Numéro d'ordre : 17-1998 **Université de Limoges**

THÈSE

de Doctorat de l'Université de Limoges

Spécialité Mathématiques Appliquées
Théorie des Nombres

présentée par

PIERRE DUSART

Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers

Directeur de thèse :
GUY ROBIN

Soutenue le 26 mai 1998 devant le jury composé de :

Président	D. DUVAL	Université de Limoges
Rapporteur	F. DRESS	Université de Bordeaux-I
Rapporteur	J.-L. NICOLAS	Université de Lyon-I
Examinateur	O. RAMARÉ	Université de Lille-I
Examinateur	G. ROBIN	Université de Limoges
Examinateur	H. SMATI	Université de Limoges

Je dédie cette thèse à mes parents, à ma soeur et à tous ceux qui auront le courage de lire ce document.

Remerciements

Une thèse est l'achèvement de plusieurs années de travaux. Je tiens à remercier les membres du jury, D. Duval, F. Dress, J-L. Nicolas, O. Ramaré, H. Smati, d'avoir médité sur mon ouvrage et d'avoir honoré la soutenance de leur présence.

Pendant toutes ces années, Guy Robin m'a guidé dans mes recherches en me signalant les points intéressants et les voies difficiles si d'aventure je m'y engageais. Son collègue et compère, Jean-Pierre Massias m'a fait bénéficier de son expérience informatique. Pour les questions concernant `Maple`, Marc Rybowicz est imbattable. Il m'a permis d'écrire mes programmes avec la rigueur que je voulais. Un grand merci à Joël Marchand qui a accompagné mes premiers pas sous `Unix`. N'oublions pas la disponibilité de François Arnault pour toutes les questions d'ordre mathématique ou informatique.

Je garde en excellent souvenir le contact des autres membres du département de Mathématiques au travers des enseignements dispensés.

Tout cela n'aurait pu être rendu possible sans le support logistique des secrétaires et bibliothécaires du département : Danièle, Martine, Nadine, Véronique et Yolande.

Je souhaite bon courage ou bonne chance aux thésards qui ont partagé mon quotidien : Aude, Bruno, Cathy, Christophe, Delphine, Gérard, Jean-François, Maria, Nathalie, Nicolas, Stéphane.

Sommaire

Introduction

> "The elementary theory of numbers should be one of the very best subjects for early mathematical instruction. It demands very little previous knowledge, its subject matter is tangible and familiar; the processes of reasoning which it employs are simple, general and few; and it is unique among the mathematical sciences in its appeal to natural human curiosity." G. H. Hardy[a]
>
> [a]Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929), p. 818

La théorie des nombres est un domaine des mathématiques étudié depuis longtemps, en fait depuis que les nombres eux-mêmes "existent". Lorsque l'Homme a commencé à utiliser les nombres, il a créé la théorie des nombres. Cette branche des mathématiques qui étudiait les propriétés des nombres entiers s'est beaucoup développée. Il est parfois nécessaire de faire appel à des notions plus compliquées pour démontrer des résultats d'énoncés simples. L'une des notions les plus connues dans l'ensemble des nombres entiers est la propriété de primalité. Cette propriété peut s'étudier à partir du moment où la notion de multiple est acquise : un entier est premier s'il n'est multiple que du nombre 1 et de lui-même. Euclide est le premier à avoir démontré qu'il existait une infinité de nombres premiers. Sa démonstration reste l'une des plus belles des mathématiques. Le travail effectué dans cette thèse a pour base les nombres premiers. Ces nombres premiers ont été et sont toujours très étudiés : savoir si un nombre est premier ou factoriser en produit de nombres premiers, trouver de très grands nombres premiers, étudier la répartition des nombres premiers sont toujours des sujets d'actualité.

Nous désignerons par p un nombre premier. Présentons maintenant les fonctions arithmétiques sur lesquelles nous allons travailler. Ce sont des fonctions classiques en théorie des nombres. Définissons d'abord les fonctions de Chebyshev :

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p,\nu \\ p^\nu \leqslant x}} \ln p.$$

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p.$$

Des résultats théoriques montrent que

$$\psi(x) \sim \theta(x) \sim x,$$

la notation $f(x) \sim g(x)$ signifiant que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. En reprenant les travaux de Rosser et Schoenfeld, nous donnerons des encadrements de ces fonctions et nous montrerons principalement que

$$|\psi(x) - x| < 10^{-6}x \quad \text{pour } x \geqslant \exp(50)$$

et que

$$|\theta(x) - x| \leqslant 3,965\frac{x}{\ln^2 x} \qquad \text{pour } x > 1.$$

Cette étude de ψ et θ permet de mieux connaître la répartition des nombres premiers. Cela nous conduira à une minoration de p_k, le k-ième nombre premier

$$p_k \geqslant k(\ln k + \ln\ln k - 1) \quad \text{pour } k \geqslant 2.$$

A la fin du XVIII^e siècle, une question s'était posée et se voulait plus précise que celle résolue par Euclide : on sait qu'il existe une infinité de nombres premiers mais combien y en a-t-il parmi les premiers entiers ? Introduisons la fonction $\pi(x)$ qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x :

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1.$$

En examinant des tables de nombres premiers, Legendre et Gauss conjecturent qu'ils y en a à peu près $x/\ln x$. L'étude a été reprise par Chebyshev qui montre en 1852 que

$$0,92\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1,11\frac{x}{\ln x} \quad (x \geqslant 30).$$

C'est un premier pas. Ce sont Hadamard et De La Vallée Poussin qui démontrent indépendamment en 1896 le fameux Théorème des Nombres Premiers :

$$\pi(x) \sim x/\ln x.$$

Ce résultat est équivalent aux résultats énoncés précédemment $\psi(x) \sim x$ et $\theta(x) \sim x$. Par des considérations analytiques, De La Vallée Poussin montre qu'il existe même une approximation de la fonction π appelée fonction logarithme intégral et notée

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right),$$

avec $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$.

Par intégration par parties, le développement asymptotique de $\mathrm{Li}(x)$ peut être facilement explicité :
$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x} + O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right)\right).$$
Nous montrerons que

$$\pi(x) \geqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \text{ pour } x \geqslant 599,$$

et que
$$\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2,51}{\ln^2 x}\right) \text{ pour } x \geqslant 355991.$$

CHEBYSHEV a utilisé ses encadrements sur $\pi(x)$ pour montrer une proposition appelée Postulat de Bertrand : pour x supérieur à 1, chaque intervalle $]x, 2x]$ contient au moins un nombre premier. Il a vérifié à la main que la proposition est vraie pour les x petits, puis pour les $x \geqslant 30$ puisque

$$\pi(2x) > (0,92)\frac{2x}{\ln 2x} > \frac{1,11x}{\ln x} > \pi(x).$$

Mais une question se pose : a-t-on

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y) \quad \text{ pour } x, y \geqslant 2 \text{ ?}$$

C'est-à-dire, chaque intervalle $]y, y+x]$ contient-il moins de nombres premiers que l'intervalle initial $]0, x]$? C'est une conjecture proposée par HARDY et LITTLEWOOD en 1923. C'est vraisemblable puisque le théorème des nombres premiers montre qu'elle est satisfaite pour la plupart des y. Notre travail prouvera qu'elle est valide presque partout et dans un domaine que nous expliciterons. Aucun contre-exemple numérique n'a été trouvé mais nous reprendrons l'article de HENSLEY et RICHARD montrant qu'elle est incompatible avec une autre conjecture bien connue, celle qui généralise la conjecture des nombres premiers jumeaux. Cette dernière bien connue exprime qu'il y a une infinité de nombres premiers p tels que p et $p+2$ soient deux nombres premiers.

Nous nous intéresserons ensuite aux différentes fonctions arithmétiques présentées précédemment mais cette fois dans les progressions arithmétiques. On ne regarde maintenant que les premiers vérifiant la condition suivante :
soient k, l deux entiers $(1 \leqslant l < k)$ premiers entre eux ; on ne comptera plus que les premiers congrus à l modulo k. On note alors $p \equiv l \pmod k$ un nombre premier vérifiant cette condition. Il s'ensuit que

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{p,\nu \\ p^\nu \leqslant x,\ p \equiv l \pmod k}} \ln p,$$

$$\theta(x;k,l) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l \pmod k}} \ln p,$$
$$\pi(x;k,l) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l \pmod k}} 1.$$

Nous savons comment ces fonctions se comportent à l'infini puisque

$$\theta(x;k,l) \sim x/\varphi(k)$$

et

$$\pi(x;k,l) \sim \frac{x}{\varphi(k)\ln x}.$$

Les estimations sur les deux premières fonctions seront présentés sous forme d'encadrements valables pour de grandes valeurs de x. Nous démontrerons que

$$|\theta(x;k,l) - x/\varphi(k)| < x\varepsilon(x)$$

où φ est la fonction d'Euler ($\varphi(k) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant k\\ (n,k)=1}} 1$) et où ε est une fonction qui décroît plus rapidement que l'inverse de toute puissance du logarithme. Ce travail est complémentaire de celui de Ramaré et Rumely qui ont donné des encadrements pour les petites et moyennes valeurs de x. Nous montrerons en particulier que, pour $l = 1$ ou 2 et $x > 1$,

$$|\theta(x;3,l) - x/2| < 0,262\frac{x}{\ln x}$$

et, pour $x \geqslant 151$,

$$\pi(x;3,l) > \frac{x}{2\ln x}.$$

Dans un dernier chapitre, nous donnerons un algorithme combinatoire pour le calcul exact de $\pi(x;k,l)$. La fonction $\pi(x;k,l)$ sera étudiée comme l'ont fait, pour $\pi(x)$, Legendre en 1830 puis Meissel et Lehmer par la suite. Remarquons que les résultats énoncés précédemment ne donnent qu'un encadrement de la valeur $\pi(x)$. Pour trouver exactement cette valeur, il suffit d'ôter (on dit "cribler") les nombres composés de l'intervalle $[1,x]$. Cela pourra être fait selon un algorithme simple appelé crible d'Eratosthène. En comptant le nombre d'entiers non criblés (ce sont les nombres premiers), on obtient la valeur de $\pi(x)$. Pour connaître la valeur de $\pi(x;k,l)$, il suffira de compter dans l'ensemble des nombres non criblés précédents ceux dont le reste de la division entière par k est égal à l.

L'algorithme précédent permet de connaître tous les premiers jusqu'à x. Comme nous avons besoin de savoir uniquement la valeur de $\pi(x)$ sans énumérer tous les premiers, d'autres algorithmes appelés cribles combinatoires sont plus efficaces. Ils permettent de calculer $\pi(x)$ en ne connaissant que les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{x}$. La plus grande valeur actuellement calculée est $\pi(10^{20})$.

Les programmes d'application, écrit dans le langage `Maple`, seront listés en annexe.

Bonne lecture !

Chapitre 1

Estimations de $\psi(x)$, $\theta(x)$, $\pi(x)$, p_k

Résumé

Une meilleure connaissance du positionnement des zéros de la fonction ζ de Riemann permet de meilleures estimations effectives des fonctions $\psi(x), \theta(x), \pi(x)$ et des p_k.

1.1 Introduction

Nous noterons par $\ln_2 x$ l'itéré du logarithme, c'est-à-dire $\ln \ln x$.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux fonctions de CHEBYSHEV $\psi(x)$ et $\theta(x)$ définies par

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p, \qquad \psi(x) = \sum_{\substack{p,\nu \\ p^\nu \leqslant x}} \ln p$$

où les sommes sont respectivement sur tous les p premiers et sur les puissances de premiers p^ν. Le théorème des nombres premiers équivaut à dire (Théorème 1.5 de [4]) que

$$\psi(x) = x + o(x), \quad x \to +\infty.$$

De manière analogue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 = x_0(\varepsilon)$ tel que

$$|\psi(x) - x| < \varepsilon\, x \qquad \text{pour } x \geqslant x_0.$$

Le but de cet article est de donner des estimations explicites de $\theta(x)$ et $\psi(x)$. Cet article s'appuie sur des résultats déjà connus : les plus importants travaux sur les résultats effectifs ont été fournis par ROSSER et SCHOENFELD (cf. [13], [14], [16]), puis complétés par ROBIN [9] - MASSIAS [6] et PEREIRA [7].

Les estimations de $\psi(x)$ dans [14] sont basées sur la vérification de l'hypothèse de RIEMANN pour les 3 502 500 premiers zéros de $\zeta(s)$ dans la bande critique et sur la connaissance d'une région sans zéros de $\zeta(s)$ de même type que celle trouvée originellement par DE LA VALLÉE POUSSIN. Une meilleure connaissance sur les zéros permet une meilleure estimation de $\psi(x)$. BRENT *et al* ont montré que les 1 500 000 000 premiers zéros sont sur la droite critique. Cette vérification induit un gain notable sur les valeurs "moyennes" de x (c'est-à-dire jusqu'à $\exp(4000)$). Nous en déduirons de nouveaux encadrements pour $\psi(x)$ et pour $\theta(x)$. Une application particulière sera faite sur p_k, le k-ième nombre premier ($p_1 = 2$), (ainsi que sur $\theta(p_k)$) dont le développement asymptotique est connu. CESARO [2] puis CIPOLLA [3] en donnent l'expression en 1902 :

$$p_k = k \left\{ \ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} - \frac{\ln_2^2 k - 6 \ln_2 k + 11}{2 \ln^2 k} + O\left(\left(\frac{\ln_2 k}{\ln k} \right)^3 \right) \right\}.$$

Un travail plus précis pourra être trouvé dans [10, 15]. Nous estimons aussi la fonction qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x :

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Résultats antérieurs

Présentons une liste (non exhaustive) de résultats déjà démontrés. Pour les encadrements sur θ et ψ, nous citons les majorations ($5.6b^*$) du théorème 7 p. 357 de [16] vraie [1] pour $x > 1,04 \cdot 10^7$,

$$|\psi(x) - x| < 0,0077629x/\ln x \quad \text{et} \quad |\theta(x) - x| < 0,0077629x/\ln x,$$

complétées par le théorème 8 p. 360 de [16] :
si $x > 1$ alors $|\theta(x) - x| < \eta_k \frac{x}{\ln^k x}$ avec $\eta_2 = 8,0720$, $\eta_3 = 10644$ et $\eta_4 = 1,6570 \cdot 10^7$.

En 1975, Rosser et Schoenfeld [14] annonçaient qu'ils réservaient des résultats sur $\pi(x)$ et sur les p_k pour un autre article. Cet article est à notre connaissance jamais paru. Pour les encadrements des p_k et $\theta(p_k)$, Massias et Robin ont prouvé dans leur article [6] de 1996, en notant "+RH" si on suppose que l'hypothèse de Riemann est vérifiée, que

$$\begin{array}{rcll}
\theta(p_k) & \geqslant & k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2{,}1}{\ln k}\right) & \text{pour } k \geqslant 495634, \\
\theta(p_k) & \leqslant & k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k}\right) & \text{pour } k \geqslant 198, \\
p_k & \geqslant & k\left(\ln k + \ln_2 k - 1,002872\right) & \text{pour } k \geqslant 2, \\
p_k & \geqslant & k\left(\ln k + \ln_2 k - 1\right) & \text{pour } k \geqslant 2 + RH, \\
p_k & \leqslant & k\left(\ln k + \ln_2 k - 0,9427\right) & \text{pour } k \geqslant 15985, \\
p_k & \leqslant & k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 1{,}8}{\ln k}\right) & \text{pour } k \geqslant 27076 + RH, \\
p_k & \geqslant & k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + 1,8\frac{\ln_2 k}{\ln k}\right) & \text{pour } k \geqslant 13.
\end{array}$$

Comme l'article de Rosser et Schoenfeld sur les estimations de $\pi(x)$ n'est pas paru, nous reprenons leurs résultats de 1962 parus dans [13] : nous avons (théorème 1 p. 69)

$$\begin{array}{rcll}
\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{2\ln x}\right) & < & \pi(x) & \text{pour } x \geqslant 59, \\
\pi(x) & < & \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{3}{2\ln x}\right) & \text{pour } x > 1,
\end{array}$$

et d'après le théorème 2,

$$\begin{array}{rcll}
\frac{x}{\ln x - 1/2} & < & \pi(x) & \text{pour } x \geqslant 67, \\
\pi(x) & < & \frac{x}{\ln x - 3/2} & \text{pour } x > \exp(3/2).
\end{array}$$

Résultats présentés

Nous allons démontrer les résultats suivants :

$$|\psi(x) - x| \leqslant 0,006409\frac{x}{\ln x} \qquad \text{pour } x \geqslant \exp(22),$$

[1] voir note p.360 de [16]

$$
\begin{aligned}
|\theta(x)-x| &\leqslant 0,006788\frac{x}{\ln x} && \text{pour } x \geqslant 10\ 544\ 111,\\
|\theta(x)-x| &\leqslant 3,965\frac{x}{\ln^2 x} && \text{pour } x > 1,\\
|\theta(x)-x| &\leqslant 515\frac{x}{\ln^3 x} && \text{pour } x > 1,\\
|\theta(x)-x| &\leqslant 1717433\frac{x}{\ln^4 x} && \text{pour } x > 1.
\end{aligned}
$$

Regroupons les résultats pour p_k et $\theta(p_k)$:

$$
\begin{aligned}
\theta(p_k) &\geqslant k\left(\ln k+\ln_2 k-1+\frac{\ln_2 k-2,0553}{\ln k}\right) \text{ pour } k \geqslant \exp(22), && (1.1)\\
\theta(p_k) &\leqslant k\left(\ln k+\ln_2 k-1+\frac{\ln_2 k-2}{\ln k}\right) \text{ pour } k \geqslant 198, && (1.2)\\
p_k &\geqslant k\left(\ln k+\ln_2 k-1\right) \text{ pour } k \geqslant 2, && (1.3)\\
p_k &\leqslant k\left(\ln k+\ln_2 k-0,9484\right) \text{ pour } k \geqslant 39017, && (1.4)\\
p_k &\leqslant k\left(\ln k+\ln_2 k-1+\frac{\ln_2 k-1,8}{\ln k}\right) \text{ pour } k \geqslant 27076, && (1.5)\\
p_k &\geqslant k\left(\ln k+\ln_2 k-1+\frac{\ln_2 k-2,25}{\ln k}\right) \text{ pour } k \geqslant 2. && (1.6)
\end{aligned}
$$

La formule (1.2) a été démontrée par Robin dans [9].

Nous utiliserons ces résultats pour montrer que, pour $x \geqslant 3275$, l'intervalle

$$\left[x, x+x/(2\ln^2 x)\right]$$

contient au moins un nombre premier et que,

$$\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x\geqslant 599}{\leqslant} \pi(x) \underset{x>1}{\leqslant} \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1,2762}{\ln x}\right).$$

Des résultats plus précis sur $\pi(x)$ seront démontrés :

$$
\begin{aligned}
\pi(x) &\geqslant \frac{x}{\ln x-1} \text{ pour } x \geqslant 5393,\\
\pi(x) &\leqslant \frac{x}{\ln x-1,1} \text{ pour } x \geqslant 60184,\\
\pi(x) &\geqslant \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{1,8}{\ln^2 x}\right) \text{ pour } x \geqslant 32299,\\
\pi(x) &\leqslant \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2,51}{\ln^2 x}\right) \text{ pour } x \geqslant 355991.
\end{aligned}
$$

1.2 Méthode de ROSSER & SCHOENFELD

Présentons rapidement la théorie développée par ROSSER & SCHOENFELD. Il s'agit de trouver un encadrement de ψ.

Grâce à la théorie de l'intégration complexe avec un théorème d'inversion et le théorème des résidus, on obtient une relation entre ψ et les zéros de ζ.

Proposition 1.1 (ELLISON **[4] p.172)** *Pour $x > 1$,*

$$\frac{\psi(x^+) + \psi(x^-)}{2} = x - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \lim_{T\to+\infty} \sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

Il faut maintenant estimer $\sum \frac{x^\rho}{\rho}$ où la sommation s'effectue sur les zéros non triviaux de ζ. La présentation de la méthode de ROSSER & SCHOENFELD est basée sur le lemme 8 de leur article [14] de 1975 qui, elle-même, s'inspire largement des résultats de ROSSER [12].

Posons

$$\begin{aligned} g(x) &= \psi(x) - x + \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \\ I_m(x,h) &= \int_0^h \cdots \int_0^h g(x + y_1 + \cdots + y_m)dy_1 \cdots dy_m. \end{aligned}$$

Proposition 1.2 (Théorème 12 de ROSSER **[12])** *Si $0 < \delta < (x-1)/(xm)$ et*

$$\varepsilon_1 = \frac{I_m(x, -\delta x)}{(-x)^{m+1}\delta^m} + \frac{m\delta}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{I_m(x, \delta x)}{x^{m+1}\delta^m} + \frac{m\delta}{2}$$

alors

$$x(1-\varepsilon_1) - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln(1 - 1/x^2) \leqslant \psi(x) \leqslant x(1-\varepsilon_2) - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln(1 - 1/x^2).$$

Nous cherchons à majorer I_m. Pour cela, nous avons besoin de connaître la localisation des zéros de ζ. Nous allons donc utiliser par la suite un domaine sans zéro.

Proposition 1.3 (Théorème 1 de [14]) *Il n'y a aucun zéro de $\zeta(s)$ dans la région*

$$\sigma \geqslant 1 - 1/(R \ln |t/17|), \quad |t| \geqslant 21,$$

où $R = 9,645908801$.

