ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу "Уравнения математической физики"
3 курс, 6 семестр, 2021-2022 учебный год
(Поток В.И. Зубова)

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью в точке $x \in R^n$. Классификация уравнений.
2. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду на плоскости. Понятие о методе характеристик.
3. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка с частными производными с линейной старшей частью в R^n. Понятие о характеристической поверхности.
4. Понятие о корректности задачи Коши. Пример Адамара некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа).
5. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Существование и единственность классического решения задачи. Корректность постановки задачи.
6. Смешанная задача для колебаний полубесконечной струны с закреплённым концом. Условия согласования начальных и граничного данных. Существование и единственность классического решения задачи.
7. Формула Пуассона-Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в R^3. Принцип Гюйгенса.
8. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в R^3. Общая формула Кирхгофа.
9. Задача Коши для волнового уравнения в R^2. Метод спуска. Формула Пуассона. Диффузия волн в R^2.
10. Теорема о единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (на примере случая R^2). Метод интеграла энергии.
11. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^1. Существование классического решения задачи Коши при непрерывной ограниченной начальной функции и его свойства. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.
12. Применение метода Дюамеля для решения неоднородного уравнения теплопроводности в R^n. Существование классического решения.
13. Принцип максимума для параболического уравнения.
14. Единственность классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе $M_2(T)$.
15. Решение методом Фурье смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.
16. Решение методом Фурье смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закрепленными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.
17. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность решения задачи Дирихле в классе $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие ее разрешимости.
18. Симметричность и положительная определенность оператора "$-\Delta$" при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.
19. Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции

Бесселя первого рода и их свойства. Выражения для собственных функций и собственных значений круглой мембраны с закрепленными краями через функции Бесселя.
20. Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа (случай R^3).
21. Гармонические функции в R^3 и их свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем. Обратная теорема о среднем. Теоремы Лиувилля и об устранимой особой точке (случай R^3, без доказательства).
22. Принцип максимума и минимума для гармонических функций.
23. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции (в классе $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$).
24. Функция Грина задачи Дирихле (случай R^3). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
25. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности (случай R^3). Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в R^3. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана в R^3.
26. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором λK. Представление решения интегрального уравнения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$.
27. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение их к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.
28. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с непрерывными и полярными ядрами. Теоремы Фредгольма в общем случае. Дискретность множества характеристических чисел.
29. Объёмный ньютонов потенциал и его свойства: гладкость, убывание на бесконечности, результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.
30. Потенциал простого слоя, его свойства.
31. Потенциал двойного слоя, его свойства. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через поверхность, на которой задается плотность.
32. Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью. Формула для скачка нормальной производной.
33. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа посредством потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на границе. Существование и единственность решения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.