Применение

символа Леви-Чивиты

в теории поля

Методическое пособие

Введение: зачем это нужно?

Данное методическое пособие предназначено в первую очередь для студентов МФТИ, изучающих курс «Кратные интегралы и теория поля». В пособии даны необходимые определения и рассмотрен координатный метод работы с такими объектами теории поля, как градиент, дивергенция и ротор. В рассмотренном методе активно используется символ Леви-Чивиты.

Координатный метод чрезвычайно прост и поэтому полезен в качестве первого шага изучения геометрии различных математических объектов. Затем при желании читатель может изучать различные геометрические вопросы на инвариантном (бескоординатном) языке, что является вторым шагом изучения геометрии этих объектов.

В заключительном параграфе данного пособия кратко изложен альтернативный метод работы с объектами теории поля – метод оператора «набла». Поскольку координатный метод обладает большей универсальностью и весьма удобен при работе с объектами теории поля, то именно он наиболее широко используется в курсах теоретической физики (см., например, [6], [8]) и научных исследованиях, связанных с классической теорией поля и квантовой механикой.

§ 1. Выражение смешанного и векторного произведений через символ Леви-Чивиты

Будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^3$, элементами которого являются векторы-столбцы $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, составленные из чисел $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, которые называются *компонентами* вектора $\vec{a}$.

Для векторов $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ определены линейная комбинация

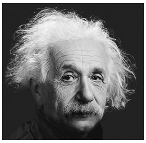
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

и скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}\,) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{1.1}$$

Будем рассматривать выражения, которые являются суммами или разностями одночленов. Здесь под одночленом понимается произведение и/или частное величин без индексов и величин, снабженных индексами.

Примем следующее *соглашение Эйнштейна*:



Каждый буквенный индекс, который встречается в одночлене, может встречаться в нем только один или два раза. Если некоторый буквенный индекс встречается в одночлене два раза, то по нему происходит суммирование.

Если некоторый буквенный индекс встречается в одночлене один раз, то этот индекс называется *свободным.* В случае пространства $\mathbb{R}^3$ свободный индекс может принимать любое значение из набора $\{1, 2, 3\}$. При работе с индексами следует соблюдать *баланс индексов*: если индекс встречается в слагаемом один раз, т.е. является свободным, то все члены, с которыми слагаемое складывается, вычитается или приравнивается, тоже должны содержать этот индекс один раз. Например, в выражении $a_i + b_i$ баланс индексов соблюдается, в то время, как в выражении $a_i + b_j$ он не соблюдается (здесь a_i и b_i – компоненты векторов).

Если некоторый буквенный индекс встречается в одночлене два раза, то этот индекс называется *немым.* В случае пространства $\mathbb{R}^3$ каждый немой индекс пробегает набор $\{1, 2, 3\}$. Операция суммирования по немым индексам называется *сверткой.* Если индекс встречается в слагаемом два раза, т.е. является немым, то мы можем переименовать этот индекс произвольным образом, но так, чтобы новое имя индекса не совпадало с именами других индексов того же слагаемого. Например, справедливо равенство $a_{jj} = a_{kk}$ (здесь a_{ij} – компоненты матрицы).

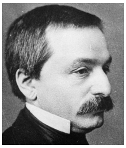
С использованием соглашения Эйнштейна скалярное произведение (1.1) принимает вид

$$(\vec{a}, \vec{b}\,) = a_i b_i.$$

Определение 1. *Стандартным базисом* в $\mathbb{R}^3$ называется следующий упорядоченный набор векторов

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ можно представить в виде линейной комбинации $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = a_i\vec{e}_i$, то числа a_1, a_2, a_3 являются координатами вектора $\vec{a}$ в стандартном базисе.



Определение 2. *Символом Кронекера* называется

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1. Символы Кронекера являются элементами единичной матрицы.

Векторы стандартного базиса следующим образом выражается через символы Кронекера:

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{pmatrix} \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Согласно определению скалярного произведения в $\mathbb{R}^3$ стандартный базис является *ортонормированным*, т.е.

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Будем считать стандартный базис в $\mathbb{R}^3$ *правым* базисом.

