Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

ТЕНЗОРЫ

Учебно-методическое пособие

Составитель А.В. Ершов

Долгопрудный
2017

Введение

Тензор — общее понятие линейной алгебры, частными случаями которого являются векторы, линейные формы, линейные операторы, билинейные формы и множество других более сложных объектов.

При изучении линейной алгебры становится ясно, что с векторным пространством V связано множество других векторных пространств: двойственное пространство V^*, пространство $\mathcal{L}(V)$ линейных операторов на V, пространство $\mathcal{B}(V)$ билинейных форм на V, или, более общо, пространство k-линейных форм на V, можно также рассмотреть пространство всех линейных отображений $V \to \mathcal{L}(V)$ и т.д. Элементы этих пространств и являются тензорами разных типов на V.

Причем каждому базису $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в V естественно сопоставляется некоторый базис в каждом из этих пространств (двойственный к e базис в V^*, базис в $\mathcal{L}(V)$, состоящий из операторов ψ_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, переводящих e_i в e_j, а остальные базисные векторы — в нуль и т.п.). Значит, замена координат (отвечающая замене базиса) в V приводит к замене координат тензоров в каждом из этих пространств.

Тензорная (или полилинейная) алгебра — классический раздел линейной алгебры, давно вошедший в подробные учебники по этому предмету. Существуют разные подходы к ее изложению. Самый "элементарный" (но не самый прозрачный на наш взгляд) подход состоит в том, чтобы постулировать закон преобразования координат тензора при замене базиса. Недостатком его является то, что он не позволяет развить геометрическую интуицию. Чтобы обосновать этот тезис, приведем определения вектора и линейного оператора, как они выглядели бы при таком подходе (читатель легко убедится в эквивалентности этих определений "обычным").

> Вектором в n-мерном пространстве V называется множество упорядоченных наборов из n скаляров (v^i), по одному для каждого базиса в V, причем для двух базисов e и e', связанных матрицей перехода C, элементы второго набора выражаются через первый по формуле $v'^i = \sum_j d^i_j v^j$, где $D = (d^i_j)$ — матрица, обратная матрице перехода C[1].
>
> Линейный оператор на V — это множество наборов из n^2 скаляров (a^i_j), по одному для каждого базиса в V, причем для двух базисов e и e', связанных матрицей перехода C, элементы наборов связаны формулой $a'^k_l = \sum_{i,j} d^k_i a^i_j c^j_l$, где $C = (c^i_j)$ — матрица перехода, а $D = (d^i_j)$ — обратная к ней матрица[2].

Общий тензор на V при таком подходе выглядит как набор массивов $(a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q})$ из n^{p+q} скаляров (которые можно записывать в "многомерные матрицы"), по одному массиву для каждого базиса в V, которые преобразуются по постулируемым формулам при переходе от одного базиса к другому (см. формулу (6)).

Второй способ определения тензора использует понятие полилинейной функции (или формы). Этот подход более геометричен и позволяет лучше понять идею тензора и более свободно с ней

[1] В этой формуле читатель легко узнает закон преобразования координат вектора при замене базиса. Заметим, что в этих обозначениях верхний индекс i элемента d^i_j матрицы обозначает номер строки, а нижний индекс j — номер столбца.

[2] В этой формуле читатель легко узнает закон преобразования элементов матрицы линейного оператора при замене базиса.

обращаться. От него легко перейти к координатной записи тензоров, если в этом возникает необходимость (как правило, при решении конкретных задач). Этого подхода достаточно для большинства классических применений, однако он все же не дает настолько глубокого понимания тензорной алгебры, какое дает третий подход — через тензорное произведение линейных пространств и его универсальное свойство.

Для данного текста мы выбрали изложение через полилинейные формы, параллельно приводя и координатную форму конструкций и результатов. Из известных автору учебников наиболее близкое к нашему изложение дается в [9]. Что касается тензорного произведения пространств, то оно излагается (в порядке возрастания сложности) в пособии [3] и учебниках [7], [10]. Читателю также параллельно с данным текстом рекомендуется прочитать соответствующий раздел учебника [4].

Тема "Тензоры" традиционно вызывает интерес у сильных студентов, которые постоянно сталкиваются с этим понятием при изучении физики. К сожалению, ввиду того, что эта тема стоит последней в программе по линейной алгебре, на нее часто не остается времени ни на лекциях, ни на семинарах. Поэтому существует потребность в элементарном тексте о тензорах, с которого студенты могли бы начать их самостоятельное изучение. Мы надеемся, что данное пособие в какой-то мере удовлетворит эту потребность. Хотя в тексте разобрано довольно много примеров и задач, их, по-видимому, недостаточно для активного овладения теорией (особенно мало в тексте вычислительных задач). Поэтому наряду с данным текстом мы рекомендуем задачники [1] и [6]; в случае затруднений читатель может также обратиться к решебникам [5] и [8].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Александру Юрьевичу Петровичу и Вадиму Витальевичу Редкозубову, прочитавшим предварительный вариант текста и сделавшим ряд ценных замечаний и предложений.

1 Определение тензора и примеры

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. *Тензором типа* $(p,\, q)$ *на* V называется полилинейное отображение

$$\varphi\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ штук}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ штук}} \to \mathbb{K}.$$

Тензоры типа $(p,\, q)$ можно складывать и умножать на скаляры как полилинейные отображения. Точнее,

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(v_1, \ldots, v_q;\, f_1, \ldots, f_p) := \varphi_1(v_1, \ldots, v_q;\, f_1, \ldots, f_p) + \varphi_2(v_1, \ldots, v_q;\, f_1, \ldots, f_p)$$

и

$$(\lambda\varphi)(v_1, \ldots, v_q;\, f_1, \ldots, f_p) := \lambda\varphi(v_1, \ldots, v_q;\, f_1, \ldots, f_p)$$

для любых $v_i \in V,\ f_j \in V^*$ и $\lambda \in \mathbb{K}$.

Легко видеть, что относительно данных операций тензоры типа $(p,\, q)$ на V образуют линейное пространство, которое мы будем обозначать $\mathbf{T}^p_q(V)$.

Посмотрим, что из себя представляют тензоры типа $(p,\, q)$ для малых p и q.

Непосредственно из определения следует, что тензор типа $(0,\, 1)$ — линейная форма на V, то есть $\mathbf{T}^0_1(V) = V^*$. Линейная форма в тензорной алгебре часто называется также *ковектором.*

По определению, тензор типа $(1,\, 0)$ — линейное отображение $V^* \to \mathbb{K}$, то есть линейная форма на V^*. Ранее в курсе линейной алгебре такие линейные формы мы отождествили с элементами пространства V, построив канонический[3] изоморфизм $\vartheta\colon V \xrightarrow{\cong} V^{**}$.

Напоминание. Идея задания линейного отображения ϑ основана на двойственной природе записи $f(v)$, где $f \in V^*,\ v \in V$. А именно, если мы фиксируем f и меняем $v \in V$, то получаем линейную функцию на V (то есть f), а если фиксируем v и меняем $f \in V^*$, получаем линейную функцию на V^*, тем самым вектор v задает линейную функцию $\vartheta_v \in V^{**}$ на двойственном пространстве V^* по формуле $\vartheta_v(f) = f(v)\ \forall f \in V^*$. Более того, так как ϑ для конечномерного пространства V является изоморфизмом, то все линейные функции на V^* имеют вид ϑ_v для некоторого $v \in V$. То есть для любой линейной функции $\varepsilon\colon V^* \to \mathbb{K}$ существует такой единственный вектор $v = v(\varepsilon) \in V$, что $\varepsilon = \vartheta_v$.

Таким образом, произвольное линейное отображение $V^* \to \mathbb{K}$ отвечает вектору $v \in V$, и пространство тензоров $\mathbf{T}^1_0(V)$ (по определению совпадающее с пространством V^{**}) можно канонически отождествить с V. То есть тензоры типа $(1,\, 0)$ на V — векторы пространства V. С учетом этого отождествления вместо записи $\vartheta_v(f)$ можно также пользоваться записью $v(f)$ для $f \in V^*$, $v \in V$, отождествляя вектор v с тем линейным функционалом на V^*, который он определяет.

Далее, тензоры типа $(0,\, 2)$ по определению суть билинейные отображения $V \times V \to \mathbb{K}$, то есть пространство $\mathbf{T}^0_2(V)$ совпадает с пространством билинейных форм $\mathcal{B}(V)$ на V. Аналогично, пространство тензоров типа $(2,\, 0)$ отождествляется с пространством $\mathcal{B}(V^*)$ билинейных форм на V^*.

[3] термин “канонический” достаточно понимать как “однозначно определенный линейной структурой и не зависящий от каких-либо дополнительных выборов” (вроде выбора базиса, скалярного произведения и т.п.), более глубокое понимание этого термина дает теория категорий (см. по этому поводу например [3]).

Менее тривиален вопрос о том, что представляет из себя простейший смешанный тензор — типа (1, 1).

Предложение 1.2. *Существует канонический изоморфизм линейных пространств* $\mathbf{T}_1^1(V) \cong \mathcal{L}(V)$, *где* $\mathcal{L}(V)$ *— пространство линейных операторов на* V.

