin x^3$ и $\sin\sqrt{x}$.

Рассмотрим примеры, в которых часть этапов «четырехступенчатой схемы» не используется в решении.

Пример 2.4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\ dx}{e^{\alpha x}}$.

$\triangleright_{2.4.}$ Так как эталонный интеграл от знакопостоянной функции $\dfrac{1}{e^{\alpha x}}$ сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \leqslant 0$, причем при $\alpha \leqslant 0$ предел функции $\dfrac{1}{e^{\alpha x}}$ равен 1 или $+\infty$, то доказываем только абсолютную сходимость и расходимость.

Абсолютная сходимость при $\alpha > 0$ следует по признаку сравнения из оценки $\left|\dfrac{\sin x}{e^{\alpha x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{e^{\alpha x}}$ и сходимости интеграла от мажорирующей функции.

Расходимость при $\alpha \leqslant 0$ следует из оценки $\dfrac{1}{e^{\alpha x}} \geqslant \dfrac{1}{2}$ при $x > 1$ и выполнения отрицания условия Коши:

$$\exists\varepsilon = 1\ \forall x_1 > 1\ \exists k = [x_1] + 1\ \exists\xi_2 = \pi + 2\pi k > \xi_1 = 2\pi k \geqslant x_1 \hookrightarrow$$
$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\sin x}{e^{\alpha x}}\right| \geqslant \frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k}\sin x\ dx = 1 = \varepsilon.$$

Ответ: интеграл сходится абсолютно при $\alpha > 0$. $\triangleleft_{2.4.}$

Задание 2.6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2\ dx}{e^{\alpha x}}$.

Задание 2.7. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^3\ dx}{e^{\alpha x}}$.

Примеры с неполными решениями.

В двух последних примерах, решение которых приводится частично, рассмотрим только некоторые уже изученные приемы в случаях, которые могут вызывать трудности при решении.

Пример 2.5. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\ dx}{x^\alpha}$.

$\tilde{\triangleright}_{2.5.}$ Аргумент синуса — нелинейная и монотонная функция. Используем метод умножения числителя и знаменателя на производную аргумента синуса. Учитывая, что производная $\left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$ обращается в ноль при $x = 1$, воспользуемся принципом локализации и исследуем сходимость интеграла $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\ dx}{x^\alpha}$.

Приведем только анализ условий, при которых выполяется отрицание условия Коши при $\alpha > 0$.

Рассмотрим предварительные оценки отрезка интеграла.

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\tilde{g}(x)\ dx\right| \overset{\exists x_0\ \forall x>x_o \hookrightarrow \tilde{g}(x)>\frac{1}{2}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ dx\right| \overset{t=x+\frac{1}{x}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{\xi_1+\frac{1}{\xi_1}}^{\xi_2+\frac{1}{\xi_2}} \sin t\ dt\right| = \frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \sin t\ dt = 1 = \varepsilon$$

Введем вспомогательные обозначения $\gamma_1 = 2\pi k$ и $\gamma_2 = \pi + 2\pi k$.

Тогда точки ξ_i найдем из уравнений, сводящихся к квадратным $\xi_i + \dfrac{1}{\xi_i} = \gamma_i$ при $i = \overline{1,2}$. Имеем для положительных корней формулы: $\xi_i = \dfrac{\gamma_i + \sqrt{\gamma_i^2 - 4}}{2}$.

Упрощающими оценками, например, $\xi_1 + \dfrac{1}{\xi_1} > \xi_1 > \pi k > k = [x_0] + [x_1] + 2$ завершаем подбор всех параметров. $\tilde{\lhd}_{2.5.}$

Задание 2.8. Выполнить полное решение задачи из примера 6, в том числе, оформление доказательства выполнения отрицания условия Коши.

Пример 2.6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha\ \cos x\ \sin\frac{1}{x}\ dx$.

$\tilde{\rhd}_{2.6.}$ Рассмотрим доказательство монотонности функции $g(x) = x^\alpha\ \sin\frac{1}{x}$ при $\alpha < 1$. Для этого, аналогично примеру 2, применим прием выделения главной части.

$$\left(x^\alpha\ \sin\frac{1}{x}\right)' = x^\alpha\ \cos\frac{1}{x}\ \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \alpha x^{\alpha-1}\ \sin\frac{1}{x} = x^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{x}\ \cos\frac{1}{x} + \alpha\sin\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{x}\ \left(1 - o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \alpha\ \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = x^\alpha\left(-1+\alpha+o\left(1\right)\right), \quad x \to +\infty.$$

Знак выражения в скобках определяет главная часть при достаточно больших значениях переменной x. Учитывая принцип локализации, отрицательность производной при рассматриваемых значениях параметра $\alpha < 1$ доказана. $\tilde{\lhd}_{2.6.}$

Задание 2.9. Выполнить полное решение задачи из примера 7.

Теоретические основы метода выделения главной части.

Метод опирается на теоремы о сходимости (условной и абсолютной сходимости) интеграла от суммы функций в зависимоти от типа сходимости интегралов от слагаемых.