Soient T_1 et T_2 deux réels positifs. Considérons les quatre régions du plan complexe :

- Région R_1 : $\beta \leqslant 1/2,\ 0 < |\gamma| \leqslant T_1$;
- Région R_2 : $\beta \leqslant 1/2,\ T_1 < |\gamma|$;
- Région R_3 : $\beta > 1/2,\ 0 < |\gamma| \leqslant T_2$;
- Région R_4 : $\beta > 1/2,\ T_2 < |\gamma|$.

Exprimons I_m en sommes dépendant des zéros ρ de ζ. Nous utiliserons la forme définie par l'équation (1.7) pour les régions R_1 et R_3 et ensuite la forme définie dans la proposition 1.5 pour R_2 et R_4.

Proposition 1.4 (Théorème 13 de Rosser **[12])**

$$\int_0^h g(x+z)dz = \sum_\rho -\frac{1}{\rho}\int_0^h (x+z)^\rho dz \tag{1.7}$$

Soit m un entier supérieur à 1. Dans les régions R_1 et R_3, intégrons $m-1$ fois la partie sous le signe somme dans (1.7) entre 0 et $h = \delta x$; elle devient :

$$-\frac{x^{\rho+m}}{\rho}\int_0^\delta dy_1 \int_0^\delta dy_2 \cdots \int_0^\delta (1+y_1+y_2+\cdots+y_m)^\rho dy_m,$$

que l'on peut majorer en valeur absolue par

$$\frac{x^{\beta+m}}{|\rho|}\int_0^\delta dy_1 \int_0^\delta dy_2 \cdots \int_0^\delta (1+y_1+y_2+\cdots+y_m)^\rho dy_m,$$

qui est égale à

$$\frac{x^{\beta+m}}{|\rho|}\frac{2+m\delta}{2}\delta^m. \tag{1.8}$$

Pour la minoration, on prend $h = -\delta x$ comme borne d'intégration. Dans ce cas, $|1+y_1+y_2+\cdots+y_m| \leqslant 1$ et (1.8) est aussi pris comme borne majorante.

Dans la région R_1, comme $\beta \leqslant 1/2$, nous avons $x^{\beta+m} \leqslant x^{m+1}/\sqrt{x}$. Dans la région R_3, nous utilisons la région sans zéro de la proposition 1.3. Posons

$$X = \sqrt{\frac{\ln x}{R}}. \tag{1.9}$$

Nous obtenons

$$x^{\beta+m} \leqslant x^{m+1}\exp(-X^2/\ln(\gamma/17)).$$

De plus, si ρ est un zéro de ζ alors $\overline{\rho}$ est aussi un zéro de ζ ; ainsi, dans chaque région

$$\sum_{0<|\gamma|\leqslant T} = 2\sum_{0<\gamma\leqslant T}$$

ou
$$\sum_{|\gamma|>T} = 2\sum_{\gamma>T}.$$

Posons
$$S_1(m,\delta) \;=\; 2\sum_{\beta\leqslant 1/2;\,0<\gamma\leqslant T_1}\frac{2+m\delta}{2|\rho|}, \tag{1.10}$$
$$S_3(m,\delta) \;=\; 2\sum_{\beta>1/2;\,0<\gamma\leqslant T_2}\frac{2+m\delta}{2|\rho|}\exp(-X^2/\ln(\gamma/17)). \tag{1.11}$$

Ainsi $S_1/\sqrt{x}$ et S_3 majorent $\dfrac{|I_m|}{x^{m+1}\delta^m}$ dans les régions R_1 et R_3 respectivement.

Etudions maintenant les régions R_2 et R_4.

Proposition 1.5 (Théorème 14 de ROSSER **[12])**
$$I_m(x,\pm\delta x)=\sum_\rho \frac{x^{\rho+m}}{\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+m+1}\binom{m}{j}(1\pm j\delta)^{\rho+m}.$$

On pose
$$R_m(\delta)=((1+\delta)^{m+1}+1)^m. \tag{1.12}$$
On remarque que
$$|\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+m+1}\binom{m}{j}(1\pm j\delta)^{\rho+m}|\leqslant R_m(\delta).$$

Dans la région R_2, comme $\beta\leqslant 1/2$, nous avons $x^{\beta+m}\leqslant x^{m+1}/\sqrt{x}$. Dans la région R_4, nous utilisons la région sans zéro de la proposition 1.3 pour obtenir, en posant $X=\sqrt{\frac{\ln x}{R}}$,
$$x^{\beta+m}\leqslant x^{m+1}\exp(-X^2/\ln(\gamma/17)).$$

Posons
$$S_2(m,\delta) \;=\; 2\sum_{\beta\leqslant 1/2;\,T_1<\gamma}\frac{R_m(\delta)}{\delta^m|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}\;; \tag{1.13}$$
$$S_4(m,\delta) \;=\; 2\sum_{\beta>1/2;\,T_2<\gamma}\frac{R_m(\delta)\exp(-X^2/\ln(\gamma/17))}{\delta^m|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}. \tag{1.14}$$

En sommant sur les régions R_1, R_2, R_3 et R_4, on obtient
$$\frac{|I_m(x,\pm\delta x)|}{\delta^m x^{m+1}}\leqslant \{S_1(m,\delta)+S_2(m,\delta)\}/\sqrt{x}+S_3(m,\delta)+S_4(m,\delta).$$

En appliquant la proposition 1.2, on obtient le lemme 8 de [14] :

Lemme 1.1 (Lemme 8 de [14]) *Soient T_1 et T_2 deux réels positifs ou nuls. Soit m un entier plus grand que 1. Soient $x > 1$ et $0 < \delta < (x-1)/(xm)$. Soient S_1, S_2, S_3, S_4 définis respectivement par (1.10), (1.13), (1.11) et (1.14). Alors*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}|\psi(x) - \{x - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln(1-x^{-2})\}| \\ &\leqslant \ \{S_1(m,\delta) + S_2(m,\delta)\}/\sqrt{x} + S_3(m,\delta) + S_4(m,\delta) + m\delta/2. \end{aligned}$$

Dans les sommes S_1, S_2, S_3 et S_4, la sommation s'effectue sur les zéros ρ de ζ. Comme $1/|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)| \leqslant \gamma^{-m-1}$ pour $\gamma > 0$, il faut calculer des sommes du type

$$\sum_\rho \phi_m(\gamma) \tag{1.15}$$

avec

$$\phi_m(y) = y^{-m-1}\exp(-X^2/\ln(y/17)). \tag{1.16}$$

On introduit la fonction $N(T)$ qui compte le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de ζ tels que $0 < \gamma \leqslant T$. Il existe une approximation $F(T)$ de $N(T)$ donnée par Rosser ([12] p.223) :

$$F(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} \tag{1.17}$$

ainsi qu'une majoration du reste

$$R(T) = 0,137\ln T + 0,443\ln_2 T + 1,588. \tag{1.18}$$

On majore les sommes de type défini par (1.15) par une intégrale en utilisant le lemme suivant :

Lemme 1.2 (Corollaire du lemme 7 de [14] p.255) *Soit $2\pi < U \leqslant V$, et soit $\Phi(y)$ une fonction positive ou nulle, dérivable pour $U < y < V$. Soit $(W-y)\Phi'(y) \geqslant 0$ pour $U < y < V$ où W n'appartient pas nécessairement à l'intervalle $[U,V]$. Soit Y le point appartenant à l'ensemble $\{U,V,W\}$ qui n'est ni plus grand, ni plus petit que les deux autres. Choisissons $j=0$ ou $j=1$ suivant que $(-1)^j(V-W) \geqslant 0$. Alors*

$$\sum_{U<\gamma\leqslant V} \Phi(\gamma) \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi} + (-1)^j q(Y)\right\} \int_U^V \Phi(y)\ln\frac{y}{2\pi}dy + E_j(U,V),$$

où

$$q(y) = \frac{0,137\ln y + 0,443}{y\ln y\ln(y/2\pi)}$$

et le terme d'erreur $E_j(U,V)$ est donné par

$$\begin{aligned} E_j(U,V) \ = \ & (1+(-1)^j)R(Y)\Phi(Y) + (N(V) - F(V) - (-1)^j R(V))\Phi(V) \\ & -(N(U) - F(U) + R(U))\Phi(U). \end{aligned}$$

Utilisons le lemme précédent pour majorer les termes $S_j(m,\delta)$ en terme d'intégrales pour une fonction Φ convenable. En calculant les primitives associées, les fonctions de Bessel interviennent. Elles sont définies par

$$K_\nu(z,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty t^{\nu-1}\exp\{(-1/2)z(t+1/t)\}dt \qquad \text{pour } z>0, x\geqslant 0, \nu \text{ réel.} \tag{1.19}$$

Remarquons que, pour $m\neq 0$, nous avons d'une part

$$\int_U^V y^{-m-1}\ln\frac{y}{2\pi}dy=\frac{1+m\ln(U/2\pi)}{m^2U^m}-\frac{1+m\ln(V/2\pi)}{m^2V^m}, \tag{1.20}$$

d'autre part

$$\int_U^V y^{-m-1}\exp\{-X^2/\ln(y/17)\}\ln\frac{y}{2\pi}dy= \\ \frac{z^2}{2m^2 17^m}\{K_2(z,U')-K_2(z,V')\}+\frac{z\ln(17/2\pi)}{m17^m}\{K_1(z,U')-K_1(z,V')\}, \tag{1.21}$$

où $z=2X\sqrt{m}$, $U'=(2m/z)\ln(U/17)$, $V'=(2m/z)\ln(V/17)$ en faisant le changement de variable $y=17\exp(zt/2m)$.

Grâce au lemme 1.2, majorons S_1 et S_2 par les intégrales précédentes, pour obtenir

Lemme 1.3 (Lemme 9 de [14]) *Soit $\delta>0$ et m un entier strictement positif. Soit*

$$T_1=\frac{1}{\delta}\left(\frac{2R_m(\delta)}{2+m\delta}\right)^{1/m}. \tag{1.22}$$

Soit

$$\Omega_1=\frac{2+m\delta}{4\pi}\left\{\left(\ln\frac{T_1}{2\pi}+\frac{1}{m}\right)^2+0,038207+\frac{1}{m^2}-\frac{2,82m}{(m+1)T_1}\right\}. \tag{1.23}$$

Si $T_1\geqslant 158,84998$ alors[2]

$$S_1(m,\delta)+S_2(m,\delta)<\Omega_1.$$

Nous connaissons un peu plus de la localisation des zéros de ζ que la région sans zéro donnée par la proposition 1.3. Riemann a émis l'hypothèse que tous les zéros $\rho=\beta+i\gamma$ non triviaux de ζ étaient positionnés sur la droite critique $\beta=1/2$. Nous savons que cette hypothèse est vérifiée au moins sur un segment centré sur l'origine. Soit A tel que les zéros $\rho=\beta+i\gamma$ de la fonction ζ de Riemann dans la bande critique soient tous de partie réelle $\beta=1/2$ pour $0<\gamma\leqslant A$. On choisit A de sorte que $N(A)=F(A)$ (voir (1.17)) pour simplifier les calculs. La valeur utilisée par Rosser et Schoenfeld est $A=1894438,51\cdots$. D'après les travaux de [5], l'hypothèse de Riemann est au moins vérifiée jusqu'à $A=545\,439\,823,215\cdots$, valeur que nous allons choisir pour nos travaux.

[2] un calcul direct de $S=\sum_{0<\gamma\leqslant D}\frac{1}{|\rho|}$ a été effectué pour $D=158,84998$.

Proposition 1.6 (Théorème 4 de [14]) *Soient m entier positif, $b > 1/2$, $0 < \delta < (1-\exp(-b))/m$ et T_1 défini par (1.22) tel que $T_1 \geqslant 158,84998$. Soient A défini précédemment et tel que $N(A) = F(A)$, Ω_1 défini par (1.23) et*

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \frac{(0,159155)R_m(\delta)z}{2m^2 17^m}\left\{zK_2(z,A') + 2m\ln\left(\frac{17}{2\pi}\right)K_1(z,A')\right\}\\ &\quad + R_m(\delta)\{2R(Y)\phi_m(Y) - R(A)\phi_m(A)\},\end{aligned} \qquad (1.24)$$

où $z = 2X\sqrt{m} = 2\sqrt{mb/R}$, $A' = (2m/z)\ln(A/17)$, $Y = \max\{A, 17\exp\sqrt{b/((m+1)R)}\}$ et $R_m(\delta)$ est défini par (1.12), $R(T)$ défini par (1.18) et ϕ_m par (1.16). Alors, pour $x \geqslant \exp(b)$,

$$|\psi(x) - x| < \varepsilon x$$

où $\varepsilon = \Omega_1\exp(-b/2) + \Omega_2\delta^{-m} + m\delta/2 + \exp(-b)\ln(2\pi)$.

Comme nous allons utiliser la proposition 1.6 par la suite, nous allons écrire explicitement la preuve car elle n'apparaît pas dans l'article de Rosser & Schoenfeld ; ils n'en donnent que quelques indications.

Preuve : Prenons $T_2 = 0$, $S_3(m,\delta)$ défini par (1.13) est aussi égal à zéro. Réécrivons S_4 défini par (1.14) à l'aide de ϕ_m défini par (1.16) :

$$S_4(m,\delta) = 2\sum_{\substack{\beta>1/2\\ \gamma>0}}\frac{R_m(\delta)\exp(-X^2\ln(\gamma/17))}{\delta^m|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|} < \frac{R_m(\delta)}{\delta^m}\sum_{\gamma>A}\phi(\gamma)$$

en posant $\phi(y) := \phi_m(y)$ où

$$\phi_m(y) = y^{-m-1}\exp(-X^2/\ln(y/17)).$$

Or, d'après la proposition 1.2 (corollaire du lemme 7 de [14]) avec $\phi(y) := \phi_m(y)$,

$$\sum_{\gamma>A}\phi(\gamma) \leqslant \{\frac{1}{2\pi} + q(y)\}\int_A^\infty \phi(y)\ln\left(\frac{y}{2\pi}\right)dy + E_0$$

où $q(y) = \frac{0,137\ln y + 0,443}{y\ln y\ln\left(\frac{y}{2\pi}\right)}$ et $E_0 = 2R(Y)\phi(Y) - R(A)\phi(A)$ car $N(A) = F(A)$ avec $Y = \max(A, W)$ où W vérifie $(W-y)\phi'(y) \geqslant 0$ pour $y > A$. Calculons la valeur de W.

$$\phi'(y) = \phi_m'(y) = y^{-m-2}\exp(-X^2/\ln(y/17))\left(-(m+1) + \frac{X^2}{\ln^2(y/17)}\right).$$

Donc $\phi_m'(y) \geqslant 0$ pour $y \geqslant 17\exp\left(\sqrt{\frac{X^2}{m+1}}\right)$. D'après (1.21),

$$\int_A^{+\infty}\phi_m(y)\ln\left(\frac{y}{2\pi}\right)dy = \frac{z^2}{2m^2+17^m}K_2(z,A') + \frac{z\ln(17/(2\pi))}{m17^m}K_1(z,A')$$

où $z = 2X\sqrt{m}$ et $A' = (2m/z)\ln(A/17)$. De plus, $q(Y) \leqslant q(A) \leqslant 7 \cdot 10^{-9}$. Aussi pour $x \geqslant \exp(b)$,

$$S_4(m,\delta) < \frac{R_m(\delta)}{\delta^m}(1/(2\pi) + 7\cdot 10^{-9})\left(\frac{z^2}{2m^2+17^m}K_2(z,A') + \frac{z\ln\left(\frac{17}{2\pi}\right)}{m17^m}K_1(z,A')\right) + E_0$$

où $z = 2\sqrt{\frac{mb}{R}}$, $A' = (2m/z)\ln(A/17)$.

On en déduit que

$$S_3(m,\delta) + S_4(m,\delta) \leqslant \Omega_2\delta^{-m}.$$

En utilisant la majoration de $S_1(m,\delta) + S_2(m,\delta)$ donnée dans le lemme 1.3 on conclut grâce au lemme 1.1 que

$$\frac{1}{x}|\psi(x) - (x - \ln(2\pi) - 1/2\cdot\ln(1-1/x^2))| \leqslant \Omega_1/\sqrt{x} + \Omega_2\delta^{-m} + m\delta/2$$

d'où

$$|\psi(x) - x| \leqslant (\Omega_1\exp(-b/2) + \Omega_2\delta^{-m} + m\delta/2 + \exp(-b)\ln(2\pi))x.$$

$\square$

Rosser & Schoenfeld ont décomposé leur article en trois "zones".
Si x est "petit" ($x \leqslant 10^8$), une consultation des tables et des calculs directs sur ordinateur permet d'obtenir des bornes précises.
Si x est "moyen" ($10^8 \leqslant x \leqslant \exp(4000)$), un calcul ponctuel des intégrales définies dans la proposition 1.6 donne les résultats (à partir de ce point) regroupés dans une table.
Si x est "grand" ($x \geqslant \exp(4000)$), ils ont majorés les intégrales intervenant dans la proposition 1.6, pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Théorème 11 p.342 de [16]) *Soient $R = 9,645908801$ défini dans la proposition 1.3 et $X = \sqrt{\frac{\ln x}{R}}$. Alors,*

$$\begin{aligned} |\theta(x) - x| &< x\varepsilon_0(x) \text{ pour } x \geqslant 101 \\ |\psi(x) - x| &< x\varepsilon_0(x) \text{ pour } x \geqslant 17 \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_0(x) = \sqrt{8/(17\pi)}X^{1/2}\exp(-X)$.

1.3 Résultats sur $\psi(x)$ et $\theta(x)$

Nous regroupons ici, sous la forme d'une proposition, les résultats déjà connus que nous allons utiliser dans les preuves.

Proposition 1.7 *(i) -* $\theta(x) \leqslant \psi(x)$ *pour tout* x.
(ii) - $\psi(x) - \theta(x) < \sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x}$ *pour* $10^8 \leqslant x \leqslant 10^{16}$.
(iii) - $\psi(x) - \theta(x) < 1,43\sqrt{x}$ *pour tout* $x > 0$.
(iv) - $\theta(x) < x$ *pour* $0 < x \leqslant 10^{11}$.
(v) - $\theta(x) < 1,000081x$ *pour* $x > 0$.
(vi) - $|\theta(x) - x| < 0,0077629\frac{x}{\ln x}$ *pour* $x > 1,04 \cdot 10^7$.

Preuve : La première inégalité vient du fait que

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{1/k}).$$

La deuxième vient de [7]. La suivante vient de [13] : c'est le théorème 13. Les trois dernières sont issues de [16] p. 360. □

Théorème 1.2 *Soit* b *un réel positif. Pour* $x \geqslant \exp(b)$,

$$| \psi(x) - x | \leqslant \varepsilon x,$$

où ε *est donné dans la table 1.1 placée en fin de chapitre.*

Corollaire 1.1 *Pour* $x \geqslant \exp(50)$, *on a*

$$| \psi(x) - x | \leqslant 0,905 \cdot 10^{-7} x.$$

Preuve : Les travaux de [5] permettent de confirmer que les 1 500 000 001 premiers zéros de la fonction ζ de Riemann dans la bande critique sont tous simples et de partie réelle $\beta = 1/2$. Cela établit la preuve de l'hypothèse de Riemann dans le rectangle $\{\sigma + it, 0 < \sigma < 1, 0 < t < A = 545\,439\,823,215$. Reprenons la preuve de la proposition 1.6 donnée dans [14]. Rien n'empêche de prendre une valeur de A plus grande que la valeur utilisée par Rosser et Schoenfeld ($A = 1894438,51\ldots$). Il faut néanmoins vérifier que $N(A) = F(A)$ (Voir preuve de la proposition 1.6), ce qui est le cas. Cela conduit à de nouveaux encadrements de $\psi(x)$ donnés dans la table 1.1, calculée grâce au logiciel `Maple` [3]. Cette programmation a permis de retrouver les résultats des calculs effectués par Rosser et Schoenfeld avec leur valeur de A.

Recherchons, en particulier, la valeur de ε pour $x \geqslant \exp(50)$ donnée dans le corollaire 1.1. Choisissons $\delta = 0,947265625 \cdot 10^{-8}$ et $m = 18$. En faisant le calcul, on trouve $\varepsilon \leqslant 0,905 \cdot 10^{-7}$. Cette valeur a été vérifiée avec le système `Pari`. □

Nous aurons besoin par la suite d'un encadrement de $\theta(x)$ jusqu'à 10^{11}. Une première méthode consiste à calculer $\theta(x)$ jusqu'à 10^{11} (il faut un ordinateur puissant). Une

[3] avec le concours des machines du groupe `Médicis` (Polytechnique)

deuxième méthode consiste à remarquer que la table de [1] qui donne le maximum et le minimum de la différence $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ par intervalle jusqu'à 10^{11} permet de trouver un encadrement précis de $\theta(x)$ jusqu'à 10^{11}. Cela conduit à la table 1.2.