Доказательство. Во-первых, покажем как по тензору $\varphi \in \mathbf{T}_1^1(V)$ построить линейный оператор на V. Заметим, что при фиксированном v функция $\varphi(v,\, f)$ линейна по f и, значит, является линейной формой на V^*. Для любой линейной формы на V^* существует такой единственный вектор $w \in V$, что она совпадает с формой ϑ_w. То есть $\forall v \in V\ \exists!w = \psi(v) \in V$[4] такой, что $\varphi(v,\, f) = \vartheta_{\psi(v)}(f)\ \ \forall f \in V^*$. Напомним, что $\vartheta_{\psi(v)}(f) = f(\psi(v))$ в силу определения ϑ. То есть

$$\varphi(v,\, f) = f(\psi(v))\ \ \forall\, f \in V^*. \tag{1}$$

Покажем теперь, что вектор $\psi(v) \in V$ линейно зависит от $v \in V$, то есть является линейным оператором на V. Используя (1), получаем

$$f(\psi(v_1 + v_2)) = \varphi(v_1 + v_2,\, f) = \varphi(v_1,\, f) + \varphi(v_2,\, f) =$$

$$= f(\psi(v_1)) + f(\psi(v_2)) = f(\psi(v_1) + \psi(v_2)) \quad \forall f \in V^*,$$

откуда $\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2)$. Аналогично,

$$f(\psi(\lambda v)) = \varphi(\lambda v,\, f) = \lambda\varphi(v,\, f) = \lambda f(\psi(v)) = f(\lambda\psi(v)) \quad \forall f \in V^*,$$

откуда $\psi(\lambda v) = \lambda\psi(v)$. Таким образом, ψ в самом деле является линейным оператором. Если потребуется подчеркнуть зависимость ψ от φ, мы будем его также обозначать ψ_φ.

Докажем, что отображение $\mathbf{T}_1^1(V) \to \mathcal{L}(V),\ \ \varphi \mapsto \psi_\varphi$, является линейным. Действительно,

$$f(\psi_{\varphi_1+\varphi_2}(v)) = (\varphi_1 + \varphi_2)(v,\, f) = \varphi_1(v,\, f) + \varphi_2(v,\, f) =$$

$$= f(\psi_{\varphi_1}(v)) + f(\psi_{\varphi_2}(v)) = f(\psi_{\varphi_1}(v) + \psi_{\varphi_1}(v)) \quad \text{для любых}\ \ v \in V,\, f \in V^*,$$

откуда $\psi_{\varphi_1+\varphi_2}(v) = \psi_{\varphi_1}(v) + \psi_{\varphi_1}(v)\ \ \forall\, v \in V$, то есть $\psi_{\varphi_1+\varphi_2} = \psi_{\varphi_1} + \psi_{\varphi_2}$, и аналогично для умножения на скаляры.

Обратно, пусть дан линейный оператор $\psi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда $\varphi\colon V \times V^* \to \mathbb{K},\ \ \varphi(v,\, f) := f(\psi(v))$ — билинейное отображение, то есть $\varphi \in \mathbf{T}_1^1(V)$. Тем самым мы определили отображение $\mathcal{L}(V) \to \mathbf{T}_1^1(V)$. Из формулы (1) легко увидеть, что оно является обратным к ранее построенному отображению $\mathbf{T}_1^1(V) \to \mathcal{L}(V)$. ■

Задача 1.3. *Какому тензору типа* (1, 1) *отвечает тождественный оператор* $\mathrm{id}_V \in \mathcal{L}(V)$*?*

Пример 1.4. Коротко обсудим тензоры типа (1, 2), то есть трилинейные отображения

$$\varphi\colon V \times V \times V^* \to \mathbb{K}.$$

[4] Вектор $w \in V$ мы обозначили $\psi(v)$ чтобы подчеркнуть его зависимость от v.

Если в выражении $\varphi(v,\, w;\, f)$ зафиксировать первые два аргумента $v,\, w \in V$, то полученная функция от $f \in V^*$ будет линейной, и, значит, для $\forall v,\, w \in V\ \exists!\, \mu(v,\, w) \in V$ такой, что

$$\varphi(v,\, w;\, f) = f(\mu(v,\, w)) \tag{2}$$

(μ также зависит от φ). Легко проверяется, что вектор $\mu(v,\, w)$ линейно зависит от v и w. То есть $\mu\colon V \times V \to V$ — билинейное умножение на V. Обратно, имея такое умножение, по формуле (2) можно определить тензор φ типа $(1,\, 2)$. То есть тензоры типа $(1,\, 2)$ — билинейные умножения на V. С примерами таких умножений мы уже встречались: если V — трехмерное евклидово ориентированное пространство, то такой операцией является векторное произведение векторов, а если V — пространство квадратных матриц фиксированного порядка, то такой операцией является умножение матриц (или взятия их коммутатора $X,\, Y \mapsto [X,\, Y] := XY - YX$).

Задача 1.5. *Постройте изоморфизм между пространством $\mathcal{L}(V, V; V)$ билинейных отображений $V \times V \to V$ и пространством $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V))$ линейных отображений $V \to \mathcal{L}(V)$.*

Кроме того, по определению, тензоры типа $(0,\, 0)$ отождествляются со скалярами, то есть $\mathbf{T}^0_0(V) = \mathbb{K}$.

Следует отметить, что тензоры высоких рангов естественно возникают не только в чистой математике, но и в ее приложениях. Например, тензор кривизны Римана, описывающий кривизну пространства (или пространства-времени), важный в общей теории относительности, имеет тип $(1,\, 3)$.

2 Тензорное произведение тензоров

Если бы пространства $\mathbf{T}^p_q(V)$ при разных $(p,\, q)$ были бы никак между собой не связаны, понятие тензора не представляло бы большого интереса: оно просто давало бы другие названия известным объектам линейной алгебры (векторам, билинейным формам, линейным операторам, ...). Однако на самом деле пространства $\mathbf{T}^p_q(V)$ при разных $(p,\, q)$ связаны друг с другом множеством отображений, и тензорная алгебра систематически изучает связи между тензорами разных типов. Примерами таких связей являются изученные нами ранее в курсе линейной алгебры изоморфизмы между евклидовым пространством и его двойственным, а также между пространством линейных операторов и билинейных форм на евклидовом пространстве.

Основными операциями над тензорами являются их тензорное произведение и свертка (в частности, подъем и опускание индексов). На самом деле, на этом языке описываются все операции линейной алгебры (вычисление значения линейной формы или линейного оператора на векторе, композиция операторов и т.д.).

Определение 2.1. *Тензорным произведением* тензоров $\varphi \in \mathbf{T}^p_q(V)$ и $\psi \in \mathbf{T}^r_s(V)$ называется тензор $\varphi \otimes \psi \in \mathbf{T}^{p+r}_{q+s}(V)$, определяемый формулой

$$(\varphi \otimes \psi)(v_1, \ldots, v_{q+s};\, f_1, \ldots, f_{p+r}) = \varphi(v_1, \ldots, v_q;\, f_1, \ldots, f_p)\psi(v_{q+1}, \ldots, v_{q+s};\, f_{p+1}, \ldots, f_{p+r}),$$

где $v_i \in V,\ f_j \in V^*$.

Тот факт, что тензорное произведение действительно представляет собой тензор указанного типа (полилинейное отображение), очевиден. Также просто проверяется, что тензорное произведение определяет билинейное отображение

$$\mathbf{T}^p_q(V) \times \mathbf{T}^r_s(V) \to \mathbf{T}^{p+r}_{q+s}(V),$$

то есть $(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi$, $(\lambda\varphi) \otimes \psi = \lambda(\varphi \otimes \psi)$ и т.д.

Из определения очевидна также ассоциативность тензорного произведения, то есть $(\varphi\otimes\psi)\otimes\chi = \varphi\otimes(\psi\otimes\chi)$. Однако тензорное произведение не коммутативно, то есть, вообще говоря, $\varphi\otimes\psi \neq \psi\otimes\varphi$. Чтобы убедиться в этом, возьмем две линейные формы $\varphi,\, \psi \in \mathbf{T}^0_1(V) = V^*$, где $\dim V \geq 2$ и рассмотрим две билинейные формы на V, $\varphi \otimes \psi$ и $\psi \otimes \varphi$. Тогда их значения на паре $(v,\, w) \in V \times V$ суть $\varphi(v)\psi(w)$ и $\psi(v)\varphi(w)$. Но легко подобрать такую пару линейных форм и такую пару векторов, что первый из рассматриваемых скаляров равен 1, а второй — 0 (детали предоставляются читателю).

Пример 2.2. Пусть, например, $w \in \mathbf{T}^1_0(V)$, $\alpha \in \mathbf{T}^0_1(V)$; тогда $\alpha \otimes w \in \mathbf{T}^1_1(V)$. По определению, $(\alpha \otimes w)(v,\, f) = \alpha(v)f(w) = f(\alpha(v)w)$ (последнее равенство следует из линейности f). Подставляя в формулу (1) $\varphi = \alpha \otimes w$, получаем $(\alpha \otimes w)(v,\, f) = f(\psi(v))$ для соответствующего $\alpha \otimes w$ линейного оператора ψ. Сравнивая две последние формулы получаем, что оператор $\psi\colon V \to V$, отвечающий тензору $\varphi = \alpha \otimes w \in \mathbf{T}^1_1(V)$ при каноническом изоморфизме $\mathbf{T}^1_1(V) \to \mathcal{L}(V)$, построенном в Предложении 1.2, действует на вектор $v \in V$ по формуле $\psi(v) = \alpha(v)w$.