Задача 1. Проверьте, что для любого набора чисел a_{ij}, где $i, j \in$ $\in \{1, 2, 3\}$, справедливо равенство

$$a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij} \qquad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Задача 2. Вычислите значения следующих выражений:
а) δ_{ii};
б) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$.

Определение 3. *Символом Леви-Чивиты* называется

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (i, j, k) \text{ получается из набора } (1, 2, 3) \text{ в результате циклической перестановки;} \\ -1, & \text{если набор } (i, j, k) \text{ получается из набора } (1, 2, 3) \text{ в результате нециклической перестановки;} \\ 0, & \text{если набор } (i, j, k) \text{ не является перестановкой набора } (1, 2, 3), \end{cases}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Замечание 2. При перестановке любых двух индексов символ Леви-Чивиты меняет знак. В связи с этим символ Леви-Чивиты также называют *полностью антисимметричным символом*.

Задача 3. Проверьте, что для определителя произвольной матрицы размера 3×3 справедлива формула

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}.$$

Так как стандартный базис в $\mathbb{R}^3$ является правым ортонормированным базисом, то смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \in \mathbb{R}^3$ следующим образом выражается через их координаты a_i, b_j, c_k в стандартном базисе:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \tag{1.2}$$

Замечание 3. Из формулы (1.2) следует, что $\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$. Поэтому символ Леви-Чивиты ε_{ijk} – это ориентированный объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$. В частности, если среди индексов i, j, k имеются совпадающие, то этот паралеллепипед вырождается и $\varepsilon_{ijk} = 0$.

Поскольку векторное произведение $[\vec{a} \times \vec{b}]$ следующим образом выражается через координаты[1] векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix},$$

то координаты векторного произведения $[\vec{a} \times \vec{b}]$ следующим образом выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) вместе с выражениями для сверток символа Леви-Чивиты (см. лемму 3) доставляет удобный инструмент для работы с векторным произведением (см. задачи 4, 5).

§ 2. Определения градиента, дивергенции, ротора и производной по векторному полю

Будем рассматривать прямоугольную декартову систему координат (ПДСК) (x, y, z), соответствующую стандартному базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$ (определение 1). Для удобства нумерации координаты (x, y, z) будем также обозначать через (x_1, x_2, x_3).

[1] здесь и далее имеются в виду координаты вектора в стандартном базисе

Фиксируем область (открытое связное множество) G в пространстве $\mathbb{R}^3$. Будем рассматривать *скалярные* и *векторные поля*, заданные на области G. Здесь скалярным полем называется функция со значениями из $\mathbb{R}$, а векторным полем – функция со значениями из $\mathbb{R}^3$. Векторное поле $\vec{a}$ следующим образом выражается через свои координаты a_i:

$$\vec{a}(\vec{r}\,) = \vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_1(x,y,z) \\ a_2(x,y,z) \\ a_3(x,y,z) \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G.$$

Определение 4. *Градиентом* непрерывно дифференцируемого скалярного поля φ в области G называется векторное поле, координаты которого определяются формулами

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \qquad i \in \{1,2,3\},$$

то есть $\operatorname{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$.

Здесь через $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ обозначается частная производная функции φ по переменной x_i. В курсах теоретической физики такую частную производную часто обозначают компактно $\partial_i\varphi$.

Определение 5. *Дивергенцией* непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ в области G называется скалярное поле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Определение 6. *Ротором (вихрем)* непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ в области G называется векторное поле $\operatorname{rot}\vec{a}$, координаты которого определяются формулами

$$(\operatorname{rot}\vec{a}\,)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}, \qquad i \in \{1,2,3\}.$$

Иными словами, ротором векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ является векторное поле

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Замечание 4. Градиент векторного поля, а также дивергенция и ротор скалярного поля не определены.

Определение 7. Пусть в области G заданы скалярное поле φ и векторное поле $\vec{a}$. *Производной скалярного поля φ по векторному полю $\vec{a}$* (или *по направлению $\vec{a}$*) называется скалярное поле $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{a}}$ в области G, значение которого в каждой точке $\vec{r} \in G$ определяется формулой

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{a}}(\vec{r}) = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(\vec{r} + t\vec{a}(\vec{r})) - \varphi(\vec{r})}{t}.$$

Если в данной точке $\vec{r}$ указанный предел не существует, то значение $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{a}}$ в этой точке не определено.