On construit cette table de la façon suivante :
Soit $\rho_1(a,b) = \min_{p_k\in[a,b]}(\mathrm{Li}(p_k)-k)$ et $R_1(a,b) = \max_{p_k\in[a,b]}(\mathrm{Li}(p_k)-k)$. Posons $r(a,b) = \min_{x\in[a,b]}(\mathrm{Li}(x) - \pi(x))$ et $R(a,b) = \max_{x\in[a,b]}(\mathrm{Li}(x) - \pi(x))$. Il est facile de voir que $r(a,b) \geqslant \min(\rho_1(a,b)-1/2, \mathrm{Li}(a)-\pi(a))$ et que $R(a,b) \leqslant \max(R_1(a+1,b)+1+1/2, \mathrm{Li}(b)-\pi(b))$. L'intervalle $[0, 10^{11}]$ est subdivisé en intervalles $[a_i, b_i]$.

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \pi(x)\ln(x) - \int_2^x \frac{\pi(y)}{y}dy \\ &= \pi(x)\ln(x) - \int_2^{100} \frac{\pi(y)}{y}dy - \int_{100}^x \frac{\pi(y)-\mathrm{Li}(y)}{y} + \frac{\mathrm{Li}(y)}{y}dy \\ &\geqslant x - (\mathrm{Li}(x)-\pi(x))\ln x + C + \sum_{\substack{[a_i,b_i] \\ 100\leqslant a_i,b_i\leqslant b}} r(a_i,b_i)\ln(b_i/a_i) + r(b,x)\ln(x/b) \end{aligned} \tag{1.25}$$

où $C = \mathrm{Li}(100)\ln(100) - 100 - \int_2^{100} \frac{\pi(y)}{y}dy$ et b est la borne supérieure du dernier intervalle ne contenant pas x. Si l'on ne connaît pas la valeur de $\pi(x)$, on peut majorer la différence $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ par $R(a,x)$.

On donne une majoration de $\theta(x)$ en remplaçant dans la formule (1.25) les r et les R et inversement les R par r.

Théorème 1.3 *1.* $|\psi(x) - x| \leqslant 0,006409\frac{x}{\ln x}$ *pour* $x \geqslant \exp(22)$.
2. $|\theta(x) - x| \leqslant 0,006788\frac{x}{\ln x}$ *pour* $x \geqslant 10\ 544\ 111$.

Preuve : On utilise la table 1.1 par intervalles :
si $x \geqslant \exp(22)$ alors $|\psi(x) - x| \leqslant 2,78652\cdot10^{-4}x \leqslant 23 * 2,78652\cdot10^{-4}\frac{x}{\ln x} \leqslant 6,409\cdot10^{-3}\frac{x}{\ln x}$ pour $x \leqslant \exp(23)$.
Si $x \geqslant \exp(23)$ alors $|\psi(x) - x| \leqslant 1,8436\cdot10^{-4}x \leqslant 5,5308\cdot10^{-3}\frac{x}{\ln x}$ pour $x \leqslant \exp(30)$.
Si $x \geqslant \exp(30)$ alors $|\psi(x) - x| \leqslant 0,978\cdot10^{-5}x \leqslant 5,868\cdot10^{-3}\frac{x}{\ln x}$ pour $x \leqslant \exp(600)$.
Si $x \geqslant \exp(600)$ alors $|\psi(x) - x| \leqslant 0,75\cdot10^{-7}x \leqslant 1,5\cdot10^{-4}\frac{x}{\ln x}$ pour $x \leqslant \exp(2000)$.
De plus,
$|\psi(x) - \theta(x)| < \sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x}$ pour $10^8 \leqslant x \leqslant 10^{16}$ ainsi
$|\psi(x) - \theta(x)| < 0,00037871\frac{x}{\ln x}$ pour $\exp(22) \leqslant x \leqslant \exp(30)$
et
$|\psi(x) - \theta(x)| < 1,43\sqrt{x}$ pour $x > 0$ ainsi
$|\psi(x) - \theta(x)| < 1,32\cdot10^{-5}\frac{x}{\ln x}$ pour $x \geqslant \exp(30)$.

Pour $x \geqslant \exp(2000)$, le théorème 1.1 nous permet de conclure

$$|\psi(x) - x| \text{ et } |\theta(x) - x| \text{ sont majorés par } 0,00164\frac{x}{\ln x} \text{ pour } x \geqslant \exp(2000).$$

La table 1.2 et un calcul sur ordinateur permettent d'étendre le résultat sur θ, obtenu pour l'instant pour $x \geqslant \exp(22)$, jusqu'à 10 544 111. Cela nous montre que le résultat de la proposition 1.7(vi) de Rosser & Schoenfeld est presque optimal. □

Le résultat précédent donne une formule à l'ordre 1 pour la puissance du logarithme. Il est parfois nécessaire de connaître les estimations aux ordres suivants. Nous obtenons ici une amélioration notable des résultats de Rosser & Schoenfeld.

Théorème 1.4 *Posons* $\eta_2 = 3,965$, $\eta_3 = 515$ *et* $\eta_4 = 1717433$.
Pour $x > 1$, *on a*

$$|\theta(x) - x| < \eta_k \frac{x}{\ln^k x}.$$

(On peut aussi choisir $\eta_2 = 0,2$ *pour* $x \geqslant 3594641$.*)*

Preuve : Dans tous les cas, nous utiliserons la table 1.1 par intervalles. Commençons par $k = 2$, et montrons que

$$|\theta(x) - x| < 0,2 \frac{x}{\ln^2 x}.$$

Pour $x \geqslant \exp(3220)$, le théorème 1.1 donne que

$$|\theta(x) - x| < x\varepsilon(x) < \eta_2 \frac{x}{\ln^2 x}$$

avec $\eta_2 = 0,19923$ pour $x \geqslant \exp(3220)$.

Pour $x \geqslant 1,04 \cdot 10^7$,	$\vert\theta(x) - x\vert \leqslant 0,0077629 \frac{x}{\ln x}$	$\leqslant 0,1941 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(25)$
Pour $x \geqslant \exp(25)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 10^{-4} x$	$\leqslant 0,09 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(30)$
Pour $x \geqslant \exp(30)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 10^{-5} x$	$\leqslant 0,1 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(100)$
Pour $x \geqslant \exp(100)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 0,9 \cdot 10^{-7} x$	$\leqslant 0,1521 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(1300)$
Pour $x \geqslant \exp(1300)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 0,6 \cdot 10^{-7} x$	$\leqslant 0,1944 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(1800)$
Pour $x \geqslant \exp(1800)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 0,42 \cdot 10^{-7} x$	$\leqslant 0,168 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(2000)$
Pour $x \geqslant \exp(2000)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 0,37 \cdot 10^{-7} x$	$\leqslant 0,196 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(2300)$
Pour $x \geqslant \exp(2300)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 0,292 \cdot 10^{-7} x$	$\leqslant 0,1825 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(2500)$
Pour $x \geqslant \exp(2500)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 0,244 \cdot 10^{-7} x$	$\leqslant 0,18453 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(2750)$
Pour $x \geqslant \exp(2750)$,	$\vert\psi(x) - x\vert \leqslant 0,19 \cdot 10^{-7} x$	$\leqslant 0,197 \frac{x}{\ln^2 x}$	pour $x \leqslant \exp(3220)$

De plus,

$$\begin{array}{lll} \text{pour } \exp(25) \leqslant x \leqslant \exp(30), & |\psi(x) - \theta(x)| < \sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x} & < 0,0023725 \frac{x}{\ln^2 x}, \\ \text{et pour } x \geqslant \exp(30), & |\psi(x) - \theta(x)| < 1,43\sqrt{x} & < 0,0004 \frac{x}{\ln^2 x}. \end{array}$$

Intéressons nous maintenant au cas $k = 3$. Comme $|\theta(x) - x| \leqslant 0,0077629 \frac{x}{\ln x}$, on a

$$|\theta(x) - x| \leqslant 310,516 \frac{x}{\ln^3 x} \quad \text{pour } x \leqslant \exp(200).$$

Remarquons que pour $x \geqslant \exp(200)$, la différence entre θ et ψ est négligeable puisque, pour $x \geqslant \exp(200)$,

$$|\psi(x) - \theta(x)| < 1,43\sqrt{x} \leqslant 0,5 \cdot 10^{-36} \frac{x}{\ln^3 x}.$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Pour } x \geqslant \exp(200), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,8561317 \cdot 10^{-7} x & \leqslant 500 \frac{x}{\ln^3 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(1800) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(1800), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,419134 \cdot 10^{-7} x & \leqslant 510 \frac{x}{\ln^3 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(2300) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(2300), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,2917036 \cdot 10^{-7} x & \leqslant 456 \frac{x}{\ln^3 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(2500) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(2500), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,243946 \cdot 10^{-7} x & \leqslant 508 \frac{x}{\ln^3 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(2750) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(2750), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,1877 \cdot 10^{-7} x & \leqslant 507 \frac{x}{\ln^3 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(3000) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(3000), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,137602 \cdot 10^{-7} x & \leqslant 514 \frac{x}{\ln^3 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(3341)
\end{array}$$

Appliquons maintenant le théorème 1.1, pour $x \geqslant \exp(3341)$; on trouve

$$|\theta(x) - x| \leqslant 514,826 \frac{x}{\ln^3 x}.$$

Nous utiliserons les mêmes méthodes pour le cas $k = 4$. Comme $|\theta(x) - x| \leqslant 0,0077629 \frac{x}{\ln x}$, on a

$$|\theta(x) - x| \leqslant 1676786,4 \frac{x}{\ln^3 x} \qquad \text{pour } x \leqslant \exp(600).$$

Remarquons que pour $x \geqslant \exp(600)$, la différence entre θ et ψ est négligeable puisque, pour $x \geqslant \exp(600)$,

$$|\psi(x) - \theta(x)| < 1,43\sqrt{x} \leqslant 10^{-119} \frac{x}{\ln^4 x}.$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Pour } x \geqslant \exp(600), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,744205 \cdot 10^{-7} x & \leqslant \frac{1190728x}{\ln^4 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(2000) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(2000), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,3675 \cdot 10^{-7} x & \leqslant \frac{1435547x}{\ln^4 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(2500) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(2500), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,243946 \cdot 10^{-7} x & \leqslant \frac{1395162x}{\ln^4 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(2750) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(2750), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,1877 \cdot 10^{-7} x & \leqslant \frac{1520370x}{\ln^4 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(3000) \\
\text{Pour } x \geqslant \exp(3000), & |\theta(x) - x| \leqslant 0,137602 \cdot 10^{-7} x & \leqslant \frac{1716527x}{\ln^4 x} & \text{pour } x \leqslant \exp(3342)
\end{array}$$

Appliquons maintenant le théorème 1.1 pour $x \geqslant \exp(3342)$: on trouve

$$|\theta(x) - x| \leqslant 1717433 \frac{x}{\ln^4 x}.$$

Une vérification avec l'ordinateur a été effectuée pour $x \leqslant 1,04 \cdot 10^7$. On trouve que $|\theta(x) - x| \leqslant 0,2 \frac{x}{\ln^2 x}$ pour $x \geqslant 3594641$ et $|\theta(x) - x| \leqslant 3.9648085 \cdots \frac{x}{\ln^2 x}$ pour $x > 1$ (la valeur $3.9648085 \cdots$ étant choisie pour p_{17}). $\square$

1.4 Résultats sur p_k et $\theta(p_k)$

Pour certains points des démonstrations, nous utiliserons les résultats suivants :

Lemme 1.4

$$\begin{array}{lll} p_k \geqslant k(\ln k) & & \textit{pour } k \geqslant 2, \\ p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k) & & \textit{pour } k \geqslant 6, \\ p_k \leqslant k \ln p_k & & \textit{pour } k \geqslant 4, \\ p_k \geqslant k(\ln p_k - 2) & & \textit{pour } k \geqslant 5. \end{array}$$

Preuve : Ces inégalités ont été démontrées par Rosser. La première inégalité peut être trouvée dans [11]. La suivante vient de [12]. Les deux dernières se déduisent facilement de

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 2};$$

ce résultat est démontré dans [12]. □

Rosser a montré que $p_k \geqslant k \ln k$ et améliore son résultat avec Schoenfeld en montrant que $p_k \geqslant k(\ln k + \ln_2 k - 3/2)$ (cf. [14]). En 1983, Robin (cf. [9]) réussit à prouver que

$$p_k \geqslant k(\ln k + \ln_2 k - 1,0072629).$$

Massias et Robin (cf. [6]) sont capables de montrer que

$$p_k \geqslant k(\ln k + \ln_2 k - 1)$$

pour $k \leqslant \exp(598)$ et $k \geqslant \exp(1800)$.

Montrons maintenant que cela est vrai pour tout $k \geqslant 2$.

Théorème 1.5 *Pour $k \geqslant 2$, on a*

$$p_k \geqslant k(\ln k + \ln_2 k - 1)$$

où p_k est k-ième nombre premier.

Preuve : Pour $3 \leqslant p_k \leqslant 10^{11}$ le résultat est donné dans [9] (lemme 3 p. 375).

Pour $10^{11} \leqslant p_k \leqslant \exp(530)$, l'encadrement de $\theta(x)$ donné dans [16] conduit à

$$\theta(p_k) - p_k \leqslant c\frac{p_k}{\ln p_k} \qquad \text{avec } c = 0,0077629.$$

Comme $p_k \leqslant k \ln p_k$ pour $k \geqslant 4$, il vient

$$p_k \geqslant \theta(p_k) - ck.$$

Le fait que ([9] p. 376)

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k}\right)$$

si $k \geqslant 3$ nous permet d'écrire

$$p_k \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k} - c\right).$$

La fonction $k \longmapsto \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k}$ est décroissante ; son minimum sur l'intervalle qui nous intéresse est supérieur à la valeur de c.

Pour $p_k \geqslant \exp(1800)$, on utilise l'encadrement

$$|\theta(p_k) - p_k| \leqslant \eta_4 \frac{p_k}{\ln^4 p_k} \leqslant \eta_4 \frac{k}{\ln^3 p_k},$$

avec $\eta_4 = 1,657 \cdot 10^7$ ainsi que la minoration de [9] pour $k \geqslant 3$

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k}\right).$$

Ainsi

$$p_k \geqslant \theta(p_k) - \frac{\eta_4}{1800^2}\frac{k}{\ln k} \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 7,26}{\ln k}\right).$$

Pour $p_k \geqslant \exp(1800)$, $\ln_2 k > 7,49$ et le résultat est prouvé.

Terminons la démonstration dans l'intervalle restant. Comme $\theta(x) < \psi(x)$, on a

$$\theta(p_k) - p_k < \psi(p_k) - p_k < p_k \varepsilon(p_k).$$

En utilisant la même minoration de $\theta(p_k)$

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k}\right)$$

on déduit

$$\begin{aligned} p_k &\geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k}\right) - p_k \varepsilon(p_k) \\ p_k &\geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k} - \frac{p_k}{k}\varepsilon(p_k)\right) \end{aligned}$$

Montrons que

$$\frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k} - \frac{p_k}{k}\varepsilon(p_k) \geqslant 0.$$

Comme $p_k \geqslant k\,(\ln k + \ln_2 k - 0,9427)$ (cf. [6]), on doit vérifier que

$$\varepsilon(p_k) \leqslant \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k\,(\ln k + \ln_2 k - 0,9427)}.$$

Il suffit que, pour $530 \leqslant \ln p_k \leqslant 1800$ que

$$\varepsilon(p_k) \leqslant 1,6 \cdot 10^{-6},$$

ce qui est le cas.

Remarque : pour l'intervalle $]e^{598}, e^{1800}[$, les valeurs de $\varepsilon(x)$ données par Rosser et Schoenfeld ne semblent pas suffire. □

Première méthode de minoration de $\theta(p_k)$

Proposition 1.8 *Posons*

$$f_\beta(k) := k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \beta}{\ln k}\right).$$

Supposons que pour $k \geqslant k_0$

$$|\theta(p_k) - p_k| \leqslant ck.$$

Soit β un réel vérifiant

$$\beta(\ln k_0 - 1) \geqslant \ln k_0(\ln_2 k_0 + 1) - \ln^2 k_0 \ln\left(1 + \frac{\ln_2 k_0 - 1}{\ln k_0} + \frac{\ln_2 k_0 - \beta - c\ln k_0}{\ln^2 k_0}\right) + 1 - \ln_2 k_0.$$

Si $\theta(p_{k_0}) \geqslant f_\beta(k_0)$ alors

$$\theta(p_k) \geqslant f_\beta(k) \qquad \textit{pour } k \geqslant k_0.$$

Preuve : Supposons que

$$p_k \geqslant h_a(k) := k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - a}{\ln k}\right) \text{ pour } k \geqslant k_0.$$

Ainsi

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) = \sum_{n=k_0+1}^{k} \ln p_n \geqslant \sum_{n=k_0+1}^{k} \ln h_a(n).$$

D'autre part

$$f'_\beta(k) = \ln k + \ln_2 k + \frac{\ln_2 k - \beta + 1}{\ln k} - \frac{\ln_2 k - (\beta+1)}{\ln^2 k}$$

et
$$\ln p_k \geqslant \ln h_a = \ln k + \ln_2 k + \ln\left(1 + \frac{\ln_2 k - 1}{\ln k} + \frac{\ln_2 k - a}{\ln^2 k}\right).$$
Il suffit de voir lorsque $f'_\beta \leqslant \ln h_a$ car
$$f_\beta(k) - f_\beta(k_0) = \int_{k_0}^{k} f'_\beta(x)dx \leqslant \sum_{n=k_0+1}^{k} \ln h_a(n) \leqslant \theta(p_k) - \theta(p_{k_0}),$$
c'est-à-dire
$$\frac{\ln_2 k + 1 - \beta}{\ln k} - \frac{\ln_2 k - (\beta+1)}{\ln^2 k} \leqslant \ln\left(1 + \frac{\ln_2 k - 1}{\ln k} + \frac{\ln_2 k - a}{\ln^2 k}\right)$$
$$\beta(\ln k - 1) \geqslant \ln k(\ln_2 k + 1) - \ln^2 k \ln\left(1 + \frac{\ln_2 k - 1}{\ln k} + \frac{\ln_2 k - a}{\ln^2 k}\right) + 1 - \ln_2 k.$$
Comme $p_k \geqslant \theta(p_k) - ck$, on peut choisir $a = \beta + c\ln k$, on trouve alors que
$$\beta(\ln k - 1) \geqslant (\ln k)(\ln_2 k + 1) - (\ln^2 k)\ln\left(1 + \frac{\ln_2 k - 1}{\ln k} + \frac{\ln_2 k - \beta - c\ln k}{\ln^2 k}\right) + 1 - \ln_2 k.$$
□

Appliquons la proposition 1.8. Pour $c = 0,007$, les valeurs de β sont les suivantes :

$\ln k_0$	β
22	2,0553
23	2,0532
25	2,04975
30	2,04397
100	2,02961
1000	2,0156
2000	2,0128

Corollaire 1.2 *Pour $p_k \geqslant 10^{11}$,*
$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,0548}{\ln k}\right).$$

Preuve : Prenons $k_0 = 4118054814$ et $c = 0,006788$. On obtient $\beta = 2,0548$. On vérifie grâce à une table que $\theta(10^{11}) \geqslant f_{2.0548}(k_0)$. □

L'inconvénient majeur de la méthode précédente est qu'il faut vérifier que $\theta(p_{k_0}) \geqslant f_\beta(k_0)$, ce qui nécessite le calcul de $\theta(x)$ pour x grand. La méthode suivante n'a pas besoin de cette hypothèse.