Не следует думать, что любой оператор на V при $\dim V > 1$ получается приведенным выше способом: легко видеть, что ранг оператора $v \mapsto \alpha(v)w$ не превосходит 1. В то же время любой оператор ранга 1 является оператором такого вида (для соответствующих ковектора α и вектора w) и, значит, любой линейный оператор на V является линейной комбинацией таких.

Задача 2.3. *Пусть $\alpha,\, \beta \in V^*$, $w \in V$. Какое билинейное отображение $\mu\colon V \times V \to V$ (см. Пример* 1.4*) отвечает тензору $\alpha \otimes \beta \otimes w$ типа $(1, 2)$?*

Задача 2.4. *Всякий линейный оператор $\psi\colon V \to V$ ранга 1 имеет вид $v \mapsto \alpha(v)w \ \ \forall\, v \in V$, где пара $\alpha \in V^*$, $w \in V$ определена оператором ψ однозначно с точностью до замены $\alpha \mapsto \lambda\, \alpha$, $w \mapsto \lambda^{-1}w$ для $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Решение. $\operatorname{rk}\psi = \dim \operatorname{Im}\psi = 1 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{Im}\psi = \langle w\rangle$ для некоторого $w \in V$, $w \neq 0$. Тогда $\psi(v) = \alpha(v)w$, где $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ — некоторая функция, причем из линейности ψ следует, что $\alpha(v)$ линейно зависит от v, то есть является линейной формой.

Ясно, что вектор w такой, что $\operatorname{Im}\psi = \langle w\rangle$, определен оператором ψ однозначно с точностью до ненулевого множителя. Также ясно, что $\langle\alpha\rangle = \operatorname{Ann}(\ker\psi)$[5], поэтому $\alpha \in V^*$ также определен ψ однозначно с точностью до ненулевого множителя. Дальнейшее очевидно. ■

3 Координаты тензора

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Тогда легко видеть, что для любых натуральных p, q $\mathbf{T}^p_q(V)$ является конечномерным векторным пространством над тем же полем.

[5] $\operatorname{Ann} U$ обозначает *аннулятор* подпространства $U \subset V$, $\operatorname{Ann}(U) := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \,\forall u \in U\} \subset V^*$.

Действительно, полилинейное отображение $\varphi \in \mathbf{T}_q^p(V)$ однозначно определяется своими значениями на наборах, состоящих из q базисных векторов из V и p базисных векторов из V^*. В этом разделе мы построим важный класс базисов в $\mathbf{T}_q^p(V)$.

Зафиксируем некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V. Пусть $\{e^1, \dots, e^n\}$ — двойственный базис в V^*, то есть такой, что $e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$

Тогда в $\mathbf{T}_q^p(V)$ определен набор n^{p+q} элементов $e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$, где i_k и j_l независимо пробегают значения $1, 2, \dots, n$. По определению тензорного произведения $\otimes$,

$$(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p})(v_1, \dots, v_q;\, f_1, \dots, f_p) = e^{j_1}(v_1) \dots e^{j_q}(v_q) f_1(e_{i_1}) \dots f_p(e_{i_p}).$$

В частности,

$$(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p})(e_{l_1}, \dots, e_{l_q};\, e^{k_1}, \dots, e^{k_p}) = \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_q}^{j_q} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_p}^{k_p}. \tag{3}$$

Теорема 3.1. *Набор n^{p+q} элементов $\{e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \mid 1 \leq i_k,\, j_l \leq n\}$ пространства $\mathbf{T}_q^p(V)$ является базисом в $\mathbf{T}_q^p(V)$.*

Доказательство. Нужно проверить, что указанные тензоры линейно независимы и что любой тензор типа $(p,\, q)$ представляется в виде их линейной комбинации.

Пусть полилинейная функция

$$\sum \lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$$

равна 0. Тогда, вычисляя ее значения на наборе $(e_{l_1}, \dots, e_{l_q};\, e^{k_1}, \dots, e^{k_p})$ с помощью (3), получаем, что $\lambda_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} = 0$. Таким образом, линейная независимость элементов набора доказана.

Для любого тензора $\varphi \in \mathbf{T}_q^p(V)$ определен набор n^{p+q} скаляров

$$\varphi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} := \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}; e^{i_1}, \dots, e^{i_p}) \in \mathbb{K} \tag{4}$$

(набор значений полилинейного отображения φ на всевозможных наборах базисных векторов и ковекторов). Заметим также, что полилинейное отображение однозначно определяется своими значениями на таких наборах $(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}; e^{i_1}, \dots, e^{i_p})$, то есть если значения двух полилинейных отображений на всех наборах $(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}; e^{i_1}, \dots, e^{i_p})$ совпадают, то и полилинейные отображения совпадают. Отсюда следует, что полилинейное отображение

$$\phi := \sum \varphi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$$

совпадает с φ, а значит указанный в условии теоремы набор тензоров является базисом в $\mathbf{T}_q^p(V)$. ∎

Следствие 3.2. *Если* $\dim V = n$, *то* $\dim \mathbf{T}_q^p(V) = n^{p+q}$.

Базис в условии предыдущей теоремы называется *тензорным базисом пространства* $\mathbf{T}_q^p(V)$, отвечающим выбранному базису $\{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве V, а скаляры (4) — *координатами* (или *компонентами*) *тензора* φ в этом тензорном базисе. Таким образом, тензорных базисов в $\mathbf{T}_q^p(V)$ столько же, сколько базисов в V (конечно, вообще говоря, не всякий базис в линейном пространстве $\mathbf{T}_q^p(V)$ является тензорным).

Пример 3.3. Рассмотрим пространство $\mathbf{T}^0_2(V)$ тензоров типа (0, 2), то есть билинейных функций на V. Пусть $\varphi\colon V\times V\to\mathbb{K}$ — такая функция, тогда $\varphi=\sum_{i,\,j}\varphi_{ij}e^i\otimes e^j$, причем $\varphi(v,\,w)=\sum\varphi_{ij}v^iw^j$ (здесь v^i и w^j — координаты векторов v и w в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$ в V), в частности,

$$\varphi(e_k,\,e_l)=\sum_{i,\,j}\varphi_{ij}\delta^i_k\delta^j_l=\varphi_{kl}.$$

Значит, координаты φ_{ij} тензора α в тензорном базисе $\{e^i\otimes e^j\mid 1\le i,\,j\le n\}$ суть матричные элементы матрицы билинейной формы φ в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$ пространства V.

В частности, если $(V,\,\varphi)$ — евклидово пространство, а $\{e_1,\dots,e_n\}$ — ортонормированный базис, то $\varphi=\sum_i e^i\otimes e^i$.

Пример 3.4. Рассмотрим пространство $\mathbf{T}^1_1(V)$ тензоров типа (1, 1) на V. Пусть $\varphi\colon V\times V^*\to\mathbb{K}$ — такой тензор. Тогда $\varphi=\sum_{i,j}\varphi^i_je^j\otimes e_i$. Напомним, что для такого φ существует единственный линейный оператор $\psi\colon V\to V$ такой, что $\varphi(v,\,f)=f(\psi(v))\ \ \forall v\in V,\,f\in V^*$. Имеем

$$\varphi(e_l,\,e^k)=\sum_{i,j}\varphi^i_je^j(e_l)e^k(e_i)=\sum_{i,j}\varphi^i_j\delta^j_l\delta^k_i=\varphi^k_l=e^k(\psi(e_l)),$$

причем последнее выражение есть k-я координата вектора $\psi(e_l)$ в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$ пространства V. Таким образом, если верхний индекс i рассматривать как номер строки, а нижний индекс j — как номер столбца, то $A_\psi:=(\varphi^i_j)$ — матрица линейного оператора ψ в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$. Иными словами, тензорные координаты тензора $\varphi\in\mathbf{T}^1_1(V)$ в тензорном базисе $\{e^j\otimes e_i\mid 1\le i,\,j\le n\}$ суть не что иное как матричные элементы соответствующего линейного оператора ψ в базисе $\{e_1\dots,e_n\}$ пространства V. В частности, линейный оператор ψ в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$ действует по формуле

$$\psi(e_l)=\sum_k\varphi^k_le_k=\sum_k e_k\varphi^k_l,\ \ 1\le l\le n,$$

что можно представить также как равенство $(\psi(e_1),\dots,\psi(e_n))=(e_1,\dots,e_n)A_\psi$ (ср. определение матрицы линейного оператора в базисе).

Заметим, что тождественный оператор id_V отвечает тензору $\sum_i e^i\otimes e_i\in\mathbf{T}^1_1(V)$ (для любого выбора базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ в V).

Задача 3.5. [8] *Пусть $\varphi\colon V\times V\times V^*\times V^*\to\mathbb{K}$ — полилинейное отображение, заданное формулой*

$$\varphi(u,v;\alpha,\beta)=\det\begin{pmatrix}\alpha(u)&\beta(u)\\ \alpha(v)&\beta(v)\end{pmatrix}.$$

Найти разложение тензора $\varphi\in\mathbf{T}^2_2(V)$ по базису $\{e^i\otimes e^j\otimes e_k\otimes e_l\mid 1\le i,j,k,l\le\dim V\}$.