Замечание 5. В курсах теоретической физики вместо обозначения $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{a}}$ часто используются другие обозначения, например, $\partial_{\vec{a}}\varphi$, а обозначения $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{p}}$ используются для градиентов, т.е. векторов с координатами $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}$ соответственно.

Если скалярное поле φ дифференцируемо в точке $\vec{r}$, то приращение поля можно представить в виде

$$\varphi(\vec{r} + t\vec{a}(\vec{r})) - \varphi(\vec{r}) = t\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\vec{r})\, a_i(\vec{r}) + o(t), \quad t \to 0.$$

Поэтому для производной скалярного поля φ по векторному полю $\vec{a}$ в силу определения 7 имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{a}}(\vec{r}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\vec{r})\, a_i(\vec{r}) = (\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}),\ \vec{a}(\vec{r}))\,.$$

Опуская аргумент $\vec{r}$, получаем цепочку равенств

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{a}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, a_i = (\operatorname{grad}\varphi,\ \vec{a})\,.$$

Замечание 6. Из предыдущей формулы следует, что для дифференцируемого скалярного поля φ частные производные совпадают с производными по базисным векторам:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{e}_i} \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Определение 8. *Производной векторного поля $\vec{b}$ по векторному полю $\vec{a}$* в области G называется векторное поле $\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{a}}$ в области G, значение которого в каждой точке $\vec{r} \in G$ определяется формулой

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{a}}(\vec{r}\,) = \lim_{t \to +0} \frac{\vec{b}(\vec{r} + t\vec{a}(\vec{r}\,)) - \vec{b}(\vec{r}\,)}{t}.$$

Замечание 7. Поскольку предел вектор-функции сводится к пределам ее координат, то i-я координата производной $\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{a}}$ равна производной i-ой координаты векторного поля $\vec{b}$ по векторному полю $\vec{a}$:

$$\left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{a}}\right)_i = \frac{\partial b_i}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\, a_j.$$

Замечание 8. Каждая из операций grad, div, rot, $\frac{\partial}{\partial \vec{a}}$, примененная к скалярному или векторному полю, выражается через частные производные первого порядка этого скалярного поля или компонент этого векторного поля. Поэтому каждая из перечисленных операций является операцией дифференцирования.

Замечание 9. Непосредственно из определений следует линейность операций grad, div, rot, $\frac{\partial}{\partial \vec{a}}$.

§ 3. Методы и примеры

Данный параграф содержит основные методы, которыми часто пользуются при применении символа Леви-Чивиты для практических вычислений. Решению примеров предпошлем шесть лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *– векторное поле радиус-вектора,* $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *– длина радиус-вектора,* $\vec{a}$ *– произвольное векторное поле. Тогда*

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3, \qquad \operatorname{rot} \vec{r} = \vec{0}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{a}} = \vec{a}, \qquad \operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}, \qquad \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Доказательство состоит в применении определений. □

Замечание 10. Физический смысл формулы $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ состоит в том, что $\frac{1}{r}$ – электростатический (кулоновский) или гравитационный (ньютоновский) потенциал векторного поля $\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Лемма 2. *Пусть в области G заданы непрерывно дифференцируемые скалярные поля φ, ψ и векторные поля $\vec{a}$, $\vec{b}$. Тогда*

(1). $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$;

(2). $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi \operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}\,)$;

(3). $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi \operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}\,]$;

(4). $\operatorname{div}[\vec{a} \times \vec{b}\,] = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}\,) - (\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}\,)$.