Deuxième méthode de minoration de $\theta(p_k)$

Proposition 1.9 *Soit $k_0 \geqslant \exp(\exp(3))$. Supposons que*

$$|\theta(x) - x| \leqslant c\frac{x}{\ln x} \qquad \textit{pour } x \geqslant p_{k_0}.$$

Alors

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \beta}{\ln k}\right) \textit{ pour } k \geqslant k_0$$

avec β solution de l'équation

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\ln k_0(1+\alpha) - \ln_2 k_0 + 1}{\ln k_0 - 1} \\ \alpha &= \frac{1}{2}\frac{(\ln_2 k_0 - a)^2}{\ln k_0} + a \\ a &= 1 - \frac{\ln_2 k_0 - \beta}{\ln k_0} + c \end{aligned}$$

Preuve : En appliquant le lemme 1 de [9] pour $a = 1$ et $\ln k_0 \geqslant \exp(a+2)$ comme dans le théorème 7 de [9], on trouve une première valeur de β notée β_0. Comme $|\theta(p_k) - p_k| \leqslant ck$, on peut ré-appliquer le lemme avec la nouvelle valeur de a égale à

$$a = 1 - \frac{\ln_2 k_0 - \beta_0}{\ln k_0} + c.$$

En fait la suite des $\{\beta_k\}_k$ est une suite convergente dont on peut déterminer la valeur en résolvant l'équation pour $k = k_0$

$$\beta = \frac{\ln k\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \beta}{\ln k} - c)^2}{\ln k} + 1 - \frac{\ln_2 k - \beta}{\ln k} + c\right) - \ln_2 k + 1}{\ln k - 1}.$$

Quand k_0 tend vers l'infini, β tend vers $2 + c$. □

Appliquons la proposition précédente.
Pour $c = 0,007$, les valeurs de β sont les suivantes :

$\ln k_0$	β
exp(3)	2,0675
25	2,056
30	2,04938
1000	2,01356
2000	2,0128

Corollaire 1.3 *Pour $k \geqslant \exp(30)$,*

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,05}{\ln k}\right).$$

Théorème 1.6

$$p_k \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,25}{\ln k}\right) \qquad \textit{pour } k \geqslant 2.$$

Preuve : Comme $\theta(x) < x$ pour $0 < x < 10^{11}$, on déduit immédiatement

$$p_k \geqslant \theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1454}{\ln k}\right).$$

Pour $p_k \geqslant \exp(4000)$, le théorème 1.1 donne que

$$|\theta(x) - x| < x\varepsilon(x) < \eta_2 \frac{x}{\ln^2 x}$$

avec $\eta_2 = 0,040033$ pour $x \geqslant \exp(4000)$. Ainsi pour $p_k \geqslant \exp(4000)$,

$$p_k \geqslant \theta(p_k) - \eta_2 \frac{p_k}{\ln^2 p_k} \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2,1 - 0,040033}{\ln k}\right).$$

Pour $10^{11} \leqslant p_k \leqslant \exp(4000)$,

$$\begin{aligned} p_k &\geqslant \theta(p_k)\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) \geqslant (1-\varepsilon)\theta(p_k) \\ &\geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \beta}{\ln k} - \varepsilon\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \beta}{\ln k}\right)\right). \end{aligned}$$

avec $\beta = 2,0548$. Etudions la fonction

$$f(\varepsilon, k) := -\beta - \varepsilon\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \beta}{\ln k}\right)\ln k.$$

On choisit dans un premier temps $\varepsilon = \varepsilon(10^{11}) = 0,00008$ on vérifie que, $f(\varepsilon, \exp(30)) > -2,1319$ et ainsi de suite par petits intervalles jusqu'à $\exp(4000)$. On en déduit que $f(\varepsilon, k) > -2,25$ pour p_k compris entre $\exp(22)$ et $\exp(4000)$. □

Théorème 1.7

$$p_k \leqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 1,8}{\ln k}\right) \qquad \textit{pour } k \geqslant 27076.$$

Preuve : On suppose d'abord que (lemme 1.4)

$$\frac{p_k}{\ln^2 p_k} \leqslant \frac{k}{\ln k}.$$

Pour $p_k \geqslant 3594641$, nous avons démontré par le théorème 1.4 que

$$|\theta(x) - x| < x\varepsilon(x) < \eta_2 \frac{x}{\ln^2 x}$$

avec $\eta_2 = 0,2$. Ainsi pour $p_k \geqslant 3594641$,

$$p_k \leqslant \theta(p_k) + \eta_2 \frac{p_k}{\ln^2 p_k} \leqslant k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2 + 0,2}{\ln k} \right).$$

On termine la démonstration par un test sur machine. □

Théorème 1.8 *Pour $k \geqslant 39017$, on a*

$$p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - 0,9484).$$

Preuve : Comme (voir le théorème 1.7)

$$p_k \leqslant k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 1,8}{\ln k} \right),$$

il vient pour $x \geqslant \exp(33)$ que

$$p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - 0,9484).$$

De

$$|\theta(p_k) - p_k| \leqslant \varepsilon(p_k) p_k$$

il vient

$$p_k \leqslant \theta(p_k) + \varepsilon(p_k) p_k.$$

Comme

$$\theta(p_k) \leqslant k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} \right),$$

il suffit de voir que

$$g(k) := -1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} + \varepsilon(p_k) \frac{p_k}{k} < -0,9484$$

pour $4118054813 \leqslant k \leqslant \exp(30)$, en prenant (cf. [6])

$$p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - 0,9427)$$

et $\varepsilon(p_k) = 0,000079989+1/\sqrt{10^{11}}$ pour $10^{11}\leqslant p_k\leqslant\exp(30)$ et $\varepsilon(p_k) = 10^{-5}+1.43/\sqrt{\exp(30)}$ pour $p_k \geqslant \exp(30)$.

Maintenant regardons si le résultat reste vrai pour $p_k \leqslant 10^{11}$. Posons $\alpha = 0,9484$ et

$$f(k) = k(\ln k + \ln_2 k - \alpha).$$

Grâce à Brent [1], nous disposons des valeurs maximales de $\mathrm{Li}(p_k)-\pi(p_k)$ dans différents intervalles jusqu'à 10^{11}. Ainsi, si pour $k \in [k_0, k_1]$

$$\mathrm{Li}(f(k)) - \pi(p_k) \geqslant M_{p_{k_0},p_{k_1}} := \max_{k\in[k_0,k_1]}(\mathrm{Li}(p_k) - \pi(p_k))$$

on pourra en déduire que

$$p_k \leqslant f(k).$$

Considérons $g(k) = \mathrm{Li}(f(k)) - k$.

$$g'(k) = \frac{1 + 1/\ln k - \alpha - \ln(1 + (\ln_2 k - \alpha)/\ln k)}{\ln k + \ln_2 k + \ln(1 + (\ln_2 k - \alpha)/\ln k)}$$

admet un minimum en $\ln k \approx \exp(2 + \alpha + 2/\exp(2 + \alpha))$. Pour $\alpha = 0,9484$, ce minimum est strictement positif. Nous montrons, grâce au tableau suivant, que

$$\mathrm{Li}(f(k)) - \pi(p_k) \geqslant M_{p_{k_0},p_{k_1}}$$

pour $170368 \leqslant k \leqslant 4118054813$ ($2312573 \leqslant p_k \leqslant 10^{11}$). Les valeurs de $\pi(x)$ sont extraites de la table 3 de Riesel [8] (Ex. : $\pi(10^7) = 664579$)

k	$p_k \leqslant \cdot$	$\mathrm{Li}(f(k)) - k$	$R_1 = M_{p_{k_0},p_{k_1}}$
170368	$2,315 \cdot 10^6$	261,0004	$M_{2\cdot10^6,5\cdot10^6}$=261
348512	$5 \cdot 10^6$	414,1091	$M_{5\cdot10^6,10^7}$=346
664578	10^7	634,5851	$M_{10^7,2\cdot10^7}$=435
1270606	$2 \cdot 10^7$	983,965	$M_{2\cdot10^7,5\cdot10^7}$=692
3001133	$5 \cdot 10^7$	1788,864	$M_{5\cdot10^7,5\cdot10^8}$=1724
26355866	$5 \cdot 10^8$	8890,45	$M_{5\cdot10^7,10^{10}}$=7048
455052510	10^{10}	93238,1	$M_{10^{10},10^{11}}$=17065

Pour $k = 39017..170367$, une vérification a été faite grâce au système `Pari` (gp). □

1.5 Intervalle contenant au moins un nombre premier

Nous connaissons déjà le résultat de Schoenfeld [16] montrant que, pour $x\geqslant 2010759,9$, l'intervalle $]x, x + x/16597[$ contient au moins un nombre premier. Nous allons améliorer ce résultat.

Proposition 1.10 *Pour* $k \geqslant 463$,

$$p_{k+1} \leqslant p_k \left(1 + \frac{1}{2 \ln^2 p_k}\right).$$

Preuve : Supposons que, pour $k \geqslant k_0$,

$$p_k \geqslant k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \alpha_0}{\ln k}\right)$$

et

$$p_k \leqslant k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \alpha_1}{\ln k}\right).$$

$$\begin{aligned}
p_k \left(1 + \frac{\gamma}{\ln^2 p_k}\right) - p_{k+1} &= p_k - p_{k+1} + \gamma \frac{p_k}{\ln^2 p_k} \\
&\geqslant k \left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - \alpha_0}{\ln k}\right) + \gamma \frac{p_k}{\ln^2 p_k} \\
&\quad -(k+1) \left(\ln(k+1) + \ln_2(k+1) - 1 + \frac{\ln_2(k+1) - \alpha_1}{\ln(k+1)}\right) \\
&= k \left(\ln k - \ln(k+1) + \ln_2 k - \ln_2(k+1) + \frac{\ln_2 k - \alpha_0}{\ln k} - \frac{\ln_2(k+1) - \alpha_1}{\ln(k+1)}\right) \\
&\quad - \left(\ln(k+1) + \ln_2(k+1) - 1 + \frac{\ln_2(k+1) - \alpha_1}{\ln(k+1)}\right) + \gamma \frac{p_k}{\ln^2 p_k}
\end{aligned}$$

Or,

$$\ln(k) - \ln(k+1) = -\ln(1 + 1/k),$$

$$\ln_2(k) - \ln_2(k+1) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}\right),$$

$$\frac{\ln_2 k - \alpha_0}{\ln k} - \frac{\ln_2(k+1) - \alpha_1}{\ln(k+1)} \geqslant (\alpha_1 - \alpha_0)/\ln(k+1)$$

car $\frac{\ln x}{x}$ est décroissante pour $x \geqslant 1/e$ donc $f(k) \geqslant f(k+1)$ où $f(x) := \frac{\ln_2 x}{\ln x}$. On choisit γ tel que

$$\begin{aligned}
\gamma \frac{p_k}{\ln^2 p_k} \quad &\geqslant \quad k \left(\ln(1 + 1/k) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}\right) + (\alpha_0 - \alpha_1)/\ln(k+1)\right) \\
&\quad + \left(\ln(k+1) + \ln_2(k+1) - 1 + \frac{\ln_2(k+1) - \alpha_1}{\ln(k+1)}\right) \;; \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

il faut donc $\gamma > \alpha_0 - \alpha_1$ pour que cette inégalité soit vraie à partir d'un certain rang. Comme

$$\frac{p_k}{\ln^2 p_k} \geqslant \frac{k \ln k}{(\ln k + \ln_2 k)^2},$$

l'inégalité (1.26) est vérifiée avec $\gamma = 1/2$ si

$$\ln(k+1)/2 \geqslant (\alpha_0 - \alpha_1)(\ln k + \ln_2 k).$$

Pour $\alpha_0 = 2,25$ et $\alpha_1 = 1,8$, il convient de choisir $k \geqslant \exp(82)$. Le théorème 12 de [16] indique que l'intervalle $]x, x + x/16597[$ contient au moins un nombre premier pour $x \geqslant 2010759,9$. Appliqué à $x = p_k$, il donne le résultat pour $2010759,9 \leqslant p_k \leqslant \exp(91)$. D'après [16] p. 355,

$$p_{n+1} - p_n \leqslant 652 \text{ pour } p_n \leqslant 2,686 \cdot 10^{12},$$

et donc

$$p_{k+1} \leqslant p_k \left(1 + \frac{1}{2\ln^2 p_k}\right)$$

lorsque

$$\frac{p_k}{2\ln^2 p_k} \geqslant \frac{k}{2(\ln k + \ln_2 k)} \geqslant 652$$

c'est-à-dire pour $k \geqslant 2 \cdot 10^4$. Pour $k = 463..20000$, une vérification directe à l'aide de l'ordinateur permet de conclure. □

Théorème 1.9 *Pour tout $x \geqslant 3275$, il existe un nombre premier p tel que*

$$x < p \leqslant x \left(1 + \frac{1}{2\ln^2 x}\right).$$

Ce résultat est meilleur que celui de Rosser & Schoenfeld si $x \geqslant 3 \cdot 10^{39}$.

Preuve : Soit $x \geqslant 2$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$p_k \leqslant x < p_{k+1}.$$

Comme la fonction $x \mapsto x(1 + 1/(2\ln^2 x))$ est croissante,

$$p_k \leqslant x \Rightarrow p_k \left(1 + \frac{1}{2\ln^2 p_k}\right) \leqslant x \left(1 + \frac{1}{2\ln^2 x}\right).$$

D'après la proposition 1.10, pour $k \geqslant 463$,

$$p_{k+1} \leqslant p_k \left(1 + \frac{1}{2\ln^2 p_k}\right).$$

On en déduit que, pour $x \geqslant p_{463} = 3299$,

$$x < p_{k+1} \leqslant x\left(1 + \frac{1}{2\ln^2 x}\right).$$

De plus, pour $x \geqslant 3274,0111$,

$$3299 < x\left(1 + \frac{1}{2\ln^2 x}\right).$$

□

1.6 Résultats sur $\pi(x)$

Rappelons que

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x} + O(\frac{1}{\ln^3 x})\right).$$

Théorème 1.10 *1. -* $\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \leqslant \pi(x)$ *pour* $x \geqslant 599$*.*

2. - $\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1{,}2762}{\ln x}\right)$ *pour* $x > 1$ *(la valeur 1,2762 étant choisie pour* $x = p_{258} = 1627$*).*

3. - $\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1{,}0992}{\ln x}\right)$ *pour* $x \geqslant 1,332 \cdot 10^{10}$*.*

4. - $\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x - 1{,}1}$ *pour* $x \geqslant 60184$*.*

5. - $\pi(x) \geqslant \frac{x}{\ln x - 1}$ *pour* $x \geqslant 5393$*.*

6. - $\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{1{,}8}{\ln^2 x}\right) \leqslant \pi(x)$ *pour* $x \geqslant 32299$*.*

7. - $\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2{,}51}{\ln^2 x}\right)$ *pour* $x \geqslant 355991$*.*

Commençons par les trois premières inégalités.

Minoration de $\pi(x)$. • Prenons d'abord $x \geqslant 10^8$.

$$\pi(x) = \pi(p) - \frac{\theta(p)}{\ln(p)} + \frac{\theta(x)}{\ln(x)} + \int_p^x \frac{\theta(y)dy}{y\ln^2(y)}.$$

Or $\theta(x) \geqslant x - 0,024\frac{x}{\ln(x)}$ pour $x \geqslant 758711$ ([16], Th.7 p.357). Ainsi, pour $p \geqslant 758711$, il vient

$$\pi(x) \geqslant \frac{\theta(x)}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \pi(p) - \frac{\theta(p)}{\ln(p)} - \frac{p}{\ln^2(p)} + (2 - 0,024)\int_p^x \frac{dy}{\ln^3(y)}.$$

Comme $\theta(x) \geqslant x - 0,0077629\frac{x}{\ln(x)}$ pour $x \geqslant 1,04 \cdot 10^7$,

$$\pi(x) \geqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1-0,008}{\ln(x)}\right) \text{ pour } x \geqslant 10^8$$

car

$$\pi(p) - \frac{\theta(p)}{\ln(p)} - \frac{p}{\ln^2(p)} + (2-0,024)\int_p^x \frac{dy}{\ln^3(y)} \geqslant 0 \text{ pour } x \geqslant 10^8,$$

en prenant

$$p = p_{61000} = 760267 \text{ et } \theta(p) < p.$$

- Pour $x \leqslant 10^8$, on a pour $11 < x \leqslant 10^8$ d'après [13] (Théorème 16 p. 72),

$$\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(\sqrt{x}) < \pi(x).$$

Pour $1859 \leqslant x \leqslant 10^8$,

$$\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(\sqrt{x}) \geqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{0,992}{\ln x}\right).$$

Pour $k = 1..284$ ($p_{284} = 1861$), on vérifie à l'ordinateur que

$$\pi(p_k - 1/2) = k - 1 \geqslant \frac{p_k}{\ln p_k}\left(1 + \frac{0,992}{\ln p_k}\right),$$

inégalité vraie pour $k \geqslant 110$. Ainsi $\pi(x) \geqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{0,992}{\ln x}\right)$ pour $x \geqslant p_{109} = 599$. On obtiendra un meilleur résultat en utilisant une majoration de θ à l'ordre 2.

Majoration de $\pi(x)$. D'après [16] (p. 360), nous savons que

$$\theta(x) < x \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant 10^{11},$$

$$\theta(x) < 1,000081x \qquad \text{pour } x > 0,$$

et que

$$|\theta(x) - x| \leqslant 0,0077926\frac{x}{\ln x} \qquad \text{pour } x \geqslant 1,04 \cdot 10^7.$$

Posons $b = 0,0077926$, $c = 1,000081$ et $K = 10^{11}$.

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\theta(y)dy}{y\ln^2 y} \\
&= \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^K \frac{\theta(y)dy}{y\ln^2 y} + \int_K^x \frac{\theta(y)dy}{y\ln^2 y} \\
&< \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{b}{\ln x}\right) + \int_2^K \frac{dy}{\ln^2 y} + \int_K^x \frac{dy}{\ln^2 y} + b\int_K^x \frac{dy}{\ln^3 y} \text{ pour } x \geqslant K \\
&= \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{b}{\ln x}\right) + \left[\frac{y}{\ln^2 y}\right]_2^x + 2\int_2^x \frac{dy}{\ln^3 y} + b\int_K^x \frac{dy}{\ln^3 y} \\
&< \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{b+1}{\ln x}\right) + 2\frac{x}{\ln^3 x} + 6\int_2^x \frac{dy}{\ln^4 y} + b\left[\frac{y}{\ln^3 y}\right]_K^x + 3b\int_K^x \frac{dy}{\ln^4 y}
\end{aligned}$$

Or

$$\int_K^x \frac{dy}{\ln^4 y} = \int_K^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\ln^4 y} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dy}{\ln^4 y} < (\sqrt{x} - K)/\ln^4(K) + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln^4 \sqrt{x}} \text{ si } \sqrt{x} \geqslant K.$$

Pour que

$$\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{\beta}{\ln x}\right),$$

il suffit de choisir

$$\beta > b + 1 + \frac{2+b}{\ln x} + \frac{\ln^2 x}{x}\left(6\int_2^K \frac{dy}{\ln^4 x} - b\frac{K}{\ln^3 K} + (6+3b)\left(\frac{\sqrt{x}-K}{\ln^4 K} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln^4\sqrt{x}}\right)\right).$$

On trouve que $\beta \geqslant 1,03$ lorsque $x \geqslant \exp(100)$.

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \pi(K) - \frac{\theta(K)}{\ln K} + \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_K^x \frac{\theta(y)dy}{y\ln^2 y} \\
&< \pi(K) - \frac{\theta(K)}{\ln K} + c\frac{x}{\ln x} + c\int_K^x \frac{dy}{\ln^2 y} \\
&= \pi(K) - \frac{\theta(K)}{\ln K} + c\frac{K}{\ln K} + c\,(\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(K)) \\
&= M + c\cdot \mathrm{Li}(x) \qquad \text{où } M \text{ est une constante.}
\end{aligned}$$

Posons

$$\Delta(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{\beta}{\ln x}\right) - (M + c\cdot\mathrm{Li}(x)).$$

$$\Delta'(x) = \Big((1-c)\ln^2(x) + (\beta-1)\ln(x) - 2\beta\Big)/\ln^3 x.$$

Δ' s'annule lorsque

$$\ln x = \frac{-(\beta-1) \pm \sqrt{(\beta-1)^2 + 8\beta(1-c)}}{2(1-c)}.$$

Nous pouvons prendre $\pi(K) = 4118054813$ et $\frac{\theta(K)}{\ln K} > \frac{K}{\ln K}\left(1 - \frac{0{,}007}{\ln K}\right)$ ainsi, pour $\beta = 1,0992$, le minimum local en $x_0 \approx \exp(22,5775)$ ($x_0 < K$) est négatif mais $\Delta(K) > 0$ et donc pour $x \in [K, \exp(100)]$,

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1,0992}{\ln x}\right).$$

En consultant la table donnée dans [1], on s'aperçoit que ce résultat reste vrai pour $x \geqslant 1,332 \cdot 10^{10}$. Pour $x \leqslant K$, on a d'après [13] (Th. 16 p.72) et [1],

$$\pi(x) < \mathrm{Li}(x).$$

Etudions la différence
$$\Delta(x,\beta) = \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{\beta}{\ln x}\right) - \mathrm{Li}(x).$$
Cette fonction admet un minimum au point $x = \exp(2\beta/(\beta-1))$. Pour $\beta_0 := 1,276103273$, la valeur du minimum est égale à -9,972985. En consultant la table de Brent [1] qui donne la différence minimale entre $\pi(x)$ et $\mathrm{Li}(x)$ dans les intervalles de la forme $[10^n, 10^{n+1}]$ avec $n = 0..10$, on en déduit que
$$\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{\beta_0}{\ln x}\right) - \pi(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{\beta_0}{\ln x}\right) - \mathrm{Li}(x) + (\mathrm{Li}(x) - \pi(x)) > 0$$
pour $x \geqslant 10^4$. Pour $k = 1..1230$, on vérifie que
$$\pi(p_k) = k \leqslant \frac{p_k}{\ln p_k}\left(1+\frac{\beta_0}{\ln p_k}\right).$$
On choisit la valeur de β_0 pour que cela soit vrai pour tous les k, y compris pour $k = 258$.