Решение. Полилинейность φ следует из линейности определителя по строкам и столбцам. Имеем

$$\varphi^{kl}_{ij}=\varphi(e_i,e_j;e^k,e^l)=\det\begin{pmatrix}e^k(e_i)&e^l(e_i)\\ e^k(e_j)&e^l(e_j)\end{pmatrix}=$$

$$=\det\begin{pmatrix}\delta^k_i&\delta^l_i\\ \delta^k_j&\delta^l_j\end{pmatrix}=\delta^k_i\delta^l_j-\delta^k_j\delta^l_i,$$

откуда

$$\varphi=\sum_{i,j,k,l}(\delta^k_i\delta^l_j-\delta^k_j\delta^l_i)e^i\otimes e^j\otimes e_k\otimes e_l=\sum_{i,j}(e^i\otimes e^j\otimes e_i\otimes e_j-e^i\otimes e^j\otimes e_j\otimes e_i).\quad\blacksquare$$

4 Изменение координат тензора при замене базиса

Как изменяются координаты тензора при изменении базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве V? Заметим, что так как каждому базису в V отвечает единственный двойственный базис в V^*, то замене базиса в V полностью определяет замену соответствующих двойственных базисов в V^*.

Напомним, что замена базиса задается матрицей перехода. Итак, пусть даны два базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ в V и C — матрица перехода от первого ко второму, то есть

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

Последнее равенство в наших новых обозначениях перепишется в виде $e'_i = \sum_j e_j c^j_i$ (напомним, что верхний индекс — номер строки, а нижний — столбца). Пусть

$$e'^i = \sum_j d^i_j e^j, \tag{5}$$

где $D = (d^i_j)$ — некоторая матрица порядка n. Имеем

$$\delta^i_j = e'^i(e'_j) = e'^i\left(\sum_k e_k c^k_j\right) = \sum_l d^i_l e^l\left(\sum_k e_k c^k_j\right) = \sum_{k,l} d^i_l \delta^l_k c^k_j = \sum_k d^i_k c^k_j$$

(произведение i-й строки матрицы D на j-й столбец матрицы C), откуда $D = C^{-1}$. В матричном виде равенство (5) записывается так:

$$\begin{pmatrix} e'^1 \\ \vdots \\ e'^n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$$

(ср. формулу замены координат вектора при замене базиса).

Итак, пусть $\varphi \in \mathbf{T}^p_q(V)$ — некоторый тензор. Имеем

$$\varphi'^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} = \varphi(e'_{l_1}, \ldots, e'_{l_q}; e'^{k_1}, \ldots, e'^{k_p}) = \varphi\left(\sum_{j_1} e_{j_1} c^{j_1}_{l_1}, \ldots, \sum_{j_q} e_{j_q} c^{j_q}_{l_q}; \sum_{i_1} d^{k_1}_{i_1} e^{i_1}, \ldots, \sum_{i_p} d^{k_p}_{i_p} e^{i_p}\right) =$$

$$= \sum c^{j_1}_{l_1} \ldots c^{j_q}_{l_q} d^{k_1}_{i_1} \ldots d^{k_p}_{i_p} \varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}; e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}) = \sum c^{j_1}_{l_1} \ldots c^{j_q}_{l_q} d^{k_1}_{i_1} \ldots d^{k_p}_{i_p} \varphi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}.$$

Таким образом, получаем искомую формулу преобразования координат тензора:

$$\varphi'^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} = \sum c^{j_1}_{l_1} \ldots c^{j_q}_{l_q} d^{k_1}_{i_1} \ldots d^{k_p}_{i_p} \varphi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}. \tag{6}$$

Запомнить ее можно так: при указанной замене базисов верхние индексы i_r преобразуются с помощью матричных элементов d^i_k матрицы $D = C^{-1}$, а нижние индексы j_s — с помощью матрицы C.

Последнюю формулу иногда берут за определение тензора. А именно, тензором на V типа (p, q) называют соответствие φ, относящее каждому базису пространства V систему из n^{p+q} скаляров $\varphi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ таким образом, что системы, отвечающие различным базисам, связаны между собой соотношениями (6). Убедиться в эквивалентности этих двух определений читателю предлагается самостоятельно.

Если $\varphi,\ \psi \in \mathbf{T}^p_q(V)$, то тензорными координатами линейной комбинации $\lambda\varphi+\mu\psi$ будут $\lambda\varphi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \mu\psi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$. Операция тензорного умножения также может быть легко описана в терминах координат. Пусть $\varphi \in \mathbf{T}^p_q(V)$, $\psi \in \mathbf{T}^r_s(V)$ и $\chi := \varphi \otimes \psi \in \mathbf{T}^{p+r}_{q+s}(V)$. Тогда

$$\chi^{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_q l_1\ldots l_s} = \varphi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\,\psi^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}. \tag{7}$$

Полезно заметить, что правая часть последнего равенства действительно является тензором, так как преобразуется согласно (6) как тензор типа $(p+r,\ q+s)$. Заметим также, что если наборы тензорных координат тензоров одного типа совпадают в некотором тензорном базисе, то они совпадают и в любом другом, поскольку преобразуются по одинаковым формулам (6).

Пример 4.1. Из формулы (6) следует, что координаты тензора $\varphi \in \mathbf{T}^1_0(V)$ преобразуются по формуле $\varphi'^k = \sum_i d^k_i \varphi^i$, как и должны изменяться координаты вектора при замене базиса.

Пример 4.2. Из формулы (6) следует, что координаты тензора $\varphi \in \mathbf{T}^0_1(V)$ преобразуются по формуле $\varphi'_l = \sum_j c^j_l \varphi_j$, как и должны изменяться координаты ковектора (линейной формы) относительно двойственного базиса. А именно, чтобы получить координатную строку линейной формы относительно нового базиса, нужно координатную строку в старом базисе умножить на матрицу перехода.

Пример 4.3. В случае тензоров типа $(0,\ 2)$, то есть билинейных форм на V, читателю предлагается убедиться самостоятельно, что формула (6) дает формулу замены $B' = C^T BC$ матрицы билинейной формы при замене базиса (напомним, что в Примере 3.3 мы показали, что φ_{ij} — матричные элементы матрицы билинейной формы).

Пример 4.4. Рассмотрим случай тензоров типа $(1,\ 1)$. Напомним (см. Пример 3.4), что если $\varphi \in \mathbf{T}^1_1(V)$, то φ^i_j — матричные элементы соответствующего линейного оператора ψ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. С одной стороны, имеем $\psi(e'_l) = \sum_k \varphi'^k_l e'_k$; с другой стороны,

$$\psi(e'_l) = \psi\left(\sum_j c^j_l e_j\right) = \sum_j c^j_l \psi(e_j) = \sum_{i,\,j} c^j_l \varphi^i_j e_i = \sum_{i,\,j,\,k} c^j_l \varphi^i_j d^k_i e'_k = \sum_{i,\,j,\,k} d^k_i \varphi^i_j c^j_l e'_k = \sum_k \varphi'^k_l e'_k,$$

откуда $\varphi'^k_l = \sum_{i,\,j} d^k_i \varphi^i_j c^j_l$ (что совпадает с (6) при $(p,\ q) = (1,\ 1)$). Полученная формула эквивалентна $A'_\psi = C^{-1}A_\psi C$, то есть формуле замены матрицы линейного оператора при замене базиса.

Например, очень легко убедиться, что сопоставление любому базису набора $\{\delta^i_j\}$ определяет тензор типа $(1,\ 1)$, который отвечает тождественному линейному оператору.

Пример 4.5. Выше (см. Пример 1.4) мы убедились, что тензоры типа $(1,\ 2)$ — билинейные умножения (структуры алгебры) на V. Пусть φ — такой тензор. Тогда легко получить, что его координаты φ^k_{ij} вычисляются из билинейного умножения $\cdot$[6] на базисных векторах e_i по формуле $e_i \cdot e_j = \sum_k \varphi^k_{ij} e_k$. Докажем независимо, что эти коэффициенты действительно преобразуются согласно закону преобразования координат тензора типа $(1,\ 2)$. Имеем

$$\sum_k \varphi'^k_{ij} e'_k = e'_i \cdot e'_j = \left(\sum_l c^l_i e_l\right) \cdot \left(\sum_m c^m_j e_m\right) = \sum_{l,\,m} c^l_i c^m_j e_l \cdot e_m = \sum_{l,\,m,\,r} c^l_i c^m_j \varphi^r_{lm} e_r =$$
$$= \sum_{l,\,m,\,r,\,k} c^l_i c^m_j \varphi^r_{lm} d^k_r e'_k.$$

[6] Чтобы упростить обозначения из примера 1.4 мы полагаем $v \cdot w := \mu(v,\ w)$.

Сравнивая коэффициенты перед e'_k, получаем $\varphi'^k_{ij} = \sum_{l,\,m,\,r} c^l_i c^m_j d^k_r \varphi^r_{lm}$, что совпадает с (6) в случае $(p,\,q) = (1,\,2)$. Тензор φ называется *тензором структурных констант* соответствующей алгебры.

