Министерство науки и образования Российской Федерации

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА?

Методическое пособие

составитель
Бурский Владимир Петрович

Долгопрудный
МФТИ 2018

УДК 517.9

Что такое математическая физика? Методическое пособие (для студентов) / составитель В.П. Бурский.
– Долгопрудный: МФТИ, 2018. – 64 с.

В пособии собраны статьи и выдержки из статей специалистов в различных областях математической физики о предмете их научной деятельности и о предмете “математическая физика ” как таковом. Пособие направлено на то, чтобы объяснить студенту структуру предмета, описать его основные составные части и сориентировать в обучении и будущей научной деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Перед вами сборник статей разных авторов, вышедших в последние годы в различных книгах и журналах и отобранных составителем с тем, чтобы попытаться ответить на вопрос из заглавия этого пособия: Что такое “математическая физика”? Нетрудно догадаться, что ответ на этот, на первый взгляд, простой вопрос далеко не прост. Ведь даже если стать на позицию первоначального смысла этого словосочетания, означавшего “физические работы, использующие математические методы”, или более позднего понимания “математические методы, использующиеся в физике”, то, наблюдая, что физика, при всей её единости, разбита на отдельные науки (типа динамика жидкости, небесная механика, электродинамика, оптика, статистическая механика, квантовая механика и т.д.), имеющие каждая свои уравнения, можно заподозрить, что эти науки используют каждая свои математические методы. Но, кроме того, как увидит заинтересованный читатель ниже, имеются разные понимания словосочетания “математическая физика”. При таком разнообразии подходов к вопросу из заглавия у нас, однако, оставалась возможность привести точки зрения выдающихся специалистов в различных областях математической физики на предмет их научной деятельности. Эта возможность и реализована в настоящем издании. Нет, вероятно, нужды особо объяснять, что в подборе материала составитель руководствовался своим пониманием структуры и важности компонентов этого научного образования, своими вкусами, а также тем обстоятельством, что в небольшое издание принципиально не попадут даже упоминания о многих важных науках, несомненно принадлежащих к рассматриваемому кругу вопросов. Так, вне рамок пособия остались термодинамика и статистическая механика, статистическая физика и физика твёрдого тела, динамика твёрдого тела и астрофизика, теория пластичности и модели великого объединения и многое другое. Вместе с тем, читатель сможет ознакомиться с некоторыми мнениями и обзорами некоторых важнейших наук, список которых имеется в содержании. Отметим, что большая часть статей взята из книги “Математическая физика. Энциклопедия. Москва, 1998 ”, выпущенной ограниченным тиражом в 2000 экземпляров и уже ставшей библиографической редкостью, поэтому составитель надеется, что настоящее издание в какой-то мере смягчит трудности доступа к этому изданию. Подчеркнём, что авторами статей являются выдающиеся учёные, специалисты в той области, которую они освещают. Среди авторов статей академик Л.Д. Фаддеев, за выдающиеся достижения в различных областях математической физики он был избран президентом Международного Математического Союза, был директором Санкт-Петербургского отделения Математического Института им. В.А. Стеклова и Э. Виттен – филдсовский лауреат за работы по математической физике, ныне – один из самых ярких исследователей теории струн в физике элементарных частиц. Академик Н.Н. Боголюбов за работы по математической физике был избран академиком-секретарём отделения математики Академии Наук СССР, директором Объединённого Института Ядерных Исследований стран-членов СЭВ и директором Математического Института им. В.А. Стеклова, академик В.С. Владимиров за работы по математической физике был избран академиком-секретарём отделения математики Академии Наук СССР и директором Математического Института им. В.А. Стеклова и т.д.

Составитель надеется, что настоящее издание будет способствовать знакомству заинтересованного читателя с математической физикой и её основными составными частями.

Что такое современная математическая физика? 1999 г.[1]

Л.Д. Фаддеев

Когда кто-нибудь интересуется направлением моей научной работы, я называю себя специалистом по математической физике. Поскольку я занимаюсь наукой уже более 40 лет, у меня сложилось определенное понимание этого сочетания слов "математическая физика". Циники или пуристы могут твердить, что это и не математика, и не физика, добавляя замечания различной степени ехидности. Естественно, эти замечания нуждаются в ответе, и в этой небольшой статье я хочу кратко изложить свое понимание вопроса, внеся тем самым некоторый вклад в дискуссию.

Положение дел усложняется тем, что термин "математическая физика" (ниже мы будем часто использовать сокращение МФ) используется в очень разных смыслах и может иметь совершенно различное содержание. Это содержание меняется со временем и зависит от места.

Я не слишком внимательно изучал историю науки, но, насколько я понимаю, в начале нашего (еще XX) века термин МФ был практически эквивалентен понятию теоретической физики. Не только Анри Пуанкаре, но и Альберта Эйнштейна называли математическими физиками. Открывающиеся вновь физические кафедры теоретического направления в Англии или Германии получали название кафедр математической физики. Из документов в архиве Нобелевского комитета следует, что МФ имела полное право участвовать в тексте номинаций и обсуждении кандидатов на Нобелевскую премию по физике [I]. Грубо говоря, к понятию МФ подходили теоретические работы, использующие математические формулы.

Однако в процессе небывалого расцвета теоретической физики в 20-30-е годы произошло существенное разделение терминов теоретическая и математическая физика. Для многих МФ стала сводиться к важному, но вспомогательному курсу "Методы математической физики" с набором полезных математических приемов. Классическим примером является курс Ф. Морса и Г. Фёшбаха [2], рассчитанный на широкий круг физиков и инженеров.

В свою очередь возникла МФ в математическом понимании как теория уравнений в частных производных и вариационного исчисления. Монографии Р. Куранта и Д. Гильберта [3] или С.Л. Соболева [4] представляют собой выдающиеся примеры такого толкования МФ. Теоремы существования и единственности, основанные на вариационных принципах, априорных оценках и теоремах вложения функциональных пространств, составляют основное содержание этого направления. Как ученик О.А. Ладыженской, я был погружен в эту среду начиная с 3-го курса физического факультета Ленинградского университета. Моя соученица Н.Н. Уральцева заведует в Университете кафедрой математической физики именно в таком понимании.

Источником задач для МФ в указанном смысле являются главным образом геометрия и такие разделы классической механики сплошных сред, как гидродинамика и теория упругости. Близкой по духу, хотя и не по применяемым методам, является часть МФ, порожденная проблемами квантовой теории, которая активно и самостоятельно развивается начиная с 60-х годов. Здесь основным аппаратом является функциональный анализ, включая спектральную теорию операторов в гильбертовом пространстве и математическую теорию рассеяния, теорию групп Ли и их представлений. Главным предметом исследования является оператор Шрёдингера. Кафедра математической физики физического факультета С.-Петербургского университета, основанная в свое время В.И. Смирновым при поддержке В.А. Фока, работает и учит в основном в этом направлении. Оно же объединяет большинство членов Международной ассоциации математической физики, созданной в 70-е годы благодаря усилиям международной группы ученых, в том числе Н.Н. Боголюбова, В.С. Владимирова, М. Флато, Э. Либа, имевших более широкие взгляды. Однако здесь мы опять видим теоремы, строго подтверждающие результаты, в основном уже известные или понятные физикам.

Моё понимание роли МФ и тем самым содержания этого термина отлично от

[1] Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, 1999, т. 226, с. 7-10

приведенных выше. Я считаю задачей МФ использование математической интуиции для вывода действительно новых результатов в фундаментальной физике. В этом смысле МФ является конкурентом теоретической физики. Их задачи в раскрытии законов строения материи не отличаются. Однако методы и даже само отношение к важности того или иного направления могут различаться коренным образом.

Здесь уместно сказать, в каком смысле я использую термин "фундаментальная физика". Прилагательное "фундаментальный" в применении к классификации науки имеет массу толкований. В широком смысле оно используется для характеристики исследований по получению новых закономерностей в окружающей среде. В узком смысле оно остается лишь за поисками основных законов, к которым эти закономерности должны сводиться. Так, все химические закономерности в принципе выводимы из уравнения Шрёдингера для системы электронов и ядер. Другими словами, фундаментальные основы химии в узком смысле уже открыты. Это, конечно, не лишает химию права называться фундаментальной наукой в широком смысле толкования этого термина.

То же можно сказать о механике и современной физике конденсированного состояния. Хотя большинство физических исследований сосредоточено в наше время в этой последней области, ясно, что все ее успехи, включая теорию сверхтекучести и сверхпроводимости, теорию конденсации Бозе-Эйнштейна и квантового эффекта Холла, имеют фундаментальную основу в нерелятивистской квантовой теории многих частиц.

Незавершенной фундаментальной проблемой в узком смысле остается физика элементарных частиц. Это ставит данный раздел физики в особое положение. И именно здесь современная МФ имеет наибольшие шансы для прорыва.

Дело в том, что вплоть до нашего времени вся физика развивалась по традиционному кругу — эксперимент – теоретическое толкование – новый эксперимент. Это относится и к физике элементарных частиц, основанной на прогрессе ускорительной техники. Огромная стоимость и ограниченные возможности последней скоро станут непреодолимым препятствием для дальнейшего развития. И здесь математическая интуиция может стать адекватной заменой. Об этом неоднократно говорили знаменитые физики-теоретики, имеющие математические наклонности, П.Дирак и С.Н. Янг [5, 6].

Я считаю, что драматическая история утверждения калибровочных полей в качестве основного средства описания взаимодействия в квантовой теории поля является хорошей иллюстрацией влияния математической интуиции на развитие фундаментальной физики. Калибровочные поля, или поля Янга-Миллса, были введены в 1953 г. в короткой работе С.Н. Янга и Р. Миллса [7], посвященной обобщению электромагнитного поля и соответствующего принципа калибровочной инвариантности. Геометрический смысл этого принципа для электромагнитного поля был выяснен еще в конце 20-х годов благодаря работам В.А. Фока и Г. Вейля [8, 9]. Ими была установлена аналогия между калибровочной (или градиентной в терминологии В.А. Фока) инвариантностью электродинамики и принципом эквивалентности в теории тяготения Эйнштейна. Калибровочная группа в электродинамике коммутативна, она соответствует умножению комплексного поля заряженной частицы на фазовый множитель. В середине 30-х годов, после открытия изотопического спина, О. Клейн сделал попытку ввести соответствующую некоммутативную калибровочную группу [10] и сопутствующее ей векторное поле. Предложение О. Клейна было отвергнуто более ортодоксальными физиками-теоретиками во главе с В. Паули. Для этого были вполне достойные причины, основанные на опыте и физической интуиции. Действительно, кванты калибровочного векторного поля в рамках теории возмущений соответствуют безмассовым частицам и порождают дальнодействующее взаимодействие соответствующих зарядов. В природе существует только одно такое поле и соответствующие частицы и взаимодействие, а именно электромагнитное поле, фотоны и кулоновское взаимодействие. Таким образом, красивая математическая схема противоречит опыту и должна была быть отброшена и забыта.

Работа Янга-Миллса в 1953 г. была более продвинута, чем предложение Клейна, но указанные возражения относились к ней в полной мере. Поэтому она не вышла немедленно на первый план, но сама идея зарядового пространства с некоммутативной группой симметрии приобретала все большую популярность в связи с появлением постоянно увеличивающегося числа новых элементарных частиц и поисками универсальной схемы их классификации. Однако именно на этом этапе решающую роль в продвижении полей Янга-Миллса сыграла математическая интуиция.

В начале 60-х годов Р. Фейнман занимался переносом своей схемы квантования электродинамики на теорию тяготения Эйнштейна. Чисто техническое затруднение — большое количество тензорных индексов — замедляло его работу. По совету М. Гелл-Манна он использовал более простой случай полей Янга-Миллса для отработки техники квантования и заметил ее существенное отличие от случая электродинамики с коммутативной калибровочной группой. Бессмысленность поля Янга-Миллса не стала препятствием для его использования в качестве математической схемы.

Работа Фейнмана [11] стала одним из отправных пунктов для моей работы по квантовой теории поля, которую я начал в середине 60-х годов вместе с Виктором Поповым. Другим не менее важным пунктом была монография А. Лихнеровича [12], посвященная теории связностей в векторных расслоениях. Из книги Лихнеровича ясно следовало, что поле Янга-Миллса имеет четкий геометрический смысл: оно определяет связность в расслоении, базой которого является пространство-время, а слоем — линейное пространство представлений зарядовой группы. Таким образом поле Янга-Миллса естественно встало в ряд полей, имеющих геометрическое происхождение, между электромагнитным полем, которое является его частным случаем с одномерным зарядом, и полем тяготения Эйнштейна, которое имеет дело с расслоениями, ассоциированными с касательным расслоением к риманову многообразию пространства-времени.

Мне стало ясно, что такая возможность не должна быть упущена, и несмотря на нерешенную проблему массы квантов поля Янга-Миллса, следует активно им занимается. Корректные правила квантования поля Янга-Миллса, полученные В. Поповым и мной в 1966 -- 1967 гг. [13, 14], не привлекли внимания физиков. В дальнейшем их продвижении в физику важную роль сыграли работы Г. 'т Хоофта [15], посвященные теории полей Янга-Миллса, взаимодействующих с полем Хиггса, и открытие размерной трансмутации (термин С. Колемана [16]). Проблема массы была решена в первом случае при помощи спонтанного нарушения симметрии и во втором случае на основе асимптотической свободы. Описание этого развития дано многими его участниками, и я ограничусь двумя ссылками исторического характера на работы Г. 'т Хоофта [17] и Д. Гросса [18]. Результатом этого развития стала Стандартная Модель взаимодействия элементарных частиц, которая с середины 70-х годов и до сих пор остается фундаментальной основой физики высоких энергий. Для нашего изложения важно, что работа [13], основанная на математической интуиции, предшествовала работам в традициях теоретической физики.

Стандартная Модель не завершила создания фундаментальных основ физики высоких энергий. Гравитационное взаимодействие (имеющее, как отмечено выше, иное геометрическое толкование) в нее не входит. Объединение квантовых принципов, релятивизма и гравитации не осуществлено до сих пор. Есть все основания считать, что здесь современная математическая физика и ее интуиция сыграют ведущую роль. Действительно, новое поколение физиков-теоретиков получило несравнимо более высокое математическое образование и не подвержено давлению авторитетов, отстаивающих чистоту физического мышления и/или терминологии. Далее многие профессионалы-математики, захваченные красотой физических задач и применяемых методов, перешли на позиции математической физики. Объединение этих двух групп представляет огромную интеллектуальную силу. В следующем веке мы узнаем, способна ли эта сила заменить традиционную экспериментальную основу развития физики и соответствующую ей интуицию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Nagel B.* The discussion conserning the Nobel Prize for Max Planck // Science technology and society in the time of Alfred Nobel.N.Y..: Pergamon Press, 1982.

[2] *Morsee f., Feshbach H.* Methods of theoretica1 physics. N.Y.: McCraw Hill 1953.

[3] *Courant R., Hilbertl D.:* Metoden der mathematischen Physik. Berlin: Springer-Verl., 1931(B 1), 1937(B 2).

[4] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд. ЛГУ, 1950.

[5] *Dirac P.* Quatised singularities in the electromagnetic fields // Proc. Roy. Soc. London A. 1931. V. 133. P. 60-72.
[6] Yang C.L., Selected papers 1945-1980 with commentary. San Francisco: Freeman, 1983.
[7] Yang C.L., Mills R. Conservation of isotopic spin and isotopic gange invariance // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191-195.
[8] *Fock V.* L'equation d'onde de Dorac et la geometrie de Riemann// J. phys et rad. 1929. V. 70. P. 392-405.
[9] Weyl *H.* Elecron and gravitation // Ztschr. Phys. 1929. Bd. 56. S. 330-352.
[10] *K1ein O.* On the theory of charget fieds: New Theories in Physics, Warsaw (Pol), 1938 // Surv. High Energy Phys. 1986. V. 5. P. 269.
[11] F*eynman R.P.* Quantum theory of gravitation // Acta phys. Po1on. 1963. V. 24. P. 697-722.
[12] *Lichnerovich A.* Theory g1oЬa1e des connexions et groupes d'holonomie. Roma: Ed. Cremonese, 1955.
[13] *Faddeev L., Popov V. F*eynmann diagrams for the Yang-Mills field // Phys. Lett B. 1967. V. 25. P. 29-30.
[14] *Попов В., Фаддеев Л.* Теория возмущений для калибровочно инвариантных полей: Препринт ИТФ-67-36. Киев, 1967.
[15] *'t Hooft. G.* Renormalizable Lagrangians for massive Уang-Mills field // Nucl. Phys. B. 1971.V. 35. P. 167-188.
[16] *Co1eman S.* Secret symmetries: An introduction to spontaneous symmetry breakadown and gauge fields: Lecturen given at 1973 Intern. Sиmmer Scoo1 in Phys. Ettore Magorana. Erice (Sicily), 1973 // Erice Subnucl. Phys. 1973.
[17] *'t Hooft. G.When was asymptotic freedom discovered* ? Rehabilitation of quantum field theory: Preprint, 1998. hep-th/ 9808154.
[18] *Gross D.* Twenty years of *asymptotic freedom* : Preprint, 1998. Hep-th / 9809080.

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ БОГОЛЮБОВ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ [1]

В. С. Владимиров

Органическое слияние математики и физики в творчестве Н.Н. Боголюбова позволило ему внести решающий вклад в развитие теоретической физики и фактически заложить основы современной математической физики. Уже в 1963 г. Н.Н. Боголюбов имел полное основание опубликовать такое утверждение: "Основные понятия и методы квантовой теории поля становятся все более математическими". Назрела настоятельная необходимость в новом журнале по теоретической и современной математической физике, и такой журнал был создан по инициативе Н.Н. Боголюбова в 1969 г. — это "Теоретическая и математическая физика", в настоящее время всемирно известный журнал. Вскоре назрела также необходимость в создании регулярно действующей международной конференции по современным проблемам теоретической и математической физики, и по инициативе Н.Н. Боголюбова первая такая конференция была проведена в декабре 1972 г. в Москве. Далее — Варшава (1974), Киото (1975), Рим (1977), Лозанна (1979), Западный Берлин (1981), Боулдер (1983), Марсель (1986), Сванси (1988), Лейпциг (1991), Париж (1994), Брисбен (1997). В программном выступлении на открытии Международного совещания по проблемам квантовой теории поля (Алушта, май 1981) Н.Н. Боголюбов так оценивал положение в современной математической физике:

"У нас на глазах за последние годы оформилась совершенно новая область науки, которую уместнее всего назвать современной математической физикой.

Она имеет то же генетическое происхождение, что и классическая математическая физика. Но если теория дифференциальных уравнений в частных производных порождалась задачами классической физики: теорией потенциала, теорией распространения магнитных волн и т.п., то оказывается, что современная теоретическая физика — квантовая теория систем с бесконечным числом степеней свободы — требует иных, более абстрактных и современных математических средств. Это в первую очередь теория обобщенных функций, функциональный анализ и теория операторов, теория представлений групп и алгебр, топологическая алгебра и т.п.

Решение новых физических задач квантовой теории поля сначала искали на путях усовершенствования обычных методов квантовой механики. В это время физики успели убедиться, что для получения разумных ответов на свои вопросы они должны глубже понять математическую природу объектов исследования таких, как обобщенные функции или неограниченные операторы, повысить принятый стандарт доказательной силы аргументации.

---

[1]Фрагмент статьи: *В. С. Владимиров* “Николай Николаевич Боголюбов и математика”, Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, 2000, т. 228

В дальнейшем для того, чтобы освободиться от чрезмерной и иногда бессмысленной детализации, стали изыскивать аксиоматические пути построения теории. Тогда стало очевидно, что современные математические методы позволяют получать иногда очень сильные результаты. По существу в этом и состояло различие между школами Боголюбова и Ландау в 40-50-е годы. Время рассудило спор — уже давно физики-теоретики широко используют самые абстрактные разделы математики — от машины Тьюринга до *p*-адических чисел. Теперь можно сказать больше: "Теоретическая физика все в большей степени становится математической физикой". Были случаи, когда ЖЭТФ отклонял работы сотрудников школы Боголюбова на том основании, что они слишком "математичны". Так, один аспирант просил меня "испортить" работы, выбрасывая из них такие "крамольные" слова, как "теорема", "доказательство", "необходимо и достаточно" и др. Например, на Рочестерской конференции по физике высоких энергий (Чикаго, сентябрь 1972) некоторые доклады по математической физике не принимались, как слишком математизированные результаты. Вспомним в этой связи о теории многих комплексных переменных или о понятии слабой эквивалентности представлений. Вспомним, наконец, что ряд специфических квантовых явлений является прямой физической иллюстрацией знаменитой теоремы фон Неймана о существовании неэквивалентных представлений в случае бесконечного числа степеней свободы.

Упомянутые примеры относятся и к квантовой электродинамике, и к теории сильных взаимодействий при высоких энергиях, и к задачам статистической физики. В частности, в физике сильных взаимодействий ввиду сложности динамической картины особенно полезны оказались дисперсионные методы, основанные на общих аналитических свойствах амплитуды процесса. Они имеют уже сейчас непосредственные приложения к потребностям экспериментальных исследований.

Мы находимся в самом начале пути. Достаточно вспомнить, что вне теории возмущений еще не построено ни одного нетривиального примера квантовой теории поля, достаточно близкого к реальному физическому миру в четырех измерениях.

Обращение физиков к методам современной математики, интерес математиков к задачам квантовой физики взаимно плодотворны.”

МАГИЯ, МИСТЕРИЯ и МАТРИЦА[1]

Э. Виттен.

Гиббсовская лекция. *Балтимор. Январь 1998.*

В двадцатом столетии поиск лучшего понимания законов природы по большей части проводился в направлении двух больших теорий, а именно, общей теории относительности и квантовой механики. Общая теория относительности – это, конечно, эйнштейновская теория вместе с некоторыми результатами о кривизне пространства-времени, имеющими гравитационную интерпретацию; математическим каркасом её является риманова геометрия. Если ранее пространство-время понималось как некая неизменная изначально данная арена, в которой разворачиваются физические события, то в общей теории относительности пространство-время развивается динамично, в соответствии с уравнениями Эйнштейна, физические задачи, относящиеся к этой теории, решаются заданием начальных условий, определяющих развитие пространства-времени в будущем. Влияние общей теории относительности на математику двадцатого столетия весьма широко. Тот факт, что риманова геометрия является центральной в физике, дал мощный импульс росту математических исследований в этой области, которая развилась в одну из наиболее плодотворных ветвей математики с приложениями во многих других областях.

Если общая теория относительности в естествознании используется для

[1] Перевод статьи: **E.WITTEN** "MAGIC, MYSTERY AND MATRIX."Notices of AMS, V.45, No.9, P.1124-1128, перевод выполнил Бурский В.П.

изучения поведения астрономических тел и вселенной как целого, то квантовая механика является основой понимания поведения атомов, молекул, субатомных частиц. У квантовой теории более сложная биография, чем у общей теории относительности, и в некотором смысле наибольшее её влияние на математику принадлежит XXI веку. Квантовая теория частиц, которая обычно называется нерелятивистской квантовой механикой, была создана в её современном виде где-то в 1925 году и сильно повлияла на развитие функционального анализа и других областей математики. Но более глубокой частью квантовой теории является квантовая теория поля, которая возникла как некоторая комбинация квантовой механики и специальной теории относительности (предшественницы общей теории относительности, в которой скорость света одна и та же в каждой инерциальной системе отсчета, но пространство-время ещё плоское и задано изначально). Эта более сложная теория развивается начиная с 1920 года по настоящее время, охватывая большую часть того, что нам известно о законах физики, исключая гравитацию. Это развитие отмечено рядом вех : теорией антиматерии, появившейся около 1930 года; более точным описанием атома, которое нам дала квантовая теория поля около 1950 года; стандартной моделью физики частиц (управляющей законами сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий), возникшей около 1979 года; новыми предсказаниями нашего времени, которые надеются проверить в современных или будущих экспериментах на ускорителях.

Квантовая теория поля – очень богатый объект для математики, равно как и для физики. Однако её развитие осуществлялось преимущественно физиками, и сейчас еще трудно назвать её строгой математической теорией, несмотря на важные продвижения в конструктивной теории поля. Воздействие этой теории на математику ещё впереди. Во многих активно развивающихся областях математики изучаются задачи, имеющие естественную квантово-полевую постановку. Примерами этого являются теория Дональдсона о 4-мерных многообразиях, полиномы Джонса узлов и их обобщения, зеркальная симметрия комплексных многообразий, эллиптические когомологии, многие аспекты теории аффинных алгебр Ли. В значительной степени эти направления развиваются медленно, с трудностями в понимании связей между ними, поскольку их естественная среда в квантовой теории поля не является ещё частью математической теории. Проводя образную аналогию, мы как бы видим горную цепь, находящуюся в тумане, и лишь несколько изолированных вершин видно достаточно ясно. Не видна большая часть каждой горы, не видимо ещё квантово-полевое основание и огромное количество математических сокровищ внизу. Имеет хождение сейчас надёжное, хотя, возможно, несколько вызывающе звучащее предсказание о математике XXI века: попытки найти точки соприкосновения с квантовой теорией поля и взаимопроникновение в различных частях будут одной из её главных тем.

