

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Функциональный анализ и его приложения, 2021-22 уч.г.

(Поток Р. В. Константинова, ФУПМ)

1. Аксиома выбора. Лемма о неподвижном множестве. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальнойности и лемма Цорна.
2. Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело и контрпример Серпинского к теореме Фубини.
3. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерий базы и критерий предбазы топологии.
4. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, связь между ними. Аксиома счётности.
5. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств, связь между ними. Критерий топологической непрерывности отображения.
6. Счётно компактные и секвенциально компактные подмножества топологического пространства, связь между ними.
7. Компактные подмножества топологического пространства. Теорема Александра о предбазе.
8. Хаусдорфово топологическое пространство. Топологическая замкнутость компактного подмножества хаусдорфова топологического пространства.
9. Декартово произведение топологических пространств, топология Тихонова. Теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.
10. Топологические векторные пространства. Замкнутость локально компактного подпространства и локальная компактность конечномерного подпространства топологического векторного пространства.
11. Факторпространство и фактортопология. Теорема о замкнутости суммы замкнутого и конечномерного подпространств топологического векторного пространства.
12. Метрические пространства и метрическая топология. Теорема Бэра о категории.

13. Вполне ограниченные подмножества метрического пространства. Критерий Фреше компактности подмножества метрического пространства.
14. Эквивалентные нормы в линейном пространстве. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве.
15. Факторпространство замкнутого подпространства линейного нормированного пространства, факторнорма. Полнота факторпространства замкнутого подпространства банахова пространства.
16. Гильбертово пространство. Теоремы Рисса о проекции и об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.
17. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
18. Линейное нормированное пространство $C(K)$ для компактного метрического пространства (K, ρ) , его полнота. Критерий Арцела—Асколи вполне ограниченности подмножества пространства $C(K)$.
19. Критерий Рисса—Колмогорова вполне ограниченности подмножества пространства $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^m)$ для $1 \leq p < +\infty$.
20. Равномерная операторная топология τ_u в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах X и Y . Теорема о полноте пространства $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_u)$.
21. Сильная операторная топология τ_s в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах X и Y . Теорема Банаха—Штейнгауза и теорема о полноте пространства $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_s)$.
22. Теоремы Банаха об открытом отображении и об обратном операторе.
23. Теорема Банаха о замкнутом графике. Теорема Хеллингера—Теплица о непрерывности симметричного на гильбертовом пространстве линейного оператора.
24. Компактные операторы в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Замкнутость подпространства компактных операторов $\mathcal{K}(X, Y)$ в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ с равномерной операторной топологией.
25. Теорема о приближении компактного оператора в пространстве $\mathcal{L}(X, H)$ с равномерной операторной топологией конечномерным оператором для гильбертова пространства H .

26. Теорема Хана—Банаха и её следствия в линейном нормированном пространстве.
27. Теорема об отделимости в локально выпуклом топологическом векторном пространстве и её следствия. Пример бесконечномерного топологического векторного пространства с тривиальным сопряжённым.
28. Слабая* топология в сопряжённом пространстве к топологическому векторному пространству. Теорема о представлении слабо* непрерывного линейного функционала.
29. Теорема Банаха—Алаоглу о слабой* компактности полярной окрестности нуля топологического векторного пространства.
30. Критерий метризуемости слабой* топологии в сопряжённом пространстве локально выпуклого топологического пространства. Неметризуемость слабой* топологии в сопряжённом пространстве бесконечномерного банахова пространства.
31. Теорема о метризуемости слабой* топологии на шаре в сопряжённом пространстве к линейному нормированному пространству.
32. Слабая топология в локально выпуклом топологическом векторном пространстве. Теорема Мазура. Слабое замыкание единичной сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
33. Неметризуемость слабой топологии в бесконечномерном линейном нормированном пространстве. Теорема о метризуемости слабой топологии на шаре линейного нормированного пространства.
34. Теорема Эберлейна—Шмульяна о слабой секвенциальной компактности слабого компакта в нормированном пространстве.
35. Слабая компактность замкнутого шара в рефлексивном пространстве. Существование проекции точки на замкнутое подпространство рефлексивного пространства.
36. Теорема Рисса—Фреше о представлении сопряжённого гильбертова пространства. Рефлексивность гильбертова пространства.
37. Оператор, сопряжённый к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Теорема о равенстве норм операторов A и A^* . Равенства ${}^\perp(\text{Ker } A^*)$ сильному замыканию $\text{Im } A$ и $(\text{Ker } A)^\perp$ слабому* замыканию $\text{Im } A^*$.
38. Эквивалентность замкнутости $\text{Im } A$ и $\text{Im } A^*$ для оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, где X и Y банаховы пространства. Равенство $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A^*$ при условии замкнутости $\text{Im } A$.

39. Теорема Фредгольма о конечномерности ядра $\text{Ker } A_\lambda$ и замкнутости множества значений $\text{Im } A_\lambda$ для компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ и нетривиального числа λ в банаховом пространстве X . Критерий разрешимости уравнения $A_\lambda x = y$ для $y \in X$.
40. Теорема Фредгольма об эквивалентности компактности оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и компактности его сопряжённого оператора $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.
41. Теорема о равенстве размерностей ядер $\text{Ker } A_\lambda$ и $\text{Ker } A_\lambda^*$ для компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ и нетривиального числа λ в банаховом пространстве X . Альтернатива Фредгольма.
42. Теорема об эквивалентности непрерывной обратимости оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и непрерывной обратимости его сопряжённого оператора $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ для банахова пространства X и нормированного пространства Y .
43. Пространство $\mathcal{L}(X)$ для банахова пространства X как банахова алгебра. Открытость резольвентного множества, непустота и компактность спектра элемента банаховой алгебры.
44. Теорема о спектральном радиусе элемента банаховой алгебры. Критерий равенства спектрального радиуса норме элемента банаховой алгебры.
45. Теорема о спектре компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ в банаховом пространстве X .
46. Теорема о спектре самосопряжённого оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ в гильбертовом пространстве H .
47. Комплексные гомоморфизмы и спектр элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда о спектре элемента коммутативной банаховой алгебры.
48. Теорема Гельфанда—Наймарка для коммутативной подалгебры банаховой алгебры $\mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово пространство.
49. Спектральная теорема для нормального оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ в гильбертовом пространстве H .
50. Теорема о собственных значениях нормального оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ в гильбертовом пространстве H .