Доказательство. Используя правило Лейбница для производной произведения двух скалярных функций, получаем:

(1). $(\operatorname{grad}(\varphi\psi))_i = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i} = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$;

(2). $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \frac{\partial(\varphi a_i)}{\partial x_i} = \varphi\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}\,)$;

(3). $(\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}))_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial(\varphi a_k)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\varphi\frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}a_k = \varphi(\operatorname{rot}\vec{a})_i +$ $+ [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}\,]_i$;

(4). $\operatorname{div}[\vec{a} \times \vec{b}\,] = \frac{[\vec{a}\times\vec{b}\,]_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial(a_j b_k)}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk}\left(b_k\frac{\partial a_j}{\partial x_i} + a_j\frac{\partial b_k}{\partial x_i}\right) =$ $= b_k\varepsilon_{kij}\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_j\varepsilon_{jik}\frac{\partial b_k}{\partial x_i} = b_k(\operatorname{rot}\vec{a}\,)_k - a_j(\operatorname{rot}\vec{b}\,)_j = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}\,) - (\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}\,)$.

$\square$

Лемма 3. *Произведения и свертки двух символов Леви-Чивиты выражаются через символы Кронекера следующим образом:*

$$(1).\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \qquad \forall i,j,k,l,m,n \in \{1,2,3\};$$

$$(2).\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad \forall i,j,l,m \in \{1,2,3\};$$

$$(3).\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \forall i,j \in \{1,2,3\};$$

$$(4).\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

Доказательство. (1). Поскольку при перестановке двух строк определитель матрицы меняет знак, то для любой матрицы 3×3 и для любых индексов $i, j, k \in \{1,2,3\}$ справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из равенства (1.2) следует, что

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_p b_q c_r.$$

Подставляя в эту формулу $a_s = \delta_{sl}$, $b_s = \delta_{sm}$, $c_s = \delta_{sn}$, где $s \in \in \{1, 2, 3\}$, получаем

$$\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\delta_{pl}\delta_{qm}\delta_{rn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}.$$

(2). Согласно пункту (1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} \quad = \quad & \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \\ & -\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kk} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km} - \\ & \quad -\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl} = \\ &= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} - 3\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} = \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \end{aligned}$$

(3). Используя пункт (2), получаем

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 2\delta_{il}.$$

(4). Используя пункт (3), получаем $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6$. □

Задача 4. Используя пункт (2) леммы 3, докажите, что для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ справедливо тождество «бац минус цаб»

$$\left[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]\right] = \vec{b}\,(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}, \vec{b}).$$

Задача 5. Упростите выражения

$$[[\vec a\times\vec b\,]\times[\vec c\times\vec d\,]],$$
$$([\vec a\times\vec b\,],[\vec c\times\vec d\,]),$$
$$([\vec a\times\vec b\,],[\vec b\times\vec c\,],[\vec c\times\vec a\,]),$$

где $\vec a,\vec b,\vec c,\vec d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^3$.

Замечание 11. Последние два примера показывают, что формула (1.3) вместе с леммой 3 позволяют по-новому взглянуть на векторное и смешанное произведение векторов.

Лемма 4. *Пусть в области G заданы непрерывно дифференцируемые векторные поля $\vec a$, $\vec b$. Тогда*

(1). $\operatorname{rot}[\vec a\times\vec b\,]=\frac{\partial\vec a}{\partial\vec b}-\frac{\partial\vec b}{\partial\vec a}+\vec a\operatorname{div}\vec b-\vec b\operatorname{div}\vec a$;

(2). $\operatorname{grad}(\vec a,\vec b\,)=\frac{\partial\vec a}{\partial\vec b}+\frac{\partial\vec b}{\partial\vec a}+[\vec a\times\operatorname{rot}\vec b\,]+[\vec b\times\operatorname{rot}\vec a\,]$.

Доказательство. (1). $(\operatorname{rot}[\vec a\times\vec b\,])_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial[\vec a\times\vec b\,]_k}{\partial x_j}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial(a_lb_m)}{\partial x_j}$. Поскольку символ Леви-Чивиты не меняется при циклических перестановках индексов, то в силу пункта (2) леммы 3 имеем $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=$ $=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$. Поэтому $(\operatorname{rot}[\vec a\times\vec b\,])_i=(\delta_{il}\delta_{jm}-$ $-\delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial(a_lb_m)}{\partial x_j}=\frac{\partial(a_ib_j)}{\partial x_j}-\frac{\partial(a_jb_i)}{\partial x_j}=a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_j}+b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}-a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}-b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_j}=$ $=a_i\operatorname{div}\vec b+\frac{\partial a_i}{\partial\vec b}-\frac{\partial b_i}{\partial\vec a}-b_i\operatorname{div}\vec a$.