$1/r^2$-Сингулярность

Чтобы иметь возможность двигаться дальше, обсудим глубже квантовую механику. Её начальный период и последующее развитие во многом были связаны с законом обратного квадрата в гравитации и электричестве. Гравитационная сила между двумя массами M_1 и M_2 , находящимися на расстоянии r , равна $F = -GM_1M_2/r^2$ с постоянной Ньютона G, а электрическая сила между двумя зарядами q_1 и q_2 , находящимися на расстоянии r , выражается похожей формулой $F=q_1q_2/r^2$. Для элементарных частиц обычно $q_1q_2 > GM_1M_2$, что объясняет, почему гравитацию, вообще говоря, игнорируют на атомных расстояниях, но для астрономических тел обычно $GM_1M_2 > q_1q_2$, поэтому гравитация доминирует на больших расстояниях. Очевидно, что закон обратного квадрата означает, что сила стремится к бесконечности при $r \to 0$. Эта сингулярность не несла с собой особых трудностей Ньютону, поскольку, например, Луна всегда была на безопасном расстоянии от Земли, далёком от $r = 0$. Но вот для электрона и атомного ядра, которые стали исследовать почти столетие назад, $1/r^2$-сингулярность стала камнем преткновения. Простые вычисления, основанные на физике XIX столетия, показали, что в атоме электрон должен, двигаясь по спирали, упасть на ядро примерно за 10^{-9} секунды, чего в действительности не происходит.

Чтобы устранить этот парадокс, была создана квантовая механика. В квантовой механике координата x и импульс q частицы не коммутируют, подчиняясь соотношению Гейзенберга $[p,x]= - i\hbar$, где $\hbar$ –постоянная Планка. Это соотношение придает некоторую "размазанность", рассредоточенность электрону и другим частицам. Из-за этой рассредоточенности в реальности r не равняется нулю, и тем самым парадокс устраняется. То, что сейчас обсуждалось, является нерелятивистской квантовой механикой или квантовой механикой частиц. Эта теория была развита около 1925 года и имела время, чтобы стать более или менее математической. Общая теория эллиптических операторов на многообразии является математической основой квантовой механики, теория представлений групп также тесно связана с ней.

Квантовая теория поля

Попытки привлечь релятивизм к описанию явлений микромира выглядят ещё более вызывающе. В специальной теории относительности нельзя принять мгновенности действия на расстоянии, что предполагается в законах обратного квадрата. Вместо этого сила должна порождаться полем, введение которого требует выполнения некоторых соотношений неопределённости, аналогичных соотношению Гейзенберга. Всё становится более сложным и интересным. Из соотношений неопределённости следует, что поле как бы приходит квантами, которые наблюдаются как частицы нового сорта – как фотоны в случае электромагнитного поля. Вскоре выяснилось, что подобно классическим электромагнитным волнам эти кванты могут рождаться и уничтожаться. Это привело к концепции антиматерии и предсказаниям рождения и уничтожения материи и антиматерии. Здесь мы попадаем в странный и интересный мир, свойства и само существование которого являются вызовом математике. Хотя квантовая механика была изобретена как способ избежать $1/r^2$-сингулярности, получилось так, что, поскольку к теории были привлечены релятивистские соображения, то квантовая механика не устранила автоматически все проблемы, связанные с сингулярностью. Многие продвижения в физике с 1930 года относились к $1/r^2$-проблеме в свете объединения квантовой механики и специальной теории относительности. Среди вех развития, о которых говорилось выше, были такие:

– около 1950 года ренормализационная теория и квантовая электродинамика дали более точную теорию электронов и атома;

– в 1967-73 годах неабелевы калибровочные теории были включены в аппарат описания природы (давая электрослабую часть в стандартной модели), решая проблему $1/r^2$-сингулярности в случае слабого взаимодействия;

– в 1973 году была исследована и использована асимптотическая свобода в неабелевых калибровочных теориях, что позволило одолеть $1/r^2$-проблему в случае ядерных сил. Эта теория завершила построение стандартной модели.

Эти продвижения заложили основу новых отношений между квантовой теорией поля и геометрией. Неабелевы калибровочные теории вместе с другими компонентами, которые ещё не упоминались, постепенно вели физиков к постановкам новых вопросов, привлекающих всё больше геометрические концепции и технику, не использовавшиеся ранее в физике. В то же время эта связь не была односторонней, и методы квантовой теории поля позволили получить новые результаты в геометрии. И хотя квантовая теория поля уже довольно немолода, её влияние на математику появилось совсем недавно и главные результаты этого влияния находятся в будущем.

Квантовая гравитация

Отмеченные выше продвижения, приведшие к стандартной модели физики частиц, объединили большинство известных в физике феноменов, исключая гравитацию, под одной крышей. Остаётся лишь включить гравитацию, но это значит присоединить объекты совершенно иной природы. На первый взгляд гравитация является всего лишь другим примером известной $1/r^2$-сингулярности. Гравитация и электростатика действительно во многом очень похожи, но соотношения между ними не столь просты, как это можно предположить из факта однородности управляющих ими законов обратного квадрата. Так, например, уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) линейны, а уравнения Эйнштейна гравитационного поля весьма нелинейны. Квантовой рассредоточенности, следующей из соотношений неопределённости, по-видимому, недостаточно, чтобы решить проблему $1/r^2$-сингулярности для гравитационной силы. Решение этой проблемы– объединение квантовой механики и гравитации – устранит, вероятно, главное препятствие к унификации сил природы. Создание квантовой гравитации важно и для того, чтобы ответить на многие вопросы общего плана, которые может задать любой человек, даже не имеющий специального физического образования. Астрономы, например, наблюдают, что вселенная сейчас расширяется, поэтому можно говорить о начале расширения как о взрыве, называемом часто большим взрывом. Но рассуждения о большом взрыве кажутся парадоксальными. Что запустило часы ? Что было перед большим взрывом ? Обе теории : и гравитация, и квантовая механика важны для понимания процессов, происходивших вблизи взрыва, так что ответы на подобные вопросы должны зависеть от того, как эти теории работают вместе.

Физики довольно неожиданно выяснили, начиная где-то с 1970 года, что проблема создания квантовой гравитации может быть решена лишь введением нового вида рассредоточенности. Например, "точечные частицы" заменяют "струнами". Конечно, и точечные частицы, и струны должны пониматься квантовомеханически. Квантовые эффекты пропорциональны постоянной Планка $\hbar$, а струнные эффекты пропорциональны некоторой новой постоянной α' (равной примерно $(10^{-32}\text{см})^2$), что определяет характерный размер струны. В этой теории и представление о струне, и квантовая неопределённость жертвуют какими-то мешающими моментами, но вместе они справляются с $1/r^2$-сингулярностью в гравитации. Если теория струн справедлива, то постоянная α' столь же фундаментальна в физике, как и $\hbar$, и эффекты, порожденные ею, по меньшей мере интересны. Деформации $\hbar$ и α' привлекают к рассмотрению новые фундаментальные конструкции и идеи геометрии. Что касается деформации $\hbar$, мы располагаем достаточным опытом и весьма широкими, может быть, не очень точными представлениями о геометрических структурах, которые могут быть здесь использованы, хотя, как было сказано выше, математическое развитие этих идей находится в отдалённом будущем. Деформация α' куда более мистична и трудна даже для физиков, поскольку основные концепции и методы ещё не разработаны. Их поиски будут, возможно, наиболее волнующими приключениями в теоретической физике в ближайшие десятилетия. Математически осмысленные вопросы, связанные с деформацией $\hbar$, по крайней мере уже начали задавать, хотя ответы ожидать ещё рано, а похожие волнующие вопросы, порождённые деформацией α', ещё не поставлены. Это так хотя бы потому, что основной предпосылкой понимания того, что должна означать деформация α', является тщательное знакомство с $\hbar$ -деформацией, а это пока не описано математически.

Идея замены точечных частиц струнами настолько наивна на первый взгляд, что, быть может, трудно поверить, что она действительно фундаментальна. Если рассматривать действительные и комплексные числа как действительные векторные пространства, то $\dim_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}=1$, $\dim_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}=2$. Траектория движения точечной частицы в пространстве-времени одномерна и может считаться действительным многообразием, а траектория движения струны в пространстве-времени – двумерна (над $\boldsymbol{R}$) и может рассматриваться как некоторая компактная риманова поверхность. Современная физика без струн примерно аналогична математике без комплексных чисел.

Теории струн

Требования со стороны квантовой механики и специальной теории относительности к новым теориям были настолько строги, что исторически создание теорий струн было очень трудным. Эти требования, которые должны были быть выполнены, были в большой степени завышены. Были приложены огромные усилия в создании теорий струн, и лишь где-то в 1984-85 годах путь удалось расчистить, и причём сразу в пяти направлениях. Эти теории отличались некоторыми общими свойствами струн:

– В двух теориях (тип IIA и тип IIB, которые отличаются наличием или отсутствием инвариантности при изменении ориентации пространства-времени) струны замкнуты, ориентированы и являются электрическими изоляторами.

– В двух теориях (гетеротические суперструны с калибровочной группой $SO(32)$ или $E_8 \times E_8$) струны замкнуты, ориентированы и сверхпроводящие.

– В последнем случае (тип I) струны неориентированы , являются изоляторами, могут иметь концы и могут нести электрические заряды на своих концах.

Поскольку теорий струн немного, общий каркас струнных теорий даёт некоторые общие предсказания :

1. Гравитация. Каждая из пяти струнных теорий предсказывает гравитацию (плюс квантовую механику), т.е. эти теории предсказывают наличие некоторой структуры, которая на больших расстояниях выглядит как общая теория относительности , но с добавкой (к сожалению, чрезвычайно малой в практических экспериментах), пропорциональной α'. Это поразительно, поскольку, как я подчёркивал, стандартная квантовая теория поля делает гравитацию невозможной. Это простая и наиболее важная причина для интенсивного изучения струнных теорий последнего времени.

2. Неабелева калибровочная симметрия. Второе общее предсказание – это неабелева калибровочная симметрия (опять с малой добавкой, пропорциональной α'), которая является хлебом с маслом физики частиц.

3. Суперсимметрия. Последнее общее предсказание – это "суперсимметрия", некоторый новый тонкий вид симметрии элементарных частиц. Мы не знаем ещё, является ли природа суперсимметричной, но есть основания думать, что это так (например, аккуратное измерение высокоэнергетического калибровочного взаимодействия). У нас сейчас есть шанс, что мы что-то узнаем об этом из экспериментов на ускорителях в ближайшее десятилетие. Тот факт, что мы ещё не знаем о справедливости этого, означает, что суперсимметрия (которая исторически, по крайней мере отчасти, стала изучаться благодаря её роли в теории струн) является настоящим предсказанием теории струн, в то время как для гравитации и неабелевой калибровочной симметрии (которые уже были известны перед тем, как они были выведены из теории струн) бльше подошло бы название "послесказание". Чтобы лучше объяснить суперсимметрию, нужно предположить более близкое знакомство читателя с квантовой теорией поля, что мы не вправе допустить. Но, если пользоваться грубой аналогией, то можно сказать, что суперсимметричная квантовая теория находится в таком же отношении к обычной квантовой теории, как дифференциальные формы на многообразии к функциям на многообразии. Большая часть приложений квантовой теории поля к геометрии, разработанных в восьмидесятых и девяностых годах, основывается на суперсимметрии. (Примеры включают суперсимметрические доказательства теоремы о положительной энергии, теоремы Атья-Зингера об индексе, неравенств Морса, приложения к эллиптическим когомологиям и к теории Дональдсона.) Это, вместе с красотой построений и импульсом, которые придают эти исследования самой теории струн, даёт ещё одно основание надеяться, что суперсимметрия в природе будет найдена. Можно быть уверенным, что если суперсимметрия будет подтверждена на ускорителях, то внимание математиков будет сфокусировано на этой плодотворной ветви так же, как исследования в общей теории относительности сфокусировали внимание на римановой геометрии.

Кроме тех общих предсказаний, которые я указал, следует сказать, что теория струн достаточно просто ведёт к элегантным и качественно верным моделям объединения квантовой гравитации и других известных сил в природе, получая основные свойства стандартной модели. Чтобы улучшить эти конструкции, крайне важным является понимание исчезновения (или экстремальной малости) космологической постоянной (энергетической плотности вакуума) после нарушения суперсимметрии. Это пока не ясно.

Хотя у физиков нет сколько-нибудь последовательного представления о новых геометрических идеях, которые могут помочь в связи с α'-деформацией, мощные методы, использующие двумерную конформную теорию поля, доступны для исследования некоторых феноменов. В восьмидесятых годах большие усилия в теории струн были приложены к описанию этих феноменов. Примером служит зеркальная симметрия, некоторая связь между двумя пространство-временами, которые различны в классическом геометрическом смысле, но эквивалентны при $\alpha' \neq 0$. Эта симметрия приковывала к себе большое внимание, поскольку она имеет удивительные следствия, которые можно получить из их естественной конформной постановки и которые ранее стояли изолированно. Близким является феномен топологического заряда. Вообще говоря, в теории струн вопрос: "Какова топология пространства-времени?" не имеет смысла, поскольку в общем случае для $\alpha'\neq 0$ классические геометрические представления не годятся. Но в подходящем пределе при вариации некоторого параметра классические представления могут быть хорошей аппроксимацией. Было выяснено, что мы вполне можем иметь некоторое семейство теоретико-струнных положений, зависящих от некоторого действительного параметра t, который интерполирует два различных пространства-времени в следующем смысле. При $t\to +\infty$ классические геометрические представления являются хорошим приближением, и мы наблюдаем некоторое пространство-время X. При $t\to -\infty$ классическая геометрия опять является хорошим приближением, но наблюдается некоторое другое пространство-время Y. Где-то между большими положительными t и большими отрицательными t находится "струнная" область, в которой классическая геометрия не является хорошим описанием, и которая интерполирует пространства X и Y.

М-теория.

Хотя понимание новых геометрических представлений, отвечающих случаю $\alpha'\neq 0$, остаётся по всей видимости задачей следующего столетия, обсуждаемая проблема получила в последнее время некоторый более широкий контекст. Длительное существование пяти струнных теорий, хотя оно представляет собой резкое сужение возможностей дальнейшего развития дострунной физики, само по себе является загадкой. То, что уже имеется некое новое основание физики, на котором базируются и квантовая механика, и гравитация, и что в этом основании есть пять возможных теорий − это было бы слишком сильно сказано. Ведь если одна из этих теорий описывает нашу вселенную, то кто тогда живёт в других четырёх мирах? Только изучая то, что может случиться когда и α', и $\hbar$ – ненулевые обе, мы сможем получить удовлетворительный ответ на этот вопрос. При $\hbar = 0$ эти теории действительно разные, но с $\hbar\neq 0$ и $\alpha'\neq 0$ можно провести интерполяцию между ними. Связи между ними похожи на связь между пространство-временами X и Y, упомянутую в предыдущем разделе. Две связанные интерполяцией теории (связи таковы : тип I – тип IIB; тип IIB – тип IIA; тип IIA – 11-мерная супергравитация; 11-мерная супергравитация – $E_8\times E_8$-гетеротическая; $E_8\times E_8$-гетеротическая – $SO(32)$-гетеротическая; $SO(32)$-гетеротическая – тип I) различны в смысле классической геометрии, т.е. при $\alpha'=0$, но при $\alpha'\neq 0$ они представляют собой два разных предельных класса некоторой более тонкой структуры.

Более богатую теорию, имеющую своими предельными случаями пять теорий струн, изучаемых в последнее время, можно было бы назвать *М*-теорией, где *М* годится для слов магия, мистерия и матрица в зависимости от вкуса. Почему магия и мистерия – понятно, а слово матрица указывает на некую новую некоммутативность, похожую на $[p,x]= -i\hbar$, но несколько иную, что представляется началом теории. Физики и математики потратят, вероятно, немало сил, пытаясь построить эту общую теорию.

Предложения читателю.

Введением в квантовую теорию поля и теорию струн может служить книга "*Quantum Fields and Strings: A Course for mathematicians*" , P.Deligne, P.Etinghof, D.Freed, L.Jeffrey, D.Kazhdan, D.Morrison, and E.Witten, eds.(American Mathematical Society, 1999). Последнее изложение теории струн (для физиков) имеется в книгах: *String Theory,* Vols. I and II. J.Polchinski (Cambridge University Press, 1998).

КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1]

В. С. Владимиров

Это — уравнения, описывающие математические модели физических явлений. Классические уравнения математической физики — часть предмета математической физики. Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, оптики, теории переноса, физики плазмы, квантовой физики, теории гравитации и т. п.) описываются краевыми задачами для дифференциальных уравнений. Эти задачи составляют весьма широкий класс классических уравнений математической физики.

Для полного описания эволюции физического процесса помимо уравнений, необходимо, во-первых, задать картину процесса в некоторый фиксированный момент времени (начальные условия) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает этот процесс (граничные условия). Начальные и граничные условия вместе образуют краевые условия, а дифференциальные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями — краевые задачи математической физики.

Ниже приведены некоторые примеры уравнений и соответствующих краевых задач.

Уравнение колебаний (*волновое уравнение*)

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) - qu + f(x,t) \qquad (1)$$

описывает малые колебания струн, стержней, мембран, акустические и электромагнитные колебания. В уравнении (1) пространственные переменные $x=(x_{1,\dots,}\ x_n)$ изменяются в области $G \subset \boldsymbol{R}^n$, n = 1, 2, 3, где развивается рассматриваемый физический процесс; при этом в соответствии с физическим смыслом входящих величин должно быть $\rho>0$, $p>0$, $q>0$. При $\rho=1$, $p = a^2 = \mathrm{const}$, $q = 0$ уравнение (1) превращается в волновое уравнение

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(x,t) \qquad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнение диффузии

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) - qu + f(x,t) \qquad (3)$$

описывает процессы диффузии частиц и распространения тепла в среде. При $\rho=1$, $p = a^2 = \mathrm{const}$, $q = 0$ уравнение (3) превращается в уравнение теплопроводности

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,t)$$

Для стационарных процессов, когда отсутствует зависимость от времени t, уравнения колебаний (1) и диффузии (3) принимают вид:

$$-\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) + qu = f(x,t). \qquad (4)$$

При $p = 1$ и $q = 0$ уравнение (4) называется уравнением Пуассона:

$$\Delta u = -f(x), \qquad (5)$$

а при $f = 0$ — уравнением Лапласа:

$$\Delta u = 0.$$

Уравнениям Лапласа и Пуассона удовлетворяют различного рода потенциалы: ньютонов (кулонов) потенциал, потенциал течения несжимаемой жидкости и т. п.

Если при волновом уравнении (2) внешнее возмущение f— периодическое с частотой ω: $f(x,t) = a^2 f(x)e^{i\omega t}$, то амплитуда $u(x)$ периодических решений с той же

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

частотой ω: $u(x,t) = a^2 u(x) e^{i\omega t}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \omega^2 / a^2 \qquad (6)$$

К уравнению Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию).

Для полного описания процесса колебаний необходимо задать начальное возмущение и начальную скорость

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x),$$

а для процесса диффузии — только начальное возмущение

$$u|_{t=0} = u_0(x).$$

Кроме того, на границе S области G необходимо удовлетворить заданному режиму. В простейших случаях физически осмысленные граничные условия для уравнений (1), (3), (4) описываются соотношением

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu\,|_S = v(x,t), \quad t > 0,$$

где k и h — заданные неотрицательные функции, не обращающиеся в нуль одновременно, **n** — внешняя нормаль к поверхности S, v - заданная функция. Например, для струны условие

$$u|_{x=x_0} = 0.$$

означает, что конец струны x_0 закреплен, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = 0$$

означает, что конец струны x_0 свободен. Для теплопроводности условие

$$u|_S = v_0(x,t)$$

означает, что на границе S области G поддерживается заданный температурный режим, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = v_1(x,t)$$

задает поток тепла через S. В случае неограниченных областей, например, внешности ограниченной области, кроме условия на границе задается также условие на бесконечности. Так, для уравнения Пуассона (5) в пространстве (n=3) таким условием является условие

$$u(x) = o(1), \quad |x| \to \infty, \qquad (7)$$

а на плоскости (n = 2) — условие

$$u(x) = O(1), \quad |x| \to \infty, \qquad (8)$$

Для уравнения Гельмгольца (6) на бесконечности задаются условия излучения:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} \mp iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty,$$

причем знак - соответствует расходящимся, а знак + -- сходящимся волнам.

Краевая задача, которая содержит только начальные условия (и, стало быть, не содержит граничных условий, так что область G — все пространство $\boldsymbol{R}^n$), называется задачей Коши. Если в краевой задаче присутствуют и начальные, и граничные условия, то такая задача называется смешанной задачей. Для уравнения (4) краевая задача с граничным условием

$$u|_S = v_0(x),$$

называется задачей Дирихле, а с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = v_1(x)$$

— задачей Неймана. Различают внешние и внутренние задачи Дирихле и Неймана. Для внешних задач кроме граничных условий необходимо задавать условия на бесконечности типа (7), (8), (9).

Перечисленные краевые задачи далеко не исчерпывают все многообразие краевых задач математической физики — это есть простейшие классические примеры краевых задач. Краевые задачи, описывающие реальные физические процессы, могут быть весьма сложными: это могут быть системы уравнений высших порядков, нелинейные уравнения. Сюда в первую очередь относятся: уравнение Шредингера, уравнения гидродинамики, уравнения Максвелла, уравнение Кортевега — де Фриса, уравнения теории упругости и пластичности и др.

Литература: [1] ТихоновА.Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Владимиров В.С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1987; [3] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, 2 изд., М., 1983; [4] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1]

В.Е. Захаров.

Нелинейные уравнения математической физики – это уравнения, не обладающие свойством линейности, которые применяются в физике как математические модели нелинейных явлений в различных сплошных средах. Нелинейные уравнения математической физики – важная часть математического аппарата, используемого в фундаментальных физических теориях: теории тяготения и квантовой теории поля.

Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными уравнениями. Выбор для описания среды линейных или нелинейных уравнений зависит от роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Напр., при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля. Возникающие при этом нелинейные уравнения являются основой математического аппарата нелинейной оптики.

Линейные уравнения, используемые в физике, являются результатом линеаризации более точных нелинейных уравнений на фоне их простейших (фоновых) решений. Исторически первым примером нелинейных уравнений математической физики были найденные в 18 в. уравнения Эйлера для идеальной жидкости:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{v}=0\\ &\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}+\rho^{-1}\nabla P=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $\rho, P, \vec{v}$ – плотность, давление и скорость жидкости. Для баротропной жидкости, когда $P=P(\rho)$, уравнения Эйлера можно линеаризовать на фоне тривиального решения $\rho=\rho_0, v_0=0$ в предположении потенциальности поля скоростей: $\vec{v}=\nabla\varphi$. Полагая $\rho=\rho_0+\delta\rho,\ \delta\rho \ll \rho_0$, получаем из (1) волновое уравнение для звуковых волн. Однако при рассмотрении вихревых движений жидкости, когда ее можно считать несжимаемой, $\rho=\rho_0, \operatorname{div}\vec{v}=0,$ уравнения Эйлера (1) становятся существенно нелинейными. Их линеаризация на фоне решения $\vec{v}_0=0$ приводит к тривиальному уравнению $\partial\vec{v}/\partial t=0.$

Таким образом, линеаризация нелинейных уравнений не всегда ведет к содержательному результату. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные уравнения сохраняют применимость лишь конечное время. Эта ситуация типична, если фоновое решение неустойчиво, но может иметь место и при устойчивом фоновом решении. Так, одномерные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

при произвольном начальном условии $\rho \to \rho_0, v \to 0$ при $x \to \pm\infty$ описывают образование ударных волн. При этом за достаточно большое время теряют применимость не только линейное приближение, но и сами уравнения (2), решения которых при $t \to \infty$ становятся неоднозначными.

Даже если линеаризация нелинейных уравнений возможна, с точки зрения физики исключительно важны “существенно нелинейные” решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства. Существенно нелинейными являются и стационарные решения уравнений гидродинамики. Весьма важен вопрос об устойчивости существенно нелинейных решений, в том числе гидродинамических течений и солитонов, который решается либо при помощи линеаризации нелинейных уравнений на фоне изучаемых решений, либо при помощи вариационных оценок.

Решения нелинейных уравнений математической физики во многих случаях обнаруживают тенденцию к стохастизации. В этом случае они требуют статистического описания, что составляет предмет теории турбулентности. Турбулентность часто развивается как результат неустойчивости фонового состояния. Если уровень нелинейности решения остается малым, то говорят о слабой турбулентности, в противном случае – о сильной турбулентности. Сильная турбулентность может сопровождаться волновыми коллапсами, целиком или частично состоять из взаимодействующих солитонов.

Нелинейные уравнения в физике. Нелинейные уравнения, встречающиеся в физике, отличаются большим разнообразием. Их значительная часть представляет собой обобщения гидродинамических уравнений Эйлера, например, уравнения Навье – Стокса для описания движений вязкой несжимаемой жидкости. Описываемая ими гидродинамическая турбулентность является предельно сильной.

В метеорологии были выведены уравнения Буссинеска, описывающие движения несжимаемой жидкости в поле тяжести и сил Кориолиса и используемые в океанологии и физике атмосферы. Уравнения магнитной гидродинамики описывают движение проводящей жидкости в магнитном поле и применяются в астрофизике и физике плазмы.

Классическим примером нелинейных уравнений математической физики являются уравнения теории упругости. Развитие микроскопической теории кристаллов дополнило их уравнениями равновесия и динамики дислокации, также существенно нелинейными.

Многие нелинейные уравнения возникли в физике в связи с развитием теории конденсированных сред, они описывают макроскопические проявления квантовомеханических эффектов; неизвестной функцией в них является плотность параметра порядка. Если параметр порядка скалярный, это двухжидкостные уравнения гидродинамики сверхтекучего гелия, уравнения Ландау – Гинзбурга и их обобщения, описывающие магнитостатику и электродинамику сверхпроводников. Если параметр порядка векторный или тензорный, это уравнения Ландау - Лифшица, описывающие ферромагнетики и антиферромагнетики, уравнения обобщенной гидродинамики сверхтекучего гелия, макроскопические модели жидких кристаллов. Для всех этих уравнений наибольший интерес представляют их существенно нелинейные решения, часто описывающие локализованные (хотя бы частично) объекты: вихри в жидком гелии и в сверхпроводниках, доменные стенки в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, дисклинации в жидких кристаллах и солитоны, которые в том или ином виде существуют во всех упомянутых средах.