Démontrons maintenant les autres formules. Posons
$$x_0 = 1,04\cdot 10^7, \quad K = \pi(x_0) - \frac{\theta(x_0)}{\ln x_0}.$$
Numériquement $\pi(x_0) = 689382$ et $\theta(x_0) = 10395445,63690637\cdots$
Posons
$$J(x;a) = K + \frac{x}{\ln x} + a\frac{x}{\ln^3 x} + \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{\ln^2 y} + a\frac{1}{\ln^4 y}\right)dy.$$
Comme
$$\pi(x) = \pi(x_0) - \frac{\theta(x_0)}{\ln x_0} + \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_{x_0}^{x}\frac{\theta(y)dy}{y\ln^2 y}$$
et que $|\theta(x) - x| \leqslant 0,2\frac{x}{\ln^2 x}$ pour $x > x_0$, on a, pour $x \geqslant x_0$,
$$J(x;-0,2) \leqslant \pi(x) \leqslant J(x;0,2).$$
Prenons $M(x;c) = \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{c}{\ln^2 x}\right)$ pour fonction majorante de $\pi(x)$. Etudions les dérivées de $J(x;a)$ et de $M(x;c)$ par rapport à x :
$$J'(x;a) = \frac{1}{\ln x} + \frac{a}{\ln^3 x} - 2\frac{a}{\ln^4 x},$$
$$M'(x;c) = \frac{1}{\ln x} + \frac{c-2}{\ln^3 x} - \frac{3c}{\ln^4 x}.$$

Il faut choisir $c > 2+a$ et on aura $J' < M'$ lorsque $\ln x > (3c-2a)/(c-2-a)$. Choisissons $c = 2,51$. On vérifie à l'ordinateur que $J(10^{11}; 0,2) < M(10^{11}; 2,51)$. De plus, comme $\mathrm{Li}(x) < M(x; 2,51)$ pour $x \geqslant 10^7$ et en vérifiant pour les petites valeurs, on a

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2,51}{\ln^2 x}\right) \qquad \text{pour } x \geqslant 355991.$$

Posons

$$m(x; d) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{d}{\ln^2 x}\right).$$

En étudiant les dérivées, pour que $J' > m'$, il faut choisir $d \leqslant 2 - a$. Choisissons $d = 1,8$. Comme $m(x_0; 1,8) < J(x_0; -0,2)$ et en vérifiant à l'ordinateur pour les petites valeurs, on obtient

$$\pi(x) > \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{1,8}{\ln^2 x}\right) \qquad \text{pour } x \geqslant 32299.$$

Pour montrer que

$$\frac{x}{\ln x - b} \leqslant \pi(x),$$

on procède de la même manière. En comparant avec la dérivée de $J(x; a)$, on montre qu'il faut choisir $b \leqslant 1$. Pour $b = 1$ et $a = -0,2$, $J'(x; -0,2)$ est plus grande que la dérivée de $x/(\ln x - 1)$ pour $x > 1$. De plus, pour $x = x_0$,

$$\frac{x_0}{\ln x_0 - 1} < J(x_0; -0,2).$$

On vérifie avec l'ordinateur que, pour $5393 \leqslant x \leqslant 1,04 \cdot 10^7$,

$$\frac{x}{\ln x - 1} \leqslant \pi(x).$$

Maintenant montrons que, pour $x \geqslant 60184$, on a

$$\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x - 1,1}.$$

Comme

$$\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{a}{\ln x}\right) < \frac{x}{\ln x - a}$$

pour $x > \exp(a)$, on a la démonstration pour $x \geqslant 1,332 \cdot 10^{10}$. Est-ce que $\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x - 1,1}$ pour $x \leqslant 10^{11}$? Posons $k(x) = \frac{x}{\ln x - 1,1}$ et comparons $k(x)$ avec $\mathrm{Li}(x)$. La dérivée de $k'(x) - 1/\ln x$ est

$$-\frac{200\ln^2 x - 3630\ln x + 1331}{(10\ln x - 11)^3 x \ln^2 x}.$$

On en déduit que la différence $k'(x) - 1/\ln x$ est positive pour x appartenant à l'intervalle $[10^6, 10^{11}]$. Comme $\mathrm{Li}(10^6) < k(10^6)$, on en déduit que, pour $10^6 \leqslant x \leqslant 10^{11}$,

$$\mathrm{Li}(x) < k(x).$$

Un test sur machine permet de vérifier jusqu'à 10^6.

On démontre que

$$\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \leqslant \pi(x) \quad \text{pour } x \geqslant 599$$

en utilisant l'inégalité 6 du théorème 1.10 puis en vérifiant avec l'ordinateur que la minoration est vraie à partir de $x = 599$.

1.7 Sur la différence de $\pi(x) - \mathbf{Li}(x)$

Nous avons écrit ce paragraphe suite à une question personnelle de J.M. De Koninck. Nous allons trouver des valeurs explicites de x_0 et C telles que

$$\forall x > x_0, \mid \pi(x) - \mathrm{Li}(x) \mid < Cx \exp(-\sqrt{\ln x}).$$

Définissons

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right).$$

Rappelons que sous l'hypothèse de Riemann, nous avons d'excellents résultats :

Théorème 1.11 (Schoenfeld [16] p.339) *Sous l'hypothèse de* Riemann*,*

$$\mid \pi(x) - Li(x) \mid < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x \ \ si\ 2657 \leqslant x.$$

Preuve : $\mid \theta(x) - x \mid < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln^2 x.$ □

Sans l'hypothèse de Riemann, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.12 *Soient $R = 9,645908801$ et $K = \frac{\sqrt{8/(17\pi)}}{R^{1/4}} \approx 0,2196$, alors*

$$\mid \pi(x) - Li(x) \mid < 2K\frac{x}{\ln^{3/4} x}\exp\left(-\sqrt{\ln x/R}\right) \ \ pour\ 59 \leqslant x.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\pi(x) - \mathrm{Li}(x) &= \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt - \int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \mathrm{Li}(2)\\ &= \frac{\theta(x)-x}{\ln x} + 2/\ln(2) + \int_2^x \frac{\theta(t)-t}{t\ln^2 t}dt - \mathrm{Li}(2)\end{aligned}$$

Or, d'après le

Théorème 1.13 ([16], Théorème 11) *Soit* $X = \sqrt{\ln(x)/R}$ *et*

$$\varepsilon_0(x) = \sqrt{8/(17\pi)}X^{1/2}\exp(-X)$$

alors

$$\mid \theta(x) - x \mid < x\varepsilon_0(x) \textit{ pour } 101 \leqslant x.$$

Ainsi

$$\left|\frac{\theta(x)-x}{\ln x}\right| < \frac{x}{\ln x}\varepsilon_0(x) = \frac{\sqrt{8/(17\pi)}}{R^{1/4}}\ln^{-3/4}(x)x\exp - \sqrt{\ln(x)/R}$$

et

$$\left|\int_2^x \frac{\theta(t)-t}{t\ln^2 t}dt\right| \leqslant \int_2^x \frac{\mid\theta(t)-t\mid}{t\ln^2 t}dt \leqslant \int_2^{101} \frac{\mid\theta(t)-t\mid}{t\ln^2 t}dt + \int_{101}^x \frac{\varepsilon_0(t)}{\ln^2 t}dt.$$

Soit $f(t) = \frac{\varepsilon_0(t)}{\ln^2 t} = K(\ln^{-7/4} t)\exp(-\sqrt{\ln(t)/R})$.

Soit $a = 7/5$ et $g(t) = K\frac{t}{\ln^a t}\exp(-\sqrt{\ln(t)/R})$.

$$g'(t) = K\exp(-\sqrt{\ln(t)/R})\left(1/\ln^a t - a/\ln^{a+1} t - 1/(2\sqrt{R}\ln^{a+1/2} t)\right).$$

Posons $x_0 = 101$. On montre facilement que $f < g'$ pour $x \geqslant x_0$. Ainsi

$$\int_{x_0}^x \frac{\varepsilon_0(t)}{\ln^2 t}dt < \int_{x_0}^x g'(t)dt = \left[K\frac{t}{\ln^a t}\exp(-\sqrt{\ln t/R})\right]_{x_0}^x.$$

Calculons maintenant la constante

$$\int_2^{x_0} \frac{\mid\theta(t)-t\mid}{t\ln^2 t}dt.$$

Comme $\theta(t) < t$ pour $0 \leqslant t \leqslant x_0$,

$$\int_2^{x_0} \frac{\mid\theta(t)-t\mid}{t\ln^2 t}dt = \int_2^{x_0} \frac{dt}{\ln^2 t} - \int_2^{x_0} \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt.$$

Soit l tel que $p_l \leqslant x_0 < p_{l+1}$. Or $\int \frac{dt}{t\ln^2 t} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]$,

$$\int_2^{x_0} \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt = \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{n=1}^{k}\ln p_n\right)\left(\frac{1}{\ln p_k} - \frac{1}{\ln p_{k+1}}\right) + \left(\sum_{n=1}^{l}\ln p_n\right)\left(\frac{1}{\ln p_l} - \frac{1}{\ln x_0}\right).$$

On trouve finalement que

$$\int_2^{101} \frac{\mid \theta(t) - t \mid}{t\ln^2 t}dt \approx 3,44088426.$$

En rassemblant les différents points, il vient que

$$\begin{aligned}
\mid \pi(x) - \mathrm{Li}(x) \mid &< K\frac{x}{\ln^{3/4} x}\exp(-\sqrt{\ln(x)/R}) + K\frac{x}{\ln^{7/5} x}\exp(-\sqrt{\ln(x)/R}) \\
&\quad + \frac{2}{\ln 2} + \int_2^{x_0}\frac{\mid \theta(t) - t \mid}{t\ln^2 t}dt - K\frac{x_0}{\ln^{7/5} x_0}\exp(-\sqrt{\ln(x_0)/R}) \\
&< 2K\frac{x}{\ln^{3/4} x}\exp(-\sqrt{\ln(x)/R}) \text{ pour } x \geqslant 452.
\end{aligned}$$

Pour les petites valeurs, considérons le résultat de [1]

$$\max_{p\in[100,1000]}[\mathrm{Li}(p) + 1/2] - \pi(p) = 10.$$

Comme $2K\frac{x}{\ln^{3/4} x}\exp(-\sqrt{\ln x/R}) > 10$ pour $x > 160$, le résultat est vérifié pour $x > 160$. En remarquant que

$$\max_{x\in[p_k,p_{k+1}]} \mathrm{Li}(x) - \pi(x) \leqslant \mathrm{Li}(p_{k+1}) - \pi(p_k) = \mathrm{Li}(p_{k+1}) - k$$

et en traçant le graphe des deux fonctions à l'aide de Maple, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mid \pi(x) - \mathrm{Li}(x) \mid &< 2K\frac{x}{\ln^{3/4} x}\exp(-\sqrt{\ln x/R}) \text{ pour } 59 \leqslant x \\
&< 0,44\frac{x}{\ln^{3/4} x}\exp(-\sqrt{\ln x/R}) \text{ pour } 41 \leqslant x
\end{aligned}$$

□

1.8 Autour de l'inégalité $p_{ab} < ap_b + bp_a$.

Proposition 1.11 *Pour $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, ou pour $b = 1$ et $a \geqslant 5$, l'inégalité*

$$p_{ab} > ap_b$$

est vraie.

Preuve : Utilisons la majoration de [13] et la minoration vue précédemment :
(*i*) $p_k \geqslant k(\ln k + \ln_2 k - \alpha)$ avec $\alpha = 1$ pour $k \geqslant 2$,
(*ii*) $p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - \beta)$ avec $\beta = 1/2$ pour $k \geqslant 20$.
Ainsi

$$\begin{aligned} p_{ab} &\geqslant ab(\ln(ab) + \ln_2(ab) - \alpha) && \text{pour } ab \geqslant 2 \\ ap_b &\leqslant ab(\ln b + \ln_2 b - \beta) && \text{pour } b \geqslant 20 \end{aligned}$$

Soit $\Delta = p_{ab} - ap_b$. Minorons Δ pour $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 20$:

$$\begin{aligned} \Delta &\geqslant ab(\ln(ab) + \ln_2(ab) - \alpha) - ab(\ln b + \ln_2 b - \beta) \\ &\geqslant ab\left(\ln a + \beta - \alpha + \ln\left(1 + \frac{\ln a}{\ln b}\right)\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Pour $b \leqslant 19$, utilisons la vraie valeur de p_b et non plus une estimation :

$$\Delta \geqslant a\left(b(\ln(ab) + \ln_2(ab) - \alpha) - p_b\right).$$

Pour que Δ soit positif, il suffit donc de trouver, pour chaque b, le plus petit a vérifiant :

$$b(\ln(ab) + \ln_2(ab) - \alpha) > p_b.$$

Ce que l'on résout à l'aide d'un court programme en Maple :

```
for b from 1 to 19 do
        Pb:=ithprime(b):
        a:=2:
        while evalb(evalf(b*(ln(a*b)+ln(ln(a*b))-1)) < Pb) do
                a:=a+1;
        od;
        print(b,a);
od;
```

Le plus grand des a trouvés est 10. Une rapide vérification pour $2 \leqslant a \leqslant 10$ et $1 \leqslant b \leqslant 19$ montre que l'inégalité $p_{ab} > ap_b$ est fausse pour $b = 1$ et $a = 2, 3, 4$.

Conclusion
L'inégalité $p_{ab} > ap_b$ est vraie pour

$$b \geqslant 2 \text{ et } a \geqslant 2$$

ou

$$b = 1 \text{ et } a \geqslant 5.$$

L'inégalité large est vraie sauf pour $(b = 1, a = 2..4)$. □

Proposition 1.12 *Pour tous $a, b \geqslant 1$, nous avons*

$$p_{ab+2} > ap_{b+1}.$$

Preuve : En utilisant les mêmes inégalités que précédemment, nous avons pour $b+1 \geqslant 20$ et $a \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
p_{ab+2} - ap_{b+1} &\geqslant (ab+2)\left(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1\right) \\
&\quad -a(b+1)\left(\ln(b+1) + \ln_2(b+1) - 1/2\right) \\
&\geqslant ab(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1 \\
&\quad - \ln(b+1) - \ln_2(b+1) + 1/2) \\
&\quad +2(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1) \\
&\quad -a\left(\ln(b+1) + \ln_2(b+1) - 1/2\right) \\
&\geqslant ab\,(\ln(ab+2) - \ln(b+1) + \ln_2(ab+2) - \ln_2(b+1) \\
&\quad -1 + 1/2 + \frac{2}{ab}\left(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1\right) \\
&\quad -\frac{1}{b}\left(\ln(b+1) + \ln_2(b+1) - 1/2\right)\Big) \\
&\geqslant ab\left(\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln(b+1)}\right) - 1 + 1/2\right. \\
&\quad \left. +0 - \frac{1}{b}\left(\ln(b+1) + \ln_2(b+1) - 1/2\right)\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

L'inégalité est démontrée pour $b \geqslant 19$, il reste à voir pour $b \leqslant 18$.

$$\begin{aligned}
p_{ab+2} - ap_{b+1} &\geqslant (ab+2)(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1) - ap_{b+1} \\
&\geqslant a\left(b(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1) - p_{b+1}\right) \\
&\quad +2(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1) \\
&\geqslant a\left(b(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1) - p_{b+1}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver pour chaque b le plus petit a tel que

$$b(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - 1) \geqslant p_{b+1}.$$

Pour toutes les valeurs $b = 1..18$, le plus grand des a trouvés est 17. Il reste à vérifier à la machine que l'inégalité

$$p_{ab+2} > ap_{b+1}$$

est vraie pour $b = 1..18$ et $a \leqslant 16$. □

Proposition 1.13 *Pour tous $a, b \geqslant 1$, nous avons*

$$\frac{ap_{b+1} + bp_{a+1}}{2} < p_{ab+2}.$$

Preuve : D'après la proposition 1.12, $p_{ab+2} > ap_{b+1}$ et symétriquement $p_{ab+2} > bp_{a+1}$. Ainsi

$$2p_{ab+2} > ap_{b+1} + bp_{a+1}.$$

□

Nous voulons maintenant démontrer que $p_{ab} \leqslant ap_b + bp_a$ et ajuster cette formule pour la rendre en un certain sens optimale.

Utilisons un encadrement des nombres premiers donné dans [9] :
(*i*) $p_k \geqslant k(\ln(k) + \ln_2(k) - \alpha)$ avec $\alpha = 1,0072629$ pour $k \geqslant 2$
(*ii*) $p_k \leqslant k(\ln(k) + \ln_2(k) - \beta)$ avec $\beta = 0,9385$ pour $k \geqslant 7022$
Ainsi

- $p_{ab} \leqslant ab(\ln(ab) + \ln_2 ab - \beta) =: A$
- $ap_b + bp_a \geqslant a[b(\ln(b) + \ln_2(b) - \alpha)] + b[a(\ln(a) + \ln_2(a) - \alpha)] =: B$

Il nous faut démontrer que $A \leqslant B$ c'est-à-dire :

$$\ln_2(ab) - \beta \leqslant \ln_2 a + \ln_2 b - 2\alpha. \tag{1.27}$$

Posons $f := A - B$.

Première étape : Prenons $a = b$, l'inégalité devient

$$\begin{array}{rc} & \ln_2(a^2) - \beta \leqslant 2\ln_2(a) - 2\alpha \\ \text{Elle est vérifiée ssi} & a \geqslant \exp(\exp(\ln 2 - \beta + 2\alpha)) \\ \text{ou encore} & a \geqslant 352, \ldots \end{array}$$

Donc pour $a = b = 353$, f est négative et l'inégalité (1.27) est vérifiée. De plus, ∇f est négatif pour $a \geqslant 3$ et $b \geqslant 3$; si a ou b croît (ou les deux) alors $f(a, b)$ décroît. Donc pour $a \geqslant 353$ et $b \geqslant 353$, $f(a, b) \leqslant f(353, 353) \leqslant 0$. Ainsi (1.27) est vérifiée pour $a \geqslant 353$ et $b \geqslant 353$. Les hypothèses sont vérifiées car $ab \geqslant 353^2 \geqslant 7022$.

Deuxième étape : pour $a < 353$ et b quelconque, $p_{ab} - (ap_b + bp_a) \leqslant 0$?

En utilisant (*ii*) pour $k = ab$ et (*i*) pour $k = b$, l'inégalité cherchée est négative lorsque :

$$\begin{array}{lcl} & ab(\ln(ab) + \ln\ln(ab) - \beta) - ab(\ln b + \ln\ln b - \alpha) - bp_a & \leqslant 0 \\ \Longleftrightarrow & a[\ln a + \ln(1 + \frac{\ln a}{\ln b}) - (\beta - \alpha)] - p_a & \leqslant 0 \\ \Longleftrightarrow & a[\ln a + \ln(1 + \frac{\ln a}{\ln b}) - (\beta - \alpha)] & \leqslant p_a \\ \Longleftrightarrow & \frac{\ln a}{\ln b} \leqslant \exp(\frac{p_a}{a} + (\beta - \alpha) - \ln a) - 1 & \\ \text{d'où} & \Leftrightarrow b \geqslant \exp\left(\frac{\ln a}{\exp(\frac{p_a}{a} + (\beta-\alpha) - \ln a) - 1}\right) =: Br(a) & \end{array}$$

Pour que l'inégalité soit vraie, il faut aussi que $ab \geqslant 7022$ d'après (ii). Donc

$$b \geqslant \left\lceil \sup \left(Br(a), \frac{7022}{a} \right) \right\rceil =: S(a)$$

Les valeurs de $S(a)$ sont facilement calculables pour $a \in \{2, .., 353\}$.

Troisième étape : On remarque que pour $a \in \{2, .., 353\}$,

$$aS(a) \leqslant 10^6 \qquad \text{(largement)}$$

L'inégalité cherchée est vérifiée avec un ordinateur grâce à un fichier contenant le premier million de nombres premiers. L'ordinateur trouve qu'elle n'est hélas pas toujours vraie. Elle est en particulier vraie pour

- $a = 4..62$ et $b \geqslant 2715$
- $a = 2, 3$ et $63..90$ avec $b \geqslant a$
- $a > 91$ et $b > 91$

Quatrième étape : pour $a = 1$, l'inégalité est triviale. Lorsque $b < a$, la troisième étape nous permet de trouver les a pour lesquels l'inégalité est vraie en échangeant a et b par symétrie de la formule.

Conclusion

Pour $a > 91$ et $b > 91$, on a

$$\boxed{p_{ab} \leqslant ap_b + bp_a.}$$

Ajustement de la formule

L'idée est de rendre la formule en un certain sens la meilleure possible. Les coefficients des variables ne peuvent être diminués. Montrons en effet que l'on ne peut avoir

$$p_{ab} \leqslant (a-1)p_b + bp_a \tag{1.28}$$

$$p_{ab} \leqslant ap_{b-1} + bp_a \tag{1.29}$$

Pour cela considérons le développement asymptotique ;

Etude de (1.28)

$$\begin{aligned}
A_1 &= (a-1)p_b + bp_a = (a-1)b[\ln(b) + \ln_2 b + O(1)] + ab[\ln a + \ln_2 a + O(1)] \\
&= ab[\ln(ab) + \ln_2 a + \ln_2 b + O(1)] - b(\ln b + \ln_2 b + O(1)) \\
B &= p_{ab} = ab(\ln(ab) + \ln_2(ab) + O(1)) \\
\frac{1}{ab}(A_1 - B) &= \ln_2 a + \ln_2 b - \ln_2(ab) - \frac{b}{ab}(\ln b + \ln_2 b + O(1)) + O(1).
\end{aligned}$$

Posons

$$g(a,b) = \ln_2 a + \ln_2 b - \ln_2(ab) - \frac{1}{a}(\ln b + \ln_2 b + O(1)) + O(1).$$

Remarquons que

$$\lim_{\substack{b\to+\infty\\ a \text{ fixé } >0}} g(a,b) = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a \text{ fixé } >0}} -\frac{1}{a}\ln b = -\infty$$

Donc l'inégalité (1.28) est fausse à l'infini.