(2). $[\vec a\times\operatorname{rot}\vec b\,]_i=\varepsilon_{ijk}a_j(\operatorname{rot}\vec b)_k=\varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}\frac{\partial b_m}{\partial x_l}=(\delta_{il}\delta_{jm}-$ $-\delta_{im}\delta_{jl})a_j\frac{\partial b_m}{\partial x_l}=a_j\frac{\partial b_j}{\partial x_i}-a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}=a_j\frac{\partial b_j}{\partial x_i}-\frac{\partial b_i}{\partial\vec a}$.

Аналогично, $[\vec b\times\operatorname{rot}\vec a\,]_i=b_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial\vec b}$. Поэтому

$$[\vec a\times\operatorname{rot}\vec b\,]_i+[\vec b\times\operatorname{rot}\vec a\,]_i=a_j\frac{\partial b_j}{\partial x_i}-\frac{\partial b_i}{\partial\vec a}+b_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial\vec b}=$$
$$=\frac{\partial(a_jb_j)}{\partial x_i}-\frac{\partial b_i}{\partial\vec a}-\frac{\partial a_i}{\partial\vec b}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec a,\vec b\right)-\frac{\partial b_i}{\partial\vec a}-\frac{\partial a_i}{\partial\vec b}.$$

□

Определение 9. *Оператором Лапласа* называется оператор

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа доставляет пример дифференциальной операции теории поля второго порядка. Следующая лемма расширяет количество таких примеров.

Лемма 5. *Пусть в области G заданы дважды непрерывно дифференцируемые скалярное поле φ и векторное поле $\vec{a}$. Тогда*

(1). $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \vec{0}$*;*

(2). $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$*;*

(3). $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$*;*

(4). $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$*.*

Доказательство. (1). $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\operatorname{grad}\varphi)_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} = -\varepsilon_{ikj}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_j}$, где последнее равенство справедливо в силу свойства антисимметричности символов Леви-Чивиты и независимости частных производных от порядка дифференцирования. Переобозначая индексы суммирования $j \leftrightarrow k$, получаем $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} = -(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i$. Следовательно, $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = 0$ для любого $i \in \{1,2,3\}$.

(2). $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{rot}\vec{a})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i\partial x_k}$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, приходим к равенству $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

(3). $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$.

(4). $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial(\operatorname{rot}\vec{a})_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j\partial x_l} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j\partial x_l} = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j\partial x_l} = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j\partial x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial a_j}{\partial x_j} - \Delta a_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta a_i = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a})_i - (\Delta\vec{a})_i$. □

Часто бывает необходимо найти градиент, дивергенцию или ротор поля, зависящего от некоторой комбинации переменных x, y, z. Заключительная лемма данного параграфа доставляет соответствующие формулы.

Лемма 6. *Пусть ψ – непрерывно дифференцируемое скалярное поле в области G, f – непрерывно дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, $\vec{g}$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть скалярное поле φ и векторное поле $\vec{a}$ заданы формулами*

$$\varphi(\vec{r}) = f(\psi(\vec{r})), \qquad \vec{a}(\vec{r}) = \vec{g}(\psi(\vec{r})) \qquad \forall\vec{r} \in G,$$

то есть $\varphi = f \circ \psi$, $\vec{a} = \vec{g} \circ \psi$. Тогда в области G справедливы следующие равенства

$$\operatorname{grad}\varphi = f'\operatorname{grad}\psi;$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = (\operatorname{grad}\psi,\ \vec{g}\,')\,;$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = [\operatorname{grad}\psi \times \vec{g}\,']\,.$$

Доказательство. 1) $(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial f(\psi(\vec{r}\,))}{\partial x_i} = f'\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = f'\,(\operatorname{grad}\psi)_i$;
2) $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial g_i(\psi(\vec{r}\,))}{\partial x_i} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}g_i' = (\operatorname{grad}\psi,\ \vec{g}\,')$;
3) $(\operatorname{rot}\vec{a})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial g_k(\psi(\vec{r}\,))}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}g_k' = [\operatorname{grad}\psi \times \vec{g}\,']_i$. $\square$

Для удобства использования полученных выше формул, соберем их в следующую таблицу.