Нелинейные уравнения возникают также как результат применения приближения Хартри — Фока к многочастичным квантовомеханическим системам и имеют в этом качестве применения в атомной и ядерной физике. Еще одним источником нелинейных уравнений математической физики является химическая физика. Это – нелинейные уравнения диффузии, описывающие волны горения и детонации, а также колебательные химические реакции. К ним примыкают возникшие в биофизике уравнения, описывающие распространение импульса по нервному волокну. Уравнения этих типов возникают в задачах о самоорганизации и диссипативных структурах.

Нелинейные уравнения математической физики играют важную роль и в фундаментальной физике, например, уравнения Эйнштейна для гравитационного поля. Уравнения Эйнштейна в вакууме имеют ясный геометрический смысл, описывая римановы пространства, тензор Риччи которых равен нулю. Геометрическую интерпретацию имеют и многие нелинейные уравнения в квантовой теории поля, в частности, поля Янга – Милса.

Локализованные решения нелинейных уравнений квантовой теории поля можно рассматривать как точки стационарной фазы при квазиклассическом вычислении функциональных интегралов, для Грина функций, содержащих информацию о спектре масс и сечениях взаимодействия элементарных частиц. Если точкам стационарной фазы соответствуют траектории подбарьерных переходов между топологически неэквивалентными вырожденными состояниями вакуума, классические нелинейные уравнения следует рассматривать в мнимом времени, то есть не в пространстве Минковского, а в четырехмерном евклидовом пространстве. Локализованные решения таких уравнений – четырехмерные солитоны – получили название инстантонов.

Уравнения Янга – Миллса описывают частицы, обладающие асимптотической свободой. В двумерном пространстве-времени этим же свойством обладает уравнение ***n***-поля:

$$\boldsymbol{n}_{\xi\eta} + \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}_{\xi}, \boldsymbol{n}_{\eta}) = 0 \qquad (3)$$

(здесь $\xi = x + t, \eta = x - t$ — “конусные” переменные). Это уравнение является частным случаем более общего уравнения “главного кирального поля”:

$$g_{\xi\eta} + (g_{\xi}\, g^{-1}\, g_{\eta} + g_{\eta}\, g^{-1}\, g_{\xi})/2 = 0 \qquad (4)$$

(здесь g – элемент некоторой группы Ли). Инстантонные решения этого уравнения можно использовать для описания солитонных конфигураций в жидком гелии.

Универсальные модели. В этих моделях проявляется одна из характерных черт теории М. ф. н. у.: среди огромного их многообразия можно выделить небольшое число уравнений сравнительно простого вида, которые можно использовать как математические модели различных по своей природе физических ситуаций. Эти уравнения играют, в известном смысле, ту же роль, что и математической физики классические уравнения (уравнение Лапласа, уравнение диффузии, волновое уравнение).

К числу таких универсальных моделей относятся уравнение Кортевега – де Фриса, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус – Гордона, уравнение Кадомцева – Петвиашвили, уравнение Бюргерса, уравнение Хохлова – Заболотской и др. Необходимо отметить еще систему уравнений “трех волн”:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial t} + (\vec{v}_0, \nabla) u_0 = i u_1 u_2, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial t} + (\vec{v}_1, \nabla) u_1 = i u_1 u_2^*, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial t} + (\vec{v}_2, \nabla) u_2 = i u_1 u_1^*, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

являющуюся универсальной моделью для описания параметрических взаимодействий волн в нелинейных средах. Система (5) допускает многочисленные обобщения.

Большое разнообразие встречающихся в физике нелинейных уравнений затрудняет развитие общих математических методов их исследования. Лишь для сравнительно немногих нелинейных уравнений математической физики доказаны теоремы существования и единственности, к таким относятся уравнения Янга – Миллса, уравнения Навье – Стокса в двумерном случае, уравнения газовой динамики. Для уравнений Навье – Стокса в трехмерном случае теорема единственности решения задачи Коши до сих пор не доказана. Затруднена даже проблема классификации нелинейных уравнений математической физики. Часть их попадает под классическое разделение на эллиптические, гиперболические и параболические уравнения, но значительное число важных нелинейных уравнений математической физики (среди них уравнение Кортевега – де Фриса, уравнение Кадомцева – Петвиашвили) не могут быть отнесены ни к одному из этих типов. Некоторую классификацию нелинейных уравнений математической физики можно осуществить на основе физических соображений. Прежде всего это разделение на стационарные и эволюционные уравнения. Большинство стационарных уравнений относится к эллиптическому типу. Среди эволюционных уравнений, явно содержащих производные по времени, можно выделить консервативные нелинейные уравнения математической физики, сохраняющие интеграл энергии, и диссипативные уравнения, описывающие “открытые системы”, обменивающиеся энергией с “внешним миром”. Одним из интересных достижений теории нелинейных уравнений математической физики было обнаружение того факта, что консервативные уравнения, как правило, являются гамильтоновыми системами, хотя явное введение канонических переменных зачастую оказывается трудной задачей. Установлена гамильтонова природа большинства консервативных обобщений уравнений Эйлера и даже системы уравнений Власова, описывающих плазму без столкновений. Для гамильтоновых систем, близких к линейным, развиты методы теории возмущений, позволяющие учитывать нелинейные эффекты и производить статистическое описание решений. Все перечисленные выше универсальные нелинейные уравнения, за исключением уравнения Бюргерса и уравнения Хохлова – Заболотской, являются гамильтоновыми.

Точные решения. Для физики важно знать как можно больше точных решений нелинейных уравнений математической физики, особенно существенно нелинейных. Простейшие из таких решений можно находить, используя очевидные свойства симметрии нелинейных уравнений, а также отыскивая всевозможные автомодельные подстановки. Более тонкие способы вычисления точных решений используют методы теории групп Ли. Пусть нелинейное уравнение для функции двух переменных имеет вид

$$u_t = F(u, u_1, ..., u_n),\ u_k = \partial^k u / \partial x^k, \qquad (6)$$

Функция $f(u, u_1, ..., u_n, x, \tau)$ называется симметрией уравнения (6), если оно совместно с уравнением

$$u_\tau = f(u, u_1, ..., u_n, x, \tau),$$

где τ – новая переменная. Симметрии образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона

$$\{f, h\} = \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial^k h}{\partial x^k} - \frac{\partial h}{\partial u_k} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right).$$

По алгебре симметрии нелинейного уравнения восстанавливают группу Ли – Беклунда непрерывных преобразований, оставляющих уравнения инвариантными. Точные решения уравнения находят как решения, остающиеся инвариантными при действии какой-либо подгруппы группы Ли – Беклунда. Группа Ли – Беклунда и алгебра симметрии существуют у каждого нелинейного уравнения математической физики. В большинстве случаев группа Ли – Беклунда является конечномерной. Существуют, однако, случаи, когда эта группа бесконечномерна, как у всех перечисленных выше универсальных нелинейных уравнений математической физики.

Если преобразование из группы Ли – Беклунда оставляет инвариантным функционал действия гамильтонова нелинейного уравнения, то оно имеет интеграл движения – функционал, не зависящий от времени. Интегралы движения образуют алгебру Ли относительно скобок Пуассона, изоморфную некоторой подалгебре алгебры симметрии.

Перечисленные выше универсальные гамильтоновы нелинейные уравнения математической физики обладают бесконечными наборами независимых интегралов движения. Уравнения, обладающие этим свойством, несколько условно называют интегрируемыми, хотя интегрируемость доказана лишь для немногих из них. Интегрируемыми являются, в частности, одномерные уравнения Эйлера (2).

Обширный класс интегрируемых нелинейных уравнений математической физики составляют уравнения, к которым применим обратной задачи рассеяния метод. Для этих уравнений, к которым относятся, в частности, перечисленные выше универсальные гамильтоновы системы, возможно явное вычисление большого количества точных решений, в том числе описывающих солитоны и их взаимодействия. При помощи метода обратной задачи удается вычислять инстантонные решения уравнений Янга – Миллса, а также найти многочисленные точные решения уравнений Эйнштейна.

Если нелинейное уравнение не обладает бесконечной группой Ли – Беклунда, возможности его аналитического исследования сильно ограничены. В ряде случаев можно, используя разложение по набору заданных функций (метод Галеркина), свести его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно изучать качественными методами, а также интегрировать при помощи ЭВМ. Таким способом удается моделировать не слишком развитую турбулентность, в том числе изучать странные аттракторы. Наконец, если число независимых переменных, входящих в нелинейное уравнение, не превышает трех, оказывается достаточно эффективным их прямое численное решение на ЭВМ.

Литература: [1] Уизем Дж, Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [2] Теория солитонов Метод обратной задачи, М., 1980; [3] AЫovitz M.J., 5egur N., Solitons and the inverse scattering transform, Phi1., 1981; [4] Ибрагимов Н.Х, Группы преобразований в математической физике, М. , 1983.

МЕХАНИКА

С. М. Тарг

Механика – это наука о механическом движении материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними. Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел или их частиц в пространстве. В природе — это движение небесных тел, колебания земной коры, воздушные и морские течения и т. п., а в технике – движения различных летательных аппаратов и транспортных средств, частей двигателей, машин и механизмов, деформации элементов различных конструкций и сооружений, движения жидкостей и газов и многое другое. Рассматриваемые в М. взаимодействия представляют собой те действия тел друг на друга, результатами которых являются изменения скоростей точек этих тел или их деформации, напр. притяжения тел по закону всемирного тяготения, взаимные давления соприкасающихся тел, воздействия частиц жидкости или газа друг на друга и на движущиеся в них тела.

Под механикой обычно понимают так называемую классическую механику, в основе которой лежат законы механики Ньютона, а предметом ее изучения являются движения любых материальных тел (кроме элементарных частиц), совершаемые со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Движение тел со скоростями порядка скорости света рассматриваются в теории относительности, а внутриатомные явления и движение элементарных частиц изучаются в квантовой механике.

При изучении движения материальных тел в механике вводят ряд абстрактных понятий, отражающих те или иные свойства реальных тел; ими являются:

1) Материальная точка – объект пренебрежимо малых размеров, имеющий массу; это понятие применимо, когда тело движется поступательно или когда в изучаемом движении можно пренебречь вращением тела вокруг его центра масс.

2) Абсолютно твердое тело – тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остается неизменным; это понятие применимо, когда можно пренебречь деформацией тела.

3) Сплошная изменяемая среда; это понятие применимо, когда при изучении движения изменяемой среды (деформируемого твердого тела, жидкости, газа) можно пренебречь молекулярной структурой среды. При изучении сплошных сред прибегают к следующим абстракциям, отражающим при данных условиях наиболее существенные свойства соответствующих реальных тел: идеально упругое тело, пластичное тело, идеальная жидкость, вязкая жидкость, идеальный газ и др.

В соответствии с этим механику разделяют на механику материальной точки, механику системы материальных точек, механику абсолютно твердого тела и механику сплошной среды; последняя в свою очередь подразделяется на теорию упругости, теорию пластичности, гидродинамику, аэродинамику, газовую динамику и др. В каждом из этих подразделов в соответствии с характером решаемых задач выделяют: статику – учение о равновесии тел под действием сил, кинематику – учение о геометрических свойствах движения тел и динамику – учение о движении тел под действием сил. Изучение основных законов и принципов, которым подчиняется механическое движение тел, и вытекающих из этих законов и принципов общих теорем и уравнений составляет содержание так называемой общей, или теоретической, механики. Разделами механику, имеющими самостоятельное значение, являются также теория колебаний и волн, теория устойчивости равновесия и устойчивости движения, математическая теория гироскопа, механика тел переменной массы, теория автоматического регулирования, теория удара и др. Важное место в механике, особенно в механике сплошных сред, занимают экспериментальные исследования, проводимые с помощью разнообразных механических, оптических, электрических и других физических методов и приборов.

Механика тесно связана со многими другими разделами физики. Ряд понятий и методов механики при соответствующих обобщениях находит приложение в оптике, статистической физике, квантовой механике, электродинамике, теории относительности и др. Кроме того, при решении ряда задач газовой динамики, теории взрыва, теплообмена в движущихся жидкостях и газах, динамики разреженных газов, магнитной гидродинамики и др. одновременно используются методы и уравнения как теоретической механике, так и термодинамики, молекулярной физики, теории электричества и др. Важное значение механика имеет для многих разделов астрономии, особенно для небесной механики.

Часть механики, непосредственно связанную с техникой, составляют многочисленные общетехнические и специальные дисциплины, такие как гидравлика, сопротивление материалов, строительная механика, кинематика механизмов, динамика машин и механизмов, теория гироскопических устройств, внешняя баллистика, динамика ракет, теория движения наземных, морских и воздушных транспортных средств, теория регулирования и управления движением различных объектов и др. Все эти дисциплины пользуются уравнениями и методами теоретической механики. Таким образом, механика является одной из научных основ многих областей современной техники.

Основные понятия и методы механики. Основными кинематическими мерами движения в механике являются: для точки — ее скорость и ускорение, а для твердого тела — скорость и ускорение поступательного движения и угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения. Кинематическое состояние деформируемого твердого тела характеризуется относительными удлинениями и сдвигами его частиц; совокупность этих величин определяет так называемый тензор деформаций. Для жидкостей и газов кинематическое состояние характеризуется тензором скоростей деформаций; при изучении поля скоростей движущейся жидкости пользуются также понятием вихря, характеризующего вращение частицы.

Основной мерой механического взаимодействия материальных тел в механике является сила. Одновременно в механике пользуются понятием момента силы относительно точки и относительно оси. В механике сплошной среды силы задаются их поверхностным или объемным распределением, то есть отношением величины силы к площади поверхности (для поверхностных сил) или к объему (для массовых сил), на которые соответствующая сила действует. Возникающие в сплошной среде внутренние напряжения характеризуются в каждой точке среды касательными и нормальными напряжениями, совокупность которых представляет собой величину, называемую тензором напряжений. Среднее арифметическое трех нормальных напряжений, взятое с обратным знаком, определяет величину, называемую давлением в данной точке среды.

На движение тела помимо действующих сил оказывает влияние степень его инертности. Для материальной точки мерой инертности является ее масса. Инертность материального тела зависит от его общей массы и от распределения масс в теле, которое характеризуется положением центра масс и величинами, называемыми осевыми и центробежными моментами инерции; совокупность этих величин определяет так называемый тензор инерции. Инертность жидкости или газа характеризуется их плотностью.

В основе механики лежат три закона Ньютона. Первые два справедливы по отношению к так называемой инерциальной системе отсчета. Второй закон дает основные уравнения для решения задач динамики точки, а вместе с третьим – для решения задач динамики системы материальных точек. В механике сплошной среды кроме законов Ньютона используются еще законы, отражающие свойства данной среды и устанавливающие для нее связь между тензором напряжений и тензорами деформаций или скоростей деформаций. Важное значение для решения задач механики имеют понятия о динамических мерах движения, которыми являются количество движения, момент количества движения (или кинетический момент) и кинетическая энергия, и о мерах действия силы, каковыми служат импульс силы и работа. Соотношение между мерами движения и мерами действия силы дают так называемые общие теоремы динамики. Эти теоремы и вытекающие из них законы сохранения количества движения, момента количества движения и механической энергии выражают свойства движения любой системы материальных точек и сплошной среды.

Эффективные методы изучения равновесия и движения несвободной механической системы дают вариационные принципы классической механики.

При решении задач механику широко используются вытекающие из ее законов или принципов дифференциальные уравнения движения материальной точки, твердого тела и системы материальных точек, в частности уравнения Лагранжа, канонические уравнения, уравнение Гамильтона – Якоби, а в механике сплошной среды – соответствующие уравнения равновесия или движения этой среды, уравнение неразрывности (сплошности) среды и уравнение энергии.

Современные проблемы механики. К числу этих проблем относятся уже отмечавшиеся задачи теории колебаний (особенно нелинейных), динамики твердого тела, теории устойчивости движения, а также механики тел переменной массы и динамики космических полетов. Все большее значение приобретают задачи, требующие применения вероятностных методов расчета, то есть задачи, в которых, напр., для действующих сил известна лишь вероятность того, какие значения они могут иметь. В механике непрерывной среды весьма актуальны проблемы: изучения поведения макрочастиц при изменении их формы, что связано с разработкой более строгой теории турбулентного течения жидкости; решения задач теории пластичности и ползучести; создания обоснованной теории прочности и разрушения твердых тел.

Большой круг задач механики связан с изучением движения плазмы в магнитном поле, то есть с решением одной из самых актуальных проблем современной физики - осуществлением управляемого термоядерного синтеза. В гидродинамике ряд важнейших задач связан с проблемами больших скоростей в авиации, баллистике, турбиностроении и двигателестроении. Много новых задач возникает на стыке механики с другими областями наук. Сюда относятся проблемы гидротермохимии, то есть исследования механических процессов в жидкостях и газах, вступающих в химические реакции, изучение сил, вызывающих деление клеток, механизма образования мускульной силы и др.

При решении многих задач механики используются электронно-вычислительные и аналоговые машины; разработка методов решения новых задач механики с помощью этих машин (особенно механики сплошной среды) – также весьма актуальная проблема.

Лит.:\\\ Галилей Г., Соч., т. 1, М.-Л., 1934; [2] Ньютон И. Математические начала натуральной философии, пер. с лат., М. 1989; [3] Эйлер Л., Основы динамики точки, пер. с лат., М.-Л. 1938; [4] Д'Аламбер Ж., Динамика, пер. с франц , М.-Л., 1950 [5] Л а гран ж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц , 2 изд. т. 1—2, М.—Л., 1950; [6] Жуковский Н Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.-Л., 1952; [7] Суслов Г. К , Теоретическая механика, 3 изд, М—Л., 1946; [8] Бухгольц Н Н, Основной курс теоретической механики, 9 изд., ч. 1, 6 изд , ч. 2, М., 1972; [9] Моисеев Н.Д., Очерки развития механики, М., 1961; [10] Космодемьянский А А., Очерки по истории механики, 2 изд., М., 1964; [11] История механики с древнейших времен до конца XVIII в., М., 1971; [12] Веселовский И. Н., Очерки по истории теоретической механики, М., 1974.

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ[1]

Б. Е. Победря

Уравнения теории упругости – это система дифференциальных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния упругого тела. Существуют две классические формы таких уравнений: в перемещениях и напряжениях.

В перемещениях для описания равновесия изотропной линейной упругой среды они представляют собой систему трех дифференциальных уравнений относительно трех компонент u_i, (i =1, 2, 3) вектора перемещений $\boldsymbol{u}$:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i+X_i=0, \qquad (1)$$

где θ – относительное изменение объема: $\theta=\operatorname{div}u=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$,

x_j — компоненты вектора заданных объемных сил (например, сил тяжести).

Уравнения (1) установил Г. Ламе (G. Lame, 1852); “упругие постоянные” λ,μ называются **постоянными Ламе**. Впервые уравнения (1) получил Л. Навье (L. Navier, 1821), который полагал, что в изотропном теле существует только одна постоянная ($\lambda=\mu$). Если на границе $\partial\Omega$, представляющей собой поверхность Ляпунова, компакта $\Omega\subset\boldsymbol{R}^3$ заданы перемещения

$$u_i\,|_{\partial\Omega}=u_i^0, \qquad (2)$$

то **первая краевая задача теории упругости** (1), (2) при

$$-1<\nu<1/2, \quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad (3)$$

имеет единственное решение $u_i\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}),\ (X_i\in C(\overline{\Omega}), u_i^0\in C(\partial\Omega))$, причём уравнения теории упругости (1) образуют эллиптическую систему уравнений при условии (3).

По найденному вектору перемещений $\boldsymbol{u}$ находятся компоненты тензора деформаций ε_{ij}, из соотношений Коши: $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, а затем и напряжения σ_{ij} по закону Гука: $\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Если на границе $\partial\Omega$ с единичным вектором внешней нормали, имеющим компоненты n_i, заданы нагрузки $S_i^0\in C(\partial\Omega)$,

$$\sigma_{ij}n_j=S_i^0,\ \lambda\theta n_i+\mu(u_{ij}+u_{ji})n_j=S_i^0,\ j=1,2,3, \qquad (4)$$

то **вторая краевая задача** (1), (4) разрешима при условиях

$$\int_\Omega \boldsymbol{X}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{S}^0\,d\Sigma=0;\ \int_\Omega \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{X}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{S}^0\,d\Sigma=0,$$

причём имеет единственное решение только при дополнительных условиях

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\,d\Omega=0,\ \int_\Omega \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}\,d\Omega=0,,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точек области Ω. Если на части поверхности $\partial\Omega$ заданы условия (2), а на остальной части -условия (3), краевая задача называется **смешанной**.

Уравнения теории упругости в напряжениях для односвязной области Ω состоят из трёх уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3}+X_i=0 \qquad (5)$$

---

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

и шести уравнений совместности в напряжениях

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_j} = -\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right), \qquad (6)$$

к чему добавляются три граничные условия, например, (4), здесь $\Theta=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$.

Если уравнения (5) выполняются на границе тела $\partial\Omega$, то они удовлетворяются и внутри него. Это позволяет сформулировать уравнения теории упругости в виде шести обобщенных уравнений совместности относительно шести независимых компонент σ_{ij} симметрического тензора напряжений при удовлетворении шести граничным условиям, в число которых входят уравнения (5), снесённые на границу.

Лит.: [1] Новацкий В., Теория упругости, пер. с польск., М., 1975; [2] Тимошенко С.П., История науки о сопротивлении материалов, пер. с англ., М., 1957; [3] Победря Б. Е., Численные методы в теории упругости и пластичности, М., 1981.

УРАВНЕНИЯ ГАЗО- и ГИДРОДИНАМИКИ[1]

В. В. Пухначёв.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение жидкости или газа под действием внешних и внутренних сил и источников тепла, называются уравнениями гидродинамики. Независимыми переменными в системе уравнений гидродинамики являются время t и совокупность x координат трехмерного евклидова пространства, а искомыми функциями — компоненты трехмерного вектора скорости г и дополнительные переменные, характеризующие состояние жидкости (плотность ρ, температура T, давление p и т.д.). Система координат, используемая ниже для записи уравнений гидродинамики, предполагается инерциальной.

Уравнения гидродинамики выводятся на основе общих законов сохранения в механике сплошной среды (см. [I], [2]). Предположим, что в некоторой трехмерной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ (которая может изменяться со временем) имеется распределение масс с объемной плотностью $\rho(x,t)$. Закон сохранения массы приводит к **уравнению неразрывности**

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} = 0\,, \qquad (1)$$

где $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{grad}$ — оператор полного дифференцирования по времени.

Для формулировки закона сохранения импульса следует ввести в рассмотрение силы, действующие на жидкость. Они могут быть как внутренними (то есть действовать на произвольную трехмерную подобласть ω области Ω со стороны дополнения ω до Ω), так и внешними. Поле внешних сил, отнесенных к единице массы, обозначим через $\boldsymbol{f}(x,t)$. Функция $\boldsymbol{f}$, как правило, считается заданной. Относительно внутренних сил будем предполагать, что в каждой точке M границы $\partial\omega$ области ω в каждый момент времени t они могут быть представлены поверхностной плотностью $\boldsymbol{p_n}(x,t)$, зависящей от единичного вектора $\boldsymbol{n}$ внешней нормали к $\partial\omega$ в точке M (поверхность $\partial\omega$ считается гладкой).

Из закона сохранения импульса вытекает, что поверхностные силы находятся в локальном равновесии. Это влечет представление $\boldsymbol{p_n} = P\boldsymbol{n}$, где P— некоторый тензор, называемый **тензором напряжений**. С его помощью уравнение движения записывается в виде

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathrm{div}\,P + \rho\,\boldsymbol{f} \qquad (2)$$

Далее постулируется симметричность тензора напряжений. Тогда из (2) будет вытекать закон сохранения момента количества движения. Уравнение (2) справедливо

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

для любой сплошной среды, независимо от вида тензора напряжений P. Сплошная среда называется **жидкостью**, если P является функцией тензора скоростей деформаций D: $P=K(D)$ (значения функции K – симметрические тензоры 2-го ранга). Тензор скоростей деформаций D, по определению, есть симметричная часть тензора grad$\boldsymbol{v}$: $D=\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\mathbf{v}+(\operatorname{grad}\mathbf{v})^{\gamma})$. Предположим, что функция K не зависит явно от x и t и, сверх того, является изотропной функцией D (последнее означает, что ни в пространстве, ни в жидкости не существует выделенных направлений). В этом случае зависимость P от D имеет вид

$$P=K_0 I + K_1 D + K_2 D^2 , \qquad (3)$$

где I — единичный тензор, а K_0 , K_1 и K_2, -- скалярные функции, зависящие от главных инвариантов $D_{\rm I}$, $D_{\rm II}$, $D_{\rm III}$ и, возможно, термодинамических переменных состояния.

Для замыкания системы уравнений гидродинамики следует присоединить к (1)—(3) уравнение энергии:

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}+P:D.$$

Здесь ε — удельная (то есть отнесенная к единице массы) внутренняя энергия, $\boldsymbol{q}$ — вектор потока тепла, $P{:}D$ означает свертку тензоров P и D. Ниже ограничимся случаем двупараметрической среды, в которой все термодинамические функции зависят от двух термодинамических параметров состояния. Если эти два параметра -- температура T и плотность ρ, то удельная внутренняя энергия должна выражаться через них:

$$\varepsilon=E(T,\rho) \qquad (5)$$

Относительно вектора потока тепла $\boldsymbol{q}$ предположим, что $\boldsymbol{q}$ является изотропной функцией от градиента температуры и термодинамических переменных. Это означает, что

$$\boldsymbol{q} = - \kappa \operatorname{grad} T, \qquad (6)$$

где κ — скалярная функция от $|\operatorname{grad} T|$, T и ρ, называемая **коэффициентом теплопроводности**. Уравнения (1) — (6) образуют замкнутую систему уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости или газа.