Etude de (1.29)

$$\begin{aligned} A_2 &= ap_{b-1} + bp_a \\ &= ab[\ln(b-1) + \ln a + \ln_2 a + \ln_2(b-1) + O(1)] - a[\ln(b-1) + \ln_2(b-1)] \\ A_2 - B &= a[b\ln\left(\frac{b-1}{b}\right) + b\ln_2(b-1) - \ln(b-1) + b\ln_2 a - b\ln_2(ab) + O(b)] \\ &= ah(a,b) \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\lim_{\substack{b\to+\infty\\ a \text{ fixé } \geqslant 16}} h(a,b) = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a \text{ fixé}\geqslant 16}} b\ln_2(a) = +\infty$$

Donc cette inégalité est vraie à l'infini mais n'est pas vraie pour les petites valeurs de a et de b : nous voudrions trouver une formule qui soit vraie pour tout a et tout b entiers positifs.

Une première idée est d'ajuster le premier terme, c'est-à-dire chercher le k tel que, pour tout a et tout b, on a :

$$p_{ab-k} \leqslant ap_b + bp_a.$$

Un étude sur de petites valeurs de a et de b montre que $k = 33$ conviendrait.

La deuxième idée est d'ajuster le deuxième terme puis le premier :

$$p_{ab+2} \leqslant ap_{b+1} + bp_{a+1}?$$

Preuve : Pour montrer cette inégalité, nous reprenons la même méthode. L'étape 1 nous dit que l'inégalité est vraie pour $a, b \geqslant 230$. La deuxième étape est plus difficile à mettre en oeuvre ; la borne ne se calcule plus selon une formule mais en utilisant une méthode dichotomique :

$$\begin{aligned} &ap_{b+1} + bp_{a+1} - p_{ab+2} \geqslant \\ &\quad a(b+1)\left(\ln(b+1) + \ln_2(b+1) - \alpha\right) \\ &\quad + bp_{a+1} - (ab+2)\left(\ln(ab+2) + \ln_2(ab+2) - \beta\right) \end{aligned}$$

Posons cette dernière fonction égale à $f(a,b)$. Nous calculerons, pour $a \in \{2, \cdots, 230\}$ fixé, le plus petit b tel que $f(a,b)$ soit strictement positive par dichotomie. Nous en déduirons une borne pour b (on remarque que celles-ci sont plus petites que les $Br(a)$ précédentes).Un test identique à la troisième étape nous montre que l'inégalité

$$p_{ab+2} \leqslant ap_{b+1} + bp_{a+1}$$

est vraie dans tous les cas ($a > 0$ et $b > 0$). □

1.9 Conjecture de MANDL

Nous voulons montrer la conjecture de ROBERT MANDL énoncée dans l'article de ROSSER & SCHOENFELD paru en 1975 dans *Math. Of Computation* p. 243.

Théorème 1.14 *Pour $n \geqslant 9$, nous avons*

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)/n < \frac{1}{2} p_n.$$

En effet, à l'infini,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{n^2}{2} \left(\ln n + \ln_2 n - 3/2 + o(1) \right)$$

et

$$\frac{n}{2} p_n = \frac{n^2}{2} \left(\ln n + \ln_2 n - 1 + o(1) \right).$$

Pour la démonstration, nous allons utiliser les lemmes suivants :

Lemme 1.5 *Pour $x \geqslant 11$,*

$$Li(x) \geqslant \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right).$$

Preuve : Soit $f(x) = \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)$. Comparons les dérivées des deux fonctions :

$$\mathrm{Li}'(x) = \frac{1}{\ln x}$$

et

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{\ln^3 x}.$$

Il est clair que $\mathrm{Li}'(x) > f'(x)$. Comme $\mathrm{Li}(11) > f(11)$, le résultat est prouvé. □

Lemme 1.6 *Nous avons les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{u}{\ln u} du &= Li(x^2) - Li(a^2). \\ \int_a^x \frac{u}{\ln^2 u} du &= \left[2Li(u^2) - \frac{u^2}{\ln u} \right]_a^x. \end{aligned}$$

Preuve :

$$\mathrm{Li}(x^2) - \mathrm{Li}(a^2) = \int_{a^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

On fait le changement de variable suivant : $u = \sqrt{t}$. On obtient

$$\mathrm{Li}(x^2) - \mathrm{Li}(a^2) = \int_a^x \frac{udu}{\ln u}.$$

Pour l'autre intégrale, on intègre par parties $u' = 1/(t \ln^2 t)$ et $v = t^2$, on obtient

$$\int_a^x \frac{u}{\ln^2 u} du = \left[-\frac{t^2}{\ln t} \right]_a^x + 2 \int_a^x \frac{t}{\ln t} dt.$$

□

Preuve : [du théorème 1.14] Utilisons les intégrales de Stieltjes :

$$\sum_{i=1}^n p_i = \int_{2^-}^{p_n} t d\pi(t) = p_n \pi(p_n) - \int_2^{p_n} \pi(t) dt.$$

Montrons que

$$\int_2^{p_n} \pi(t) dt > \frac{n}{2} p_n.$$

Utilisons la minoration de $\pi(x)$ valable pour $x \geqslant 599$:

$$\pi(t) \geqslant \frac{t}{\ln t} \left(1 + \frac{1}{\ln t} \right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_2^{p_n} \pi(t) dt &\geqslant \int_2^{599} \pi(t) dt + \int_{599}^{p_n} \frac{t}{\ln t} \left(1 + \frac{1}{\ln t} \right) dt \\ &= \int_2^{599} \pi(t) dt + 3\mathrm{Li}(p_n^2) - \frac{p_n^2}{\ln p_n} - 3\mathrm{Li}(599^2) + \frac{599^2}{\ln 599} \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 1.6. Posons $C = \int_2^{599} \pi(t) dt - 3\mathrm{Li}(599^2) + \frac{599^2}{\ln 599}$. En utilisant le lemme 1.5, on obtient

$$\int_2^{p_n} \pi(t) dt \geqslant C + \frac{p_n^2}{2 \ln p_n} \left(1 + \frac{3}{2 \ln p_n} \right).$$

Calculons C.

$$\int_2^{599} \pi(t) dt = \sum_{i=1}^{108} \pi(p_i)(p_{i+1} - p_i) = 35995.$$

Ainsi $C \approx -47,1$. De plus, comme

$$\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1,3}{\ln x} \right) \geqslant \pi(x) \text{ pour } x > 1,$$

on a, pour $n \geqslant 109$ ($p_{109} = 599$),

$$\frac{p_n}{\ln p_n}\left(1+\frac{3}{2\ln p_n}\right) > \pi(p_n) + \frac{0,2\cdot 599}{\ln^2 599}.$$

Donc, pour $n \geqslant 109$,

$$\int_2^{p_n} \pi(t)dt \geqslant C + \frac{p_n}{2}\frac{p_n}{\ln p_n}\left(1+\frac{3}{2\ln p_n}\right) > \frac{p_n}{2}\pi(p_n).$$

Une vérification machine permet de conclure pour $9 \leqslant n \leqslant 109$. □

D'après la section précédente, nous avons $2p_n < p_{2n}$ et donc

$$p_{n/2} < \frac{1}{2}p_n.$$

Où se situe $p_{n/2}$ par rapport à $\sum p_i/n$? Comme

$$p_{n/2} = \frac{n}{2}\left(\ln n + \ln\ln n - 1 - \ln 2 + o(1)\right),$$

G. ROBIN m'a proposé une conjecture pour la borne inférieure de la moyenne des n premiers :

Proposition 1.14 *Pour $n \geqslant 2$, nous avons*

$$p_{\left[\frac{n}{2}\right]} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Pour la démonstration, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.7 *Soit*

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

Alors, pour $k \geqslant 305494$,

$$S_k \geqslant \frac{k^2}{2}\left(\ln k + \ln_2 k - 3/2\right).$$

<u>Preuve</u> : Nous reprenons ici la même démonstration que MASSIAS & ROBIN [6] pour obtenir une minoration de S_k. Posons

$$\begin{aligned} s(k) &= \frac{k^2}{2}\left(\ln k + \ln_2 k - 3/2\right) \\ f(k) &= s(k) - k\ln k \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(k) &= k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{1}{2\ln k}\right) - \ln k - 1 \\ f''(k) &= \ln k + \ln_2 k + \frac{3}{2\ln k} - \frac{1}{\ln^2 k} - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire le développement de TAYLOR de f entre k et $k+1$ sous la forme :

$$f(k+1) - f(k) = f'(k) + \frac{f''(k_1)}{2} \qquad \text{avec } k < k_1 < k+1.$$

Comme f'' est croissante, nous obtenons

$$f(k+1) - f(k) \leqslant f'(k) + \frac{f''(k+1)}{2} \leqslant f'(k) + \ln k.$$

Comme (Théorème 1.6)

$$p_k \geqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln\ln k - 2,25}{\ln k}\right)$$

pour $k \geqslant 2$, il vient pour $k \geqslant \exp\exp(2,75)$,

$$p_k \geqslant f(k+1) - f(k).$$

Pour $k_0 = 10^6$,

$$S_{k_0-1} \geqslant f(k_0).$$

Supposons que $S_{k-1} \geqslant f(k)$ est vraie jusqu'au rang k. Alors

$$S_k = S_{k-1} + p_k \geqslant f(k) + p_k \geqslant f(k+1).$$

Donc, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$S_{k-1} \geqslant f(k)$$

ce qui implique $S_k \geqslant s(k)$ comme $p_k \geqslant k \ln k$. Une vérification directe montre que

$$S_k \geqslant s(k) \qquad \text{pour } k \geqslant 305494.$$

$\square$

Preuve : (de la proposition 1.14) Comme, pour $k \geqslant 27076$, on a d'après le théorème 1.7,

$$p_k \leqslant k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 1,8}{\ln k}\right),$$

b	m	δ	ε
$18,42$	2	$0,000240625$	$0,001186414$
19	2	$0,000184375$	$0,000941647206$
20	2	$0,000128125$	$0,0006302$
21	2	$0,0000775$	$0,000419768506$
22	2	$0,000049375$	$0,000278652$
23	2	$13/400000$	$0,0001843645$
24	2	$17/800000$	$0,000121611962$
25	2	$0,0000128125$	$0,00007998895869$
30	3	$0,94375 * 10^{-6}$	$0,9778040657 * 10^{-5}$
50	18	$0,947265625 * 10^{-8}$	$0,9049928595 * 10^{-7}$
100	18	$0,9305664063 * 10^{-8}$	$0,8842626429 * 10^{-7}$
200	17	$0,95078125 * 10^{-8}$	$0,8561316979 * 10^{-7}$
400	16	$0,9411132813 * 10^{-8}$	$0,8000089705 * 10^{-7}$
600	15	$0,9296875 * 10^{-8}$	$0,7442047763 * 10^{-7}$
1000	13	$0,905078125 * 10^{-8}$	$0,6337118668 * 10^{-7}$
1300	11	$0,919140625 * 10^{-8}$	$0,5518819789 * 10^{-7}$
1500	10	$0,905078125 * 10^{-8}$	$0,4980115883 * 10^{-7}$
1800	9	$0,83828125 * 10^{-8}$	$0,41913371 * 10^{-7}$
2000	8	$0,8171875 * 10^{-8}$	$0,3674711889 * 10^{-7}$
2300	6	$0,83125 * 10^{-8}$	$0,2917036 * 10^{-7}$
2500	5	$0,8171875 * 10^{-8}$	$0,243946 * 10^{-7}$
2750	4	$0,746875 * 10^{-8}$	$0,18769435073 * 10^{-7}$
3000	3	$0,690625 * 10^{-8}$	$0,137602 * 10^{-7}$
3500	2	$0,409375 * 10^{-8}$	$0,61653 * 10^{-8}$
4000	2	$0,1562500000 * 10^{-8}$	$0,2405714403 * 10^{-8}$

Table 1.1: $|\psi(x) - x| \leqslant \varepsilon x$ pour $x \geqslant \exp(b)$

on a, pour $n \geqslant 54152$,

$$np_{n/2} \leqslant \frac{n^2}{2}\left(\ln n + \ln_2 n - 1 - \ln 2 + \frac{\ln_2 n - 1,8}{\ln n - \ln 2}\right) \leqslant S_n.$$

Une vérification directe montre que

$$np_{n/2} \leqslant S_n \qquad \text{pour } k \leqslant 305494.$$

$\square$

Conclusion : la moyenne des n premiers nombres premiers est comprise entre le terme médian et le dernier terme divisé par deux.

x	$\theta(x) \geqslant \cdot$	$\theta(x) \leqslant \cdot$
1000	947.8	966.3
10000	9872.4	9930.1
10^5	99624.9	99779.3
200000	199445.0	199629.8
500000	499216.3	499468.0
10^6	998357.3	998668.6
2000000	1998421.0	1998812.1
5000000	4998331.1	4998889.9
10^7	9994872.2	9995589.7
20000000	19995425.3	19996352.2
50000000	49993085.2	49994491.2
10^8	99986933.8	99988722.5
200000000	199981158.2	199983578.4
500000000	499982199.5	499985664.2
10^9	999966797.9	999971596.9
2000000000	1999938007.6	1999944598.4
5000000000	4999901997.2	4999911609.0
10^{10}	9999933799.8	9999946821.9
20000000000	19999813136.0	19999831825.3
50000000000	49999714959.0	49999744514.5
80000000000	79999702170.2	79999737244.0
10^{11}	99999720459.8	99999757299.3

Table 1.2: Encadrement de $\theta(x)$ pour x donné.

Bibliographie

[1] R. P. Brent, “Irregularities in the Distribution of Primes and Twin Primes”, *Math. Of Computation*, Vol. **29**, Number 129 (January 1975) pp. 43-56.
UMT, *Math. Of Computation*, Vol. **30**, Number 134 (April 1976) p. 379.

[2] E. Cesaro, “Sur une formule empirique de M. Pervouchine”, *Comptes rendus hebdo. des séances de l'académie des sciences*, Vol. **CXIX**, (1895) pp. 848-849.

[3] M. Cipolla, “La determinazione assintotica dell'n^{imo} numero primo”, *Matematiche Napoli*, Vol. **3**, (1902) pp. 132-166.

[4] W.J. Ellison & M. Mendès France, “Les nombres premiers”, Hermann, Paris (1975)

[5] J. van de Lune, H. J. J. te Riele & D.T. Winter, “On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip.IV” *Math. Of Computation*, Vol. **46**, Number 174 (April 1986) pp. 667-681.

[6] Jean-Pierre Massias & Guy Robin, “Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers”, *Publication Département Math. de Limoges* et *Journal Th. Nombres de Bordeaux*, Vol. **8** (1996) pp. 213-238.

[7] N. Costa Pereira, “Estimates for the Chebyshev Function $\psi(x) - \theta(x)$”, *Math. Of Computation*, Vol. **44**, Number 169 (January 1985) pp. 211-221.

[8] Hans Riesel, “Prime Numbers and Computer Methods for Factorization”, Birkhäuser (1985)

[9] Guy Robin, “Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le $k^{ième}$ nombre premier et grandes valeurs de la fonctions $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n”, *Acta Arithmetica*, vol. **42**, numéro 4 (1983) pp. 367-389.

[10] Guy Robin, “Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques”, *Publications de l'institut mathématique de Beograd*, tome 43 (57), (1988) pp. 17-25.

[11] J. Barkley Rosser, “the n-th prime is greater than $n \log n$”, *Proc. London Math. Soc. (2)*, Vol. **45**, (1939) pp. 21-44.

[12] J. Barkley Rosser, “Explicit Bounds for some functions of prime numbers”, *Amer. J. Math.*, Vol. **63**, (1941) pp. 211-232.

[13] J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, "Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers", *Illinois Journal Math.* **6** (1962) pp. 64-94.

[14] J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, "Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$", *Math. Of Computation*, Vol. **29**, Number 129 (January 1975) pp. 243-269.

[15] Bruno Salvy, "Fast computation of some asymptotic functional inverses", *J. Symbolic Computation*, Vol. **17**, (1994) pp. 227-236.

[16] Lowell Schoenfeld, "Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$.II", *Math. Of Computation*, Vol. **30**, Number 134 (April 1976) pp. 337-360.

Chapitre 2

Autour de la conjecture d'Hardy-Littlewood

Résumé

Nous étudierons sur quels domaines la conjecture d'Hardy-Littlewood

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$$

est vraie et nous mettrons en évidence que cette conjecture est incompatible avec une généralisation de la conjecture des nombres premiers jumeaux (Conjecture des k-uples).

2.1 Conjecture d'Hardy-Littlewood

2.1.1 Introduction

La fonction arithmétique $\pi(x)$, qui compte les nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est une fonction importante en théorie des nombres.

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Ainsi $\pi(2) = 1$, car 2 est compté comme étant le premier nombre premier, $\pi(10) = 4$ car il y a 4 premiers plus petits que 10.

Maintenant que la fonction $\pi(x)$ est présentée, nous aimerions savoir si elle a la propriété de sous-additivité, c'est-à-dire :

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y) \qquad \text{pour } x, y \text{ entiers} \geqslant 2. \tag{2.1}$$

On remarque que $y = 1$ ne convient pas car si on prend $x = p - 1$ où p est un nombre premier différent de 3, on a $\pi(x+y) = \pi(p)$ et $\pi(x) + \pi(y) = \pi(p-1) + \pi(1) = \pi(p) - 1$.

En fait, (2.1) suppose qu'il n'y a pas d'intervalle $[x+1, x+y]$ de longueur y qui contienne plus de nombres premiers que l'intervalle $[1, y]$. Cela est concevable car, en vertu du théorème des nombres premiers, la densité des nombres premiers décroît $d = \frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x}$ mais il se trouve que c'est une conjecture bien connue émise par Hardy et Littlewood en 1923 (seconde conjecture de Hardy-Littlewood). Même si (2.1) n'est pas encore prouvée, certains résultats intéressants ont été trouvés.

- Landau [4] a prouvé en 1901 que $\pi(2x) < 2\pi(x)$ pour x assez grand. En précisant cette idée, Rosser et Schoenfeld ont montré que $\pi(2x) \leqslant 2\pi(x)$ pour x réel $\geqslant 3$. Par suite, on trouve que la conjecture (2.1) est vraie dans le cas particulier où $y = x$, en vérifiant aussi que $\pi(4) \leqslant 2\pi(2)$.
- A. Schinzel et W. Sierpiǹski [13] ont montré en 1958 que (2.1) est vraie pour x ou $y \leqslant 132$ et A. Schinzel [14] l'a étendu jusqu'à 146.
- Segal [15] a montré que (2.1) était vraie pour $x + y \leqslant 101081$ en 1962.
- Karanikolov [3] a montré que

$$\pi((1+\varepsilon)x) < (1+\varepsilon)\pi(x) \qquad \text{pour } \varepsilon \geqslant \sqrt{e} - 1 \text{ et } x \geqslant 347.$$

- V. Şt. Udrescu [16] a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tous $x, y \geqslant 17$ avec $x + y \geqslant 1 + \exp(4(1 + \frac{1}{\varepsilon}))$,

$$\pi(x+y) < (1+\varepsilon)(\pi(x) + \pi(y)).$$

La conjecture est donc "ε-exacte".

Nous cherchons à démontrer une inégalité légèrement plus forte : savoir pour quelles valeurs de x et ε nous avons

$$\pi((1+\varepsilon)x) \leqslant \pi(x) + \pi(\varepsilon x).$$

Cela revient à préciser le "x suffisamment grand" dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 *(Udrescu) [16]*
Si $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *et* $\varepsilon x \leqslant y \leqslant x$,

$$\pi(x+y) < \pi(x) + \pi(y)$$

pour x et y suffisamment grands.

- De plus, on peut trouver une infinité de couple d'entiers (x, y) tels que $\pi(x+y) < \pi(x) + \pi(y)$. Prenons $x = (p-1)!$ où p est un nombre premier > 3. Alors pour tout y entier $\geqslant 2$ et $< p$, on a

  $$\pi(y + (p-1)!) = \pi((p-1)!) < \pi(y) + \pi((p-1)!),$$

  car aucun entier de l'intervalle $[1 + (p-1)!, p-1 + (p-1)!]$ n'est premier (l'entier $1 + (p-1)!$ n'est pas premier car divisible par p d'après le théorème de Wilson).
- Mais on ne peut avoir l'inégalité stricte $\pi(x+y) < \pi(x) + \pi(y)$ pour x, y assez grands car c'est incompatible avec la conjecture des nombres premiers jumeaux (Prendre $x = p$, $y = 2$ avec $p+2$ premier).
  C'est peut-être en développant cette idée que D. Hensley et I. Richards [2, 6] ont montré que (2.1) est incompatible avec une autre conjecture bien connue, celle des k-uples premiers [1]. Ils ont prouvé qu'il peut exister des k-uples admissibles qui sont plus denses que le début de la série des nombres premiers (Voir [2, 6] et Section 2).

Nous nous proposons cependant de montrer que 99% des couples (x, y) d'entiers $\geqslant 2$ vérifient (2.1) et en fait qu'il en est de même pour presque tout couple (x, y).

2.1.2 Nouvelle forme de la conjecture

Pour cela reprenons l'idée de Segal [15] qui est de trouver une équivalence entre (2.1) et une relation utilisant des nombres premiers. Nous redémontrons un résultat équivalent au théorème I de Segal [15] d'une manière plus simple. Rappelons ici quelques notations : Désignons par p_k le k-ième nombre premier ($p_1 = 2$) et posons $\ln_2(x) := \ln \ln x$.