Задача 4.6. *Пусть $\varphi \in \mathbf{T}^0_2(V)$ — невырожденная билинейная форма на V. Покажите, что сопоставление базису $\{e_1, \dots, e_n\}$ элементов матрицы B^{-1}, обратной матрице B формы φ в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$, задает тензор типа $(2,\,0)$ на V. Какое инвариантное определение имеет этот тензор?*

Решение. При замене базиса с матрицей перехода C обратная к B матрица меняется согласно формуле $B'^{-1} = (C^TBC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}C^{-T}$. Остается проверить, что эта матричная формула задает закон преобразования координат тензора типа $(2,\,0)$. ■

Тензор $\{\varphi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\}$ называется *инвариантным*, если он имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах в $\mathbf{T}^p_q(V)$. Если V — евклидово пространство, то $\{\varphi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\}$ называется *изотропным*, если он инвариантен относительно ортогональных преобразований V (т.е. имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах, получающихся друг из друга с помощью ортогональных преобразований V). Ясно, что всякий инвариантный тензор изотропен, но, вообще говоря, не наоборот.

Рангом тензора $\varphi \in \mathbf{T}^p_q(V)$ называют число $p+q$.

Задача 4.7. *a) Найти все инвариантные тензоры ранга* 2;

b) Найти все изотропные тензоры типа $(0,\,2)$.

Решение. a) Во-первых, заметим, что если ненулевой тензор $\varphi \in \mathbf{T}^p_q(V)$ инвариантен, то $p = q$. Действительно, рассмотрим замену базиса $e'_i = \lambda\, e_i,\ 1 \le i \le n := \dim V$. Тогда из формулы замены координат тензора $\varphi'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \lambda^{q-p}\, \varphi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$.

Таким образом, достаточно рассмотреть тензоры типа $(1,\,1)$. Ранее такие тензоры мы отождествили с линейными операторами на V, причем тогда координаты тензора типа $(1,\,1)$ в тензорном базисе $\{e^i \otimes e_j\}$ в $\mathbf{T}^1_1(V)$ — то же самое, что матричные элементы матрицы этого оператора в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства V. Таким образом, инвариантные тензоры типа $(1,\,1)$ отвечают линейным операторам, которые имеют одинаковые матрицы во всех базисах, то есть матрицы A, такие что $CA = AC$ для любой обратимой матрицы C. Легко видеть, что тогда $A = \lambda E$, то есть инвариантные тензоры типа $(1,\,1)$ — операторы $\lambda\,\mathrm{id}_V$, кратные тождественному. Таким образом, инвариантный тензор φ типа $(1,\,1)$ имеет координаты $\varphi^j_i = \lambda\,\delta^j_i$.

b) Выше мы видели, что пространство тензоров типа $(0,\,2)$ отождествляется с пространством билинейных функций, при этом координаты такого тензора в тензорном базисе $\{e^i \otimes e^j\}$ в $\mathbf{T}^0_2(V)$ — то же, что матричные элементы матрицы соответствующей билинейной функции в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства V. Таким образом, нужно найти билинейные функции, имеющие одну и ту же матрицу во всех базисах, получаемых друг из друга ортогональной заменой.

Поскольку V — евклидово пространство, на нем уже задан тензор типа $(0,\,2)$ — положительно определенная симметричная билинейная функция g, задающая скалярное произведение. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис в V. Рассмотрим ортогональную замену базиса $e'_i = -e_i,\ e'_j = e_j$ при $j \ne i$. Тогда при $i \ne j$ получаем $\varphi'_{ij} = -\varphi_{ij}$, то есть изотропный тензор в этом базисе должен иметь координаты $\{\lambda_i\,\delta_{ij}\}$. Далее, при ортогональной замене $e'_i = e_j,\ e'_j = e_i,\ e'_k = e_k$

при $k \neq i,\, j$ имеем $\varphi'_{ii} = \varphi_{jj}$, $\varphi'_{jj} = \varphi_{ii}$. Таким образом, изотропный тензор $\{\varphi_{ij}\}$ имеет вид $\{\lambda\,\delta_{ij}\}$. То есть матрица соответствующей билинейной функции в ортонормированном базисе есть λE, и билинейная функция пропорциональна евклидовой структуре на V. ■

5 Свертка

Свертка тензора типа $(p,\, q)$, где $p,\, q \geq 1$, по фиксированной паре индексов (один из которых верхний, а другой — нижний) — некоторое специальное линейное отображение $\mathbf{T}^p_q(V) \to \mathbf{T}^{p-1}_{q-1}(V)$.

Определим сначала частный случай свертки — для тензоров типа $(1,\, 1)$. В этом случае свертка единственна (так как имеется только один верхний и один нижний индекс) и представляет собой линейное отображение $\mathbf{T}^1_1(V) \to \mathbb{K}$ (то есть линейный функционал на пространстве $\mathbf{T}^1_1(V)$), определяемый следующим образом. Выберем произвольный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и для $\varphi\colon V \times V^* \to \mathbb{K}$, $\varphi \in \mathbf{T}^1_1(V)$ рассмотрим отображение $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$, где $\widetilde{\varphi} := \sum_i \varphi(e_i,\, e^i) = \sum_i \varphi^i_i$.

Покажем, что свертка корректно определена, то есть не зависит от выбора базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Пусть $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — другой базис в V и C — матрица перехода к нему от старого (“нештрихованного”) базиса. Имеем

$$\sum_{k=1}^n \varphi(e'_k,\, e'^k) = \sum_{k=1}^n \varphi'^k_k = \sum_{i,\,j,\,k} c^j_k d^k_i \varphi^i_j = \sum_{i,\,j} \left(\sum_{k=1}^n c^j_k d^k_i \right) \varphi^i_j = \sum_{i,\,j} \delta^j_i \varphi^i_j = \sum_j \varphi^j_j = \sum_{j=1}^n \varphi(e_j,\, e^j),$$

что и требовалось доказать. Легко видеть, что при отождествлении тензоров типа $(1,\, 1)$ с линейными операторами свертка отождествляется со следом. В частности, только что доказанная корректность определения свертки равносильна инвариантности следа матрицы линейного оператора (его независимости от выбора базиса).

Задача 5.1. *На разложимых тензорах $\alpha \otimes v$ свертка совпадает с отображением $\alpha \otimes v \mapsto \alpha(v)$.*

Решение. Если $\alpha = 0$, то все очевидно. Иначе пусть $\ker \alpha = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\} \subset V$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V такой, что $\{e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в $\ker \alpha$. Тогда

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{k=1}^n \alpha(e_k) e^k(v) = \alpha(e_1) v^1 = \alpha(v),$$

где $v = \sum_i v^i e_i$. Так как свертка и значение $\alpha(v)$ не зависят от выбора базиса, то все доказано. ■

В общем случае свертка $\mathrm{tr}^r_s\varphi$ тензора φ типа $(p,\, q)$, где $p,\, q \geq 1$, по паре индексов $r,\, s$ $(1 \leq r \leq p,\ 1 \leq s \leq q)$ определяется как линейное отображение $\mathbf{T}^p_q(V) \to \mathbf{T}^{p-1}_{q-1}(V)$, заданное формулой

$$\varphi \mapsto \mathrm{tr}^r_s\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi(\ldots, e_k, \ldots, e^k, \ldots),$$

где e_k принадлежит s-му сомножителю V, а e^k — r-му сомножителю V^*. Таким образом, $\mathrm{tr}^r_s\varphi$ является полилинейной функцией от $q-1$ векторных и $p-1$ ковекторных аргументов (обозначенных выше многоточием), то есть тензором типа $(p-1,\, q-1)$ на V.

Аналогично предыдущему проверяется независимость определения свертки от выбора базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$. В частности, в любом базисе верно равенство

$$(\mathrm{tr}^r_s\varphi)(e_{j_1}, \dots, e_{j_{q-1}}; e^{i_1}, \dots, e^{i_{p-1}}) = (\mathrm{tr}^r_s\varphi)^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}} = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{i_1\dots i_{r-1}ki_r\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{s-1}kj_s\dots j_{q-1}}.$$

Если после произведенной свертки у тензора остался хотя бы один верхний и хотя бы один нижний индекс, то можно выбрать пару таких индексов и произвести свертку по ним. Если после произведенных сверток остались либо только верхние, либо только нижние индексы (либо не осталось ни тех, ни других), то такая свертка называется *полной*. В частности, если тензор имел тип $(p,\, p)$, то сворачивая его по всем верхним и нижним индексам, получим скаляр. (Сколько различных полных сверток есть у тензора типа $(p,\, p)$?)

Многие операции линейной алгебры могут быть описаны как композиции тензорного произведения и свертки. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 5.2. Пусть φ — тензор типа $(1,\, 1)$ (линейный оператор) с компонентами φ^i_j относительно некоторого базиса, а v — тензор типа $(1,\, 0)$ (вектор) с компонентами v^i в том же базисе. Тогда их тензорное произведение $\varphi \otimes v$ является тензором типа $(2,\, 1)$ с компонентами $(\varphi \otimes v)^{ik}_j = \varphi^i_j v^k$ (см. (7)). Сворачивая его по нижнему индексу φ и единственному индексу v, получим тензор $\mathrm{tr}^2_1\,(\varphi \otimes v)$ типа $(1,\, 0)$ с компонентами $(\mathrm{tr}^2_1\,(\varphi \otimes v))^i = \sum_j \varphi^i_j v^j$. Так как $\varphi(v)^i = \sum_j \varphi^i_j v^j$, то легко видеть, что этот вектор — результат применения оператора к вектору, то есть $\mathrm{tr}^2_1\,(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$.

