Экзаменационная программа
по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды» ФИВТ (поток А.Л. Лукашова) весенний семестр 2021–2022 учебного года

1. Метрические, линейные нормированные, евклидовы пространства. Неравенства Коши-Буняковского-Шварца, Минковского. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Основное свойство совокупности открытых множеств, топология.

2. Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши в $\mathbb{R}^n$. Компактность в метрических пространствах и в $\mathbb{R}^n$.

3. Эквивалентные определения непрерывных отображений. Непрерывный образ компактного множества. Пределы по направлениям, по совокупности переменных, повторные пределы. Непрерывность сложной функции многих переменных. Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компактном множестве. Связность и линейная связность. Теорема Больцано-Коши в $\mathbb{R}^n$. *[1] Связность открытых множеств.

4. Дифференцируемость функций многих переменных и наличие частных производных. Дифференцируемость сложной функции. Касательная плоскость. Градиент, его геометрический смысл. Теоремы Шварца и Юнга о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано*.

5. Суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций. Основные свойства интеграла Римана. Интегрируемость сложной функции. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва. Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы интегрирования по частям и замены переменной в интеграле Римана. Первая и вторая* теоремы о среднем для интеграла Римана. Формула Бонне. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. *Основные свойства и два основных случая вычисления интегралов Римана-Стилтьеса.

6. Критерий Коши и признак сравнения для несобственных интегралов Римана. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов. *Признак Харди.

7. Необходимое условие сходимости числовых рядов, критерий сходимости рядов с неотрицательными членами. Признаки сравнения и интегральный (Коши-Маклорена) сходимости числовых рядов. Признаки Даламбера и Коши сходимости числовых рядов. *Регулярность метода Чезаро, сравнение предельных форм признаков Даламбера и Коши. Критерий Коши сходимости числовых рядов, абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов. Перестановки абсолютно сходящихся рядов. *Теорема Римана о перестановках. Произведение абсолютно сходящихся рядов. Произведение рядов по Коши. Теорема Мертенса.

[1] Доказательства в вопросе со звездочкой не обязательны

8. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Предельный переход в равномерно сходящихся функциональных последовательностях и рядах. Признак Дини. Равномерная сходимость и интегрирование. Дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. *Пример ван дер Вардена. Радиус сходимости степенных рядов. Равномерная сходимость степенных рядов, вторая теорема Абеля, ее следствие. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Достаточное условие представления функции рядом Тейлора. Представления основных элементарных функций рядами Маклорена.

9. Кольцо элементарных множеств, их объем и его свойства. Счетная аддитивность объема на кольце элементарных множеств. Свойства внешних мер Лебега и Жордана. Внутренняя мера, ее основное свойство. Критерий измеримости. Алгебра измеримых множеств. Конечная аддитивность мер Лебега и Жордана. σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств. σ-аддитивность меры Лебега. Непрерывность меры Лебега. Структура открытых множеств в $\mathbb{R}^n$. *Структура измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$. Критерий измеримости по Жордану. Канторово множество. Пример неизмеримого по Лебегу множества.

10. Измеримые функции, возможность использования разных неравенств в определении. Арифметические операции с измеримыми функциями, измеримость сложной функции. *Пример неизмеримой композиции измеримой и непрерывной функций. Предельный переход и измеримость. Представление измеримых функций пределами последовательностей ступенчатых. Связь сходимости по мере и сходимости почти всюду. Теоремы Рисса, Егорова* и Лузина*. Структура открытых множеств в $\mathbb{R}$.

11. Вычисление площадей. Объем тела вращения. *Сапог Шварца. Площадь поверхности тела вращения.

12. Теорема о неявной функции, определяемой одним уравнением. Теорема о неявных функциях, определяемых системой уравнений. Локальная обратимость отображений. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума. Необходимое условие условного экстремума. Достаточное условие условного экстремума.

13. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. Сильная производная, ее единственность. Производная композиции отображений. Производные высших порядков отображений. *Пример О.В. Бесова.

14. Образ куба меньшей размерности. Диффеоморфный образ измеримого по Лебегу множества.