[1] tout k-uple admissible apparaît infiniment souvent avec tous ces composants premiers, et le nombre asymptotique d'apparitions $\leqslant x$ est $\Omega(x/(\ln x)^k)$.

Proposition 2.1 *Soient k et l deux entiers. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $p_k + p_l \leqslant p_{k+l-1}$
(ii) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[p_{k-1}, p_k[$ et tout y appartenant à $[p_{l-1}, p_l[$,

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$. Nous avons $p_{k-1} \leqslant x < p_k$ et $p_{l-1} \leqslant y < p_l$.

$$x + y < p_k + p_l \tag{2.2}$$
$$\text{nous donne} \quad \pi(x+y) \leqslant \pi(p_k + p_l - 1). \tag{2.3}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &\text{de } \; p_{k-1} \leqslant x, \quad \text{il vient} \quad \pi(p_{k-1}) \leqslant \pi(x);\\ &\text{de } \; p_{l-1} \leqslant y, \quad \text{il vient} \quad \pi(p_{l-1}) \leqslant \pi(y). \end{aligned}$$

En sommant de chaque côté des inégalités,

$$\pi(p_{k-1}) + \pi(p_{l-1}) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$

Or $\pi(p_{k-1}) + \pi(p_{l-1}) = k + l - 2 = \pi(p_{k+l-2})$ et ainsi

$$\pi(p_{k+l-2}) \leqslant \pi(x) + \pi(y). \tag{2.4}$$

Comme, par hypothèse, $p_k + p_l \leqslant p_{k+l-1}$ alors $p_k + p_l - 1 \leqslant p_{k+l-1} - 1$ et

$$\pi(p_k + p_l - 1) \leqslant \pi(p_{k+l-1} - 1) = \pi(p_{k+l-2}).$$

En reprenant (2.3) et (2.4), il s'ensuit que

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Prenons $x = p_k - \frac{1}{2}$ et $y = p_l - \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\pi(x) + \pi(y) = k + l - 2 \qquad \text{et} \qquad \pi(x+y) = \pi(p_k + p_l - 1);$$

Par hypothèse, $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$ et il vient $\pi(p_k + p_l - 1) \leqslant k + l - 2$ c'est-à-dire $p_k + p_l - 1 \leqslant p_{k+l-1} - 1$. □

On peut déduire de la proposition 2.1 le théorème suivant (annoncé démontré par [10]) :

Théorème 2.2 $\pi(2x) \leqslant 2\pi(x)$ *pour x réel $\geqslant 3$ ou pour $x \in [0; 1[\bigcup[2; \frac{5}{2}[$.*

Preuve : Montrons que
$$2p_k \leqslant p_{2k-1}.$$
Utilisons les encadrements des p_k donnés dans le chapitre précédent et dans [9] :
$$\begin{aligned} p_k &\geqslant k(\ln k + \ln_2 k - 1) \text{ pour } k \geqslant 2 \\ p_k &\leqslant k(\ln k + \ln_2 k - 1/2) \text{ pour } k \geqslant 20 \end{aligned}$$
Posons $D = p_{2k-1} - 2p_k \geqslant (2k-1)(\ln(2k-1) + \ln_2(2k-1) - 1) - 2k(\ln(k) + \ln_2(k) - \frac{1}{2})$. Pour $k \geqslant 20$, les inégalités sont vérifiées et D est positif. On vérifie que $2p_k \leqslant p_{2k-1}$ pour $k = 3..20$. En utilisant la proposition 2.1, nous en déduisons que $\pi(2x) \leqslant 2\pi(x)$ pour x réel plus grand que $p_2 = 3$. Une étude de cas permet d'achever la démonstration :

- pour $2 \leqslant x < 3$, $\pi(x) = \pi(2) = 1$. Pour que $\pi(2x) \leqslant 2\pi(x)$, il faut que $\pi(2x) \leqslant 2$, c'est-à-dire $2x < 5$.
- pour $0 \leqslant x < 2$, $\pi(x) = 0$. Pour que $\pi(2x) \leqslant 2\pi(x)$, il faut que $\pi(2x) = 0$, c'est-à-dire $2x < 2$.

En rassemblant tous les cas, le théorème est prouvé. □

Enonçons un résultat voisin de la proposition 2.1 mais dans lequel x est entier.

Proposition 2.2 *Soient k et l deux entiers. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $p_k + p_l - 1 \leqslant p_{k+l-1}$
(ii) pour tout x entier appartenant à l'intervalle $[p_{k-1}, p_k[$ et tout y entier appartenant à $[p_{l-1}, p_l[$,
$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$. Nous avons $p_{k-1} \leqslant x < p_k$ et $p_{l-1} \leqslant y < p_l$.

Comme $x + y \leqslant p_k + p_l - 2$, il vient
$$\pi(x+y) \leqslant \pi(p_k + p_l - 2). \tag{2.5}$$
D'autre part,
$$\pi(p_{k+l-2}) = \pi(x) + \pi(y). \tag{2.6}$$
Comme, par hypothèse, $p_k + p_l - 1 \leqslant p_{k+l-1}$ alors $p_k + p_l - 2 \leqslant p_{k+l-1} - 1$ et
$$\pi(p_k + p_l - 2) \leqslant \pi(p_{k+l-1} - 1) = \pi(p_{k+l-2}).$$
En reprenant (2.5) et (2.6), il s'ensuit que
$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$
$(ii) \Rightarrow (i)$. Prenons $x = p_k - 1$ et $y = p_l - 1$. Ainsi $\pi(x) + \pi(y) = k + l - 2$ et $\pi(x+y) = \pi(p_k + p_l - 2)$. Comme $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$, $\pi(p_k + p_l - 2) \leqslant k + l - 2$ ou encore $p_k + p_l - 2 \leqslant p_{k+l-1} - 1$. □

Corollaire 2.1 *Pour tout n entier supérieur ou égal à 2,*

$$\pi(2n) \leqslant 2\pi(n).$$

Théorème 2.3 *(*Segal *[15] Théorème 1) (2.1) est vraie pour tous entiers $x, y \geqslant 2$, si et seulement si pour tout entier $n \geqslant 3$ et tout entier q, $1 \leqslant q \leqslant (n-1)/2$,*

$$p_n \geqslant p_{n-q} + p_{q+1} - 1 \qquad \textit{est vraie.}$$

La proposition 2.2 est équivalente au théorème 2.3. Nous pouvons écrire la seconde conjecture de Hardy-Littlewood (2.1) sous la forme :

Conjecture 2.1 *Pour tous $k, l \geqslant 2$, on a*

$$p_k + p_l - 1 \leqslant p_{k+l-1}.$$

2.1.3 Théorèmes

Dans toute cette partie, nous prendrons $y \leqslant x$, ce qui ne restreint pas la généralité. Nous allons considérer l'inégalité (i) de la proposition 2.1 :

$$p_k + p_l \leqslant p_{k+l-1} \tag{2.7}$$

qui implique celle de la proposition 2.2.

Théorème 2.4 *L'inégalité (2.7)* $\quad p_k + p_l \leqslant p_{k+l-1}$ *est vraie si $1/109 \leqslant \frac{l}{k} \leqslant 109$ avec $k, l \geqslant 3$.*

Preuve : Posons $\gamma = \frac{l}{k}$. Utilisons les encadrements des p_k

$$k(\ln k + \ln_2 k - \alpha) \leqslant p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - \beta) \tag{2.8}$$

de façon formelle pour l'instant. Des valeurs numériques de α et β peuvent être trouvées dans [9, 8, 5].

$$\begin{aligned}
p_{k+\gamma k-1} - p_k - p_{\gamma k} &\geqslant ((\gamma+1)k-1)\left(\ln((\gamma+1)k-1) + \ln_2((\gamma+1)k-1) - \alpha\right) \\
&\quad -k(\ln k + \ln_2 k - \beta) \\
&\quad -\gamma k(\ln(\gamma k) + \ln_2(\gamma k) - \beta) \\
&= k((\gamma+1)\ln(\gamma+1) - \alpha(\gamma+1) + \beta(1+\gamma) - \gamma\ln\gamma) \\
&\quad +(\gamma+1)k\ln\left(1 - \frac{1}{(1+\gamma)k}\right) + \gamma k\ln\left(\frac{\ln(k+\gamma k-1)}{\ln k}\right) \\
&\quad +k\ln\left(\frac{\ln(k+\gamma k-1)}{\ln\gamma k}\right) \\
&\quad -(\ln((1+\gamma)k-1) + \ln_2(k+\gamma k-1) - \alpha).
\end{aligned}$$

On pose cette dernière expression égale à $f(k,\gamma)$.

$$f(k,\gamma) \;=\; k((\gamma+1)(\ln(\gamma+1)-\alpha+\beta)-\gamma\ln\gamma)+o(k)$$

Pour que la différence $p_{k+\gamma k-1}-p_k-p_{\gamma k}$ soit positive à partir d'un certain rang, il est suffisant que $\lim_{k\to+\infty} f(k,\gamma)\geqslant 0$ ou plus simplement que $(\gamma+1)(\ln(\gamma+1)-\alpha+\beta)-\gamma\ln\gamma>0$. Pour $\alpha=1$ et $\beta=0,9484$, cette dernière hypothèse est vérifiée pour $1/109\leqslant\gamma\leqslant 1$. En utilisant les résultats de [8], nous prendrons $k\geqslant 39017$ et $\gamma k=l\geqslant 39017$ pour que l'application des inégalités (2.8) soient vraies.

A ce niveau de la démonstration, nous avons trouvé pour quelles valeurs de γ on peut espérer que $f(k,\gamma)\geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

Montrons que $f(k,\gamma)$ est une fonction croissante de γ pour k fixé.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(k,\gamma)}{\partial\gamma} &= k\left(\ln(k+\gamma k-1)+\ln_2(k+\gamma k-1)-\alpha\right)\\
&\quad+(k+\gamma k-1)\left(\frac{k}{k+\gamma k-1}+\frac{k}{(k+\gamma k-1)\ln(k+\gamma k-1)}\right)\\
&\quad-k\left(\ln(\gamma k)+\ln_2(\gamma k)-\beta\right)-\gamma k\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma\ln(\gamma k)}\right)\\
&= k\left(\ln(k+\gamma k-1)+\ln_2(k+\gamma k-1)-\alpha\right)+\frac{k}{\ln(k+\gamma k-1)}\\
&\quad-k\left(\ln(\gamma k)+\ln_2(\gamma k)-\beta\right)-\frac{k}{\ln(\gamma k)}\\
&= k\left[\ln(\gamma+1-\frac{1}{k})+\ln(\ln(\gamma+1-\frac{1}{k})+\ln k)-\alpha\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\ln(k+\gamma k-1)}-\ln\gamma-\ln_2(\gamma k)+\beta-\frac{1}{\ln(\gamma k)}\right]\\
&= k\left[\ln(1/\gamma+1-\frac{1}{\gamma k})-\alpha+\beta+\ln\left(1+\frac{\ln(\gamma+1-\frac{1}{k})-\ln\gamma}{\ln(\gamma k)}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\ln(k+\gamma k-1)}-\frac{1}{\ln(\gamma k)}\right]\\
&\geqslant k\left[\ln(1/\gamma+1-\frac{1}{\gamma k})-\alpha+\beta-\frac{1}{\ln(\gamma k)}\right]\ \text{ pour } \gamma\leqslant 1, k\geqslant 2\\
&\geqslant k\left[\ln(2-\frac{109}{k})-\alpha+\beta-\frac{1}{\ln(k/109)}\right]\ \text{ pour } \frac{1}{109}\leqslant\gamma\leqslant 1\\
&\geqslant 0 \text{ dès que } k\geqslant 660
\end{aligned}$$

Montrons que $f(k,\gamma)$ est croissante par rapport à k pour γ fixé.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(k,\gamma)}{\partial k} &= (1+\gamma)\left(\ln(k+\gamma k-1)+\ln_2(k+\gamma k-1)-\alpha\right)\\
&\quad (1+\gamma)\left(1+\frac{1}{\ln(k+\gamma k-1)}\right)-(\ln k+\ln_2 k-\beta)\\
&\quad -1-\frac{1}{\ln k}-\gamma-\frac{\gamma}{\ln(\gamma k)}-\gamma\left(\ln(\gamma k)+\ln_2(\gamma k)-\beta\right)\\
&= (1+\gamma)\left(\ln(k+\gamma k-1)+\ln_2(k+\gamma k-1)-\alpha+\frac{1}{\ln(k+\gamma k-1)}\right)\\
&\quad -(\ln k+\ln_2 k-\beta+\frac{1}{\ln k})\\
&\quad -\gamma\left(\ln(\gamma k)+\ln_2(\gamma k)-\beta+\frac{1}{\ln(\gamma k)}\right)\\
&= \ln(1+\gamma-\frac{1}{k})+\ln(1+\frac{\ln(1+\gamma-\frac{1}{k})}{\ln k})-\alpha+\beta-\frac{\ln(1+\gamma-\frac{1}{k})}{\ln(k)\ln(k+\gamma k-1)}\\
&\quad +\gamma\left[\ln(1+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma k})+\ln(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma k})}{\ln(\gamma k)})\right.\\
&\quad \left.-\alpha+\beta-\frac{\ln(1+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma k})}{\ln(\gamma k)\ln(k+\gamma k-1)}\right]\\
&\geqslant \ln(1+\gamma-\frac{1}{k})+(\beta-\alpha)(1+\gamma)+\gamma\ln(1+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma k})\\
&\quad +\ln\left(1+\frac{\ln(1+\gamma-1/k)}{\ln k}\right)-\frac{\ln(1+\gamma-1/k)}{\ln k\ln(k+\gamma k-1)}\\
&\quad +\gamma\left(\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/\gamma+1/(\gamma k))}{\ln(\gamma k)}\right)-\frac{\ln(1+1/\gamma+1/(\gamma k))}{\ln(\gamma k)\ln(k+\gamma k-1)}\right)\\
&\geqslant \ln(1+\gamma)+(\beta-\alpha)(1+\gamma)+\gamma\ln(1+\frac{1}{\gamma})\geqslant 0
\end{aligned}$$

La fonction minorante est clairement croissante par rapport à k et est positive pour $k\geqslant 180$ pour $\gamma=1/109$. En conséquence, $f(k,1/109)$ est croissante au moins pour $k\geqslant 180$.

Maintenant en utilisant les propriétés précédentes, on montre que :
Pour $\gamma=1/109..1$ et $k\geqslant 39017$, $f(k,\gamma)\geqslant f(k,\frac{1}{109})\geqslant f(39017,\frac{1}{109})>0$.

On vérifie à la machine que l'inégalité (2.7) $p_k+p_l\leqslant p_{k+l-1}$ est vraie pour $2\leqslant l\leqslant 39017$ et $l\leqslant k\leqslant 109l$: on peut vérifier cette inégalité en utilisant un ordinateur disposant des nombres premiers jusqu'à $8\cdot 10^7$ et d'un peu de temps ou en utilisant la démonstration suivante :

Soit

$$p(k, coeff) := k\left(\ln(k) + \ln(\ln(k)) - coeff\right).$$

Nous utiliserons deux encadrements des p_k :

$$p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - 0,9484) \quad \text{pour } k \geqslant 39017$$

et

$$p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - 0,935) \quad \text{pour } k \geqslant 7014.$$

Pour l fixé ($l = 415..39017$) et k variant de 39017 à $109l$, posons

$$h_1(k,l) := p(k+l-1, 1) - p(k, 0.9484) - p_l$$

et pour k variant de $\max(7014, l)$ à 39017,

$$h_2(k,l) := p(k+l-1, 1) - p(k, 0.935) - p_l.$$

Montrons que ces fonctions ont les propriétés suivantes :

- h_1 est concave pour l fixé et pour $k \in [7014, 109l]$.
- h_2 est concave pour l fixé et pour $k \in [\max(7014, l), 39017]$.
- Pour l variant de 415 et 39017, $h_1(39017, l)$ et $h_1(109l, l)$ sont positifs.
- Pour l variant de 415 et 39017, $h_2(415, l)$ et $h_2(39017, l)$ sont positifs.

Montrons la concavité des fonctions h_1 et h_2.

$$\begin{aligned}
h_l''(k) &= \frac{1}{k+l-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+l-1)\ln(k+l-1)} - \frac{1}{k\ln k} \\
&\quad - \frac{1}{(k+l-1)\ln^2(k+l-1)} + \frac{1}{k\ln^2 k} \\
&= \frac{1}{k(k+l-1)}\left[-l+1+\frac{-(l-1)\ln(k+l-1) - k\ln\left(1+\frac{l-1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+l-1)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{2k\ln\left(1+\frac{l-1}{k}\right)}{\ln k\ln^2(k+l-1)} + \frac{l-1}{\ln^2 k} + \frac{k\ln^2\left(1+\frac{l-1}{k}\right)}{(\ln k\ln(k+l-1))^2}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2k^2}\left[-l_1+1+\frac{-(l_1-1)\ln(k+l_1-1) - k\ln\left(1+\frac{l_1-1}{k}\right)}{\ln k\ln(k+l_2-1)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{2k\ln\left(1+\frac{l_2-1}{k}\right)}{\ln k\ln^2(k+l_1-1)} + \frac{l_2-1}{\ln^2 k} + \frac{k\ln^2\left(1+\frac{l_2-1}{k}\right)}{(\ln k\ln(k+l_1-1))^2}\right] \quad \text{pour } l = l_1..l_2 \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

On choisit $l_1 = 414$ et $l_2 = 39017$ et on montre que h_1 est concave pour $k \geqslant 39017$. On choisit $l_1 = 414$ et $l_2 = k$ et on montre que h_2 est concave pour $k \geqslant 7014$.

Un court programme informatique en `Maple` permet de vérifier que, pour chaque $l \in [415, 39017]$, on a

$$h_1(39017, l), h_1(109l, l), h_2(415, l) \text{ et } h_2(39017, l) \text{ sont positifs.}$$

Par concavité, il vient que :

$$\text{Pour } l = 415..39017,\ h_1(k) \geqslant 0 \text{ pour } k \in [39017, 109l].$$

Et ainsi, pour $l = 415..39017$ et $k = 39017..109l$,

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \geqslant h_l(k) \geqslant 0.$$

De même, pour $l = 415..39017$ et $k = \max(l, 7014)..39017$,

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \geqslant h_l(k) \geqslant 0.$$

Une vérification directe, dans les intervalles restants, achève la preuve. □

Théorème 2.5 *L'inégalité (2.1) :* $\pi(x + y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$ *est vraie si* $1/109 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 1$ *avec* x, y *réels* $\geqslant 3$.

Preuve : Fixons $l \geqslant 3$.
D'après le théorème 2.4,

$$p_k + p_l \leqslant p_{k+l-1}$$

est vraie pour $\frac{1}{109} \leqslant \frac{l}{k} \leqslant 1$, ou encore pour $l \leqslant k \leqslant 109l$. En appliquant la proposition 2.1 à ce résultat, il vient que $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$ est vraie pour $y \in [p_{l-1}, p_l[$ et $x \in [p_{k-1}, p_k[$ pour $k \in [l, 109l]$, c'est-à-dire pour $y \in [p_{l-1}, p_l[$ et $x \in [p_{l-1}, p_{109l}[$ ou encore, sous une autre forme : l'inégalité est vraie pour

$$\frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < \frac{y}{x} < \frac{p_l}{p_{l-1}}. \tag{2.9}$$

Montrons que

$$\frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < 1/109.$$

$$\frac{1}{109} p_{109l} - p_{l-1} \geqslant D = l(\ln(109l) + \ln_2(109l) - \alpha) - (l-1)(\ln(l-1) + \ln_2(l-1) - \beta)$$

En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ (Voir [8, 13]), les inégalités sont vérifiées et $D > 0$ pour $l \geqslant 6$. Comme $\frac{p_k}{p_{k-1}} > 1$ et $\frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < 1/109$, on a la preuve du théorème à l'aide de (2.9). La

même vérification que dans la preuve du théorème 2.4 permet de conclure pour les petites valeurs.
Remarque : au chapitre précédent, nous avons montré que

$$p_{ab} > ap_b \text{ pour } a, b \geqslant 2$$

et donc que

$$p_{109l} > 109p_l > 109p_{l-1}.$$

$\square$

Avec cette méthode, nous avons montré que (2.1) est vraie entre les droites $y = 1/109x$ et par symétrie $y = 109x$ ce qui représente 99% du plan. ((2.1) est démontrée dans 99% des cas). Ce résultat sera amélioré dans le théorème 2.6.

2.1.4 Applications

Corollaire 2.2

1. *Pour x réel $\geqslant 3$ et $x = 2$,* $\dfrac{\pi(x) + \pi(2x)}{2} \leqslant \pi(3x) \leqslant \pi(x) + \pi(2x)$.
2. *Pour $x \geqslant 3$ et k entier,* $\pi(kx) \leqslant k\pi(x)$.

Preuve : $\pi(x) \leqslant \pi(x + y)$ et $\pi(y) \leqslant \pi(x + y)$ ainsi $\pi(x) + \pi(y) \leqslant 2\pi(x + y)$. Ceci montre la première inégalité. La seconde inégalité vient de l'application du théorème 2.5 pour $y = 2x$.

