

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Алгебра и геометрия»

1 курс, 2 семестр

(Поток И. И. Богданова)

1. Кольцо многочленов над полем. Значение многочлена. Деление с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида, линейное выражение НОД. Неприводимые многочлены. Основная теорема арифметики для многочленов над полем.
2. Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни.
3. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
4. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
5. Приведение матрицы преобразования к треугольному виду. Теорема Гамильтона–Кэли (в случае, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители).
6. Аннулирующие многочлены преобразования. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств. Жорданова нормальная форма. Существование жордановой нормальной формы в случае единственного собственного значения и в общем случае. Единственность жордановой нормальной формы. Метод её нахождения без поиска базиса. Минимальный многочлен линейного преобразования, его свойства, связь с жордановой нормальной формой.
7. Линейные рекурренты. Общий вид линейной рекурренты над произвольным полем (в случае, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).
8. Билинейные формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса.
9. Симметричные и кососимметричные билинейные формы, их матрицы. Ядро формы, ортогональное дополнение подпространства (относительно формы), их свойства.
10. Квадратичные формы, их связь с симметричными билинейными формами. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Индексы инерции квадратичной формы. Закон инерции. Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду. Критерий Сильвестра.
11. Приведение кососимметричной билинейной формы к каноническому виду.
12. Полуторалинейные формы в комплексном пространстве. Эрмитовы полуторалинейные и квадратичные формы, связь между ними. Приведение к каноническому виду. Закон инерции и критерий Сильвестра для эрмитовых квадратичных форм.
13. Евклидово и эрмитово пространства. Выражение скалярного произведения в координатах. Свойства матрицы Грама. Неравенство Коши–Буняковского, неравенство треугольника.
14. Ортонормированные базисы и ортогональные (унитарные) матрицы. Существование ортонормированных базисов. Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряжённого к нему.
15. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Объём параллелепипеда.
16. Связь билинейных (полуторалинейных) форм и линейных преобразований в евклидовом (эрмитовом) пространстве. Преобразование, сопряжённое данному. Его существование и единственность, его свойства. Теорема Фредгольма.
17. Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного преобразования.

18. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Инвариантные подпространства малой размерности для преобразования вещественного пространства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразований. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
19. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.
20. Тензоры как полилинейные отображения. Тензорное произведение тензоров. Координатная запись тензора, изменение координат при замене базиса.