Дифференцирование радиус-вектора	$\operatorname{div}\vec{r} = 3,\qquad \operatorname{rot}\vec{r} = \vec{0},\qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{a}} = \vec{a},\qquad \operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r};$
Дифференцирование произведения	$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi;$ $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}\,);$ $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}\,];$ $\operatorname{div}[\vec{a}\times\vec{b}\,] = \left(\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}\right) - \left(\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}\right);$ $\operatorname{rot}[\vec{a}\times\vec{b}\,] = \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{b}} - \frac{\partial\vec{b}}{\partial\vec{a}} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a};$ $\operatorname{grad}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{b}} + \frac{\partial\vec{b}}{\partial\vec{a}} + \left[\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a}\right];$
Двойное дифференцирование	$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \vec{0};$ $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0;$ $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi;$ $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a};$
Дифференцирование суперпозиции	$\operatorname{grad}(f\circ\psi) = f'\operatorname{grad}\psi;$ $\operatorname{div}(\vec{g}\circ\psi) = (\operatorname{grad}\psi,\ \vec{g}\,')\,;$ $\operatorname{rot}(\vec{g}\circ\psi) = [\operatorname{grad}\psi \times \vec{g}\,']\,.$

Пример 1. Пусть $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – векторное поле радиус-вектора, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ – постоянный вектор. Найти $\operatorname{rot}[\vec{\omega}\times\vec{r}\,]$.

Решение. Полезно сравнить два способа решения.

Способ 1. Так как $[\vec{\omega}\times\vec{r}]_k = \varepsilon_{klm}\omega_l x_m$, то для любого $i \in \{1,2,3\}$ имеем

$$(\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}])_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{\omega}\times\vec{r}]_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\omega_l\frac{\partial x_m}{\partial x_j} = \varepsilon_{kji}\varepsilon_{kjl}\omega_l.$$

Применяя пункт (3) леммы 3, получаем

$$(\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}])_i = 2\omega_i \quad \forall i \in \{1,2,3\}.$$

Поэтому $\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}] = 2\vec{\omega}$.

Способ 2. Согласно пункту (1) леммы 4 имеем $\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\vec{r}} - \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{\omega}} + \vec{\omega}\,\mathrm{div}\,\vec{r} - \vec{r}\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}$. Поскольку $\vec{\omega}$ – постоянный вектор, то $\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\vec{r}} = \vec{0}$, $\mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0$. Отсюда и из леммы 1 следует, что $\mathrm{rot}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}] = -\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{\omega}} + \vec{\omega}\,\mathrm{div}\,\vec{r} = -\vec{\omega} + 3\vec{\omega} = 2\vec{\omega}$. □

Замечание 12. Пример 1 показывает, что ротор поля скоростей $\vec{v} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$ тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, равен $2\vec{\omega}$ в каждой точке этого тела.

Задача 6. Пусть $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – векторное поле радиус-вектора, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ – постоянный вектор.

а) Найдите $\mathrm{grad}\,\frac{|\vec{r}|^3}{(\vec{r},\vec{c})^2}$.

б) Найдите $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, где $\vec{a} = [\vec{r}\times[\vec{c}\times\vec{r}]]$.

Задача 7. Пусть координаты векторного поля $\vec{a}$ выражаются формулой $a_i = c_{ij}x_j$, где c_{ij} – компоненты некоторой постоянной матрицы C размера 3×3.

а) Найдите компоненты вектора $\mathrm{rot}\,\vec{a}$.

б) Чему равно векторное поле $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ при условии, если матрица C симметрична?

Замечание 13. Задача 7 является частным случаем следующей задачи, типичной для теории поля. Рассматриваемое векторное поле $\vec{a}$ приближается частичной суммой $\vec{a}_N$ своего ряда Маклорена порядка N, имеющей вид:

$$\vec{a}_N(x_1,x_2,x_3) = \vec{c} + \sum_{n=1}^{N}\vec{P}_n(x_1,x_2,x_3), \tag{3.1}$$

где $\vec{c} = \vec{a}(\vec{0}\,)$ – постоянный вектор, а $\vec{P}_n(x_1, x_2, x_3)$ – векторный многочлен, координаты которого равны

$$P_{ni}(x_1, x_2, x_3) = c_{ij_1\ldots j_n}\, x_{j_1} \ldots x_{j_n} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

где числа $c_{ij_1\ldots j_n}$ не зависят от x_j. Требуется вычислить дивергенцию или ротор векторного поля (3.1).