Повтрим теорему сложения:

Теорема 2.3. Пусть $f = f_1 + f_2$. Тогда,

1) $\displaystyle\int_a^b f_i\ dx,\ i = \overline{1,2}$ — сходятся, то $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — сходится;

2) один из интегралов $\displaystyle\int_a^b f_i\ dx,\ i = \overline{1,2}$ — сходятся, другой расходится, то $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — расходится;

3) $\displaystyle\int_a^b f_i\ dx,\ i = \overline{1,2}$ — расходятся, то для $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — ничего нельзя сказать.

Теорема 3.1. Пусть $f = f_1 + f_2$. Тогда,

1) $\displaystyle\int_a^b f_i\ dx,\ i = \overline{1,2}$ — сходятся абсолютно, то $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ — сходится абсолютно;

2) один из интегралов $\int_a^b f_i\ dx,\ i=\overline{1,2}$ — сходятся абсолютно, другой сходится условно, то $\int_a^b f\ dx$ — сходится условно;

3) $\int_a^b f_i\ dx,\ i=\overline{1,2}$ — сходятся условно, то для $\int_a^b f\ dx$ — ничего нельзя сказать о типе сходимости.

Задание 3.1. Докажите теоремы 2.3 и 3.1.

Описание метода. Подынтегральная функция представляется в виде суммы двух слагаемых, интеграл от одного из которых сходится условно, от другого — абсолютно. Для получания суммы слагаемых, как правило, используется представление формулой Тейлора, где остаточный член — О-большое от величины, стремящейся к нулю.

Примеры.

Пример 3.1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимоть интеграл $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$.

$\triangleright_{3.1.}$ Применить признак Дирихле нельзя, так как нет произведения функций, удовлетворяющих условиям признака Дирихле.

Представим подынтегральную функцию формулой Тейлора так, чтобы интеграл от последнего значимого слагаемого схоился абсолютно. Остаточный член запишем в виде О-большого от этого слагаемого:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^3 x}{x^3}+\mathrm{O}\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)=\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^3 x}{x^3}\left(1+\mathrm{O}(1)\right).$$

Исследуем каждое слагаемое на тип сходимости:

$\left|\frac{\sin^3 x}{x^3}\left(1+\mathrm{O}(1)\right)\right| \leqslant \frac{C}{x^3}$ — сх. абс.

Условную сходимоть интеграла от $\frac{\sin x}{x}$ доказываем в два шага — применяем признак Дирихле (применить самостоятельно) и выполняем (оценку снизу для доказательства расходимости интеграла от модуля (выполнить самостоятельно).

Исследуемый интеграл сходится условно.$\triangleleft_{3.1.}$

Пример 3.2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} tg\left(\frac{\cos x^5}{\sqrt{x}}\right) dx$.

$\triangleright_{3.2.}$ Заметим, что интеграл от второго значимого члена представления формулой Тейлора подынтегральной функции, то есть от $\frac{\cos^3 x^5}{x^{3/2}}$ — сходится абсолютно.

Представим подынтегральную функцию формулой Тейлора

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\cos x^5}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\cos x^5}{\sqrt{x}}+\frac{\cos^3 x^5}{x^{3/2}}\left(1+\mathrm{O}(1)\right).$$

Докажем абсолютную сходимость второго слагаемого представления, то есть суммы второго члена и остаточного члена: $\left|\frac{\cos^3 x^5}{x^{3/2}}(1+\mathrm{O}(1))\right| \leqslant \frac{C}{x^{3/2}}$.

Важно: отбрасывать без обоснования остаточный член представления в интеграле от знакопеременной функции нельзя. См. пример 3.3.

Исследуем на сходимость первый член представления. В соответствии с теоремой 3.1 этот член определит тип сходимости всего интеграла. Выполним замену переменной в несобственном интеграле:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^5}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{c} y=x^5 \\ dx=\frac{dy}{5y^{4/5}}\end{array}\right|=\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{5y^{9/10}}dx.$$

Применяя признак Дирихле и оценку снизу модуля интеграла доказываем, что интеграл сходится условно (доказать самостоятельно).

Исследуемый интеграл сходится условно.$\triangleleft_{3.2.}$

10pt

Рассмотрим пример, который показывает, что в интегралах от знакопеременных функций нельзя пользоваться заменой на эквивалентные.

Пример 3.3. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}$.

$\triangleright_{3.3}$ Заметим, что при $x \to +\infty$ $\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ и интеграл от последней функции сходится условно (доказать самостоятельно).

Докажем, что интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}$ — расходится:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + h(x)\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + H(x)).$$

Для функции $H(x)$ имеет место оценка $|h(x)| \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x}}$ — интеграл от слагаемого сходится абсолютно.

Интеграл от первого слагаемого $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x}$ — расходится, так как интеграл от $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ — сходится, а интеграл $\frac{\sin^2}{x}$ — расходится.

Исследуемый интеграл расходится. Замена на эквивалентную функцию не допустима! $\triangleleft_{3.3.}$

Литература:

1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интеграла. Ряды: Учеб. пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с. —ISBN 5-9221-0307-5.