Пример 5.3. Пусть φ и ψ — тензоры типа $(1,\, 1)$. Тогда $\varphi \otimes \psi$ — тензор типа $(2,\, 2)$ с компонентами $(\varphi \otimes \psi)^{ij}_{kl} = \varphi^i_k \psi^j_l$. Читателю предлагается проверить, что $\mathrm{tr}^2_1\,(\varphi \otimes \psi) = \varphi \circ \psi$, в то время как $\mathrm{tr}^1_2\,(\varphi \otimes \psi) = \psi \circ \varphi$ (композиции линейных операторов). Далее, имеем две полные свертки $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^2_1\,(\varphi \otimes \psi)) = \mathrm{tr}(\varphi \circ \psi)$ и $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^1_2\,(\varphi \otimes \psi)) = \mathrm{tr}(\psi \circ \varphi)$ (следы линейных операторов).

Пример 5.4. Пусть $\alpha \in \mathbf{T}^0_2(V)$, то есть $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{K}$ — билинейная форма на V. Пусть $u,\, v \in V$. Тогда $\alpha \otimes u \otimes v \in \mathbf{T}^2_2(V)$. Имеем две полные свертки: $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^1_1(\alpha \otimes u \otimes v)) = \alpha(u,\, v) = \sum_{i,\, j} \alpha_{ij} u^i v^j$ и $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^2_1(\alpha \otimes u \otimes v)) = \alpha(v,\, u) = \sum_{i,\, j} \alpha_{ij} u^j v^i$. Они совпадают тогда и только тогда, когда билинейная форма α симметрична.

Задача 5.5. [8] *Найти полную свертку тензора* $\varphi \in \mathbf{T}^2_2(V)$ *из Задачи 3.5 при условии* $\dim V = n$.

Решение. Так как у тензора два верхних и два нижних индекса, имеются две полные свертки: $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^1_1(\varphi)) = \sum_{i,\, j} \varphi^{ij}_{ij}$ и $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^1_2(\varphi)) = \sum_{i,\, j} \varphi^{ij}_{ji}$. Согласно Задаче 3.5, $\varphi^{ij}_{kl} = \delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k$. Таким образом,

$$\varphi^{ij}_{ij} = \delta^i_i \delta^j_j - \delta^i_j \delta^j_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j; \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Откуда $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^1_1(\varphi)) = \sum_{i,\, j} t^{ij}_{ij} = n^2 - n$.

Аналогично,

$$\varphi^{ij}_{ji} = \delta^i_j \delta^j_i - \delta^i_i \delta^j_j = \begin{cases} -1, & \text{если } i \neq j; \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Таким образом, $\mathrm{tr}^1_1(\mathrm{tr}^1_2(\varphi)) = \sum_{i,\, j} \varphi^{ij}_{ji} = n - n^2$. ∎

Операция свертки особенно полезна в случае евклидовых пространств, где она приводит к операциям опускания и подъема индекса. С ними мы познакомимся в одном из следующих параграфов.

6 Симметричные и кососимметричные тензоры

Пространство $\mathbf{T}_q^0(V)$ тензоров типа $(0,\, q)$ (то есть q-линейных форм) на V обозначим просто $\mathbf{T}_q(V)$.

Пусть S_q — группа перестановок на q элементах. Для всякой перестановки $\sigma \in S_q$ и q-линейной формы $\varphi\colon V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ определим новую q-линейную форму $f_\sigma(\varphi)$

$$f_\sigma(\varphi)(v_1, \ldots, v_q) = \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) \quad \forall\, v_1, \ldots, v_q \in V.$$

Вообще, легко видеть, что $\forall\, \sigma \in S_q$ f_σ является линейным оператором на $\mathbf{T}_q(V)$.

Определение 6.1. Тензор $\varphi \in \mathbf{T}_q(V)$ называется *симметричным*, если $f_\sigma(\varphi) = \varphi \;\; \forall\, \sigma \in S_q$. Тензор $\varphi \in \mathbf{T}_q(V)$ называется *кососимметричным*, если $f_\sigma(\varphi) = \varepsilon(\sigma)\varphi \;\; \forall\, \sigma \in S_q$, где $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ — знак перестановки σ (обозначаемый иногда $\operatorname{sgn}\sigma$).

Легко проверяется, что симметричные (кососимметричные) тензоры в $\mathbf{T}_q(V)$ образуют подпространство. Обозначим его $\mathbf{T}_q^+(V)$ (соответственно $\mathbf{T}_q^-(V)$).

Задача 6.2. *Доказать, что* $\dim \mathbf{T}_q^+(V) = \binom{n+q-1}{n}, \quad \dim \mathbf{T}_q^-(V) = \binom{n}{q}$.

Читатель знаком с понятиями симметричных и кососимметричных билинейных форм; примером трилинейной кососимметричной формы является смешанное произведение на трехмерном ориентированном евклидовом пространстве. Вообще, ориентированный объем в n-мерном ориентированном евклидовом пространстве является кососимметричной n-линейной формой.

Получим условие симметричности (кососимметричности) тензора в координатах. Пусть

$$\varphi = \sum \varphi_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_q}, \quad \text{где} \quad \varphi_{i_1 \ldots i_q} = \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}).$$

Тогда

$$f_\sigma(\varphi)_{i_1 \ldots i_q} = f_\sigma(\varphi)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}) = \varphi(e_{\sigma(i_1)}, \ldots, e_{\sigma(i_q)}) = \varphi_{\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_q)}$$

и, значит,

$$f_\sigma(\varphi) = \sum \varphi_{\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_q)} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_q}.$$

Тогда из единственности разложения по базису мы получаем следующее условие симметричности (кососимметричности) в координатах:

$$\varphi_{\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_q)} = \varphi_{i_1 \ldots i_q} \;\; \forall\, \sigma \in S_q$$

(соответственно

$$\varphi_{\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_q)} = \varepsilon(\sigma)\varphi_{i_1 \ldots i_q} \;\; \forall\, \sigma \in S_q).$$

Очевидно, что выполнение этих условий не зависит от выбора базиса.

Пусть основное поле $\mathbb{K}$ имеет характеристику 0 (этому условию удовлетворяют поля, содержащие $\mathbb{Q}$ в качестве подполя, в частности, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$). В этом случае мы построим проекторы на подпространства $\mathbf{T}_q^+(V)$ и $\mathbf{T}_q^-(V)$, обобщающие проекторы $B \mapsto \frac{B+B^T}{2}$, $\;B \mapsto \frac{B-B^T}{2}$ на подпространства симметричных и кососимметричных билинейных форм при $q = 2$[7]. При проверке их свойств нам понадобится следующая

[7]Заметим, что $\mathbf{T}_2(V) = \mathbf{T}_2^+(V) \oplus \mathbf{T}_2^-(V)$, но при $q \neq 2$ это неверно.

Лемма 6.3. Пусть σ, $\tau \in S_q$ — две перестановки. Тогда $\forall \varphi \in \mathbf{T}_q(V)$

$$f_\tau(f_\sigma(\varphi)) = f_{\tau\sigma}(\varphi),$$

где $\tau\sigma$ — произведение (композиция) перестановок[8].

Доказательство. Действительно,

$$f_\tau(f_\sigma(\varphi))(v_1, \ldots, v_q) = f_\sigma(\varphi)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(q)}) = f_\sigma(\varphi)(w_1, \ldots, w_q) =$$

$$= \varphi(w_{\sigma(1)}, \ldots, w_{\sigma(q)}) = \varphi(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(q)}) = f_{\tau\sigma}(\varphi)(v_1, \ldots, v_q)$$

(здесь для удобства мы сделали замену $w_i = v_{\tau(i)}$, тогда $w_{\sigma(j)} = v_{\tau\sigma(j)}$). ■

Определение 6.4. *Оператором симметрирования* на $\mathbf{T}_q(V)$ называется линейный оператор $\mathbf{S} = \mathbf{S}(q) \colon \mathbf{T}_q(V) \to \mathbf{T}_q(V)$, определяемый формулой

$$\mathbf{S}\varphi = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} f_\sigma(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{T}_q(V)$$

(сумма по всем перестановкам $\sigma \in S_q$).

То, что приведенная в определении формула задает линейный оператор, легко проверяется. Возможность деления на $q!$ обеспечивается условием на характеристику основного поля.

Приведем координатную запись симметрирования (которую легко получить из предыдущего):

$$(\mathbf{S}\varphi)_{i_1 \ldots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varphi_{\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_q)}.$$

В литературе часто вместо $(\mathbf{S}\varphi)_{i_1 \ldots i_q}$ пишут $\varphi_{(i_1 \ldots i_q)}$ ("результат симметрирования по индексам $i_1 \ldots i_q$").