Важный частный случай жидкостей составляют классические, или **ньютоновские**, жидкости (и газы). В этом случае зависимость P от D линейна,

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})I + 2\mu D. \qquad (7)$$

В соотношении (7) p — давление, λ и μ — скалярные функции термодинамических переменных; $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = D_{\rm I}$ — первый инвариант тензора D. Уравнение движения ньютоновской жидкости получается из (2), (7) и носит название уравнения Навье -Стокса:

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\operatorname{grad}(-p+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v})+\operatorname{div}(2\mu D)+\rho\boldsymbol{f}. \qquad (8)$$

В случае сжимаемой жидкости (газа) давление является термодинамической переменной и должно быть задано как функция T и ρ с помощью уравнения состояния. Для многих реальных газов указанная зависимость хорошо аппроксимируется **уравнением Клапейрона**:

$$p=\rho RT, \qquad (9)$$

где R -- положительная постоянная, определяемая молярным составом газа (газовая постоянная). Газ, для выполнено уравнение состояния (9), называется **совершенным**. Внутренняя энергия совершенного газа зависит только от температуры, так что описание его термодинамики сводится к заданию функции $\varepsilon= E(T)$. В общем случае это описание характеризуется зависимостями (5) и

$$p=h(T, \rho). \qquad (10)$$

Введем в рассмотрение еще одну термодинамическую переменную — удельную энтропию S — с помощью равенства, выражающего первый закон термодинамики:

$$TdS = d\varepsilon + \rho\, d(1/\rho). \qquad (11)$$

Соотношения (1), (6) и (11) позволяют записать уравнение энергии (4) для ньютоновской жидкости в виде

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \Phi, \qquad (12)$$

в котором

$$\Phi = \lambda\,(\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 + 2\mu D{:}D \qquad (13)$$

— диссипативная функция. Известно, что коэффициент теплопроводности κ неотрицателен (теплота всегда передается от тел с большей температурой к телам с мен температурой). Из второго закона термодинамики следует, что в процессе движения жидкости механическая энергия может перейти в тепловую, но не наоборот. Это влечет требование неотрицательности функции Φ для произвольных D. Последнее, в силу (13), выполнено в том и только в том случае, когда $\mu = 0$, $3\lambda + 2\mu = 0$.

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие движения идеальной жидкости. Жидкость называют **идеальной**, если поток тепла $\boldsymbol{q}$ и диссипативная функция Φ тождественно равны нулю. Идеальную жидкость можно рассматривать как предельный случай вязкой сжимаемой жидкости, когда $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$, $\kappa \to 0$. Тензор напряжений в идеальной жидкости является шаровым: $P =$ — pI . Полагая в (8), (12) $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\kappa = 0$, получаем

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \boldsymbol{f}, \qquad (14)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0. \qquad (15)$$

Система (1), (14), (15) становится замкнутой, если к добавить термодинамическое уравнение состояния. Для случая идеальной жидкости это уравнение удобно выбрать в форме

$$p = f(\rho, S). \qquad (16)$$

Систему (1), (14)-(16) называют также системой уравнений **газовой динамики**. Она широко используется для описания быстропротекающих процессов в сжимаемых средах, когда характерные времена изменения состояния среды под действием вязкости и теплопроводно много больше времен изменений, обусловленных фактов сжимаемости (см. [3], [4]). Важной особенностью системы (1), (14)—(16) является наличие у нее разрывных решений, описывающих такие явления, как распространение ударных волн.

Математическая модель газовой динамики, основанная уравнениях (1), (14)-(16), изучена весьма подробно (см. [3],[4]). Что касается вопросов корректности начально-краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа, то к настоящему времени здесь имеются лишь отдельные результаты. Исключение составляет теория одномерных движений с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности, развитая с достаточной полнотой (см. [5]).

Система соотношений (1)-(6) в равной мере применима к описанию движений как жидкости, так и газа. Однако если для газов свойство сжимаемости (то есть способность легко изменять плотность под действием изменений давления или температуры) является определяющим, то для собственно жидкостей это свойство выражено очень слабо. Так, если давление возрастает от одной до 100 атм при комнатной температуре, то плотность воды увеличивается всего на 0,5%. Поэтому большое распространение получила модель несжимаемой жидкости, основанная на предположении $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Формально уравнения этой модели могут быть получены из (1)-(6). Однако следует подчеркнуть, что для несжимаемой жидкости давление p уже не является термодинамической переменной, хотя и остается динамической переменной. В частности, для ньютоновской несжимаемой жидкости вследствие (1), (7) давление может быть выражено через первый инвариант $Sp\,P$ тензора напряжений по формуле $p=.-SpP/3$. С точки зрения термодинамики несжимаемая жидкость является однопараметрической средой, в которой естественным параметром состояния является температура T, соотношение (11) принимает вид $TdS=d\varepsilon$, а зависимость (5) — вид $\varepsilon = E(T)$.

В несжимаемой жидкости плотность ρ, согласно (1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \qquad (17)$$

Это уравнение всегда имеет решение ρ = const, что соответствует случаю однородной жидкости. (Об исследовании уравнений неоднородной вязкой несжимаемой жидкости см. [5].) Уравнения динамики однородной несжимаемой жидкости в предположениях о линейной зависимости (7) между тензорами P и D и о независимости коэффициента κ в формуле (6) от $|\mathrm{grad}\, T|$ имеют вид:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \qquad (18)$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\; p + \mathrm{div}\,(2\mu D) + \rho\,\boldsymbol{f}, \qquad (19)$$

$$\rho c\frac{dT}{dt} = \mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\; T) + 2\mu D : D, \qquad (20)$$

Здесь μ (динамический коэффициент вязкости), $c=E'_T$ (удельная теплоемкость) и κ (коэффициент теплопроводности) — параметры, характеризующие данную жидкость. Они, вообще говоря, зависят от температуры.

С математической точки зрения система (18)-(20) мало изучена. При постоянных μ, c и κ, с уравнения (19), (20) принимают более простой вид и записываются так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\rho^{-1}\mathrm{grad}\; p + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}, \qquad (21)$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa\Delta T + 2c^{-1}\nu D : D, \qquad (22)$$

Здесь введены обозначения: $\nu=\mu/\rho$ – кинематический коэффициент вязкости, $\chi=\kappa/\rho c$ – коэффициент температуропроводности, Δ – оператор Лапласа по переменным x.

Уравнения (18), (21) образуют замкнутую систему для определения функций ν и p. Если ее решение известно, функция T находится из линейного уравнения (22) при соответствующих начальных и краевых условиях. Система (18), (21) представляет наиболее изученную и широко используемую в приложениях модель динамики вязкой несжимаемой жидкости. Теория начально-краевых задач для этой системы изложена в [б], [7].

Если на движение жидкости факторы сжимаемости и вязкости не оказывают существенного влияния, то такое движение можно описывать с помощью уравнений (14), (17), (18), называемых уравнениями идеальной несжимаемой жидкости. Система (14), (17), (18) и ее специализация при ρ=const лежат в основе многих рассмотрений классической и современной гидродинамики (см. [2], [8]), в частности теории волновых движений жидкости (см. [9]).

Лит.: [1] Жермен П., Курс механики сплошных сред, пер. с франц., М., 1983; [2] Седов Л.И., Механика сплошной среды, 4 изд., М., 1983; [3] Овсянников Л. В., Лекции по основам газовой динамики, М., 1981; [4] Рождественский Б.Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд , М., 1978; [5] Антонцев С.Н, Кажихов А.В., Монахов В.Н., Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосиб., 1983; [6] Ладыженская О А, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [7] Темам Р., Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ, пер с англ., М., 1981; [8] Бэтчелор Дж., Введение в динамику жидкости, пер. с англ , М , 1973; [9] Овсянников Л В. [и др.]. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн, Новосиб. , 1985.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ[1]

А. И. Кириллов

Уравнения электродинамики – это система нелинейных уравнений для определения напряженностей электромагнитного поля и траекторий его источников. В электродинамике Х. Лоренца (1892) каждому источнику (частице) сопоставляется плотность массы μ, заряда ρ, тока J, поле скоростей v и так наз. микроскопического поля e (электрическое) и h (магнитное). Предполагается, что эти величины связаны следующими уравнениями (здесь k — номер источника, c — скорость света в вакууме).

1) Уравнения микроскопических полей:

$$\operatorname{rot} e_k = -\frac{\partial h_k}{c\partial t}, \quad \operatorname{rot} h_k = \frac{4\pi J_k}{c} + \frac{\partial e_k}{c\partial t}, \quad \operatorname{div} e_k = 4\pi\rho_k, \quad \operatorname{div} h_k = 0.$$

2) Уравнения движения источников: $$\mu_k \frac{dv_k}{dt} = \sum\nolimits_l (\rho_k e_l + J_k \times h_l / c).$$

3) Связи: $$\frac{\partial\rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} J_k = 0, \quad \frac{\partial\mu_k}{\partial t} + \operatorname{div} \mu_k v_k = 0, \quad J_k = \rho_k v_k, \quad \mu_k / m_k = \rho_k / q_k,$$

где m_k и q_k -- массы и заряды источников. Эти уравнения релятивистски инвариантны (А. Пуанкаре, 1906). Для точечных источников:

$$J_\mu = \{-J/c, \rho\} = q\int_{-\infty}^{\infty} u_\mu(\tau)\delta(x - x(\tau))\delta(y - y(\tau))\delta(z - z(\tau))\delta(t - t(\tau))\, d\tau,$$

где $u_\mu = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\{-v.c\}$ — 4-скорость источника, τ — собственное время, $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, $z=z(\tau)$, $t=t(\tau)$ — траектория в пространстве Минковского. В этом приближении решалась задача Коши для уравнений поля при заданных траекториях его источников и для уравнений движения частиц в заданных электромагнитных полях. Полученные результаты позволили объяснить многочисленные эффекты в процессах излучения и поглощения электромагнитных волн, развить теорию ускорителей и антенн. Однако модель точечных источников приводит к бесконечной энергии микроскопических полей. Этот недостаток устранен в моделях протяженных источников, например, в динамической коллективной модели ядра. В таких моделях движение источников определяется уравнениями гидродинамики, в которых с помощью давления учтено взаимодействие, обеспечивающее стабильность источников. Альтернативный подход состоит в использовании в качестве уравнений микроскопических полей уравнений Борна — Инфельда или уравнений Боппа — Подольского. В обоих случаях энергия поля точечного источника оказывается конечной, причем энергия и импульс поля образуют 4-вектор, который можно принять в качестве 4-вектора энергии-импульса источника (так называемая гипотеза полевой массы). Таким образом, отпадает необходимость в сомнительном тождестве $\mu/m = \rho/q$, которое служит исходным пунктом моделей протяженных источников. С другой стороны, обобщения уравнений микроскопических полей сводятся к постулированию тех или иных материальных уравнений для вакуума. Такие уравнения в принципе оправданы возможностью поляризации вакуума в силу наличия в нем электрон-позитронных пар, но конкретный их вид пока составляет предмет произвольных гипотез.

Литература: [1] Беккер Р. , Теория электричества, т. 2. Электронная теория, пер с нем., М— Л, 1936; [2] Соколов А.А., Тернов И. М., Релятивистский электрон, М., 1983; [3] Айзенберг И., Гренер В., Модели ядер, коллективные и одночастичные явления, пер с англ., М., 1975; [4] Гриб А.А., МамаевС.Г., Мостепаненко В.М , Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях, М , 1988.

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ[1]

Д.Д Соколов.

Уравнения гравитационного поля – это уравнения, описывающие свойства поля тяготения, то есть универсального притяжения между любыми телами, определяемого массой этих тел Впервые уравнение, описывающее гравитационное взаимодействие двух точечных тел, было предложено И. Ньютоном, строго говоря, вне рамок теории поля Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, сила, действующая со стороны первого тела на второе для точечных тел, равна

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}_{12}}{\mathbf{r}_{12}^2} \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}_{12}$ -- радиус-вектор, исходящий из точки, в которой расположено первое тело, в точку расположения второго тела, m_1 и m_2 — массы тел. Коэффициент γ не зависит от массы тел и расстояния между ними и является универсальной гравитационной постоянной, равной приблизительно $6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3 г$^{-1}$ сек$^{-2}$. Представив (1) в виде

$$\mathbf{F} = -\gamma\, m_1 \nabla \varphi, \qquad (2)$$

можно ввести в теорию гравитационный потенциал φ точечного тела, равный

$$\varphi = -\gamma \frac{m}{r} \qquad (3)$$

где m — масса тела, создающего гравитационное поле, r — расстояние до этого тела. Используя принцип суперпозиции, согласно которому гравитационный потенциал нескольких тел равен сумме гравитационных потенциалов, создаваемых каждым из этих тел по отдельности, и некоторые другие естественные предположения, из (3) можно получить уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\, \rho(r), \qquad (4)$$

которому подчиняется гравитационный потенциал φ, создаваемый распределением вещества с плотностью $\rho(r)$.

Уравнение Пуассона является одним из основных уравнений математической физики, на опыте изучения которого в значительной степени сформировался аппарат этой науки. При исследовании уравнения (4) можно показать, в частности, что потенциал вне центрально симметричного распределения вещества совпадает с потенциалом точечного тела, помещенного в центре распределения и имеющего массу, равную суммарной массе распределения.

Силы тяготения играют тем большую роль, чем больше масштабы рассматриваемых объектов. Так, гравитационная сила, действующая между двумя электронами, в 5-10 раз меньше электростатических сил, действующих между ними. Однако в мире небесных тел, для которых электрические заряды с высокой точностью компенсируют друг друга, сила тяготения является главной силой, поскольку силы тяготения являются исключительно силами притяжения и не могут компенсировать друг друга.

Закон всемирного тяготения и вся ньютоновская теория гравитации с огромной точностью согласуются с экспериментами, лабораторными и космическими наблюдениями. Учет поправок к этому закону необходим лишь в сравнительно специальных случаях, например, при исследовании движения планеты Меркурий или при решении тех задач космической навигации, где необходима особо высокая точность расчета.

Однако внимательное исследование уравнения Пуассона вскрывает определенные внутренние трудности. Например, не вполне ясно, как следует ставить задачи для уравнения (4) в бесконечном пространстве в том случае, когда распределение плотности ρ не убывает на бесконечности (так называемый гравитационный парадокс). Уравнение

---

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.,1998, с.151-152.

Пуассона, являясь уравнением эллиптического типа, описывает распространение взаимодействий с бесконечной скоростью (дальнодействие) и не вписывается в рамки представлений специальной теории относительности. Ординарным способом решения этих трудностей было бы создание релятивистской теории тяготения в плоском пространстве по образцу электродинамики. Уравнения такой теории можно записать в виде

$$\Box\gamma_{ik} = \frac{16\pi\gamma}{c^4}\tau_{ik}, \qquad (5)$$

где $\Box$ — оператор Д'Аламбера, γ_{ik} — тензор, описывающий гравитационное поле, τ_{ik} — тензор источников гравитационного поля, c — скорость света. Необходимость тензорной релятивистской теории тяготения является наблюдательным фактом: попытка ввести векторный потенциал гравитационного поля, одна из координат которого в нерелятивистском пределе совпадает с потенциалом φ, дает количественно неправильное предсказание для аномалий движения Меркурия.

Фактически развитие науки пошло по другому пути и А.Эйнштейн, отталкиваясь от равенства гравитационной и инертной массы (принцип эквивалентности), создал общую теорию относительности, в которой гравитационное взаимодействие описывается на языке геометрии искривленного пространства-времени. В рамках этой теории уравнения типа (5) получаются в так называемых постньютоновских приближениях слабого гравитационного поля, учитывающих, однако, релятивистские эффекты. В рамки постньютоновских приближений можно уложить основные наблюдательные данные, количественно фиксирующие отклонения от предсказаний ньютоновской теории тяготения, например, в уже упоминавшиеся аномалии в движении Меркурия, а также многие гравитационные эффекты, которые еще лежат за гранью наблюдательных возможностей, но существование которых представляется несомненным, напр. гравитационное излучение. Однако мощное идейное воздействие общей теории относительности на все развитие современной космологии и астрофизики, а также теория элементарных частиц позволило связать в единую систему многие явления, не имеющие гравитационной природы в узком смысле этого слова: реликтовое космологическое излучение, красное смещение в спектрах далеких астрономических объектов и др. Поэтому сейчас можно в определенном смысле говорить о наблюдательном подтверждении релятивистских представлений в теории тяготения именно в форме общей теории относительности.

Строго говоря, общая теория относительности не содержит самого понятия гравитационного поля и, следовательно, его уравнений. Вместо этого возникает представление о 4-мерном искривленном пространстве-времени, в котором свободные пробные частицы движутся по времениподобным (и изотропным) геодезическим. При этом под свободными понимаются частицы, не испытывающие иных воздействий, кроме гравитационных. В каком-то смысле геометрический язык общей теории относительности сопоставим с описанием явления гравитации в физике Аристотеля, где имелось представление об абсолютном верхе и абсолютном низе, то есть о неизотропном пространстве.

Роль уравнений гравитационного поля в общей теории относительности играют уравнения Эйнштейна, устанавливающие связь между кривизной пространства-времени и свойствами заполняющего его вещества и излучений. Эти уравнения имеют вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{ik}, \qquad (6)$$

где R_{ik} — тензор Риччи, выражающийся через компоненты метрического тензора g_{ik} и их первые и вторые производные, R — свертка тензора Риччи, называемая скалярной кривизной, T_{ik} — тензор энергии-импульса вещества и всех физических полей, кроме гравитационного, тензор T_{ik} также может включать в свою структуру компоненты g_{ik}.

Уравнения Эйнштейна можно получить из вариационного принципа, в котором действие для гравитационного поля имеет вид

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}\int R\sqrt{-g}\,d\Omega\,,$$

впервые предложенный Д. Гильбертом. Здесь g — определитель метрического тензора, $d\Omega$ — элемент 4-мерного объема.

Уравнения Эйнштейна, в отличие от уравнения Пуассона, нелинейны, поэтому в общей теории относительности не выполнен принцип суперпозиции. Физически это означает, что гравитационное поле имеет некоторую энергию, причем масса, соответствующая этой энергии, в свою очередь создает гравитационное поле. Важным отличием уравнений Эйнштейна от других полевых уравнений является то, что уравнения движения являются следствием уравнений поля. Уравнения, описывающие физические поля, определяющие тензор энергии-импульса, например, электромагнитное поле, не являются следствием уравнений Эйнштейна, и их нужно добавить к уравнениям (6).

В настоящее время известно много точных решений уравнений Эйнштейна, обладающих различными симметриями и соответствующих различным видам тензора энергии-импульса. Имеются определенные представления о структуре общего решения этих уравнений. Разработана постановка ряда задач математической физики для уравнений Эйнштейна и прежде всего задачи Коши. С точки зрения представлений задачи Коши уравнения Эйнштейна являются системой уравнений гиперболического типа, что соответствует конечности скорости распространения гравитационного взаимодействия [1].

Многие конкретные решения уравнений Эйнштейна получили ясную физическую интерпретацию. Однако система понятий общей теории относительности очень сильно отличается от понятийного аппарата всей предшествующей физики. Например, одновременно с решением уравнений (6) строится та область, в которой они должны быть решены. Хотя во многих конкретных случаях удается сформулировать законы сохранения энергии и импульса с учетом гравитационного поля (напр., для островного распределения вещества, плотность которого быстро спадает на бесконечности), в полной мере представление о законах сохранения не является адекватным для общей теории относительности. Эта теория содержит также внутренние ограничения своей применимости: из многих первоначально регулярных распределений вещества за конечное собственное время образуются сингулярности, в которых такие физические величины, как плотность, температура и т. п., могут обращаться в бесконечность. Вблизи сингулярностей общая теория относительности в обычном смысле неприменима Наконец, представления нелинейной общей теории относительности несовместимы с линейной квантовой механикой.

В процессе развития общей теории относительности и физики элементарных частиц постепенно происходит их взаимное сближение, в ходе которого решаются отмеченные трудности. В частности, в рамках общей теории относительности удалось описать физические поля со спином, для чего потребовалось ввести представление о пространстве-времени как о пространстве аффинной связности с кручением. Рассматриваются представления о финслеровом пространстве-времени. Была развита теория рождения частиц в гравитационном поле и сформулированы квантовомеханические поправки к общей теории относительности (одним из первых такие поправки предложил А.Д. Сахаров). Представление о так называемой космологической постоянной удалось связать с современными представлениями о физическом вакууме. В рамках теории с космологической постоянной уравнения Эйнштейна

[1] Например, т.н. гравитационные волны, т.е. изменения гравитационного поля, распространяются в пространстве с фундаментальной скоростью c. Гравитационные волны излучаются массами, движущимися с переменным ускорением. Подобно электродинамике, предсказывающей существование не связанного с зарядами свободного электромагнитного поля — электромагнитных волн, релятивистская теория гравитации — общая теория относительности — предсказывает существование не связанного с массами свободного гравитационного поля — гравитационных волн. Воздействуя на тела, гравитационные волны должны вызывать относительное смещение их частей (деформацию тел). На этом явлении основаны попытки обнаружения гравитационных волн, однако они до сих пор не обнаружены из-за чрезвычайно малой интенсивности и крайне слабого взаимодействия с веществом.

принимают вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} R_{ik} ,$$

где Λ — величина, характеризующая свойства физического вакуума. В рамках теории суперпространства удалось нащупать точки соприкосновения в представлениях об искривленном пространстве-времени и линейном пространстве состояний. Развиваются многомерные теории элементарных частиц, являющиеся далекими обобщениями теории Калуцы-Клейна. В этих теориях кроме трех пространственных и одной временной координаты имеются дополнительные внутренние размерности, с помощью которых описываются свойства элементарных частиц. Вдали от космологической сингулярности эти дополнительные размерности компактифицированы, свернуты до ультрамалых размеров и прямо нам не заметны. Предлагаются различные нестандартные теории тяготения, включающие новые, ненаблюдаемые сейчас на опыте физические поля, например, теория Бранса-Дикке с дополнительным скалярным полем. В теории элементарных частиц развиваются теории калибровочных полей и Янга—Миллса полей, представления которых перекликаются с представлениями общей теории относительности. Наконец, постепенно вырисовываются контуры так называемого великого объединения взаимодействий, то есть теории поля, объединяющей все известные взаимодействия, включая гравитационное, наподобие того, как электродинамика объединяет электричество и магнетизм. Развитие этих теорий в значительной степени ограничивается тем, что их эффекты очень слабы в окружающем нас мире и проявляются либо на очень ранних стадиях развития Вселенной, либо при исследовании процессов при сверхвысоких энергиях.

Литература :[1] Сретенский Л Н, Теория ньютоновского потенциала, М-Л, 1946; [2] Эйнштейн А., Собр научных трудов, т. 1, 2, М., 1960, [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [4] Синг Дж., Общая теория относительности, пер с англ, М, 1963, [5] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972, (6] Зельдович Я. Б., Новиков И.Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М, 1971; [7] Зельдович Я. Б., “Успехи физич. наук”, 1981, т. 133, в. 3, с 479-503; [8] Зельдович Я Б., Долгов А.Д., там же, 1980, т. 130, в. 4, с. 559-614

УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА[1]

Л.И. Пономарёв.

Это – основное динамическое уравнение нерелятивистской квантовой механики; предложено Э. Шрёдингером (E. Schrцdinger, 1926). В квантовой механике уравнение Шредингера играет такую же фундаментальную роль, как уравнения движения Ньютона в классической механике и уравнения Максвелла в классической теории электромагнетизма. Уравнение Шредингера описывает изменение во времени состояния квантовых объектов, характеризуемого волновой функцией. Если известна волновая функция у в начальный момент времени, то, решая уравнение Шредингера, можно найти *у* в любой последующий момент времени *I.*

Для частицы массы *m,* движущейся под действием силы, порождаемой потенциалом *V(x, y, z, t*), уравнение Шредингера имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\,(x, y, z, t)\psi, \qquad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа. Это уравнение называется **временным уравнением Шредингера**. Если *V* не зависит от времени, то решения уравнения Шредингера можно представить в виде:

$$\psi(x, y, x, t) = e^{-(i/\hbar)Et}\psi(x, y, z)\,, \qquad (2)$$

где *E*— полная энергия квантовой системы, а $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет **стационарному уравнению Шредингера**:

[1]Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x, y, z, t)\psi = E\psi. \qquad (3)$$

Для квантовых систем, движение которых происходит в ограниченной области пространства, решения уравнения Шредингера существуют только для некоторых дискретных значений энергии: E_1, E_2 ,…, E_n,…; члены этой последовательности (в общем случае бесконечной) нумеруются набором целых квантовых чисел n. Каждому значению E_n соответствует волновая функция $\psi_n(x, y, z)$, и знание полного набора этих функций позволяет вычислить все измеримые характеристики квантовой системы.

Уравнение Шредингера является математическим выражением фундаментального свойства микрочастиц – корпускулярно-волнового дуализма, согласно которому все существующие в природе частицы материи наделены также волновыми свойствами. уравнение Шредингера удовлетворяет принципу соответствия[1] и в предельном случае, когда длины волн де Бройля значительно меньше размеров, характерных для рассматриваемого движения, позволяет описать движение частиц по законам классической механики. Переход от уравнение Шредингера к уравнениям классической механики, описывающей движения частиц по траекториям, подобен переходу от волновой оптики к геометрической. Аналогия между классической механикой и геометрической оптикой, которая является предельным случаем волновой, сыграла важную роль в установлении уравнения Шредингера.

