ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Уравнения математической физики, 2021-22 уч.г.

(Поток Р. В. Константинова)

1. Сопряжённый оператор для линейного оператора в гильбертовом пространстве, его область определения. Самосопряжённость операторов координаты и импульса в пространстве $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

2. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого. Замкнутость сопряжённого оператора.

3. Теорема об операторе, сопряжённом к обратному, для плотно определённого линейного оператора с тривиальным ядром.

4. Критерий замыкаемости плотно определённого линейного оператора в гильбертовом пространстве. Замыкаемость плотно определённого симметричного оператора. Пример незамыкаемого плотно определённого оператора.

5. Самосопряжённый линейный оператор в гильбертовом пространстве, его плотная определённость, замкнутость и симметричность. Пример несамосопряжённого замкнутого плотно определённого симметричного оператора.

6. Спектральное разложение самосопряжённого линейного оператора в гильбертовом пространстве, обладающего ортогональным базисом из своих собственных функций. Функциональное исчисление таких операторов.

7. Критерий самосопряжённости замыкания плотно определённого симметричного оператора. Самосопряжённость в существенном симметричного оператора, обладающего ортогональным базисом из собственных функций.

8. Начально-краевая задача для уравнения Шрёдингера в гильбертовом пространстве с самосопряжённым оператором, обладающим ортогональным базисом из собственных функций, метод Фурье её решения. Оператор эволюции.

9. Формулы Грина для оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{G}) \to \mathbb{L}_2(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^m$ ограниченная область с кусочно-гладкой границей, замыкаемость этого оператора.

10. Самосопряжённость в существенном оператора Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^m$ ограниченная область с кусочно-гладкой границей, а его область определения $D(\Delta) = \left\{ u \in C^2(\overline{G}) :\ u|_{\partial G} = 0 \right\}$.

11. Неравенство Фридрихса для произвольной функции $u \in C^1(\overline{G})$ и ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей.

12. Существование непрерывного обратного у замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^m$ ограниченная область с кусочно-гладкой границей, а $D(\Delta) = \left\{ u \in C^2(\overline{G}) : \ u|_{\partial G} = 0 \right\}$. Самосопряжённость обратного оператора.

13. Задача Дирихле для уравнения Пуассона $\overline{\Delta} u = f$ в $\mathbb{L}_2(G)$ для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей, теорема единственности решения этой задачи.

14. Задача Неймана для уравнения Пуассона $\overline{\Delta} u = f$ в $\mathbb{L}_2(G)$ для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей, теорема о равенстве двух её решений с точностью до константы.

15. Задача Дирихле в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ для уравнения Лапласа $\overline{\Delta} u = 0$ в $\mathbb{L}_2(K)$, существование и единственность её решения.

16. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$, сферические функции. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(S)$ из сферических функций.

17. Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для уравнения Лапласа $\overline{\Delta} u = 0$ в $\mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность её решения.

18. Спектр линейного оператора в гильбертовом пространстве. Вещественность спектра самосопряжённого оператора. Критерий принадлежности вещественного числа спектру самосопряжённого оператора.

19. Теорема о спектре плотно определённого симметричного оператора в гильбертовом пространстве. Самосопряжённость плотно определённого симметричного оператора с вещественным спектром.

20. Компактные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема о приближении компактного оператора непрерывным конечномерным оператором. Теорема Фредгольма о компактности оператора, сопряжённого к компактному оператору.

21. Теорема Фредгольма о равенстве $(\mathrm{Ker}(A_\lambda)^*)^\perp$ и $\mathrm{Im}(A_\lambda)$ для компактного оператора A в гильбертовом пространстве и нетривиального числа λ.

22. Теорема Фредгольма о равенстве размерностей $\mathrm{Ker}(A_\lambda)$ и $\mathrm{Ker}(A_\lambda)^*$ для компактного оператора A в гильбертовом пространстве и нетривиального числа λ. Альтернатива Фредгольма.