Теорема 6.5. *Оператор симметрирования* $\mathbf{S} \colon \mathbf{T}_q(V) \to \mathbf{T}_q(V)$ *имеет следующие свойства:*

1) $\operatorname{Im} \mathbf{S} = \mathbf{T}_q^+(V)$*;*

2) $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}$.

Таким образом, $\mathbf{S}$ *— проектор на подпространство* $\mathbf{T}_q^+(V) \subset \mathbf{T}_q(V)$.

Доказательство. Во-первых, $\operatorname{Im} \mathbf{S} \subset \mathbf{T}_q^+(V)$. Действительно, используя Лемму 6.3 и тот факт, что при фиксированном $\tau \in S_q$ когда σ пробегает все S_q по одному разу, то $\tau\sigma$ также пробегает все S_q по одному разу[9], имеем

$$f_\tau(\mathbf{S}\varphi) = f_\tau\left(\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} f_\sigma(\varphi)\right) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} f_\tau(f_\sigma(\varphi)) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} f_{\tau\sigma}(\varphi) = \frac{1}{q!} \sum_{\omega \in S_q} f_\omega(\varphi) = \mathbf{S}\varphi. \tag{8}$$

Обратное включение $\operatorname{Im} \mathbf{S} \supset \mathbf{T}_q^+(V)$ следует из того, что $\forall\, \varphi \in \mathbf{T}_q^+(V)$ $\mathbf{S}\varphi = \varphi$.

Из равенства (8) следует $\sum_{\tau \in S_q} f_\tau(\mathbf{S}\varphi) = q!\mathbf{S}\varphi$, откуда $\mathbf{S}^2\varphi = \mathbf{S}\varphi$. ■

Симметрирование позволяет определить симметрическое произведение симметричных тензоров, результат которого также является симметричным тензором.

[8] Таким образом, $\sigma \mapsto f_\sigma$ — линейное представление группы S_q в пространстве $\mathbf{T}_q(V)$.

[9] В силу однозначной разрешимости в группе уравнения $\tau\sigma = \omega$.

Определение 6.6. Пусть $\varphi \in \mathbf{T}_q^+(V)$, $\psi \in \mathbf{T}_r^+(V)$. Тогда их *симметрическим произведением* $\varphi \vee \psi$ называется тензор $\mathbf{S}(\varphi \otimes \psi) \in \mathbf{T}_{q+r}^+(V)$ (здесь $\mathbf{S} = \mathbf{S}(q+r)\colon \mathbf{T}_{q+r}(V) \to \mathbf{T}_{q+r}(V)$).

Свойства этой операции можно найти, например, в [9] или [10].

Вполне аналогичные конструкции и результаты верны и для кососимметрических тензоров.

Определение 6.7. *Оператором альтернирования* на $\mathbf{T}_q(V)$ называется линейный оператор $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q)\colon \mathbf{T}_q(V) \to \mathbf{T}_q(V)$, определяемый формулой

$$\mathbf{A}\varphi = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon(\sigma) f_\sigma(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{T}_q(V)$$

(сумма по всем перестановкам $\sigma \in S_q$).

Приведем координатную запись альтернирования (которую легко получить из предыдущего):

$$(\mathbf{A}\varphi)_{i_1 \dots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon(\sigma)\, \varphi_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_q)}.$$

В литературе часто вместо $(\mathbf{A}\varphi)_{i_1 \dots i_q}$ пишут $\varphi_{[i_1 \dots i_q]}$ ("результат альтернирования по индексам $i_1 \dots i_q$").

Теорема 6.8. *Оператор альтернирования $\mathbf{A}\colon \mathbf{T}_q(V) \to \mathbf{T}_q(V)$ имеет следующие свойства:*

1) $\operatorname{Im} \mathbf{A} = \mathbf{T}_q^-(V)$;

2) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Таким образом, $\mathbf{A}$ — проектор на подпространство $\mathbf{T}_q^-(V) \subset \mathbf{T}_q(V)$.

Доказательство этой теоремы мы оставляем читателю. (Указание: использовать тождество $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$). ∎

Определение 6.9. Пусть $\varphi \in \mathbf{T}_q^-(V)$, $\psi \in \mathbf{T}_r^-(V)$. Тогда их *внешним произведением* $\varphi \wedge \psi$ называется тензор $\mathbf{A}(\varphi \otimes \psi) \in \mathbf{T}_{q+r}^-(V)$ (здесь $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q+r)\colon \mathbf{T}_{q+r}(V) \to \mathbf{T}_{q+r}(V)$).

Свойства этой операции можно найти, например, в [9] или [10]. В частности, ассоциативность этой операции позволяет не думать о расстановке скобок в выражениях вида $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_q$.

Пример 6.10. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_q\colon V \to \mathbb{K}$ — набор линейных форм. Тогда легко убедиться, что их внешнее произведение $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_q \in \mathbf{T}_q^-(V)$ задается формулой

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_q(v_1, \ldots, v_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon(\sigma) \varphi_1(v_{\sigma(1)}) \ldots \varphi_q(v_{\sigma(q)}).$$

В частности, если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в V, то

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1 \dots i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1 \dots i_n) v_{i_1}^1 \ldots v_{i_n}^n = \frac{1}{n!} \det(v_j^i) \tag{9}$$

— определитель матрицы, составленной из координат векторов $v_1, \ldots, v_n$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Если пространство V евклидово, а базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — правый ортонормированный[10], то, с точностью до множителя $\frac{1}{n!}$, это равно ориентированному n-мерному объему параллелепипеда, построенного на векторах $v_1, \ldots, v_n$.

[10] Или просто такой, что ориентированный объем его фундаментального параллелепипеда равен 1.

Замечание 6.11. Заметим, что в некоторых книгах, особенно по геометрии или физике, при изложении теории дифференциальных форм (см. [2] или [12]) внешнее произведение кососимметричных тензоров определяется несколько иначе. А именно, на однородных компонентах полагают

$$\varphi \wedge \psi = \frac{(q+r)!}{q!\, r!} \mathbf{A}(\varphi \otimes \psi),$$

где $\varphi \in \mathbf{T}_q^-(V)$, $\psi \in \mathbf{T}_r^-(V)$. Одно из преимуществ такого определения состоит в том, что в формулах типа (9) не появляются факториалы, то есть справа стоит просто ориентированный объем параллелепипеда. Например, для тензора φ из Задачи 3.5 $\varphi(u, v, \alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)(u, v)$ – значение внешнего произведения $\alpha \wedge \beta$ линейных форм α, β на паре векторов u, v (см. [2], гл. 7). Можно показать, что оба определения приводят к изоморфным структурам алгебры на $\oplus_q \mathbf{T}_q^-(V)$.

7 Тензоры в евклидовом пространстве

Евклидово пространство — это пара (V, g), состоящая из вещественного векторного пространства V и билинейной симметричной положительно определенной формы g на нем. То есть g является симметричным тензором типа (0, 2). Наличие фиксированной невырожденной билинейной формы g приводит к ряду отображений между тензорами разных типов в евклидовом пространстве, которые отсутствуют в векторном пространстве без дополнительной структуры. Эти отображения возникают из сверток с g. В этом разделе нам будет удобнее вести изложение на классическом, координатном, языке.

Итак, рассмотрим примеры изоморфизмов между пространствами тензоров разных типов в случае евклидова пространства. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в V. Во-первых, изоморфизм между пространством $T_0^1(V) \cong V$ и $T_1^0(V) = V^*$ задается как композиция тензорного умножения вектора на g и сверткой полученного тензора по единственному верхнему и одному из нижних индексов (какому — неважно, ибо тензор g симметричен). То есть указанный изоморфизм — композиция

$$v^k \mapsto (g \otimes v)_{ij}^k = g_{ij} v^k \mapsto \sum_j g_{ij} v^j =: \alpha_i.$$

По понятным причинам данная операция называется операцией опускания индекса. По-другому данное отображение может быть задано как сопоставление $v \mapsto g(\cdot, v) =: \alpha(\cdot)$ вектору v линейной формы α, полученной из билинейной формы g подстановкой v в качестве второго аргумента.

Пусть g^{ij} — элементы обратной матрицы к матрице Грама формы g в данном базисе, $\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$. Из Задачи 4.6 мы знаем, что они являются координатами некоторого тензора $\widehat{g}$ типа (2, 0). Этот тензор позволяет задать обратный изоморфизм $V^* \to V$:

$$\alpha_k \mapsto (\widehat{g} \otimes \alpha)_k^{ij} = g^{ij} \alpha_k \mapsto \sum_j g^{ij} \alpha_j =: v^i.$$

Это — пример операции подъема индекса в евклидовом пространстве.

Далее, в евклидовом пространстве мы по линейному оператору строили билинейную форму (причем для самосопряженного оператора эта форма оказывалась симметричной). Эта операция — еще один пример операции опускания индекса:

$$a_l^k \mapsto (g \otimes a)_{ijl}^k = g_{ij} a_l^k \mapsto \sum_j g_{ij} a_l^j =: h_{il},$$

то есть для матриц $H = GA$, где $A = (a^i_j)$ — матрица оператора в данном базисе. Иначе, эта операция выглядит как сопоставление линейному оператору φ на V билинейной формы $(u,\, v) \mapsto g(u,\, \varphi(v))$.