С математической точки зрения уравнение Шредингера есть волновое уравнение и по своей структуре подобно уравнению, описывающему колебания нагруженной струны. Однако, в отличие от решений уравнения колебаний струны, которые дают геометрическую форму струны в данный момент времени, решения $\psi(x, y, z, t)$ уравнения Шредингера прямого физического смысла не имеют. Смысл имеет квадрат волновой функции, а именно величины $P_n(x, y, z, t) = |\psi_n(x, y, z, t|^2$, равной вероятности нахождения частицы (системы) в момент t в квантовом состоянии n в точке пространства с координатами x, y, z. Эта вероятностная интерпретация волновой функции — один из основных постулатов квантовой механики.

Лит.:[1] Шредингер Э., Новые пути в физике Статьи и речи, М., 1971.

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА[2]

С. М. Биленький

Уравнение Дирака — квантовое (волновое) уравнение для релятивистской частицы со спином 1/2 (электрона, мюона, кварка и других частиц). Получено (для электрона) в 1928 П. Дираком (P. Dirac) из следующих требований:

1) уравнение для волновой функции частицы $\psi(x, t)$ (x — пространственные координаты, t - время) должно быть линейным для того, чтобы выполнялся принцип суперпозиции состояний;

2) в уравнение должна входить первая производная функции $\psi(x, t)$ по времени с тем, чтобы задание ψ в начальный момент определяло волновую функцию в любой последующий момент времени;

3) уравнение должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца, то есть иметь один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчёта;

4) величина $\psi^+(x, t)\ \psi(x, t)$ (где $^+$ означает эрмитово сопряжение) должна иметь физический смысл плотности вероятности нахождения частицы в точке x в момент времени t;

5) уравнение для свободной частицы (массы m) должно быть построено так,

[1] принцип соответствия – постулат квантовой механики, требующий совпадения ее физических следствий в предельном случае больших (малых) квантовых чисел с результатами классической теории. Выдвинут Н. Бором в 1923 г.

[2] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

чтобы состояние с импульсом $\boldsymbol{p}$ и энергией E было его решением только в случае, если выполняется релятивистское соотношение $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ (используется система единиц $\hbar = c = 1$).

Всем этим требованиям удовлетворяет система уравнений для функции $\psi(x, t)$, которая имеет четыре компоненты и записывается в виде столбца:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$

(x — точка пространства-времени). При преобразованиях Лоренца и пространственных поворотах они преобразуются как компоненты 4-компонентного спинора (биспинора).

Ковариантный вид уравнения Дирака зависит от выбора метрики пространства-времени. Если метрика выбрана так, что $x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2$, где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор ($x^0 = t$): $g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$, то уравнение имеет вид

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0 \qquad (1)$$

где γ^μ – матрицы Дирака, $\mu = 0, 1, 2, 3$ (по повторяющемуся индексу предполагается суммирование): $\gamma^0 = \beta, \gamma^k = \beta\alpha_k, \alpha_k = \begin{Vmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{Vmatrix}, \beta = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{Vmatrix}$. Здесь $I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ – единичная матрица, k=1,2,3, $\sigma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$ – матрицы Паули. Матрицы Дирака γ^μ – размера 4×4, γ^0 –эрмитова, γ^k – антиэрмитовы и удовлетворяют перестановочным соотношениям: $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Сопряженный биспинор $\overline{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial \overline{\psi}(x)}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + \overline{\psi}(x)m = 0 \qquad (2)$$

Из (1) и (2) для 4-мерного вектора тока $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ вытекает уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \qquad (3)$$

Временная компонента вектора тока равна плотности вероятности нахождения частицы в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени x^0, а его пространственные компоненты являются компонентами 3-мерного вектора потока вероятности.

При данном импульсе $\boldsymbol{p}$ уравнение Дирака имеет четыре линейно независимых решения два решения с положительной энергией $E = p_0 \left(p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}\right)$ и два решения с отрицательной энергией $E = -p_0$. Они могут быть записаны (соответственно) в следующем ковариантном виде:

$$\psi_{\pm p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u(\pm p) e^{\mp ipx}, \qquad (4)$$

где спиноры $u(p)$, $u(-p)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\hat{p} + m\right)u(\pm p) = 0 \qquad (5)$$

$\left(\hat{p} = \gamma^{\mu} p_{\mu} = \gamma^{0} p^{0} - \gamma^{\alpha} p^{\alpha},\ \alpha = 1,2,3\right)$.

Для сопряженных спиноров имеем:

$$u(\pm p)\left(\hat{p} \pm m\right) = 0 . \qquad (6)$$

Для каждой из пар спиноров в качестве независимых могут быть выбраны решения с определенной спиральностью (проекцией спина на направление импульса) $\lambda = \pm 1/2$. В представлении Дирака-Паули (в котором γ^{0} диагональна) эти решения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_{\lambda}(p) &= N\begin{pmatrix} \nu_{\lambda} \\ \dfrac{2\lambda\,|\boldsymbol{p}|}{p_0 + m}\nu_{\lambda} \end{pmatrix}; \quad E = p_0, \quad \lambda = \pm 1/2, \\ u_{\lambda}(-p) &= N\begin{pmatrix} \dfrac{-2\lambda\,|\boldsymbol{p}|}{p_0 + m}\nu_{\lambda} \\ \nu_{\lambda} \end{pmatrix}; \quad E = -p_0, \quad \lambda = \pm 1/2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Здесь v_{λ} − 2-компонентный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{2}\sigma \boldsymbol{n} v_{\lambda} = \lambda v_{\lambda}, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, $\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$— матрицы Паули, а множитель N определяется нормировкой спинора $u(\pm p)$. Используются следующие нормировки (для каждого значения λ):

$$\left.\begin{aligned} &а)\quad (u(\pm p))^{+} u(\pm p) = 1, \quad N = \sqrt{(p_0 + m)/2p_0}, \\ &б)\quad \bar{u}(\pm p) u(\pm p) = \pm 1, \quad N = \sqrt{(p_0 + m)/2m}, \\ &в)\quad \bar{u}(\pm p)\gamma^{0} u(\pm p) = 2p_0, \quad N = \sqrt{p_0 + m}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

при этом $v^{+}v=1$.

Для $m = 0$ решения свободного уравнение Дирака являются собственными функциями матрицы $\gamma^{5} = -i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$:

$$\gamma^{5} u_{\lambda}(\pm p) = \mp 2\lambda\, u_{\lambda}(\pm p) . \qquad (10)$$

В матричные элементы процессов со слабым взаимодействием спиноры $u_{\lambda}(p)$, описывающие нейтрино, входят в :виде $\frac{1}{2}(1+\gamma^{5})u_{\lambda}(p)$. Если масса нейтрино равна нулю, то

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^{5})u_{\lambda}(p) = 0 \qquad \text{при } \lambda = 1/2,$$

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^{5})u_{\lambda}(p) = u_{\lambda}(p) \quad \text{при } \lambda = -1/2,$$

то есть спиральность нейтрино равна −1/2. Частице с отрицательной энергией соответствует антинейтрино (см. ниже), его спиральность равна +1/2.

В нерелятивистском случае $\beta = |\boldsymbol{p}|/p_0 << 1$ (в системе СГС $\beta = v/c$, где v— скорость частицы), и спиноры $u_{\lambda}(\pm p)$ с точностью до линейных по β членов даются выражениями:

$$u_\lambda(p) = N\begin{pmatrix} \nu_\lambda \\ \beta\lambda\nu_\lambda \end{pmatrix}, \quad u_\lambda(-p) = N\begin{pmatrix} -\beta\lambda\nu_\lambda \\ \nu_\lambda \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что для нерелятивистской частицы “нижние” (“верхние”) компоненты решений уравнения Дирака с положительной (отрицательной) энергией много меньше “верхних” (“нижних”) компонент.

Приведем следующие полезные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\overline{u}(\pm p)\gamma^\mu u(\pm p) = \pm(p^\mu/m)\overline{u}(\pm p)u(\pm p), \\ &u(\pm p)\gamma^5 u(\pm p) = 0, \\ &p_\mu \overline{u}(\pm p)\gamma^\mu\gamma^5 u(\pm p) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Для вычисления сечения процессов с участием релятивистских частиц со спином 1/2 необходимо знать суммы $\Sigma_\lambda u_\lambda(p)\overline{u}_\lambda(p)$ и $\Sigma_\lambda u_\lambda(-p)\overline{u}_\lambda(-p)$. Если спиноры $u_\lambda(\pm p)$ нормированы условиями $\overline{u}(\pm p)\gamma^0 u(\pm p) = 2p_0$, то

$$\Sigma_\lambda u_\lambda(\pm p)\overline{u}_\lambda(\pm p) = \hat{p} \pm m. \qquad (13)$$

Решения уравнения Дирака с отрицательной полной энергией — несомненная трудность квантовой механики релятивистской частицы Для ее устранения П.Дирак предположил, что состоянием с минимальной энергией (вакуумным состоянием) является состояние, в котором все уровни с отрицательной энергией заполнены. Если из этого заполненного “моря” состояний с отрицательной энергией вырвать одно состояние (образовать так называемую дырку Дирака), то полученное при этом состояние будет иметь положительную энергию. Масса частицы, описываемой этим состоянием, равна массе электрона, а ее заряд противоположен заряду электрона. Такая частица — античастица по отношению к электрону — была открыта К Андерсоном (C. Anderson) в 1932 и называется п о з и т р о н о м.

Последовательная реализация идеи Дирака о существовании решений с отрицательной энергией требует по существу выхода за рамки одночастичного уравнения для релятивистской частицы и осуществляется только в квантовой теории поля

Как отмечалось, уравнение Дирака инвариантно относительно преобразований Лоренца

$(x')^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$, где $a^\mu_\nu a^\nu_\sigma = \delta^\mu_\sigma$ (δ^μ_σ — символ Кронекера). Если записать преобразование спинора в виде

$$\psi'(x') = U\psi(x), \qquad (14)$$

где U — (4 x 4)-матрица, то из условия инвариантности уравнения Дирака следует, что

$$U^{-1}\gamma^\mu U = a^\mu_\nu \gamma^\nu. \qquad (15)$$

Сопряженный спинор преобразуется следующим образом:

$$\overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(x)U^{-1}. \qquad (16)$$

Для преобразований Лоренца

$$(x')^1 = \frac{x^1 + \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (x')^0 = \frac{x^0 + \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (x')^2 = x^2, \quad (x')^3 = x^3$$

матрица U имеет вид

$$U = \exp(\gamma^0\gamma^1\eta/2), \qquad (17)$$

где $\text{th}\,\eta = \beta$ (β – скорость одной системы относительно другой). Для преобразования из системы покоя частицы в систему, где ее импульс равен $\boldsymbol{p}$, а энергия p_0, имеем

$$U = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}}\left(1 + i\frac{\gamma^\alpha p^\alpha \gamma^0}{p_0 + m}\right), \quad \alpha = 1,2,3. \qquad (18)$$

При построении лагранжианов взаимодействия в квантовой теории поля широко используются трансформационные свойства величин $\overline{\psi} O^k \chi$, где ψ и χ – биспиноры Дирака (спинорные поля Дирака), а $O^k = 1;\quad \gamma^\mu;\quad \sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2i}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu);\quad \gamma^\mu\gamma^5;\quad \gamma^5$

— полная система 16 матриц Дирака. Из (14)—(16) следует, что $\overline{\psi}\chi$ – скаляр, $\overline{\psi}\gamma^\mu\chi$ – четырехмерный вектор, $\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\chi$ – тензор второго ранга, $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\chi$ – псевдовектор, $\overline{\psi}\gamma^5\chi$ – псевдоскаляр.

Волновое уравнение для релятивистской частицы со спином 1/2 в электромагнитном поле может быть получено из уравнения для свободной частицы заменой

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} \to \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu\right)\psi, \qquad (19)$$

где e - электрич заряд частицы, а A_μ = (φ, $-\boldsymbol{A}$) — четырехмерный потенциал электромагнитного поля (φ – скалярный потенциал, $\boldsymbol{A}$ — векторный). Таким образом, уравнение Дирака для электрона (мюона) в электромагнитном поле имеет вид

$$i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu\right)\psi - m\psi = 0. \qquad (20)$$

Это уравнение инвариантно относительно локальных калибровочных преобразований

$$\left.\begin{aligned} \psi'(x') &= e^{i\Lambda(x)}\psi(x), \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{e}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x^\mu}, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где $\Lambda(x)$ – произвольная вещественная функция x. В нерелятивистском пределе в первом порядке по β для “верхнего” спинора $v_\lambda(x)$ из уравнения Дирака (20) вытекает уравнение Паули. При этом для магнитного момента электрона автоматически получается правильное значение $e\hbar/2mc$ (в СГС системе единиц) Если учитывать также члены второго порядка по β, то в уравнении для $v_\lambda(x)$, вытекающем из уравнения Дирака в центральном поле $V(r)$ (r – расстояние до центра), возникает потенциал спин-орбитального взаимодействия:

$$V_{\text{с.–о.}} = \frac{1}{2m^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma L}. \qquad (22)$$

Здесь $\boldsymbol{L}$ = [$\boldsymbol{rp}$] — оператор орбитального момента. Уравнение Дирака в кулоновском поле точечного ядра с зарядом Ze, $V = -Ze^2/r$ может быть решено точно. Для уровней энергии электрона в атоме возникает при этом выражение

$$E_{nj} = m\left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - (j+1/2) + \sqrt{(j+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (23)$$

Квантовое число n принимает целые значения 1, 2, 3, … , а квантовое число полного момента j – полуцелые такие, что $j + 1/2 < n$ ($\alpha \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры) Если $Z\alpha$ “ 1, то с точностью до членов $(Z\alpha)^4$ из (23) следует:

$$E_{nj} = m\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{n^2}\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right]\right\}. \qquad (24)$$

Квантовое число n соответствует, таким образом, главному квантовому числу нерелятивистской теории. Уровни энергии в релятивистском случае классифицируются, как и в нерелятивистской теории, путем задания n, j и квантового числа орбитального момента l. В таблице приведены первые четыре уровня:

Обозначение уровня	n	l	j	$E_{n\,j}$
$1S_{1/2}$	1	0	1/2	$m\sqrt{1-(Z\alpha)^2}$
$2S_{1/2}$	2	0	1/2	$m\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}{2}}$
$2P_{1/2}$	2	1	1/2	$m\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}{2}}$
$2P_{3/2}$	2	1	3/2	$\dfrac{m}{2}\sqrt{4-(Z\alpha)^2}$

Разность уровней $2P_{1/2}$ и $2P_{3/2}$ (тонкое расщепление уровней) обусловлена спин-орбитальным взаимодействием (22). Уровни $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$, отличающиеся чётностью и обладающие одними и теми же значениями n и j, оказываются в теории Дирака вырожденными. Учет эффектов квантовой электродинамики приводит к тому, что это вырождение снимается, при этом уровень $2S_{1/2}$ лежит выше уровня $2P_{1/2}$. Этот так называемый лэмбовский сдвиг уровней измерен на опыте и находится в блестящем согласии с предсказаниями квантовой электродинамики.

Литература: [1] АхиезерА.И., БерестецкийВ Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981; [2] Бьёркен Д.Д. , Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, пер. с англ., т. 1—2, М., 1978.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ МНОГИХ ЧАСТИЦ[1]

Л. П. Питаевский

Квантовой теорией многих частиц называют совокупность теоретических методов, применяемых для описания квантовомеханических систем, состоящих более чем из двух частиц. Поскольку уравнение Шредингера для таких систем не может быть решено точно, речь идет о приближенных методах

Уравнение Шредингера при решении квантовомеханических задач в системах многих частиц обычно используется в представлении вторичного квантования Координатное и импульсное представления в этом случае менее удобны, поскольку число измерений пространства, в котором пишется это уравнение, растет с увеличением числа частиц

Следует различать методы, применяемые для описания систем из конечного числа частиц, и методы описания макроскопических тел. В первом случае типичной является постановка задачи о нахождении волновых функций и уровней энергии системы. Во втором случае подразумевается переход к термодинамическому пределу, когда объем тела и число частиц в нем формально устремляются к бесконечности с сохранением конечной плотности числа частиц. Типичной постановкой задачи в этом случае является определение энергии основного состояния системы и распределения частиц по импульсам, нахождение спектра элементарных возбуждений (квазичастиц) и кинетических коэффициентов системы.

Основой ряда методов теории многих частиц является теория возмущений, применяемая в случаях, когда потенциальная энергия взаимодействия между частицами достаточно мала. Для двух частиц, взаимодействующих посредством потенциала с конечным радиусом действия, условие этой малости состоит в малости амплитуды рассеяния по сравнению с радиусом действия. Для частиц, взаимодействующих по закону

[1]Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

Кулона, оно сводится к требованию малости потенциальной энергии по сравнению с кинетической на расстоянии порядка длины волны. Формальное применение теории возмущений приводит к выражениям для характеризующих систему величин в виде ряда по целым степеням потенциальной энергии. В некоторых случаях члены этого формального ряда оказываются бесконечными – содержащими расходящиеся интегралы, что обычно свидетельствует об ошибочности предположения о разложимости по целым степеням потенциала, даже при условии применимости теории возмущений для взаимодействия двух частиц. В этом случае для получения конечного результата приходится суммировать бесконечные последовательности наиболее расходящихся членов ряда. Характерным примером является вычисление термодинамических функций системы заряженных частиц, где для получения конечного результата необходимо учитывать экранировку потенциала каждой из частиц остальными частицами. Другой пример — вычисление энергии основного состояния слабонеидеального бозе-газа, в котором отличное от нуля значение энергии возникает только при учете взаимодействия. В обоих случаях разложение термодинамических функций системы содержит дробные степени потенциала взаимодействия. Своеобразна ситуация в сверхпроводниках, где термодинамические функции электронного газа содержат экспоненциально малые по потенциалу взаимодействия члены. Эти члены исчезают в любом порядке теории возмущений, однако именно с ними связан сверхпроводящий фазовый переход.

Наиболее совершенной формой теории возмущений является диаграммная техника. Она применяется чаще всего для вычисления функции Грина системы, полюсы которой определяют энергии квазичастиц, а интеграл от которой по частотам – распределение частиц системы по импульсам. Каждый член ряда теории возмущений изображается в диаграммной технике в виде совокупности нескольких диаграмм Фейнмана, для аналитической записи которых существуют стандартные правила. Диаграммная техника оказывается особенно эффективной для упомянутого выше суммирования наиболее расходящихся членов ряда теории возмущений. Различные диаграммы в одном и том же порядке теории возмущений имеют различный физический смысл и могут обладать разной степенью расходимости. Суммирование расходимостей в этом случае сводится к имеющему наглядный физический смысл выделению определенных графических последовательностей диаграмм. Важное преимущество диаграммной техники — возможность корректной оценки отброшенных членов и тем самым определения условий применимости сделанных приближений.

Существуют некоторые возможности вычисления функций Грина без применения теории возмущений. Большие возможности открывает запись функций в виде бесконечнократного функционального интеграла, для приближенного вычисления последнего существуют методы, принципиально отличные от теории возмущений, например, метод перевала. Если условие применимости теории возмущений для взаимодействия пар частиц не выполняется, но система является настолько разреженной, что амплитуда рассеяния двух частиц мала по сравнению с межчастичным расстоянием, применимо приближение вириального разложения.

В некотором смысле обратная ситуация имеет место в тяжелых атомах, где создаваемый электронами электрический потенциал медленно меняется на расстоянии порядка длины волны электрона. Электроны в таком атоме можно рассматривать как квазиклассический ферми-газ, находящийся во внешнем поле, определяющемся самим распределением электронов. Для этого потенциала получается замкнутое уравнение Томаса – Ферми.

В том случае, когда при постановке многочастичной задачи не удается найти малый параметр, используя малость которого можно искать приближенное решение, важную играют вариационные методы.

В применении к атомным системам хорошую точность дает метод самосогласованного поля (метод Хартри – Фока). Этот метод состоит в том, что волновая функция системы электронов записывается в виде линейной комбинации произведений функций, каждая из которых зависит от координат только одного электрона. Линейные комбинации подбираются таким образом, чтобы удовлетворить обходимым условиям симметрии, соответствующим, например, определенным значениям орбитального момента атома. Для самих же одночастичных функций в результате минимизации энергии получается нелинейное уравнение типа уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим от самих волновых функций. Можно сказать, что электрон движется в самосогласованном поле, определяемом всеми остальными электронами. В отличие от уравнения Томаса — Ферми для этого потенциала, однако, не предполагается применимость квазиклассического приближения.

Большие успехи достигнуты при исследовании электронных свойств металлов Наибольший интерес представляет расчет энергетических спектров электронов в зоне проводимости. Важную роль здесь играет метод псевдопотециала. В простейшем варианте этого метода волновые функции электронов заполненных зон принимаются равными волновым функциям свободных ионов, а волновые функции электронов в зоне проводимости выбираются виде линейной комбинации плоских волн и волновых функций заполненных оболочек так, чтобы эти комбинации были ортогональны к волновым функциям заполненных оболочек. В результате задача сводится к уравнению типа уравнения Шредингера, в котором, однако, вместо потенциала стоит линейная комбинация обычного самосогласованного потенциала и некоторого связанного с упомянутой ортогонализацией выражения, зависящего от энергии состояния и волновых функций электронов в ионах. Эту сумму и называют псевдопотенциалом. Он оказывается относительно малым из-за компенсации указанных двух членов, так что уравнение можно решать по теории возмущений. Это позволяет получить весьма полную информацию о свойствах конкретных металлов. В частности, малость псевдопотенциала позволила объяснить известную эмпирически близость многих наблюдаемых свойств электронов в металлах к свойствам невзаимодействующих электронов.

Литература.: [1] Гомбаш П., Проблема многих частиц в квантовой механике, пер. с нем., М., 1952; [2] Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962; [3] Харрисон У., Псевдопотенциалы в теории металлов, пер. с англ., М., 1968; [4] Марч Н., Янг У., Сампантхар С., Проблема многих тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1969; [5] Займан Дж., Современная квантовая теория, пер. с англ., М., 1971; [6] Липкин Г., Квантовая механика, пер. с англ., М., 1977; [7] Лифшиц Е.М., Питаевский Л. П., Статистическая физика, ч. 2, М., 1978.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ[1]

Л. Б. Окунь

Квантовой теорией поля называют теорию релятивистских квантовых явлений. По существу, квантовая теория поля является наиболее фундаментальной из физических теорий. Нерелятивистская квантовая механика и релятивистская классическая теория поля являются ее предельными случаями, первая — при скоростях, много меньших скорости света, вторая — при величинах действия, много больших постоянной Планка. В основе квантовой теории поля лежит представление о том, что все частицы являются квантами соответствующих физических полей. Квантовая теория поля изучает процессы рождения, взаимодействия и уничтожения элементарных частиц.

Методы квантовой теории поля лежат в основе квантовой электродинамики, квантовой хромодинамики, моделей великого объединения, стандартной модели электрослабого взаимодействия. Все эти теории являются как бы отдельными главами квантовой теории поля.

См. также (ниже) *Аксиоматическая квантовая теория поля. Конструктивная квантовая теория поля. Нелокальная квантовая теория поля*.

.

Лит: [1] Математическая энциклопедия, т. 2, М., 1979, с. 829-837; [2] Физическая энциклопедия, т. 2, М., 1990, с. 300—309; см. также литературу к статьям в [1] и [2].

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА[1]

Д. И. Казаков, Д. В. Ширков

Квантовая электродинамика – это раздел квантовой теории поля, в котором описывается взаимодействие электромагнитного поля и вещества. В более узком значении — квантовая теория взаимодействия электромагнитного поля Максвелла и электрон-позитронного поля Дирака (называемая также спинорной электродинамикой). Именно в этом, более узком, смысле термин "квантовая электродинамика" употребляется ниже. Квантовая электродинамика входит составной частью в стандартную электрослабую теорию, объединяющую слабые и электромагнитные взаимодействия элементарных частиц.

Исторически квантовая электродинамика была первым четко сформулирован-ным разделом квантовой теории поля. Она сложилась в конце 20-х гг. на базе квантовой теории излучения и квантовой теории спинорного поля Дирака.

В основе современной формулировки квантовой электродинамики лежит модель, содержащая два взаимодействующих между собой релятивистских квантовых поля. Электромагнитное поле характеризуется действительным 4-мерным векторным потенциалом $A_\mu(x)$, μ=0, 1, 2, 3; x — пространственно-временная точка. Векторы напряженностей электрич. и магнитного полей выражаются через потенциал $A_\mu(x)$:

$$E_i = F_{0\,i}\,,\ B_i = \varepsilon_{ijk} F_{jk}\,,\ i, j, k = 1, 2, 3, \qquad (1)$$

где тензор напряженности равен $F_{jk'}(x) = \partial_\mu A_\nu — \partial_\nu A_\mu$, $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, а ε_{ijk} — антисимметричный тензор Леви-Чивита. Поле Дирака описывается комплексным лоренцевым спинором $\psi_\alpha(x)$, $\overline{\psi}_\beta(x)$, α,β=1,2,3,4. Лагранжиан квантовой электродинамики имеет вид

$$L(x) = -1/4 F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \overline{\psi}(x)\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu(x))\psi(x) - m\overline{\psi}(x)\psi(x), \qquad (2)$$

где γ^μ — матрицы Дирака, e — заряд электрона, m — его масса. Лагранжиан квантовой электродинамики инвариантен относительно абелевых калибровочных (градиентных) преобразований

$$\left.\begin{array}{l} \psi(x) \to e^{ie\lambda(x)}\psi(x),\ \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x) e^{-ie\lambda(x)}, \\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \end{array}\right\} \qquad (3)$$

где $\lambda(x)$ — произвольная действительная функция. Поле A_μ является простейшим (абелевым) калибровочным полем и служит переносчиком взаимодействия между полями материи.