Пример 2. Найти все дважды дифференцируемые функции f из $(0, +\infty)$ в $\mathbb{R}$ такие, что скалярное поле $\varphi(\vec{r}\,) = f(|\vec{r}\,|)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Решение. Обозначим $r = |\vec{r}\,|$. В силу пункта (3) леммы 5 имеем $\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$. Применяя последовательно лемму 6 и лемму 1, получаем $\operatorname{grad}\varphi = f'(r)\operatorname{grad} r = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$. Согласно пункту (2) леммы 2 справедливо равенство

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\left(\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\vec{r} + \left(\operatorname{grad}\frac{f'(r)}{r}, \vec{r}\right).$$

Снова применяя леммы 6 и 1, приходим к равенствам $\operatorname{grad}\frac{f'(r)}{r} = \left(\frac{f'(r)}{r}\right)'\operatorname{grad} r = \left(\frac{f'(r)}{r}\right)'\frac{\vec{r}}{r}$. Поэтому

$$\Delta\varphi = 3\frac{f'}{r} + \frac{f''r - f'}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{r}\right) = f'' + 2\frac{f'}{r}.$$

Решим дифференциальное уравнение $f'' + 2\frac{f'}{r} = 0$. Обозначая $g(r) = f'(r)$, получаем дифференциальное уравнение $g' + 2\frac{g}{r} = 0$. Это уравнение имеет решение $g = 0$. При $g \neq 0$, разделяя переменные, приходим к уравнению $\frac{dg}{g} = -\frac{2dr}{r}$. Общее решение уравнения $g' + 2\frac{g}{r} = 0$ имеет вид $g = \frac{C_1}{r^2}$. Интегрируя уравнение $f' = \frac{C_1}{r^2}$, приходим к общему решению исходного уравнения $f = -\frac{C_1}{r} + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. □

Замечание 14. Пример 2 показывает, что если скалярное поле φ зависит только от модуля радиус-вектора и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, то φ имеет вид кулоновского (ньютоновского) потенциала.

Ответы к задачам

2. а) 3; б) 3.
5. а) $\frac{3|\vec{r}\,|\vec{r}}{(\vec{r},\vec{c}\,)^2} - \frac{2|\vec{r}|^3\vec{c}}{(\vec{r},\vec{c}\,)^3}$; б) $\operatorname{div}\vec{a} = -2(\vec{r},\vec{c}\,)$, $\operatorname{rot}\vec{a} = 3[\vec{r}\times\vec{c}\,]$.
6. а) $(\operatorname{rot}\vec{a}\,)_k = -\varepsilon_{kij}c_{ij} \quad \forall k\in\{1,2,3\}$; б) $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.

§ 4. Оператор ∇

Определение 10. Оператором ∇ (набла) называется следующий векторный оператор

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Далее мы увидим, что градиент, дивергенцию, ротор и производную по вектору можно выразить, используя векторные операции с оператором ∇.

Определение 11. Пусть в области G заданы непрерывно дифференцируемые скалярное поле φ и векторное поле $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Определим

- произведение вектора ∇ на скаляр φ: $(\nabla\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$;
- скалярное произведение векторов ∇ и $\vec{a}$: $(\nabla,\vec{a}\,) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$;
  $(\vec{a},\nabla) = a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$;
- векторное произведение векторов ∇ и $\vec{a}$: $[\nabla\times\vec{a}\,]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}$,

где $(\nabla\varphi)_i$ и $[\nabla\times\vec{a}\,]_i$ – i-ые компоненты векторов $\nabla\varphi$ и $[\nabla\times\vec{a}\,]$ соответственно.