23. Теорема Фредгольма о спектре компактного оператора в гильбертовом пространстве.

24. Теорема Гильберта–Шмидта для компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве. Вычисление резольвенты компактного самосопряжённого оператора.

25. Существование в $\mathbb{L}_2(G)$ ортогонального базиса из собственных функций замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^m$ ограниченная область с кусочно-гладкой границей, а $D(\Delta) = \left\{ u \in C^2(\overline{G}) : \ u|_{\partial G} = 0 \right\}$, его спектральное разложение и резольвента.

26. Интегральные операторы в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ для компакта $K \subset \mathbb{R}^m$. Компактность интегрального оператора. Интегральный самосопряжённый оператор в $\mathbb{L}_2(K)$, существование ортогонального базиса в $\mathbb{L}_2(K)$ из его собственных функций, его спектральное разложение и резольвента.

27. Симметричный оператор Штурма–Лиувилля и критерий его обратимости. Самосопряжённость и компактность оператора, обратного к оператору Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова.

28. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в круге при однородных граничных условиях. Функции Бесселя и свойство их ортогональности. Свойства нулей функций Бесселя.

29. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ из собственных функций оператора Лапласа в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ при однородных граничных условиях.

30. Преобразование Кэли разрывного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве как унитарный оператор. Теорема о связи спектров разрывного самосопряжённого оператора и его преобразования Кэли.

31. Непустота спектра разрывного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве, спектральное разложение этого оператора. Критерий того, что число из спектра этого оператора является его собственным значением.

32. Существование и единственность решения эволюционной задачи для уравнения Шрёдингера в гильбертовом пространстве с разрывным самосопряжённым оператором. Оператор эволюции.

33. Определение обобщённого решения по Л. Шварцу линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами на открытом множестве и его корректность по отношению к определению классического решения.

34. Постановка обобщённой задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Корректность решения обобщённой задачи Коши по отношению к решению классической задачи.

35. Пространства Л. Шварца $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$ и $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$. Обобщённое преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ и его свойства.

36. Представление обобщённого преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ как предел действия на «срезанную экспоненту».

37. Свёртка обобщённых функций в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и её свойства, связанные с обобщённым дифференцированием.

38. Носитель обобщённой функции из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Теорема о носителе свёртки обобщённой функции.

39. Теорема о преобразовании Фурье свёртки обобщённых функций в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

40. Достаточное условие существования единственной функции Грина дифференциального оператора в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Функции Грина оператора $\frac{\partial}{\partial t} + (a, \nabla_x) + b$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ для вектора $a \in \mathbb{R}^m$ и числа $b > 0$.

41. Общий вид функции Грина линейного дифференцильного оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ для произвольного комплексного многочлена $P(z)$.

42. Функция Грина оператора Гельмгольца $\Delta_x - k^2$ для $k > 0$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ и её предел в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ при $k \to +0$ как функция Грина оператора Лапласа.

43. Вычисление функции Грина оператора Гельмгольца $\Delta_x + k^2$ для $k > 0$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ методом регуляризации. Неединственность функции Грина этого оператора.

44. Обобщённое решение уравнения Пуассона в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ для источника из $\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3)$. Теорема о вложении решения в $C^2(G)$ для открытого множества $G \subset \mathbb{R}^3$, если дополнительно источник принадлежит $C^1(G)$.

45. Функция Грина оператора Даламбера $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3\right)$ и её единственность.

46. Обобщённое решение волнового уравнения в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3\right)$ с регулярным источником медленного роста, запаздывающий потенциал.

47. Обобщённое решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3\right)$ с регулярными начальными условиями медленного роста, формула Кирхгоффа.

48. Функция Грина оператора Шрёдингера $i\frac{\partial}{\partial t} + a^2\Delta_x$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$. Решение обобщённой задачи Коши для уравнения Шрёдингера в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ с начальным условием из $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

49. Функция Грина оператора $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ и её единственность.

50. Обобщённое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ с регулярным начальным условием медленного роста, формула Пуассона.