Поля A_μ, ψ и $\overline{\psi}$ удовлетворяют уравнениям движения, которые являются уравнениями Эйлера—Лагранжа для лагранжиана (2) и представляют собой соответственно уравнения Максвелла и Дирака:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = ej^\mu(x), \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \end{array}\right\} \qquad (4)$$

где $j^\nu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$ есть 4-вектор электромагнитного тока.

Квантование системы полей $A, \psi, \overline{\psi}$, взаимодействующих в соответствии с лагранжианом (2), приводит к квантовой электродинамике.

При этом поле Максвелла A квантуется по Бозе—Эйнштейну, а поле Дирака ψ — по Ферми-Дираку. Согласно общим положениям квантовой теории поля, поля $A, \psi, \overline{\psi}$ после квантования становятся операторами, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям движения, и действующими на вектор состояния системы. Эти операторы удовлетворяют также определенным перестановочным соотношениям, образующим с уравнениям движения связанную систему уравнений. Бозевские перестановочные соотношения в квантовой механике систем с конечным числом $d < \infty$ степеней свободы

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

постулируются в виде

$$[Q_j , P_k]=i\delta_{jk}$$

Специфика квантовой электродинамики как калибровочной теории состоит в том, что электромагнитное поле описывается не векторами напряженности (1), средние значения которых являются наблюдаемыми величинами, а потенциалом A_μ. Инвариантность лагранжиана относительно локальных преобразований (3) приводит к линейной зависимости уравнений движения для компонент потенциала, в результате чего поле A_μ содержит избыточные - продольные и временные — степени свободы. Для их исключения при классическом рассмотрении обычно накладывают на A_μ те или иные дополнительные условия (напр., условие Лоренца $\partial^{\mu}A_\mu=0$). Это приводит к определенным трудностям при квантовании, вызывая необходимость выделять истинно динамические переменные. Выбор в качестве динамических переменных четырех компонент потенциала приводит к представлению электромагнитного поля в виде системы со связями. Для квантования таких систем может быть использован разработанный П. Дираком (P.Dirac,1965) формализм — так наз. обобщенная гамильтонова динамика. В квантовой электродинамике наряду с ней употребляют также специальную процедуру — так наз. формализм Гупта—Блейлера. В этом случае условие Лоренца накладывается не на оператор A_μ , а выполняется для средних значений. Релятивистская инвариантность при этом требует введения индефинитной метрики, что приводит в дальнейшем к взаимной компенсации вкладов нефизических фотонов в наблюдаемые состояния. Альтернативным способом квантования систем со связями является метод, использующий формализм континуального интеграла.

Поскольку система уравнений квантовая электродинамика не допускает точного решения, ее решают приближенно методом теории возмущений по имеющемуся малому безразмерному параметру $\alpha=e^2/\hbar c=1/137$, характеризующему интенсивность процессов электромагнитного взаимодействия и называемому постоянной тонкой структуры. Как правило, вычисляют амплитуды вероятностей перехода систем, состоящих из электронов, позитронов, фотонов (и некоторых других заряженных частиц, напр. мюонов, кварков) из одного (начального) состояния в другое (конечное). Такие амплитуды представляются матричными элементами M матрицы рассеяния и вычисляются в виде разложений по степеням α.

Приложение квантовой электродинамики к реальным процессам (например, к комптоновскому рассеянию фотонов на электронах или меллеровскому рассеянию электронов) в наинизшем приближении для матричного элемента $M\alpha\alpha$ приводит к выражениям, находящимся в хорошем количественном согласии с опытом Относительная погрешность составляет величину порядка а, поэтому возникает необходимость учета высших членов ряда теории возмущений. Эти члены (так наз. радиационные поправки) соответствуют вкладам от процессов, содержащих в промежуточных состояниях дополнительные виртуальные частицы — виртуальные фотоны, электроны, позитроны и т. п. Соответствующие матричные элементы, представляемые интегралами по 4-импульсам виртуальных частиц, как правило, расходятся в ультрафиолетовой области. Проблема ультрафиолетовых расходимостей в течение многих лет препятствовала вычислению радиационных поправок в квантовой электродинамике и развитию квантовой теории поля в целом.

Проблема была решена во второй половине 40-х гг. в рамках созданной ковариантной формулировки квантовой теории возмущений на основе физической идеи о перенормировках. В основе метода перенормировок лежит тот факт, что в квантовой электродинамике все ультрафиолетовые бесконечности могут быть представлены в виде факторов нормировки параметров электрона (его заряда e и массы m) и могут быть устранены перенормировкой этих параметров. Бесконечный характер таких перенормировок не приводит к физическим противоречиям вследствие ненаблюдаемости неперенормированных, “голых” значений e_0 и m_0.

Исторически первой успешной демонстрацией плодотворности идеи об устранении ультрафиолетовых расходимостей с помощью бесконечных перенормировок была работа X. Бете (X. Bethe, 1947) по нерелятивистскому расчету лэмбовского сдвига уровней в атоме водорода. Ковариантная теория возмущений (1946-49) С.Томонаги (S.Tomohaga), Р. Фейнмана (К.Feynman) и Ю.Швингера (J.Schwinger) позволила создать регулярный метод устранения расходимостей в квантовой электродинамике и вычислить низшие радиационные поправки к основным эффектам, напр. к магнитному моменту электрона. В 1-й половине 50-х гг. Н.Н.Боголюбовым, Ф. Дайсоном (Р. Dyson), А. Саламом (A.Salam) и другими была разработана общая теория перенормировок и для класса перенормируемых взаимодействий построена перенормированная теория возмущений.

Основой практических вычислений в квантовой электродинамике являются так называемые правила Фейнмана. Согласно этим правилам, для вычисления матричного элемента какого-либо процесса в фиксированном порядке теории возмущений следует составить полный набор диаграмм Фейнмана этого порядка и затем каждой из диаграмм по некоторым правилам соответствия сопоставить определенное математическое выражение. Сумма этих выражений и образует вклад данного порядка в матричный элемент. Общая теория перенормировок позволяет избавиться ото всех ультрафиолетовых расходимостей в матричных элементах и получить конечные однозначные результаты в произвольном порядке теории возмущений по степеням α. Конечные вклады высоких порядков можно представить в виде несингулярных кратных интегралов по некоторым числовым параметрам. Эти параметрические интегралы в простейших случаях вычисляются аналитически, а в более сложных — численно.

Кроме ультрафиолетовых расходимостей радиационные поправки к процессам с участием заряженных частиц обладают также инфракрасными расходимостями, то есть расходимостями при малых значениях импульсов виртуальных частиц, связанными с дальнодействующим характером электромагнитного взаимодействия. Однако эти расходимости отсутствуют в сечении инклюзивных процессов, в которых произведено суммирование вероятностей переходов в состояния с произвольным числом “мягких”, то есть низкоэнергетических фотонов (экспериментально такие процессы нельзя отличить от исходного из-за конечной разрешающей способности регистрирующих приборов).

Предсказательная сила квантовой электродинамики может быть проиллюстрирована на примере вычисления радиационных поправок к аномальному магнитному моменту электрона. Современное теоретическое значение, вычисленное с точностью 10^{-10} , равное

$$\alpha_{T.} = 1{,}15965246(15)\ 10^{-3},$$

находится в согласии с экспериментальным значением $\alpha_{T.}$=1,15965220(4). 10^{-3}, определенным, как видно, с точностью 10^{-11}. При такой точности становится важной погрешность экспериментального измерения значения постоянной тонкой структуры α, проводимого на основе эффекта Джозефсона. Достигнутый уровень соответствия между расчетным и экспериментальным значениями является рекордным в физике.

Для других эффектов квантовой электродинамики — аннигиляции электрон-позитронной пары, дельбрюковского рассеяния фотонов электромагнитным полем ядра и др.— также характерно отличное согласие теории с экспериментом. Однако по сравнению с аномальным магнитным моментом в них уровень соответствия не столь высок либо из-за меньшей точности эксперимента, либо вследствие существенного влияния эффектов, выходящих за рамки чистой квантовой электродинамики.

Вообще опытные данные по всем без исключения эффектам квантовой электродинамики находятся в прекрасном согласии с теоретическими значениями в тех случаях, когда влияние других видов взаимодействий оказывается несущественным либо поддается учету. Этот факт имеет принципиальное значение как для квантовой электродинамики, так и для квантовой теории поля в целом. Он свидетельствует о том, что основные положения современной локальной (калибровочной) квантовой теории поля, а также динамическая основа квантовой электродинамики, соответствующая калибровочному лагранжиану взаимодействия, справедливы во всей области, доступной современному эксперименту.

Литература: [1] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981; [2] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л П., Релятивистская квантовая электродинамика, 2 изд., М., 1980; [3] Боголюбов Н.Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [4] Фейнман Р., Квантовая электродинамика, пер. с англ., М, 1964.

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА[1]

К. Г. Четыркин

Так называется калибровочная теория сильных взаимодействий, описывающая взаимодействие цветных кварков и глюонов, она возникла как результат развития кварковой модели адронов. В 1964 М.Гелл-Ман и Г.Цвейг предположили, что адроны могут быть построены из гипотетических фундаментальных частиц — кварков, причем мезоны (адроны с целым спином) являются системами кварков и антикварков, а барионы (адроны с полуцелым спином) — трех кварков или трех антикварков (см. [1]). По современным представлениям, основанным на изучении адронной спектроскопии и анализе экспериментальных данных в рамках объединенной модели Глэшоу — Вайнберга — Салама, должны существовать по меньшей мере шесть различных типов кварков: *u-, d-, s-, c-, b-, t-* кварки. Они обладают спином, равным 1/2, и дробными электрическими зарядами

$$Q_u = Q_c = Q_t = 2/3, \quad Q_d = Q_s = Q_b = -1/3.$$

В настоящее время имеются косвенные экспериментальные свидетельства существования первых пяти типов кварков (то есть наблюдались адроны, содержащие эти кварки). Адроны, включающие в себя t-кварк, пока не открыты.

Важнейшим ингредиентом кварковой модели и квантовой хромодинамики является понятие цвета, при определении которого постулировано существование у кварков дополнительного квантового числа, принимающего для каждого типа кварков три значения. Другими словами, существуют три u-кварка u_1, u_2, u_3, три d-кварка d_1, d_2, d_3, и т.д. Постулируется, что сильные взаимодействия инвариантны относительно группы цветовой симметрии $SU_c(3)$, причем каждый триплет кварков по цвету реализует фундаментальное представление этой группы. Для цветового триплета кварковых полей q_i , i =1, 2, 3, соответствующее преобразование записывается в виде

$$q_i(x) \to q_i(x) + i\left(\frac{\Lambda_a}{2}\right)_{i,j} \omega^a q_j(x), \qquad (1)$$

где a = 1, ...,8, Λ_a — матрицы Гелл-Мана (генераторы группы $SU(3)$), а ω^a — групповые параметры (для простоты ограничиваются малыми преобразованиями с параметрами ω^a << 1). Введение цвета позволило, во-первых, рассматривать кварки как подчиняю-щиеся статистике Ферми — Дирака в соответствии с фундаментальной теоремой квантовой теории поля о связи спина и статистики и, во-вторых, привести в соответствие с экспериментальными данными предсказания кварковой модели для процессов распада π-мезона на два фотона и электрон-позитронной аннигиляции в адроны.

Квантовая хромодинамика возникает, если предположить, что цветовая симметрия имеет локальный характер, то есть что сильное взаимодействие инвариантно относительно преобразований (1) с параметрами $\omega^a(x)$, зависящими от пространственно-временной точки x. Это требует введения в дополнение к кварковым полям октета калибровочных *полей Янга - Миллса* $A^a_\mu(x)$, a =1,2,...,8, число которых равно рангу калибровочной группы, в рассматриваемом случае группы $SU_c(3)$. Безмассовые векторные частицы (кванты этих полей) называются глюонами. Инвариантность по отношению к локальным преобразованиям цветовой группы вместе с требованиями перенормируемости однозначно фиксирует вид классического лагранжиана квантовой хромодинамики :

$$L = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} + i \sum\nolimits_{q=u,d,...} \overline{q}_i (\gamma_\mu D^{ij}_\mu - m_q) q_j, \qquad (2)$$

где $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + i\, g\, f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu, \quad D_\mu = \delta^{ij}\partial_\mu - igA^a_\mu \left(\Lambda^a\right)_{ij}$ — тензор напряженностей глюонного поля, f^{abc} — структурные константы группы $SU_c(3)$, m_q — масса кварка типа q (Как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

индексам). Лагранжиан (2) по построению инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований кварковых полей (1) и глюонных полей вида:

$$A_\mu^a(x) \to A_\mu^a(x) + f^{abc}\omega^b(x)A_\mu^a(x) + \partial_\mu \omega^a(x). \qquad (3)$$

Последовательная процедура квантования локально калибровочно инвариантных лагранжианов построена в 1967 Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым, а также, независимо, Б. де Виттом. В классе ковариантных α-калибровок применение этой процедуры к (1) приводит к эффективному лагранжиану вида:

$$L_{\text{К.х.}}^{\text{eff}} = L_{\text{К.х.}}^{c} - \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A_\mu^a\right)^2 + \partial_\mu \overline{\eta}^a\left(\partial_\mu \delta^{ac} - f^{abc}A_\mu^b\right)\eta^c. \qquad (4)$$

По сравнению с квантовой электродинамикой новым элементом здесь являются “духи” – скалярные поля $\overline{\eta}^a$ и η^a, подчиняющиеся статистике Ферми–Дирака. Эти поля необходимы для соблюдения условия унитарности в физическом секторе теории. Исходя из эффективного лагранжиана, стандартным образом могут быть введены правила Фейнмана для вычисления соответствующих функций Грина по теории возмущений. Теория, описываемая лагранжианом (4), является перенормируемой (количество независимых перенормировочных констант конечно). Существенную роль в доказательстве этого утверждения играют так называемые тождества Славнова — Тейлора, связывающие различные функции Грина и являющиеся следствием калибровочной инвариантности лагранжиана (2). Перенормированные квантовохромодинамические функции Грина зависят от кварк-глюонной константы связи $\alpha_S = g^2/4\pi$, масс кварков и точки нормировки μ. Зависимость от последней возникает вследствие известной конечной неопределенности в выборе перенормировочных констант (см. [5]).

Примечательной особенностью квантовой хромодинамики является свойство асимптотической свободы: эффективная константа связи $\overline{\alpha}_S(\mu)$, подчиняющаяся стандартному уравнению ренормализационной группы

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu} = \overline{\alpha}_S(\mu) = \beta(\alpha_S), \qquad (5)$$

убывает в ультрафиолетовой области. Из явных вычислений функции $\beta(\overline{\alpha}_S)$ в двух первых порядках теории возмущений следует, что

$$\overline{\alpha}_S(\mu) = \frac{12\pi}{(33-2n_j)\ln(\mu^2/\Lambda^2)}\left(1 - \frac{6(153-19n_j)\ln(\ln(\mu^2/\Lambda^2))}{(33-2n_j)\ln^2(\mu^2/\Lambda^2)}\right), \qquad (6)$$

где n_f – число кварков с массой меньшей μ, Λ – так называемый параметр шкалы квантовой хромодинамики. Физический смысл Λ состоит в том, что числовое значение этого параметра характеризует масштаб области сильной связи в квантовой хромодинамике. При выводе формулы (6) полностью игнорировались эффекты масс кварков, то есть рассматривалась идеализированная ситуация, когда влиянием кварков с массой больше μ полностью пренебрегалось В этом приближении зависящие от n_f члены в формуле (6) меняются дискретным образом, когда пересекаются кварковые пороги. В области больших импульсных передач μ эффективная константа связи $\overline{\alpha}_S(Q) = \overline{\alpha}_3(\mu = 0)$ логарифмически падает, то есть в этом пределе квантовая хромодинамика превращается в теорию слабо взаимодействующих между собой кварков и глюонов. Этот факт позволяет использовать улучшенную с помощью аппарата ренормализационной группы (см. [6]) теорию возмущений для надежного нахождения функций Грина в области больших импульсов Q (то есть когда $\alpha_S(Q) < c$), что соответствует на координатном языке малым расстояниям. В отличие от квантовой электродинамики, сама возможность осмысленного применения теории возмущений в квантовой хромодинамике базируется на предварительном использовании соотношений ренормализационной группы. Свойство асимптотической свободы позволило физически обосновать справедливость партонной картины сильных взаимодействий, в рамках которой адроны при определенных условиях можно рассматривать как совокупности почти не взаимодействующих между собой составляющих — партонов.

Как следует из формулы (6), при уменьшении Q эффективная константа связи $\overline{\alpha}_S(Q)$ растет и ≥ 1 при Q, приближающемся к Λ. Точное поведение $\overline{\alpha}_S(Q)$ при $Q \leq \Lambda$ в настоящее время неизвестно; сама теория возмущений и, следовательно, формула (6) неприменимы в этой области вследствие немалости эффективной константы связи. Во всяком случае, это означает, что в квантовой хромодинамике взаимодействие при малых переданных импульсах, то есть на больших расстояниях, в отличие от квантовой электродинамики, становится сильным, что не позволяет непосредственно использовать лагранжиан (4) для определения наблюдаемого спектра одночастичных состояний в этой теории. Согласно гипотезе конфайнмента, все физические состояния в квантовой хромодинамике бесцветны, то есть являются синглетами по отношению к цветовой группе $SU_c(3)$. Кварки и глюоны, реализуя фундаментальное и, соответственно, присоединенное представления группы $SU_c(3)$, не могут существовать в свободном состоянии как физические частицы. При этом экспериментально наблюдаемые сильно взаимодействующие частицы — адроны — представляют собой бесцветные связанные состояния глюонов. Одним из следствий гипотезы конфайнмента является естественное объяснение отсутствия дробно заряженных адронов, что подтверждается всей существующей совокупностью экспериментальных данных. В настоящее время строгое доказательство этого явления отсутствует и детальный механизм удержания кварков внутри адронов неясен. Одно из популярных качественных объяснений гипотезы конфайнмента состоит в том, что на больших сравнению с $\hbar c/\Lambda$ расстояниях сила притяжения кварка и антикварка друг к другу не зависит от расстояния между ними и, следовательно, потенциальная энергия их взаимодействия пропорциональна этому расстоянию. Именно такое поведение потенциальной энергии было найдено в рамках так называемого решёточного приближения в квантовой хромодинамике.

Опосредованный характер квантовой хромодинамики и трудности с доказательством гипотезы конфайнмента значительно усложняют задачу экспериментальной проверки достоверности этой теории и нахождения значения фундаментального параметра Λ. Несмотря на это, к настоящему времени имеется значительное число количественных предсказаний квантовой хромодинамики, подтвержденных экспериментально Большая часть этих результатов получена с помощью теории возмущений. Из предыдущего следует, что теория возмущений квантовой хромодинамики могла бы быть применима для количественного описания так называемых жестких процессов с большим переданным импульсом Q, для которых эффективная константа связи $\overline{\alpha}_S(Q)$ достаточно мала. Естественно ожидать, что в итоге должно быть возможным воспроизведение в случае жестких процессов основных рузультатов кварк-партонной модели. Главная, до сих пор не решенная окончательно трудность в реализации этой программы заключается в том, что и информацию о реальных адронных процессах приходится извлекать из функций Грина кварковых и глюонных полей (возможно, со вставками локальных операторов, составленных из этих полей), рассматриваемых в области больших евклидовых импульсных передач, которые лишь и могут надёжно вычисляться в рамках теории возмущений. Тем не менее, в некоторых важных частных случаях, к которым относятся, в частности, полное сечение электрон-позитронной аннигиляции в адроны и инклюзивные глубоко-неупругие лептон-адронные реакции, эту проблему можно обойти. В результате оказалось возможным не только обосновать наблюдаемое экспериментально приблизительно автомодельное поведение соответствующих сечений, но и предсказать позднее обнаруженные экспериментально логарифмические отклонения от этого поведения, возникающие вследствие вкладов высших порядков теории возмущений

К сожалению, метод операторных разложений непосредственно не применим к рассмотрению более сложных жестких процессов, таких, как рождение $\mu^+\mu^-$ пар, упругих электромагнитных адронных формфакторов или рождение частиц с большим поперечным импульсом в адронных столкновениях, закономерности асимптотического поведения которых хорошо описываются правилами кваркового счёта (см. [7]). В этом случае вместо разложений Вильсона используют прямой анализ диаграмм Фейнмана, дающих вклад в изучаемый процесс. Несмотря на то что такой подход существенно более трудоёмок и сталкивается с определенными техническими трудностями, с его помощью так удается подтвердить предсказания кварк-партонной модели и формул кваркового счёта и вычислить по крайней мере первый неисчезающий поправочный член порядка $\overline{\alpha}_S$ для жёстких процессов. Во всех случаях, в которых предсказания квантовой хромодинамики для жёстких процессов сравнивались с экспериментальными данными, наблюдалось взаимное согласие. При этом определяемое в разных процессах значение масштабного параметра Λ оказывается лежащим в относительно узком интервале: Λ=100÷300 МэВ (если принять во внимание существование эффектов высших порядков и так называемых эффектов высших твистов, то есть членов ~ $\left(\frac{\Lambda}{Q}\right)^n$, подавленных степенным образом по сравнению с ведущими.

Важную роль в теоретическом изучении квантовой хромодинамики и её экспериментальных следствий играют непертурбативные (то есть выходящие за рамки обычной теории возмущений по константе кварк-глюонной связи α_S) методы, такие как правила сумм квантовой хромодинамики, $1/N_c$-разложение, решёточный и квазиклассический подходы.

Правила сумм квантовой хромодинамики основаны на использовании кварк-адронной дуальности дисперсионных соотношений и операторного разложения на малых расстояниях. В рамках этого подхода статические параметры низколежащих адронов могут быть приближенно выражены через так называемые вакуумные конденсаты — вакуумные средние калибровочно инвариантных локальных операторов, составленных из кварковых и глюонных полей. Численные значения вакуумных конденсатов рассматриваются как феноменологические параметры, связанные со сложной структурой физического вакуума квантовой хромодинамики. В обычном подходе, опирающемся на теорию возмущений, эти средние равны нулю. В результате применения правил сумм квантовой хромодинамики оказывается, что массы, электромагнитные и слабые ширины основных мезонных и барионных резонансов могут быть найдены с точностью порядка 20-30%, исходя всего из двух вакуумных конденсатов – кваркового $(\overline{q}, q)$ и глюонного $< G^a_{\mu\nu}, G^a_{\mu\nu} >$. Более того, метод правил сумм квантовой хромодинамики в последнее время с успехом используется для изучения электромагнитных формфакторов адронов при малых и умеренных импульсных передачах, то есть при Q порядка нескольких ГэВ/с

Исследование квантовой хромодинамики в рамках квазиклассического подхода привело к открытию инстантонов — решений уравнений Янга-Миллса, рассматриваемых в евклидовом пространстве-времени. Учет инстантонов позволяет найти на качественном уровне решение так называемой $U(1)$-проблемы (существенно большая масса η'-мезона по сравнению с массой π-мезона) и естественно объясняет существование глюонного конденсата. Инстантонные решения непосредственно связаны со сложной структурой физического вакуума в квантовой хромодинамике. Дело в том, что функционал потенциальной энергии полей Янга–Миллса имеет бесконечное количество минимумов, получающихся друг из друга калибровочным преобразованием с параметрами $\omega^a(x)$, неубывающими на пространственной бесконечности, и разделенных потенциальным барьером. Инстантонные решения описывают тунелирование через этот барьер, вероятность которого имеет порядок $\sim e^{-4\pi/\alpha_S}$. Вакуум квантовой хромодинамики оказывается инвариантным относительно рассматриваемого калибровочного преобразования с точностью до фазового множителя $e^{i\theta}$. Отличие от нуля параметра θ можно эффективно учесть с помощью добавления к лагранжиану (4) нового члена, имеющего вид полной дивергенции

$$L_{\text{К.х.}} = L^{\text{eff}}_{\text{К.х.}} + i\theta G^a_{\mu\nu} G^a_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,, \qquad (7)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга с $\varepsilon_{0123} = -1$. При $\theta \neq 0$ лагранжиан (7) является CP-инвариантным. Из ограничения на величину электрического дипольного момента нейтрона следует, что $|\theta| \leq 10^{-9}$. До сих пор нет окончательного ответа на вопрос о причинах такой малости параметра θ (проблема *CP*-сохранения в квантовой хромодинамике).

В рамках решёточного приближения к квантовой хромодинамике основные величины представляются в виде континуальных интегралов, которые аппроксимируются повторными интегралами высокой кратности. Последние, в свою очередь, приближенно вычисляются с использованием метода Монте-Карло. Несмотря на некоторые проблемы, связанные с быстродействием и объемом памяти современных ЭВМ, и ряд технических трудностей (корректный учет фермионных степеней свободы), к настоящему времени в рамках решёточного подхода получены важные физические результаты. В частности, с 30%-й точностью рассчитаны значения масс некоторых адронов, их констант распада, а также величины кварковых и глюонных конденсатов. Суть метода $1/N_c$-разложения состоит в построении новой теории возмущений, использующей величину $1/N_c$, где N_c — число цветов (в реальном случае N_c=3), в качестве малого параметра. Ведущее приближение соответствует формальному переходу $N_c \to 8$ в квантовой хромодинамике. В этом приближении оказывается возможным при определенных предположениях вывести из квантовой хромодинамики эффективный низкоэнергетичный нелинейный лагранжиан, который совпадает с феноменологическим мезонным лагранжианом, предлагавшимся ранее для описания адронных явлений в области низких энергий. Более того, этот лагранжиан допускает топологически нетривиальные решения — солитоны, причем свойства этих решений позволяют отождествить их с барионами.