Замечание 7.1. Заметим, что если базис ортонормированный, то есть $g_{ij} = \delta_{ij}$, то $A = H$. Кроме того, при ортогональных заменах базисов матрицы операторов и билинейных форм преобразуются одинаково. Вообще, если в евклидовом пространстве ограничиться только ортонормированными базисами, то разница между верхними и нижними индексами тензоров исчезает.

В Примере 4.5 мы определили тензор структурных констант алгебры. В базисе он определяется из тождества $e_i \cdot e_j = \sum_k \varphi^k_{ij} e_k$. Пусть V — трехмерное ориентированное евклидово пространство. Рассмотрим его как алгебру относительно операции векторного произведения. Так как

$$\left[\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j\right] = \sum_{i,j,k} \varphi^k_{ij} v^i w^j e_k,$$

то

$$[v, w]^k = \sum_{i,j} \varphi^k_{ij} v^i w^j.$$

Если у φ опустить его единственный верхний индекс, то получится тензор, отвечающий смешанному произведению. Действительно,

$$\sum_{i,j,k,l} g_{il} \varphi^l_{jk} u^i v^j w^k = (u, [v, w]) = (u, v, w).$$

Обратно, задание трилинейной формы $V \times V \times V \to \mathbb{R}$ эквивалентно заданию билинейного отображения $V \times V \to V^*$, которое после взятия композиции с операцией подъема индекса $V^* \to V$ определяет билинейное умножение $V \times V \to V$. Применение этой конструкции к смешанному произведению дает векторное произведение.

Пусть ψ — тензор, задающий смешанное произведение (в координатах $\psi_{ijk} := \sum_l g_{il} \varphi^l_{jk}$). В правом ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ его координаты суть

$$\psi_{ijk} = (e_i, e_j, e_k) = \varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } (ijk) \text{ четная;} \\ -1, & \text{если перестановка } (ijk) \text{ нечетная;} \\ 0, & \text{если среди индексов } ijk \text{ есть совпадающие.} \end{cases}$$

Трехмерный массив ε_{ijk} называется *символом Леви-Чивиты.*

Посчитаем координаты ψ в новом базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, связанным с исходным $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицей перехода $C = (c^i_j)$. Имеем

$$\psi'_{lmn} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} c^i_l c^j_m c^k_n = \begin{cases} \det C, & \text{если перестановка } (lmn) \text{ четная;} \\ -\det C, & \text{если перестановка } (lmn) \text{ нечетная;} \\ 0, & \text{если среди индексов } lmn \text{ есть совпадающие.} \end{cases}$$

То есть $\psi'_{ijk} = (\det C)\, \varepsilon_{ijk}$. Недостаток данной записи в том, что матрица перехода зависит не только от нового, но и от старого базиса. Однако заметим, что если исходный базис был ортонормированным, то матрица Грама G' нового базиса есть $C^T C$, то есть $|\det C| = \sqrt{\det G'}$. Знак же $\det C$ определяется так: если исходный базис был правым, то он “+”, если новый базис также является правым и

“$-$” в противном случае. В итоге мы получаем равенство $\psi'_{ijk} = \mathrm{or}(e')\sqrt{\det G'}\varepsilon_{ijk}$, где $\mathrm{or}(e')$ — число, определяемое базисом e' и равное 1, если он правый и -1 в противном случае.

Мы получили, что сопоставление произвольному базису e трехмерного ориентированного евклидова пространства набора $\mathrm{or}(e)\sqrt{\det G(e)}\varepsilon_{ijk}$ $(i, j, k \in \{1, 2, 3\})$ определяет тензор типа $(0, 3)$, значение которого на упорядоченной тройке векторов из V равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на этой тройке. Данный тензор называется *формой объема*. Это — элемент одномерного пространства $\mathbf{T}_3^-(V)$. Его определение очевидным образом обобщается с трехмерного пространства на случай ориентированного евклидова пространства произвольной размерности n.

Задача 7.2. *В случае четырехмерного ориентированного евклидова пространства V определить и изучить аналог векторного произведения, являющийся трилинейным умножением $V \times V \times V \to V$.*

Замечание 7.3. В связи с предыдущей задачей отметим, что нетривиальное билинейное умножение $V \times V \to V$, аналогичное векторному произведению, существует только в 7-мерном евклидовом пространстве V [11].

В заключение докажем некоторые тождества с символом Леви-Чивиты, полезные в приложениях.

Задача 7.4. *Доказать формулы:*

1) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix}$;

2) $\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$;

3) $\sum_{k,j} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rjk} = 2\delta_{ir}$;

4) $\sum_{k,j,i} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

Решение. 1) Докажем, что для любых векторов u, v, w, x, y, z трехмерного ориентированного евклидова пространства V выполнено тождество

$$(u, v, w)(x, y, z) = \begin{vmatrix} (u, x) & (u, y) & (u, z) \\ (v, x) & (v, y) & (v, z) \\ (w, x) & (w, y) & (w, z) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Для этого заметим, что слева и справа стоят полилинейные функции $V^{\times 6} \to \mathbb{R}$, кососимметричные по $1, 2, 3$ и $4, 5$ и 6 аргументам. Из полилинейности следует, что это тождество достаточно проверить на наборах векторов, когда u, v, w, x, y, z пробегают элементы некоторого ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ в V, а из кососимметричности — что его достаточно проверить на наборе $u = x = e_1$, $v = y = e_2$, $w = z = e_3$, после чего в его справедливости легко убедиться. Подставляя теперь в (10) $u = e_i, v = e_j, w = e_k, x = e_r, y = e_s, z = e_t$, получаем 1).

Вот другой способ доказательства тождества 1). Имеем

$$\begin{vmatrix} g_{ir} & g_{is} & g_{it} \\ g_{jr} & g_{js} & g_{jt} \\ g_{kr} & g_{ks} & g_{kt} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} g_{1r} & g_{1s} & g_{1t} \\ g_{2r} & g_{2s} & g_{2t} \\ g_{3r} & g_{3s} & g_{3t} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst}\det G.$$

Осталось заметить, что это — просто инвариантная (верная не только в ортонормированных базисах) форма записи 1).

Докажем пункт 2). Для упрощения записи будем опускать знак суммы по k. Имеем

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{ik} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jk} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{kr} \begin{vmatrix} \delta_{is} & \delta_{ik} \\ \delta_{js} & \delta_{jk} \end{vmatrix} - \delta_{ks} \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{ik} \\ \delta_{jr} & \delta_{jk} \end{vmatrix} + \delta_{kk} \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{is} & \delta_{ir} \\ \delta_{js} & \delta_{jr} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} \end{vmatrix}$$

Используя 2), докажем 3):

$$\sum_j (\delta_{ir}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jr}) = 3\delta_{ir} - \delta_{ir} = 2\delta_{ir}.$$

Пункт 4) очевиден. ■

Замечание 7.5. Заметим, что тождество 2) из предыдущей задачи эквивалентно следующему тождеству векторной алгебры:

$$([u,v],[x,y]) = \begin{vmatrix} (u,x) & (u,y) \\ (v,x) & (v,y) \end{vmatrix},$$

из которого вытекает известная формула “бац минус цаб”:

$$([u,v],[x,y]) = (x,y,[u,v]) = (x,[y,[u,v]]) = ((v,y)u - (u,y)v, x).$$

Замечание 7.6. Легко видеть, что в левых частях тождеств 1) — 4) из предыдущей задачи стоят изотропные тензоры рангов $6, 4, 2$ и 0, причем суммирование отвечает свертке (ср. Замечание 7.1). Это, например, позволяет решить пункт 3) почти без вычислений, если воспользоваться описанием изотропных тензоров, данным в Задаче 4.7. Действительно, из нее мы знаем, что любой изотропный тензор типа $(0,2)$ имеет вид $\lambda\,\delta_{ir}$, остается только определить константу λ. Для этого заметим, что пункт 4) очевиден непосредственно: $\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}^2 = 3! = 6$, тогда сворачивая $\lambda\,\delta_{ir}$ по i и r, получаем $3\lambda = 6$, откуда $\lambda = 2$.

Список литературы

[1] Алания Л. А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /под редакцией Ю.М. Смирнова / Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Логос, 2005.—376 с.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики: учебное пособие. Изд. 5-е, стереотипное.— М.: Эдиториал УРСС, 2003.—416 с.

[3] Арутюнов А. А., Ершов А. В. Дополнительные задачи по линейной алгебре. — М.: МФТИ, 2017.—210 с.

[4] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов. — 12-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2009. — 312 с.

[5] Беклемишев Д. В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2014 — 192 с.

[6] Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебн. пособие / под ред. Д. В. Беклемишева 2-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 2012.—496 с.

[7] Винберг Э. Б. Курс алгебры. — 2-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2013.—592 с.

[8] Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии.— М.: МЦНМО, 2014. — 152 с.

[9] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009.—368 с.

[10] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.—320 с.

[11] Massey W. S. Cross products of vectors in higher dimensional Euclidean spaces. — The American Mathematical Monthly. Mathematical Association of America. 90 (10): 697–701.

[12] Tu L. W. An Introduction to Manifolds. — Springer-Verlag New York, 2011.—XVIII, 410 p.