Замечание 15. Данные выше определения могут быть получены формальной подстановкой компонет $\frac{\partial}{\partial x_i}$ вектора ∇ вместо компонент b_i вектора $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ в известные формулы

$$(\vec{b}\varphi)_i = b_i\varphi, \qquad (\vec{b},\vec{a}\,) = b_i a_i, \qquad (\vec{a},\vec{b}\,) = a_i b_i, \qquad [\vec{b}\times\vec{a}\,]_i = \varepsilon_{ijk} b_j a_k$$

за исключением того, что компоненты вектора ∇ нельзя переставлять с другими сомножителями. Последнее обстоятельство связано с тем, что вектор ∇ и его компоненты действуют на функции, стоящие от них справа и не действуют на функции, стоящие от них слева (здесь имеются в виду функции, которые входят как сомножители в произведение, содержащее оператор ∇ или его компоненты).

Сравнивая определения 4–8 с определением 11, получаем

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi, \qquad (\nabla,\vec{a}\,) = \operatorname{div}\vec{a}, \qquad (\vec{a},\nabla) = \frac{\partial}{\partial\vec{a}}, \qquad [\nabla\times\vec{a}\,] = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

Замечание 16. Леммы 1–6 можно доказать методом оператора ∇. Этот метод состоит в том, чтобы выразить градиент, дивергенцию, ротор и производную по вектору через оператор ∇, а затем использовать свойства скалярного, векторного и смешанного произведений.

Замечание 17. Метод оператора ∇ обладает меньшей универсальностью по сравнению с методом, использующим символ Леви-Чевиты. Например, методом оператора ∇ проблематично получить удобное решение в задаче 7(a) и, тем более, в задаче вычисления дивергенции и ротора поля (3.1).

Заключение

В заключении остановимся на следующих вопросах, которые могут возникнуть у читателя после прочтения данного пособия.

- В чем состоит геометрический и физический смысл дивергенции и ротора?
- Как определить эти объекты в других системах координат так, чтобы они не зависели от системы координат?
- Обобщаются ли рассмотренные здесь понятия и методы на случай пространства размерности $n \neq 3$, а также для векторных и скалярных полей, заданных на множестве, не являющемся областью в $\mathbb{R}^n$?

Ответ на первый из этих вопросов дается в терминах поверхностных и криволинейных интегралов и изложен в стандартных учебниках по математическому анализу, например, [1], [2], [4], [5], [7], [9], [10]. Ответ на второй вопрос приводит к понятию тензора, а ответ на третий вопрос – к понятию многообразия и дуальности Ходжа. Эти вопросы изучаются в курсе дифференциальной геометрии (см., например, [2], [3]).

Выражаясь в духе Р.Ф. Фейнмана, мы предложили читателю автомобиль и поставили перед собой цель научить его вождению машины. При этом, изучение того, что происходят под капотом автомобиля, представляет собой отдельный образовательный курс. Если читатель хочет понять устройство автомобиля, например, для того, чтобы его ремонтировать, ему следует изучить курс дифференциальной геометрии.

В завершение отметим, что в пособии индексы векторов, символа Кронекера и символа Леви-Чивиты записываются снизу от соответствующего объекта. Это не вполне соответствует правилам тензорного анализа, однако допустимо постольку, поскольку мы рассматриваем исключительно прямоугольную декартову систему координат (ПДСК). В общем же случае (даже при рассмотрении систем координат, отличных от ПДСК в $\mathbb{R}^3$) нужно рассматривать векторы, ковекторы и другие тензорные объекты, индексируемые как нижними, так и верхними индексами.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность Михаилу Геннадьевичу Иванову, Олегу Александровичу Загрядскому и другим коллегам за полезные замечания и предложения, которые способствовали улучшению данного пособия.

Список литературных источников

1) Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.

2) Зорич В.А. Математический анализ. — М.: МЦНМО, 2007.

3) Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — Москва : ДРОФА, 2013.

4) Дымарский Я.М. Лекции по математическому анализу.

https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki

5) Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011.

https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki

6) Иванов М.Г. Механика и теория поля.

https://mipt.ru/students/organization/mezhpr/biblio/mekhanika-i-teoriya-polya.php

7) Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2009.

8) Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10 томах.

9) Петрович А.Ю. Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2013, 2018.

10) Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2007.