Суммируя вышесказанное, можно с большой долей уверенности утверждать, что, несмотря на ряд ещё не до конца решённых принципиальных вопросов, все адронные процессы могут быть описаны на основе единого лагранжиана (4) и, следовательно, квантовая хромодинамика является адекватной теорией сильных взаимодействий.

В настоящее время квантовая хромодинамика рассматривается как часть единой теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий.

Литература: [1] Ge11-Mann M, "Phys Lett", 1964, v 8, p 214-15, [2] Боголюбов Н.Н., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н., К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц, Дубна, 1965, [3] Боголюбовы Н [и др], Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы, Дубна, 1965, [4] Han M, Nambu Y., "Phys Rev.", 1965, v 139, p 1006-10, [5] Stueccelberg E., Petermann A., "He1v. phys acta", 1953, v 26, p 499-520, [6] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., "Доклады АН СССР", 1955, т 103, с 391-94, [7] Matveev V., Muradyan R., Tavkhelidze A., "Lett. Nuovo Cim", 1973, v 7, p 719-23

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ[1]

В. П. Павлов, С. С. Хоружий.

Аксиоматическая квантовая теория поля – это квантовая теория поля, построенная по образцу аксиоматической теории, то есть таким образом, чтобы все ее результаты выступали как строгие следствия единой системы фундаментальных физических предположений — аксиом.

Возможность представления квантовой теории поля в такой форме требует определенных условий. В отличие от аксиоматических теорий в математике, физическая теория не может сразу строиться в виде аксиоматического формализма. Если в математике система объектов и система аксиом для них прямо берутся в качестве исходных данных теории, то в физике исходят из определенного запаса эксперименталь-ных фактов и некоторой совокупности закономерностей, подмеченных в этих фактах. Неизбежным образом различные участки изучаемой области явлений (релятивистских явлений в микромире в случае квантовой теории поля) сначала описываются различными теоретическими схемами, которые часто не вполне согласуются между собой и, кроме того, как правило, являются лишь приближенными, а не точными. На таком этапе

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

физическая теория еще не подготовлена к представлению в строгой аксиоматической форме. Лишь когда надежно установлены главные закономерности, управляющие данной областью явлений, выяснена степень их общности и точные закономерности отделены от приближенных, становится целесообразным выразить их в виде системы фундаментальных аксиом и представить основные результаты теории как строгие следствия из этой системы аксиом. Таким образом, "если в математике мы аксиоматизируем, чтобы понять, то в физике нам нужно сначала понять, чтобы аксиоматизировать" (Ю. Вигнер).

Эти особенности аксиоматического метода в физике отразились и в формировании аксиоматической квантовой теории поля. Оно происходило в середине 50-х гг., когда после создания теории перенормировок возникли надежды на последовательность квантовополевого описания хотя бы на уровне теории возмущений, и шло одновременно в нескольких направлениях. В каждом из них построение аксиоматической схемы включает в себя те же основные этапы. Сначала выбираются исходные физические объекты, в терминах которых и идет дальнейшее развитие теории. Затем находится (а иногда и строится заново) математический аппарат, пригодный для описания объектов. Последние два этапа – формулировка системы аксиом и вывод следствий из них.

Физическое содержание, вносимое в теорию ее аксиомами, практически одинаково для всех направлений аксиоматической квантовой теории поля. По существу системы аксиом — это одни и те же строго сформулированные предположения, из которых исходит традиционная квантовая теория поля. Прежде всего сюда входит аксиома релятивистской инвариантности: в соответствии с принципом относительности Эйнштейна, все физические законы не должны зависеть от выбора начала отсчета, направления осей координат и времени и от равномерного прямолинейного (поступательного) движения системы отсчета. Аксиома локальности (причинности) требует, чтобы какое-либо событие, происшедшее в физической системе, могло повлиять на поведение системы лишь в моменты времени, следующие за этим событием. Наконец, аксиома спектральности утверждает, что энергии всех допустимых состояний физической системы (ее спектр энергий) должны быть положительны. Эта аксиома отражает фундаментальный факт положительности масс частиц, подтверждаемый всей физической практикой. В конкретных вариантах к этим фундаментальным принципам добавляют также в качестве аксиом дополнительные требования, прежде всего положительность нормы векторов, представляющих физические состояния. Отличия между разными вариантами аксиоматической квантовой теории поля определяются выбором исходных физических величин. Возможности этого выбора весьма разнообразны, однако можно выделить три основных варианта, к которым сводятся все остальные.

В аксиоматическом подходе Боголюбова (предложен в 1955 Н. Н. Боголюбо-вым) в качестве основного физического объекта выбрана матрица рассеяния, состоящая из набора величин (амплитуд процессов), определяющих вероятности всех возможных переходов системы из состояний до начала взаимодействия в состояния после его окончания (такие состояния называются асимптотическими).

В аксиоматическом подходе Уайтмена [предложен в 1956 г. А. С. Уайтменом] исходным физическим объектом служит взаимодействующее квантованное поле (поле, описывающее взаимодействия). В принципе – это ненаблюдаемая величина, являющаяся обобщением развитой еще при зарождении квантовой теории поля концепции квантованного поля свободных частиц.

В алгебраическом подходе [развит в 1957-64 годах Р. Хаагом , Х. Араки, Д.Кастлером] фундаментальным объектом является совокупность всех наблюдаемых – набор всех физических величин, которые могут быть непосредственно измерены в эксперименте (или последовательности экспериментов). Алгебраический подход – наиболее широкий и общий из всех направлений аксиоматической квантовой теории поля, поскольку в нем не налагается никаких ограничений на то, какими физическими характеристиками может обладать описываемая система (тем самым в форме теории локальных наблюдаемых может быть представлена, вообще говоря. любая физическая теория, как квантовая, так и классическая). Аксиомы Хаага— Араки формулируются для совокупности локальных наблюдаемых, которые можно определить с помощью измерений в фиксированной ограниченной области пространства-времени. Для элементов такой совокупности можно ввести алгебраические операции сложения, умножения и умножения на число, в связи с чем ее называют алгеброй локальных наблюдаемых, или локальной алгеброй (данной области пространства-времени). Концепция локальных наблюдаемых и правила действий с ними фактически обобщают формализм операторов обычной квантовой механики и вполне естественны для квантовой физики. Алгебраический подход эффективен при изучении наиболее общих свойств квантовой теории поля. Так, в его рамках дано простое и компактное описание свойств причинности в релятивистской квантовой теории, найдены строгие критерии эквивалентности физических теорий и выяснено, при каких дополнительных условиях теория локальных наблюдаемых включает в себя квантованные поля.

Все перечисленные подходы приспособлены, в первую очередь, для описания квантовых систем, не включающих частиц нулевой массы. Сюда относится прежде всего теория сильного взаимодействия в ее традиционной форме. Реальные теории с безмассовыми частицами (и наиболее важная из них — квантовая электродинамика), как правило, принадлежат к разряду теорий калибровочных полей. Для таких теорий строго доказаны теоремы запрета, согласно которым принципы локальности и релятивистской инвариантности несовместимы с постулатом положительности нормы в пространстве физических состояний. Поэтому здесь возникает необходимость существенной модификации схемы аксиоматической квантовой теории поля. Попытки построения подобной модификации связываются с использованием пространств состояний, допускающих отрицательную норму для векторов состояний (пространств с индефинитной метрикой).

Подход Уайтмена — наиболее разработанное и изученное из направлений аксиоматической квантовой теории поля, давшее самый большой вклад в ее развитие. Именно на его основе полностью выяснено, каким математическим аппаратом следует пользоваться для описания релятивистской квантовой системы с помощью взаимодействующего квантового поля. Этот аппарат позволил строго вывести из аксиом аксиоматической квантовой теории поля нетривиальные физические следствия. Первым из них явилось обобщение *CPT*-теоремы, полученное Р. Йостом. *CPT*- теорема Йоста раскрывает глубокую связь причинных свойств теории со свойствами симметрии пространства-времени и допускает непосредственную проверку на опыте. Следующее крупное достижение подхода Уайтмена — построение теории рассеяния Хаага-Рюэля [Р. Хааг, Д. Рюэль , 1958-62], установившей, что в схеме Уайтмена, исходящей из понятия поля, а не частицы, асимптотические состояния поля обладают свойствами частиц. Тем самым была успешно решена проблема корпускулярной интерпретации полевой теории, то есть доказано, что теория поля одновременно способна служить и теорией частиц.

Аксиоматический подход Боголюбова, первый по времени появления, оказал наибольшее влияние на развитие квантовой теории поля и вообще теории элементарных частиц (в частности, тем, что выработал понятие об амплитуде процесса в его различных каналах как о единой аналитической функции своих переменных). Хотя в систему его аксиом входят дополнительные предположения (по-видимому, вытекающие из основных аксиом), оправданием таких допущений служит то, что с их помощью существенно сокращается путь к результатам, которые могут быть непосредственно проверены на опыте. Результаты такого рода в аксиоматической квантовой теории поля немногочисленны, но обладают особой ценностью, поскольку могут служить критериями справедливости основ квантовой теории поля. Значительная их часть получена в рамках аксиоматики Боголюбова. Прежде всего к ним относится доказательство дисперсионных соотношений квантовой теории поля (Н. Н. Боголюбов, 1956). Использование дисперсионных соотношений развилось в широкий метод изучение взаимодействия элементарных частиц, являющийся одним из основных рабочих средств квантовой теории поля. Другой принципиальный результат – доказательство аналитичности амплитуды рассеяния в некотором эллипсе в комплексной плоскости угла рассеяния (Х. Леман, 1958; А. Мартен, 1966). Далее, для произвольных стабильных масс доказана аналитичность амплитуды (при фиксированной передаче импульса) вне окрестности начала координат разрезанной комплексной плоскости инвариантной энергии (Ж. Брос, В. Глазер, А. Эпштейн, 1965). Последние результаты приводят к многочисленным, непосредственно проверяемым следствиям аксиоматической квантовой теории поля.

На рубеже 60-70-х гг. принципиальные проблемы этой традиционной аксиоматической квантовой теории поля были в основном решены. Однако в то же время наметились новые проблемы для квантовой теории поля в целом, связанные с обнаружением новых особенностей процессов взаимодействия элементарных частиц. Большую, если не главную роль в них играют структуры, недостаточно учитывавшиеся или совсем не учитывавшиеся традиционной квантовой теорией поля: правила суперотбора различных типов, калибровочные поля, фазовые переходы и топологические заряды. Аксиоматический подход пока не занимает в их изучении видного места. Но и на этом новом этапе квантовой теории поля фундаментальные аксиомы, лежащие в основе прежней аксиоматической квантовой теории поля, и ее результаты сохраняют силу и ценность для современных исследований. Новая аксиоматической квантовой теории поля должна быть не отменой, а обогащением прежней, включив в себя положения, которые отражают специфику новой структуры (что, возможно, потребует и перехода на новый математический язык). К этому направлению относятся некоторые результаты конструктивной квантовой теории поля, поиски строгого аппарата для теории калибровочных полей, алгебраическая теория правил суперотбора. Наиболее актуальная задача в данный период — создание аксиоматической формулировки калибровочной квантовой теории поля.

Литература.: [1] Й о с т Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [2] Боголюбов Н. Н., Логунов А.А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [3] Общие принципы квантовой теории поля и их следствия, М., 1977.

КОНСТРУКТИВНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ[1]

Г В. Ефимов

Конструктивная квантовая теория поля – это направление квантовой теории поля, основная задача которого состоит в строгом математическом обосновании результатов, получаемых в квантовой теории поля. В отличие от аксиоматической квантовой теории поля, конструктивная квантовая теория поля призвана ответить на вопрос, существуют ли в математическом смысле нетривиальные квантованные поля для обычно рассматриваемых взаимодействий и удовлетворяют ли они основным аксиомам квантовой теории поля и аксиоматической квантовой теории поля. В задачу конструктивная квантовая теория поля входит реальное построение таких полей, изучение математических свойств и различных квантовополевых объектов, связанных с этими полями, и выяснение физического содержания рассматриваемой конкретной модели квантовой теории поля.

Конструктивная квантовая теория поля как самостоятельный раздел квантовой теории поля возникла в начале 60-х гг. и связана с именем А. Вайтмана (A. Wightman), который сформулировал ее основную задачу. Вторым этапом развития конструктивной квантовой теории поля можно считать 2-ю половину 60-х - начало 70-х гг. [Дж. Глимм (J. Glimm), А. Джаффе (A. Juffe) и др.], когда было доказано существование квантованных полей в простейших суперперенормируемых взаимодействиях в пространстве размерности d= 2. Третий этап начался в 70-х гг. и связан с применением методов евклидовой теории поля. Основные теоремы евклидовой квантовой теории поля были доказаны К. Остервальдером (K.Osterwalder) и Р. Шрадером (R. Schrader). В начале 80-х гг. направление конструктивной квантовой теории поля испытывает кризис, поскольку методы, развитые в пространстве d = 2, с большим трудом переносятся в пространство d = 3 и не ясно, что можно сделать в 4-мерном пространстве-времени (d = 4).

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

На первом этапе основным объектом изучения конструктивной квантовой теории поля являлся бесконечный набор функций Вайтмана $\{W_n(x_1, ..., x_n)\}$, где $x_1, ..., x_n$ $n = 1, 2, 3, ...$, — точки пространства-времени t_i, x_i (используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$). Задание этих функций эквивалентно знанию квантованных полей в смысле аксиоматической квантовой теории поля (так называемая теорема реконструкции Вайтмана). Функции Вайтмана, вообще говоря, можно было бы вычислить как вакуумные средние от произведения полей. Например, в простейшем случае однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$

$$W_n(x_1, ..., x_n) = \langle 0|\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)|0\rangle, \qquad (1)$$

где гейзенбергово поле $\varphi(x)$ определяется соотношением

$$\varphi(x) = \varphi(t,\boldsymbol{x}) = \exp(iHt)\,\varphi(x)\,\exp(-iHt). \qquad (2)$$

Здесь $\varphi(x)$ — “начальное” поле, то есть значение поля $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ в точке пространства x в момент времени $t = 0$, а

$$H = H[\varphi] = H_0[\varphi]+gH_I[\varphi] \qquad (3)$$

– гамильтониан системы, представленный в виде суммы гамильтониана H_0, описывающего невзаимодействующую систему, и гамильтониана взаимодействия gH_I, где g — константа связи (квадратные скобки означают функциональную зависимость от поля $\varphi(x)$.

Однако наличие расходимостей — объемных, ультрафиолетовых и, возможно, других — делает прямое вычисление по формуле (1) невозможным. Поэтому доказательство существования функций Вайтмана (1) строится следующим образом. В гамильтониан взаимодействия (3) вводятся объемное (Λ) и ультрафиолетовые (σ) “обрезания”, так что регуляризованный гамильтониан $H_{\Lambda\sigma}[\varphi]$ становится хорошо определенным эрмитовым оператором, а для него существует регуляризованный набор функций Вайтмана $\{W_n(\cdot\,|\Lambda,\sigma)\}$, где точка обозначает набор пространственно-временных переменных. Далее к регуляризованному гамильтониану добавляются так называемые контрчлены, структура которых предсказывается теорией возмущений и которые призваны сократить возникающие расходимости в пределе снятия обрезания. Задачей конструктивной квантовой теории поля является, во-первых, доказательство существования конечного предела

$$\lim_{\sigma\to\infty}\lim_{\Lambda\to\infty} W_n(\cdot\,|\,\Lambda,\sigma) = W_n(\cdot) \qquad (4)$$

при определенном выборе контрчленов и, во-вторых, доказательство того, что полученные предельные функции $\{W_n(\cdot)\}$ удовлетворяют всем требованиям аксиоматической квантовой теории поля.

Математические трудности при непосредственной реализации этой программы определяются сложностью операторной структуры вводимых контрчленов, что, в свою очередь, диктуется конкретным видом рассматриваемой квантово-полевой модели. Наиболее простые контрчлены возникают в так называемых суперперенормируемых теориях, то есть в теориях, где число расходящихся диаграмм Фейнмана конечно. Именно по этой причине первые нетривиальные примеры построения релятивистских локальных квантованных полей были получены в суперперенормируемых моделях, характеризуемых плотностями гамильтониана взаимодействия $\varphi_4^2, P^n(\varphi)_2, \overline{\psi}\psi\varphi_2$, где верхний индекс — степень взаимодействия, а нижний — размерность пространства-времени $d = 2$, P^n— многочлен степени n, ψ – спинорное поле Дирака (черта над ψ означает дираковское сопряжение). Проведение сформулированной выше программы даже в этих простейших случаях потребовало создания математической техники операторных оценок специально для изучаемых моделей.

Дальнейшее развитие конструктивной квантовой теории поля связано с переходом к евклидову пространству и применением методов евклидовой теории поля. В аксиоматической квантовой теории поля было доказано, что функции Вайтмана $W_n(t_1, x_1; ...; t_n, x_n)$ являются граничными значениями аналитических функций $F_n(z_1^0, z_1; ...; z_n^0, z_n)$ в область аналитичности которых попадают также евклидовы 4-точки z_k такие, что $z_k^0 = i\tau_k$, $z_k = x_k$, где τ_k – “мнимое время”. Значения функций $F_n(z_1, ...,z_n)$ на множестве евклидовых точек называются функциями Швингера [введены Ю. Швингером (J. Schwinger) в 1951]:

$$S_n(\tau_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; \tau_n, \boldsymbol{x}_n) = F_n(i\tau_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; i\tau_n, \boldsymbol{x}_n).$$

К. Остервальдер и Р. Шрадер (1975) нашли необходимые и достаточные условия, при выполнении которых была доказана эквивалентность теорий, построенных на функциях W_n и S_n.

Изучение функций Швингера более удобно по следующим причинам. Во-первых, к решению проблем теории поля привлекаются хорошо разработанные теоретико-вероятностные методы, поскольку функции Швингера можно отождествить со средними от произведения случайных процессов (евклидовых полей):

$$S_n(\tau_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; \tau_n, \boldsymbol{x}_n) = E\,[\Phi(\tau_1, \boldsymbol{x}_1)\ldots\Phi(\tau_1, \boldsymbol{x}_1)].$$

Здесь $E[\Phi]$ — среднее от некоторой случайной величины Φ, заданной на некотором вероятностном пространстве. Было выяснено, что величина $\Phi(\cdot)$ должна быть евклидово-ковариантным марковским случайным полем, удовлетворяющим определенным дополнительным требованиям, и доказано, что эти требования эквивалентны условиям Остервальдера—Шрадера. Во-вторых, переход к евклидовым вероятностным мерам позволил при исследовании проблем, связанных со снятием обрезаний, использовать корректные интегральные представления для регуляризованных функций Швингера $S_n(\cdot\ |\Lambda,\sigma)$ и многочисленные методы статистической физики. Тем самым оказалось, что многие вопросы евклидовой теории эквивалентны проблемам статистической физики. На этом пути были упрощены доказательства существования функций Вайтмана в модели $P^n(\varphi)_2$ и доказано их существование в модели φ_3^4.

Математически развитые методы конструктивной квантовой теории поля привели пока к доказательству существования квантованных гейзенберговых полей только в суперперенормируемых моделях квантовой теории поля Переход к изучению перенормируемых моделей требует привлечения новых идей и методов.

Литература: [1] Саймон Б, Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер с англ , М , 1976, [2] Конструктивная теория поля, пер с англ , М. , 1977, [3] Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход, М , 1978, [4] Глимм Д , Джаффе А , Математические методы квантовой физики Подход с использованием функциональных интегралов, пер с англ, М , 1984.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ[1]

Д. А. Киржниц

Нелокальная квантовая теория поля – наименование обобщений стандартной (локальной) квантовой теории поля, для которых характерно несоблюдение условия микропричинности в области малых расстояний и промежутков времени с размерами порядка фундаментальной длины *I*. (В статье используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.) В большинстве вариантов нелокальной квантовой теории поля это достигается нарушением присущего локальной теории свойства близкодействия (локальности взаимодействия), требующего совпадения пространственно-временных аргументов взаимодействующих полей; именно поэтому говорят о “нелокальной” теории поля. Нелокальная квантовая теория поля смыкается с другими обобщениями локальной теории (содержащими высшие производные полей, индефинитную метрику и т. п.), а также с процедурой регуляризации ультрафиолетовых расходимостей локальной теории, основанной на рассмотрении локального взаимодействия как предела “размазанного”.

Нелокальная квантовая теория поля зародилась как реакция на расходимости, и первоначальной целью их устранение [П. Дирак (P. Dirac), 1934; Г. Ватагин (G.Vatagin), 1934]. Позднее интерес к нелокальной квантовой теории поля оживлялся в периоды обострения трудностей локальной теории (“нулификация заряда”, неперенормируемость слабого взаимодействия и др.), а также при появлении свидетельств сложной внутренней структуры адронов. В более общем плане к разработке нелокальной квантовой теории

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

поля побуждала неудовлетворенность состоянием физического фундамента локальной теории поля (в частности, невозможностью придать прямой физический смысл условию микропричинности из-за неадекватности понятия точечного события в релятивистской квантовой физике); возникала даже убежденное в близости новой революции в физике, означающей коренной пересмотр представлений о пространстве-времени “в малом” и появление новой фундаментальной физической константы — элементарной (фундаментальной) длины l. Существовал и определенный практический интерес к нелокальной квантовой теории поля, связанный с ведущимися и планируемыми экспериментами по проверке квантовой электродинамики и дисперсионных ее отношений: эта теория должна ответить на вопрос, означает ли положительный результат проверки дисперсионных соотношений подтверждение свойства микропричинности, и на другие вопросы подобного типа и дать экспериментаторам рабочие формулы, связывающие величину l (или ее верхнюю границу) с данными опыта.

По степени отхода от локальной теории существующие варианты нелокальной квантовой теории поля можно разделить на два класса.

К первому, “физическому”, классу относятся нелокальные схемы, которые основаны на нестандартных пространственно-временных представлениях, лишающих смысла такие понятия, как поле в определенной точке пространства-времени (или сама такая точка), локальность взаимодействия, микропричинность. Это достигается приданием 4-вектору координаты смысла оператора, компоненты которого не коммутируют либо с оператором поля [теория Маркова – Юкавы; М.А. Марков, 1940; Х. Юкава (X. Yukawa), 1956], либо друг с другом (теория квантованного пространства-времени), что приводит к соотношениям неопределенностей между полем и координатами точки пространства-времени и соответственно между самими этими координатами. К рассматриваемому классу относятся и другие схемы, например теория стохастического пространства-времени, в которой координата имеет свойства случайной величины (а само пространство-время подобно турбулентной среде).

Второй, “феноменологический”, класс составляют нелокальные схемы, базирующиеся на обычных представлениях о пространстве-времени. В них нарушение локальности взаимодействия и условия микропричинности осуществляются введением в аппарат теории некоторых заданных функций координат или импульсов – формфакторов, которые и ведут к “размазыванию” взаимодействия. В динамических моделях нелокальной квантовой теории поля формфактор F вводят в лагранжиан или гамильтониан взаимодействия, “раздвигая” аргументы операторов поля, отнесенных в локальной теории к единой точке пространства-времени. Так, в скалярной теории с 3-частичным взаимодействием, которому отвечает функция действия

$$g\int d^4x\varphi^3(x),$$

переход к нелокальной квантовой теории поля осуществляется заменой этой функции выражением

$$g\int d^4x\,d^4x'\,d^4x''\,F(x,x',x'')\,\varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \qquad (1)$$

(здесь (φ – скалярное поле, x, x', x'' – точки пространства-времени, g – константа связи). В аксиоматических моделях нелокальной квантовой теории поля, имеющих дело только с матрицей рассеяния, форм-факторы вводятся в ее разложение по нормальным произведениям, причем каждому члену такого разложения может отвечать свой формфактор. Нелокальные схемы 2-го класса не претендуют на описание тех изменений пространственно-временных представлений, которые, возможно, произойдут в будущем. Достоинство этих схем помимо простоты состоит в их общности, тем более что многие специфические трудности нелокальной квантовой теории поля как таковой проявляются уже на феноменологическом уровне, где их и нужно научиться преодолевать.

Любой вариант нелокальной квантовой теории поля должен удовлетворять ряду общих требований: релятивистской ковариантности (несмотря на существование сверхсветовых сигналов внутри области нелокальности), калибровочной инвариантности (для нелокальных теорий калибровочных полей), унитарности матрицы рассеяния на пространстве физических состояний. Специфичны для нелокальной квантовой теории поля требования отсутствия расходимостей и макроскопической причинности. Последнее имеет смысл “ослабленной” микропричинности, допускающей существование быстро затухающих акаузальных (причинно не обусловленных) воздействий при условии, что они не наблюдаемы из-за неточечности событий (актов взаимодействия между полями), то есть неразличимы на фоне флуктуации, порожденных соотношениями неопределенностей “координата — импульс” и “время — энергия”.

Удовлетворить перечисленным требованиям при построении нелокальной квантовой теории поля оказалось непросто, с каждым из них были связаны серьезные трудности, возникающие при выходе за рамки локальной теории поля. Эти трудности казались столь непреодолимыми, что порождали мнение о принципиальной невозможности создания последовательной нелокальной квантовой теории поля. Однако специальный анализ трудностей нелокальной квантовой теории поля показал, что они не присущи теории органически, а возникают в результате чересчур прямолинейного обобщения аппарата локальной теории. Оказалось, что эквивалентные формулировки локальной теории не равноценны с точки зрения их нелокального обобщения и преодоление трудностей нелокальной квантовой теории поля соответствовало правильному выбору исходной формулировки.

Пока нет полной уверенности лишь в выполнении требования макроскопической причинности. Степень затухания акаузального воздействия тесно связана с аналитическими свойствами Фурье-компоненты формфактора $F(p)$ (где p – 4-импульс) в комплексной плоскости p^2. До конца 60-х гг. обсуждались лишь формфакторы, убывающие на большом круге и имеющие особенности при конечном (но большом) $|p^2|\sim 1/t^2$; это отвечает обобщенным функциям, принадлежащим к классу умеренного (полиномиального) роста. Соответствующее акаузальное воздействие затухает медленнее экспоненты

$$\exp[-\,\mathrm{const}\,|(x-x')^2|^{1/2}$$

в области $(x\text{-}x')^2 < 0$ [в частности, на рассматриваемом классе функций нелокальной квантовой теории поля совпадает с локальной теорией, если потребовать равенства нулю акаузального воздействия в области $(x\text{-}x')^2 < -l^2$]. Последующее развитие нелокальной квантовой теории поля привело к расширению класса обобщенных функций, что отвечало введению в рассмотрение формфакторов в виде целых функций p^2, имеющих особенности лишь на бесконечности (но убывающих в области $p^2 < 0$). Одно из преимуществ таких схем состоит в более быстром затухании акаузальных воздействий. Однако до сих пор не сформулирован количественный критерий макроскопической причинности, который, будучи выражен на языке физически наблюдаемых величин (волновых пакетов), фиксировал бы допустимую форму акаузального воздействия. Это затрудняет окончательную оценку предлагавшихся вариантов нелокальной квантовой теории поля.

Прогресс теории фундаментальных взаимодействий, начавшийся на рубеже 60—70-х гг. (создание перенормируемой теории электрослабого взаимодействия и квантовой хромодинамики как теории сильного взаимодействия, открытие асимптотической свободы как противоположности “нулификации заряда”, появление первых моделей теории поля без ультрафиолетовых расходимостей и др.), обесценил многие из мотивов, побуждавших ранее к созданию нелокальной квантовой теории поля. Существует точка зрения, что в относительно недалеком будущем возникнет единая теория всех взаимодействий природы, имеющая локальную основу (хотя и включающая в качестве основного элемента протяженный объект – струну).

Вместе с тем считать, что с нелокальной квантовой теории поля связан лишь чисто исторический интерес, преждевременно. Остаются злободневными аспекты этой теории, относящиеся к планированию и обработке результатов опытов по проверке квантовой электродинамики и дисперсионных соотношений. Ждут решения общие проблемы релятивистской теории измерения, связанные с понятиями точечного события, микропричинности и т. п. Определенный интерес к нелокальной квантовой теории поля обусловлен также трудностями квантования гравитации. Аппарат нелокальной квантовой теории поля может сделать более ясными некоторые особенности локальной перенормированной теории поля. Наконец, особая область применения нелокальной квантовой теории поля – феноменологического описание сильного взаимодействия на больших расстояниях (в частности, конфайнмента): если частица (кварк) существует лишь в виртуальном состоянии, то нарушена т.н. перекрёстная симметрия и, как следствие, – микропричинность. На языке феноменологической нелокальной квантовой теории поля оказывается возможным описать единым образом большой круг фактов, относящихся к низкоэнергетической физике сильного взаимодействия (входящая в теорию величина l играет здесь роль не элементарной длины, а феноменологического параметра – радиуса конфайнмента).

Получить окончательный ответ на наиболее глубокие вопросы теории строения вещества (правильны ли существующие представления о пространстве-времени, локальны или не локальны фундаментальные взаимодействия природы и т. п.) ещё предстоит, и этот ответ придет со стороны будущего прямого эксперимента и астрофизических или космологических наблюдений.

Литература.: [1] Марков М.А., Гипероны и К-мезоны, М., 1958; его же, Нейтрино, М., 1964; [2] КиржницД.А., “Успехи физич. наук”, 1966, г. 90, с. 129; [3] Блохинцев Д. И., Пространство и время в микромире, 2 изд., М., 1982; [4] Е ф и м о в Г. В., Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий, М., 1985.

СУПЕРСТРУНЫ[1]

Д.И. Казаков

Суперструны – релятивистские суперсимметричные (см. *Суперсимметрия)* протяженные объекты. Суперструны являются обобщением понятия бозонной релятивистской струны с включением фермионных степеней свободы. При квантовании суперструна представляет собой бесконечную последовательность нормальных мод — последовательность массивных состояний в квантовой теории поля. Расщепление масс Δm^2 пропорционально натяжению струны *T.* В теории суперструн T~$(10^{19}$ ГэВ$)^2$ (в системе единиц $\hbar = c = 1$). Спектр масс начинается с нуля и, в отличие от теории бозонной струны, не содержит тахиона (то есть состояния с мнимой массой). Последовательное квантование в плоском пространстве-времени оказывается возможным только в критической размерности. Для бозонной струны $D_{кр}$ = 26, для фермионной $D_{кр}$ = 10.

Струны бывают открытыми и замкнутыми. Открытые струны в качестве низших безмассовых состояний содержат частицы спина 1 — кванты поля Янга-Миллса, замкнутые — частицы спина 2 — гравитоны, а в случае суперструн содержат и их суперпартнеры спина 3/2 — гравитино. На этом пути в теории суперструн возникает локальная квантовая теория поля, объединяющая гравитацию и поля Янга-Миллса — переносчики всех взаимодействий. На расстояниях, много больших планковской длины (~ 10^{-33}см), или при энергиях, много меньших планковской массы (~ 10^{19}ГэВ), массивные состояния отщепляются и возникает эффективная локальная теория поля (супергравитация и суперсмметричная янг-миллсовская теоря с фиксированными параметрами и составом частиц). При этом наблюдаемые частицы (кварки, лептоны, калибровочные векторные бозоны и т.д.) должны быть среди безмассовых возбуждений (m~ 10^{19}ГэВ).

Литература: [1] Грин М, Шварц Дж, Виттен Э., Теория суперструн, пер с англ , М., 1990, “Успехи физич. наук”, 1986, т. 150, в. 4.

СУПЕРСИММЕТРИЯ[2]

Ю.А. Гольфанд.

Суперсимметрия — симметрия физической системы, объединяющая состояния, подчиняющиеся разным статистикам — статистике Бозе-Эйнштейна (бозоны) или статистике Ферми-Дирака (фермионы). Принципиальные основы суперсимметрии

[1] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

[2] Математическая физика. Энциклопедия. М.1998

сформулированы в начале 1970-х гг. В последующие годы происходило бурное развитие различных физических теорий, основанных на суперсимметрии. Применение методов суперсимметрии относится главным образом к квантовой теории поля, включая теорию квантованного гравитационного поля и теорию струн (см. ст. *Суперструны*). Помимо квантовой теории поля рассматривалось применение методов суперсимметрии к нерелятивистской квантовой механике, а также к некоторым другим разделам теоретической физики.

Подобно другим типам симметрии, рассматриваемых в физике, суперсимметрия формулируется в терминах некоторой группы преобразований, действующих на состояния системы. В данном случае преобразования должны переводить фермионные состояния в бозонные и наоборот. Это придает суперсимметрии своеобразные черты, не свойственные другим типам физической симметрии, поскольку фермионные состояния отличаются от бозонных характером перестановочной симметрии. Наиболее ясно это различие выявляется при вторичном квантовании, когда для построения полного набора состояний используются операторы рождения фермионов и бозонов. Отличие фермионов от бозонов проявляется в том, что операторы рождения бозонов коммутируют друг с другом, а также с операторами рождения фермионов, тогда как операторы рождения фермионов друг с другом антикоммутируют, то есть при перестановке двух операторов их произведение меняет знак. Это формальное различие свойств операторов рождения влечет за собой чрезвычайно глубокое различие в физических свойствах систем, состоящих из бозонов, и систем, состоящих из фермионов.

Все известные физические симметрии, кроме суперсимметрии, переводят фермионы в фермионы, а бозоны в бозоны, то есть преобразования, описывающие эти симметрии, сохраняют характер перестановочной симметрии состояний. Преобразования суперсимметрии меняют характер перестановочной симметрии — переводят коммутирующие величины в антикоммутирующие и наоборот. Для построения таких преобразований аппарат классических групп Ли оказался недостаточным. Задача решается введением в теорию нового объекта — супергруппы, представляющей собой обобщение Ли группы.

Вторым важным моментом, определившим структуру суперсимметрии, является связь спина и статистики (теорема Паули). Отсюда следует, что спиновые характеристики состояний существенным образом включаются в структуру суперсимметричных теорий. Тем самым суперсимметрия связывается с основными пространственно-временными симметриями физических теорий.

Адекватным математическим аппаратом суперсимметричных теорий являются алгебра и анализ с коммутирующими и антикоммутирующими переменными. Этот раздел математики получил название суперматематики. Отсюда же возник термин “суперсимметрия”.

Следует подчеркнуть, что приставка “супер” имеет чисто терминологический характер и не несет специальной смысловой нагрузки.

Супералгебры. Вместо группы Ли, описывающей симметрию физической системы, в большинстве случаев достаточно рассмотреть более простой объект — соответствующую алгебру Ли, описывающую бесконечно малые преобразования симметрии. Элементы алгебры являются линейными комбинациями базисных элементов — генераторов. Обычно число генераторов конечно. Генераторы алгебры Ли образуют набор основных физических величин для системы, обладающей определенной симметрией.

В случае суперсимметрии бесконечно малые преобразования образуют супералгебру Ли. Прежде чем дать определение супералгебры, необходимо ввести некоторые общие математические понятия, характерные для суперматематики. Основную роль играет понятие чётности. Не давая общего аксиоматического определения этого понятия, введем его в той форме, которая наилучшим образом приспособлена для построения адекватного языка в теории суперсимметрии. Рассмотрим ассоциативную алгебру *A*, порожденную образующими $a_1, a_2, ..., a_n$, $n = p + q$. Первые p образующих $a_1, a_2, ..., a_n$, по определению, являются чётными элементами алгебры, остальные q образующих $a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_{p+q}$ — нечётными. Таким образом, первоначально чётность определяется только для образующих алгебры. На элементы общего вида чётность переносится с помощью следующих правил. Умножение элемента алгебры на число не меняет чётности. Сумма двух чётных элементов является чётным элементом алгебры, а сумма двух нечётных элементов — нечётным. Произведение двух чётных элементов, а также произведение двух нечётных элементов является чётным, а произведение чётного и нечётного элементов — нечётным элементом алгебры. С помощью этих правил в алгебре A определяется класс чётных и класс нечётных элементов. Любой элемент алгебры A может быть единственным образом представлен в виде суммы чётного и нечётного элементов. Алгебра A, в которой определено понятие чётности, называется градуированной алгеброй (точнее, $\mathbf{Z}_2$-градуированной).

Определим теперь понятие супералгебры Ли. Основной операцией является коммутатор $[x,y]$, соответствующим образом обобщенный на случай градуированной алгебры. Он определяется следующим образом. Если элементы x и y алгебры имеют определенную чётность, то в случае, когда хотя бы один из элементов x, y чётный, коммутатор $[x,y] = xy — yx$. Если же оба элемента x и y нечётные, то коммутатор [x, y] = $xy + yx$. Для элементов общего вида, равных сумме чётного и нечётного элементов, коммутатор $[x,y]$ определяется из условия билинейности. Определенный так обобщённый коммутатор (суперкоммутатор) объединяет понятия коммутатора и антикоммутатора в обычном смысле.

Рассмотренная конструкция устанавливает связь супералгебры с градуированной алгеброй A, которая является обобщением связи обычной алгебры Ли с ассоциативной алгеброй. Обобщённые коммутаторы удовлетворяют определённым тождествам. Все необходимые соотношения легко выводятся с помощью основных определений.

Практически важный класс супералгебр образуют супералгебры с конечным числом образующих $B_1,...,B_N$. Обычно образующие B_k называются генераторами. Заметим, что система генераторов B_k отнюдь не совпадает с системой образующих a_i, ассоциативной алгебры A. В силу билинейности коммутатора достаточно определить значения коммутаторов для генераторов с помощью соотношений типа

$$[B_k, B_l] = C_{kl}^m B_m \tag{1}$$

В этом случае супералгебра определена заданием структурных констант C_{kl}^m.

Алгебра супертрансляций. Супералгеброй, лежащей в основе физических суперсимметричных теорий, является так называемая алгебра супертрансляций, она порождается конечным числом чётных и нечётных генераторов. Нечётные генераторы, действуя на состояния системы, переводят бозоны в фермионы и наоборот. Убедиться в этом можно следующим образом. Операторы рождения бозонов и фермионов можно рассматривать как систему образующих некоторой (бесконечномерной) градуированной алгебры. При этом бозонные операторы считаются чётными элементами алгебры, а фермионные — нечётными. Установив чётность одночастичных состояний, можно определить чётность любых состояний. Справедливо общее утверждение: чётные состояния подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, нечётные – статистике Ферми-Дирака. Отсюда легко вывести утверждение относительно нечётных генераторов алгебры супертрансляций.

Из условия релятивистской инвариантности теории следует, что генераторы супертрансляций должны преобразовываться по некоторому представлению группы Лоренца. Учитывая связь спина и статистики, получаем дальнейшее уточнение этого требования: нечётные генераторы преобразуются по представлениям с полуцелым спином, чётные – по представлениям с целым спином. Простейшее допущение, согласующееся с этим требованием, состоит в том, что нечётные генераторы являются спинорами. Это допущение и лежит в основе построения алгебры супертрансляций.

Спиноры — это величины, преобразующиеся по фундаментальным представлениям группы комплексных матриц второго порядка с детерминантом, равным единице. Эта группа обозначается символом $SL(2,\boldsymbol{C})$. Существует два фундаментальных представления группы $SL(2,\boldsymbol{C})$, которые комплексно сопряжены друг другу. Соответствующие спиноры обычно обозначаются символами типа Q_α и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Индексы α и $\dot{\alpha}$ принимают два значения.

Более детальное рассмотрение приводит к тому, что для построения нетривиальной алгебры супертрансляций чётные генераторы должны образовывать 4-вектор P_μ , μ = 0, 1, 2, 3. Таким образом, наиболее простая алгебра супертрансляций

$$\tilde{t} = \left\{ P_\mu , Q_\alpha , \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \right\} \qquad (2)$$

порождается четырьмя чётными генераторами P_μ и четырьмя нечётными генераторами $Q_\alpha , \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Перестановочные соотношения типа (1) между генераторами всегда могут быть приведены к форме

$$\left[Q_\alpha , \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \right]_+ = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \ . \qquad (3)$$

Все остальные коммутаторы обращаются в нуль. Индекс “+” в левой части соотношения (3) означает антикоммутатор (это соответствует рассмотренным выше правилам построения операции коммутирования в супералгебре); $\sigma^\mu -$ матрицы второго порядка: $\sigma^0 = I, \sigma^i, i = 1,2,3, -$ спиновые матрицы Паули, *I* – единичная матрица.

Важнейшее физическое предположение относительно супералгебры (2) состоит в том, что чётные генераторы P_μ являются 4-вектором энергии-импульса системы. Операторы энергии и импульса − это генераторы трансляций времени и пространства. Алгебра супертрансляций (2) представляет собой расширение алгебры трансляций путем введения четырех новых генераторов “спиновых трансляций” Q_α и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Генераторы обычных трансляций связаны с генераторами спинорных трансляций нетривиальными соотношениями (3). Перестановочные соотношения между операторами моментов − генераторами преобразований Лоренца − и генераторами алгебры супертрансляций (2) однозначно определяются ковариантными свойствами этих генераторов.

Условие теории суперсимметрии сводится к тому, чтобы алгебра супер-трансляций была представлена линейными операторами в пространстве состояний. Для этого достаточно, чтобы операторы, соответствующие генераторам (2), удовлетворяли перестановочным соотношениям (3). Из этих соотношений видно, что для суперсимметричных теорий операторы энергии и импульса выражаются в виде произведений спинорных операторов. В частности, для гамильтониана системы получается выражение

$$H = \frac{1}{4}\left(\left[Q_\alpha , \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \right]_+ + \left[Q_2 , \bar{Q}_2 \right]_+ \right) \qquad (4)$$

из которого следует, что энергия суперсимметричной системы не может принимать отрицательных значений.

Алгебра супертрансляций (2) − самая простая среди семейства аналогичных супералгебр. Члены этого семейства характеризуются целым числом *N*, обозначающим количество спинорных генераторов.

Супермультиплеты частиц. Неприводимые представления алгебры супертрансляций (2) объединяют несколько неприводимых представлений Пуанкаре группы с одной и той же массой и различными значениями спина. Проще всего это проиллюстрировать для одночастичных состояний. В этом случае получаются супермультиплеты частиц. Если масса частиц не равна нулю, структура супермультиплета определяется числом *j*, принимающим целые и полуцелые значения. При данному супермультиплет имеет спиновый состав (*j*–1/2, *j*, *j*, *j*+1/2), то есть он содержит две частицы спина *j*, частицу спина *j* −1/2 и частицу спина *j* + 1/2. В случае нулевой массы. Супермультиплеты объединяют частицы, имеющие спиральность X, \+ 1/2 Число \ принимает целые и полуцелые значения В отличие от спина у, принимающего неотрицательные значения, \ может принимать значения любого знака. Супермультиплеты (\, К+\/2) и (−К, −X−1/2) переходят друг в друга при пространственной инверсии. В каждом супермультиплете число бозонных состояний равно числу фермионных состояний; с этим связано сокращение расходимостей в суперсимметричных теориях. Как известно, в квантовой теории поля некоторые физич. величины оказываются бесконечными за счет расходящихся интегралов. В суперсимметричных теориях многие из этих величин оказываются конечными, поскольку расходимости, связанные с бозонами, компенсируются соответствующими расходимостями, связанными с фермионами.

Суперполя. Основным конструктивным элементом при построении суперсимметричных теорий являются суперполя, представляющие собой элементы Грассмана алгебры с образующими θ, коэффициентами при которых служат физические поля. Каждое суперполе объединяет несколько физических полей с целыми и полуцелыми спинами. Благодаря суперполям удалось придать суперсимметричным теориям простую форму. Те же теории, выраженные через компонентные поля, выглядят значительно сложнее.

Суперполя наиболее простого вида – это скалярные киральные суперполя. Они характеризуются тем, что содержат либо только произведения образующих θ, либо только образующие $\overline{\theta}$. Соответственно существуют два типа киральных суперполей — левое и правое:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_L &= A(x) + \theta\varphi(x) + \theta\theta F(x), \\ \Phi_R &= B(x) + \overline{\theta}\overline{\varphi}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta} G(x), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $A(x)$, $F(x)$ и $\varphi_\alpha(x)$ – компонентные поля левого суперполя Φ_L (x) (x – точка пространства-времени). Поля A и F скалярные, двухкомпонентный спинор φ – левое киральное поле. Аналогичными свойствами обладают компонентные поля правого кирального суперполя Φ_R (x), содержащего правое киральное поле $\overline{\varphi}(x)$. Оба суперполя являются лоренцовыми скалярами. При пространственной инверсии левое киральное суперполе переходит в правое и наоборот. Весьма важно следующее соглашение: скалярные поля $A(x)$ и $F(x)$ (и вообще поля целого спина) коммутируют друг с другом и со всеми остальными полями, тогда как спинорные поля $\varphi_\alpha(x)$ (поля полуцелого спина) являются нечётными элементами алгебры Грассмана, а θ_φ – чётными. Благодаря этому суперполя (5) коммутируют друг с другом.

Киральные суперполя (5) хорошо иллюстрируют принцип построения суперполей. Примером суперполя общего типа, содержащего все образующие е, является векторное суперполе

$$\begin{aligned} V(x) &= a(x) + \theta\varphi(x) + \overline{\theta}\,\overline{\varphi}(x) + \theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,v_\mu + \theta\theta b(x) + \\ &+ \overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\overline{b}(x) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\psi}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\theta\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta} c(x) \end{aligned} \qquad (6)$$

Его компонентные поля: четыре скалярных поля $a, b, \overline{b}$ и c, четыре спинорных $\varphi, \overline{\varphi}, \psi, \overline{\psi}$ и одно векторное v_μ. С наличием векторной компоненты и связано название суперполя (6). Помимо рассмотренных скалярных суперполей, существуют суперполя с различными лоренцовыми индексами, а также с индексами, относящимися к внутренним симметриям.

Суперсимметричная квантовая механика. Алгебра супертрансляций и основанная на ней суперсимметрия отражают специфику релятивистской квантовой теории. К этой области относится основная масса работ и важнейшие результаты, связанные с суперсимметрии. Однако и в некоторых других областях науки методы суперсимметрии также нашли плодотворное применение. Помимо алгебры супертрансляций (2), существует ряд других супералгебр, на основе которых можно развивать суперсимметричные теории. Рассмотрим кратко простейшую из таких супералгебр:

$$\tilde{S} = \{H, Q, Q^{+}\}, \qquad (7)$$

которая порождена одним чётным генератором H и двумя нечётными генераторами Q, Q^+. Генераторы связаны перестановочным соотношением

$$[Q, Q^{+}]_{+} = H. \qquad (8)$$

Все остальные коммутаторы равны нулю.

На базе супералгебры (7) строятся различные варианты суперсимметричной квантовой механики. Общая схема построения такова. Пространство векторов состояний системы разбивается в прямую сумму пространства бозонных и фермионных состояний. Удобно записывать вектор состояния в двухкомпонентной форме

$$\psi = \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Vmatrix}, \qquad (9)$$ где

верхняя компонента представляет собой фермионное состояние, а нижняя – бозонное. Следует подчеркнуть, что разделение состояний на бозонные и фермионные носит условный характер и не связано с присутствием реальных бозонов и фермионов. Более того, нет какого-либо регулярного метода определения разбиения (9). Явный вид этого разбиения связан с конкретной задачей. Генераторы Q, действующие на векторы (9), задаются в матричной форме:

$$Q = \begin{Vmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ B^+ & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь B – оператор, действующий на “бозонные” переменные, B^+ – сопряжённый оператор. Генератор H отождествляется с гамильтонианом системы, определяемым с помощью соотношения (8):

$$H = \frac{1}{2}[B, B^+]_+ + \frac{1}{2}[B, B^+]_- \sigma_3.$$

где σ_3 – матрица Паули, действующая на вектор (9).

Конкретная суперсимметричная квантовомеханическая задача сводится к определению вида оператора B. Для одномерной системы оператор B удобно принять в форме

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(ip + W(x))$$

где $W(x)$ – произвольная функция координаты x, а $p = -i\partial/\partial x$ – оператор импульса. Гамильтониан принимает обычный вид:

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + W^2(x) + W'(x)\sigma_3\right)$$

Этот гамильтониан соответствует суперсимметричной квантовой механике Виттена (E.Witten, 1981); его спектр обладает характерными особенностями. Все уровни с энергией $E > 0$ двукратно выраждены. Основное состояние не выраждено только в том случае, если его энергия равна нулю. Опираясь на эти два свойства, в отдельных случаях удается полностью определить дискретный спектр гамильтониана (10).

Для некоторых конкретных задач суперсимметрия рассмотренного типа является реальной физической симметрией. Наиболее важный случай – электрон в магнитном поле. В этой задаче суперсимметрия возникает для следующих типов магнитных полей: “двумерное поле”, то есть поле, направленное по оси z и произвольным образом зависящее от координат x и y: $B_x = B_y = 0$, $B_z = B_z(x,y)$; трёхмерное поле с определенной четностью: $B(-x) = \pm B(x)$. В этих двух случаях можно определить генераторы Q с нужными свойствами, причем в каждом случае построение проводится по-разному. Так, в первом случае компоненты вектора (9) характеризуются значениями проекции спина на ось z, а во втором случае – чётностью волновой функции. Из этого примера виден условный характер введения бозонных и фермионных степеней свободы.

Интересный пример суперсимметрии обнаруживается в задаче о движении системы под действием случайной силы. Эта задача из теории случайных процессов оказывается формально аналогичной суперсимметричной квантовой механике.

Литература.: [1] Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П., “Письма в ЖЭТФ”, 1971, т. 13, в. 8, с. 452; [2] Волков Д.В., Акулов В.П., там же, 1972, т. 16, в. 11, с. 621; [3] Wess J., Zumino B., “Phys. Lett..”, 1974, v. 49B, p. 52; [4] Березин Ф.А., Введение в алгебру и анализ с антикоммугирующими переменными, М., 1983; [5] ОгиевецкийВ.И., Мезинческу Л., “Успехи физич. наук”, 1975, т. 117, в. 4, с. 637; [6] Генденштейн Л.Э., Криве И.В., там же, 1985, т. 146, в. 4, с. 553; [7] Высоцкий М.И., там же, с. 591; [8] Арефьева И.Я., Волович И.В., там же, с. 655; [9] Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Шифман М.А., там же, с. 683; [10] Весс Ю., Беггер Дж., Суперсимметрия и супергравитация, пер. с англ., М., 1986; [11] Ахиезер А. И., Пелетминский С.В., Поля и фундаментальные взаимодействия, Киев, 1986; [12] Уэст П., Введение в суперсимметрию и супергравитацию, пер. с англ., М., 1989; [13] Суперсимметрия, калибровочные поля и квантование, сб. статей, М., 1993.

Что такое математическая физика?
Методическое пособие
(для студентов)

Составитель Владимир Петрович Бурский.

Редактор

Корректор

Техн. редактор

Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет, 2018. – 64 с.