Montrons la deuxième proposition par récurrence.
Pour les cas $k = 0$ et $k = 1$, c'est trivial.
Le cas $k = 2$ est montré dans le théorème 2.2.
Supposons la récurrence vraie jusqu'au rang k.
Montrons la récurrence au rang $k + 1$.
Si $k + 1$ est pair,

$$\pi\left((k+1)x\right) \underset{\text{th.2.2}}{\leqslant} 2\pi\left(\frac{k+1}{2}x\right) \underset{\text{réc.}}{\leqslant} 2\left(\frac{k+1}{2}\right)\pi(x) = (k+1)\pi(x).$$

Si $k + 1$ est impair,

$$\pi\left((k+1)x\right) \underset{\text{th.2.5}}{\leqslant} \pi\left(\frac{k}{2}x\right) + \pi\left(\left(\frac{k}{2}+1\right)x\right) \underset{\text{réc.}}{\leqslant} \frac{k}{2}\pi(x) + \left(\frac{k}{2}+1\right)\pi(x) = (k+1)\pi(x).$$

La récurrence est donc vraie pour tout k.
Remarque : On peut consulter l'article [1] pour une démonstration plus directe. $\square$

En utilisant la même minoration de p_k,

$$p_k \geqslant k(\ln k + \ln_2 k - 1) \qquad \text{pour } k \geqslant 2$$

et un résultat issu de[5]

$$p_k \leqslant k(\ln k + \ln_2 k - 1 + 1,8741 \ln_2 k / \ln k) \qquad \text{pour } k \geqslant 11,$$

de meilleurs résultats apparaissent

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ l = \gamma k}} p_{k+l-1} - p_k - p_l = \lim_{k \to +\infty} k \ln(1+\gamma).$$

ou encore

$$\forall \gamma > 0, \exists k_0 : \forall k \geqslant k_0,\ p_k + p_l \leqslant p_{k+l-1} \qquad \text{avec } \gamma k = l.$$

i.e. l'inégalité (2.1) est vraie sur toute droite $y = \gamma x$ pour x assez grand. Essayons de situer un peu le x *assez grand* avec ces nouvelles formules.

$$\begin{aligned}
p_{k+\gamma k-1} - p_k - p_{\gamma k} \geqslant\ & k\left(\ln(1+\gamma-1/k) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\gamma-1/k)}{\ln k}\right) - 1,8741 \frac{\ln_2 k}{\ln k}\right) \\
& + \gamma k \left(\ln(1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma k}) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma k})}{\ln \gamma k}\right)\right. \\
& \left. -1,8741 \frac{\ln_2 \gamma k}{\ln \gamma k}\right) - (\ln(k+\gamma k - 1) + \ln_2(k+\gamma k-1) - 1) \\
\geqslant\ & k\left(\ln(1+\gamma-1/k) - 1,8741 \frac{\ln_2 k}{\ln k} + \gamma \ln(1 + 1/\gamma - \frac{1}{\gamma k})\right. \\
& \left. -1,8741 \gamma \frac{\ln_2 \gamma k}{\ln \gamma k} - 2 \frac{\ln(k+\gamma k-1)}{k}\right) \\
\geqslant\ & k g(k)
\end{aligned}$$

Il est évident que g est croissante et en traçant la fonction $g \circ f$, où f est la fonction $\gamma \mapsto \exp\left(\frac{3,1}{\ln(1+\gamma)}\right)$, pour $\gamma \in]0,1]$ à l'aide de `Maple`, on montre que $g\left(\exp\left(\frac{3,1}{\ln(1+\gamma)}\right)\right) \geqslant 0$. Il s'ensuit

Proposition 2.3 *Pour tout* $\gamma \in]0, \frac{1}{109}[$ *et pour* $k \geqslant \exp\left(\frac{3,1}{\ln(1+\gamma)}\right)$*, on a*

$$p_{k+\gamma k-1} \geqslant p_k + p_{\gamma k}.$$

D'autre part, en s'appuyant sur les définitions et les résultats de l'article [13], on peut faire les remarques suivantes :

Proposition 2.4 *Dans la définition 2.4, il suffit de calculer $\rho^*(x)$ quand $x = p - 1$ pour vérifier (2.1).*
On a les inégalités suivantes pour $k \geqslant 1$: trivialement $p_{k+1} \geqslant p_k + 1$ puis $p_{k+2} \geqslant p_k + 4$, $p_{k+3} \geqslant p_k + 6$, $p_{k+4} \geqslant p_k + 10$, $p_{k+5} \geqslant p_k + 12$, ..., $p_{k+31} \geqslant p_k + 130$.

Preuve : On suppose pour $y = p_l - 1$ et pour tout x que

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$

C'est en particulier vrai pour $x = p_k - 1$. En appliquant une démonstration identique à la preuve de la proposition 2.2, en faisant varier k, on trouve que $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$ pour $y \in [p_{l-1}, p_l - 1]$ et pour tout x. Pour les relations, montrons par exemple

$$p_{k+3} \geqslant p_k + 6.$$

On utilise le résultat montrant que

$$\text{pour tout } x \geqslant 2,\ \pi(x+6) \leqslant \pi(x) + \pi(6).$$

On en déduit en utilisant la proposition 2.2 (comme $y := 6 = p_4 - 1$) que, pour tout k,

$$p_k + p_4 - 1 \leqslant p_{k+4-1}.$$

□

2.1.5 Application directe des formules d'encadrement relatives à $\pi(x)$

Choisissons $y = \gamma x$. Soit $m(x,c)$ (respectivement $M(x,d)$) une fonction minorant $\pi(x)$ (respectivement majorant $\pi(x)$). Alors

$$\Delta = \pi(x) + \pi(y) - \pi(x+y) \geqslant m(x,c) + m(y,c) - M(x+y,d).$$

Formellement, si on utilise les formules

$$m(x,c) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{c}{\ln x}\right) \leqslant \pi(x) \leqslant M(x,d) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{d}{\ln x}\right)$$

ou

$$m(x,c) = \frac{x}{\ln x - c} \leqslant \pi(x) \leqslant M(x,d) = \frac{x}{\ln x - d},$$

on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} m(x,c) + m(\gamma x, c) - M(x + \gamma x, d) = \mathit{signe}(-(d-c)(1+\gamma) + (1+\gamma)\ln(1+\gamma) - \gamma \ln \gamma)\infty.$$

Il ne sert à rien d'aller plus loin car, comme $d = 1,1$ et $c = 1$, on obtient des résultats moins intéressants que ceux déjà présentés. Prenons maintenant les formules à l'ordre 2 pour $\pi(x)$. Posons $\pi(x,c) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{c}{\ln^2 x}\right)$. Alors, pour $d = 1,8$, $c = 2,51$ et x assez grand,

$$\pi(x,d) \leqslant \pi(x) \leqslant \pi(x,c).$$

Soit $y = xg(x)$ où $g(x) = O(\ln x \ln_2 x)$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \pi(x,d) + \pi(y,d) - \pi(x+y,c)\\
&= \pi(x,d) + \pi(xg(x),d) - \pi(x+xg(x),c)\\
&= \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{dx}{\ln^3 x} + \frac{xg(x)}{\ln(xg(x))} + \frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))} + \frac{dxg(x)}{\ln^3(xg(x))}\\
&\quad - \left[\frac{x+g(x)}{\ln(x+g(x))} + \frac{x+g(x)}{\ln^2(x+g(x))} + \frac{c(x+g(x))}{\ln^3(x+g(x))}\right]
\end{aligned}$$

Comme $1/(1+u) \leqslant 1 - u + u^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{x+xg(x)}{\ln(x+xg(x))} &= \frac{x}{\ln x}\frac{1}{1+\frac{\ln(1+g(x))}{\ln x}} + \frac{xg(x)}{\ln(xg(x))(1+\frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))})}\\
&\leqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 - \frac{\ln(1+g(x))}{\ln x} + \frac{\ln^2(1+g(x))}{\ln^2 x}\right)\\
&\quad + \frac{xg(x)}{\ln(xg(x))}\left(1 - \frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))} + \frac{\ln^2(1+1/g(x))}{\ln^2(xg(x))}\right)
\end{aligned}$$

De plus, comme $1/(1+u)^2 \leqslant 1 - 2u + 3u^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{x+xg(x)}{\ln^2(x+xg(x))} &= \frac{x}{\ln^2 x}\frac{1}{(1+\frac{\ln(1+g(x))}{\ln x})^2} + \frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))(1+\frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))})^2}\\
&\leqslant \frac{x}{\ln^2 x}\left(1 - 2\frac{\ln(1+g(x))}{\ln x} + 3\frac{\ln^2(1+g(x))}{\ln^2 x}\right)\\
&\quad + \frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))}\left(1 - 2\frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))} + 3\frac{\ln^2(1+1/g(x))}{\ln^2(xg(x))}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta &\geqslant \frac{dx}{\ln^3 x} + \frac{dxg(x)}{\ln^3(xg(x))} - \frac{c(x+xg(x))}{\ln^3(x+xg(x))} + \frac{x}{\ln^2 x}\ln(1+g(x)) - \frac{x}{\ln^3 x}\ln^2(1+g(x))\\
&\quad + \frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))}\ln(1+1/g(x)) - \frac{xg(x)}{\ln^3(xg(x))}\ln^2(1+1/g(x))
\end{aligned}$$

$$+\frac{2x}{\ln^3 x}\ln(1+g(x)) - \frac{3x}{\ln^4 x}\ln^2(1+g(x)) + \frac{2x}{\ln^3(xg(x))}g(x)\ln(1+1/g(x))$$
$$-\frac{3x}{\ln^4(xg(x))}g(x)\ln^2(1+1/g(x))$$

Les termes dominants sont

$$x\left(\frac{dx}{\ln^3(xg(x))} - \frac{c(1+g(x))}{\ln^3(x+xg(x))} + \frac{\ln(1+g(x))}{\ln^2 x} + \frac{1}{\ln^2(xg(x))}\right).$$

Lorsque x tend vers l'infini, il faut choisir g telle que

$$(d-c)\frac{g(x)}{\ln x} + \ln(1+g(x)) \geqslant 0$$

pour que Δ soit positif, c'est-à-dire

$$1 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{c-d}\ln x \ln_2 x.$$

Soit g un nombre réel compris entre 109 et $\frac{1}{c-d}\ln x \ln_2 x$. Posons

$$\begin{aligned}
A &= \frac{d}{\ln^3(xg)} + \frac{cg}{\ln^3(x+xg)} + \frac{\ln(1+g)}{\ln^2 x}\\
B &= -\frac{c}{\ln^3(x+xg)} + \frac{g\ln(1+1/g)}{ln^2(xg)} + \frac{d}{\ln^3 x}\\
&\quad -\frac{g\ln^2(1+1/g)}{\ln^3(xg)} + \frac{2g\ln(1+1/g)}{\ln^3(xg)} - \frac{3g\ln^2(1+1/g)}{\ln^4(xg)}\\
C &= -\frac{\ln^2(1+g)}{\ln^3 x} - \frac{3\ln^2(1+g)}{\ln^4 x} + \frac{2\ln(1+g)}{\ln^3 x}
\end{aligned}$$

Etudions le terme A. Comme $d-c<0$,

$$A \geqslant \frac{1}{\ln^2(xg)}\left(\frac{d-c}{\ln x} + \ln(1+g)\right).$$

Etudions la fonction $g \to \frac{(d-c)g}{\ln x} + \ln(1+g)$. La dérivée s'annule pour $g = \frac{\ln x}{c-d} - 1$. La fonction est donc croissante pour $g \in [109, \frac{\ln x}{c-d} - 1]$ et décroissante ensuite. Donc le minimum de cette fonction dans l'intervalle $[109, \ln x \ln_2 x/(c-d)]$ est égal au minimum de

$$\ln 110 + \frac{d-c}{\ln x} \quad \text{et de} \quad \ln\left(\frac{\ln_2 x}{c-d} + 1/\ln x\right).$$

Etudions le terme B. Comme

$$\frac{1}{g}-\frac{1}{2g^2}\leqslant \ln(1+1/g)\leqslant \frac{1}{g},$$

on a

$$g\ln(1+1/g)\geqslant 1-\frac{1}{2g} \quad \text{et} \quad g^2\ln(1+1/g)\leqslant \frac{1}{g}.$$

En utilisant les inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} B\ln^3(xg) &\geqslant -c+(1-\frac{1}{2g})\ln(xg)-1/g+2(1-\frac{1}{2g})-\frac{3}{g\ln(xg)}, \\ B\ln^2(xg) &\geqslant 1-\frac{1}{2g}-\frac{c}{\ln x}-\frac{3}{\ln^2 x}. \end{aligned}$$

Soit x_0 tel que $109=\frac{7}{5}\ln x_0 \ln\ln x_0$ ($x_0\approx 0,4\cdot 10^{11}$). Prenons $x\geqslant x_0$. Comme $2-\frac{3}{\ln x}\ln(1+g)>0$,

$$C\geqslant -\frac{\ln^2(1+g)}{\ln^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{x} &\geqslant A+B+C \\ &\geqslant \frac{1}{\ln^2(xg)}\ln\left(\frac{\ln_2 x_0}{c-d}+1/\ln x_0\right)+\frac{-\ln^2(1+g)}{\ln^3 x} \\ &\quad +\frac{1}{\ln^2(xg)}\Big(1-\frac{1}{2g}-\frac{c}{\ln x}-\frac{3}{\ln^2 x}\Big) \\ &\geqslant 0 \quad \text{pour } x\geqslant x_0. \end{aligned}$$

Pour calculer cette valeur, on choisit $g(x)=\frac{1}{c-d}\ln x\ln_2 x$, puisque la dernière minoration est fonction décroissante en $g(x)$.

Théorème 2.6 *Pour tout x et pour tout y tel que $x\leqslant y\leqslant \frac{7}{5}x\ln x\ln_2 x$, on a*

$$\pi(x+y)\leqslant \pi(x)+\pi(y).$$

Calculons la proportion de plan pour laquelle

$$\pi(x+y)\leqslant \pi(x)+\pi(y)$$

est vraie. Pour $x=x_0$ fixé, regardons le rapport de :
l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine limité par les inéquations $y\geqslant x$, $y\leqslant \frac{7}{5}x\ln x\ln_2 x$ et $x\leqslant x_0$,

et de l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine limité par les inéquations $x \leqslant x_0$, $y \geqslant x$ et $y \leqslant x_0$. Posons $g(t) = \frac{7}{5} t \ln t \ln_2 t$. Ainsi

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{g^{-1}(x_0)} (g(t) - t)dt + \int_{g^{-1}(x_0)}^{x_0} (x_0 - t)dt \sim \frac{{x_0}^2}{2} - \frac{{x_0}^2}{2} g^{-1}(x_0)/x_0$$

et

$$\mathcal{A}_2 = {x_0}^2/2.$$

Par symétrie en x, y, on a démontré que $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$ est vraie pour $1 - \frac{5}{7 \ln(x_0) \ln_2(x_0)}$ des couples (x, y) tels que $x \leqslant x_0$ et $y \leqslant x_0$.

Proposition 2.5 *Pour presque tout couple (x, y), nous avons*

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$

2.2 Conjecture des k-uples

2.2.1 Définitions

Définition 2.1 *Un **k-uple** est un vecteur composé de k éléments a_i entiers relatifs, différents et ordonnés. Il sera noté*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Sa taille est égale à k et sa longueur l est égale à $a_k - a_1 + 1$.

Définition 2.2 *Un k-uple sera dit* **admissible** *si pour chaque premier, il existe au moins une classe de congruence qui ne contient aucun élément du k-uple.*

Par exemple, le 3-uple $(0, 2, 4)$ n'est pas admissible, car même si modulo 2, la classe 1 ne touche aucun élément, modulo 3 chaque classe contient un élément du 3-uple. Par contre le 5-uple (0,2,6,8,12) de longueur 13 est admissible.

Concrètement, pour voir si un k-uple est admissible, on calcule pour chaque $p \leqslant k$ la classe modulo p des éléments du k-uple et on regarde s'il y a au moins une classe qui n'apparaît pas. Si toutes les classes modulo p apparaissent, le k-uple n'est pas admissible, sinon on refait le calcul pour le nombre premier suivant. Si, après cette étape, on a trouvé pour chaque $p \leqslant k$ une classe qui n'apparaît pas, le k-uple est admissible car pour les $p > k$, il existe au moins une classe ne contenant aucun élément du k-uple (Principe des tiroirs de Dirichlet).

Définition 2.3 *Un **k-uple admissible** de longueur l **super-dense** est un k-uple admissible de taille k ($k \geqslant 2$) plus dense que le début de la série des nombres premiers :*

$$k > \pi(l).$$

Exemple : (0,2,6,8,12) n'est pas super-dense. ◇

2.2.2 Existence de k-uples admissibles super-denses

Pour prouver l'existence, il suffirait d'en trouver un ; ce qui n'est pas facile à la main. Définissons la fonction $\rho^*(x)$ qui est la taille maximale pour un k-uple admissible de longueur x.

Définition 2.4

$$\rho^*(x) := \max_k \{k\text{-uple admissible de longueur } x\}.$$

Cette fonction a été calculée exactement pour les petites valeurs ($x \leqslant 146$). Malheureusement pour ces petites valeurs $\rho^*(x) \leqslant \pi(x)$ donc il n'existe pas de k-uple admissible super-dense de petite longueur. Montrons malgré tout que $\rho^*(x) > \pi(x)$ pour x assez grand.

Lemme 2.1 *Si $f(t) \underset{\infty}{\sim} t/\ln t$ alors*

$$T = o(t) \Longleftrightarrow f(T) = o(f(t)).$$

Preuve : Comme $f(t) \sim t/\ln t$, pour tout A ($0 < A < 1$) et tout B ($B > 1$) il existe M tel que, pour tout $t > M$, on ait

$$A\frac{t}{\ln t} < f(t) < B\frac{t}{\ln t}.$$

Première implication : on suppose que $T = o(t)$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe t_0 tel que, pour tout $t > t_0$, $T \leqslant \varepsilon t$. Soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon B}{A}$. Comme f est croissante pour $t > \exp(1)$, on a

$$\begin{aligned} f(T) &\leqslant f(\varepsilon t) \leqslant B\frac{\varepsilon t}{\ln \varepsilon t} \\ &\leqslant B\frac{\varepsilon t}{\ln t} \leqslant \frac{\varepsilon B}{A}\frac{At}{\ln t} \\ &\leqslant \varepsilon' f(t) \qquad \text{pour } \varepsilon' = \frac{\varepsilon B}{A} \end{aligned}$$

Réciproque : soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon B}{A}$ que l'on choisit plus petit que 1. On a $f(T) \leqslant \varepsilon f(t)$ et donc

$$A\frac{T}{\ln T} < f(T) \leqslant f(t) < \varepsilon B\frac{t}{\ln t}.$$

En ne gardant que les deux extrêmes, il vient

$$\frac{T}{\ln T} \leqslant \frac{\varepsilon B}{A}\frac{t}{\ln t} \leqslant \frac{\frac{\varepsilon B}{A}t}{\ln\left(\frac{\varepsilon B}{A}t\right)} \tag{2.10}$$

comme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon B}{A} \leqslant 1$. Soit $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ qui est strictement croissante pour $x \geqslant \exp(1)$. Donc g^{-1} existe et est strictement croissante. D'après (2.10), $g(T) \leqslant g(\varepsilon' t)$ et en appliquant g^{-1} qui est croissante, on obtient $T \leqslant \varepsilon' t$. On en déduit que

$$\text{pour tout } \varepsilon',\ 1 \geqslant \varepsilon' > 0,\ \exists t_1,\ \forall t \geqslant t_1,\ T \leqslant \varepsilon' t.$$

Donc $T = o(t)$. □

Lemme 2.2 *Soit t un entier. Soit T tel que, en enlevant une classe de congruences $\overline{j}_i$ modulo p_i pour chaque $p_i \leqslant T$ à l'intervalle $[1, t]$, on obtient finalement l'ensemble vide. On peut choisir $T = o(t)$.*

Preuve : Soit $M \geqslant 3$. Posons

$$C_M = \prod_{M<p<e^M}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Soit t_0 la valeur minimale de t telle que pour tout $t \geqslant t_0$:

$$\pi(t/M) \geqslant \psi(t, \exp(M)) - \psi(t, M),$$

où ψ est la fonction de De Bruijn :

$$\psi(x, y) := \#\{n \leqslant x : P^+(n) \leqslant y\},$$

où $P^+(n)$ est le plus grand facteur premier de n. Cela est possible car en posant $u = \frac{\ln t}{\ln M}$, on a $t = M^u$, et en comparant les deux fonctions, on a d'un côté $\pi(t/M) = \pi(M^{u-1}) \sim \frac{M^{u-1}}{(u-1)\ln M} \sim \frac{M^{u-1}}{\ln t}$ et de l'autre côté $\psi(t, \exp(M)) - \psi(t, M)$, fonction qui est égale au cardinal des entiers $\leqslant t$ dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que des premiers compris entre M et $\exp(M)$. On peut majorer trivialement cette fonction : on cherche les entiers α vérifiant $M^\alpha \leqslant t$, c'est-à-dire $\alpha \leqslant \frac{\ln t}{\ln M}$. L'exposant α varie entre 0 et $\frac{\ln t}{\ln M}$ (donc $[u] + 1$ choix) pour chaque $p \in]M, \exp(M)[$. Ainsi

$$\psi(t, \exp(M)) - \psi(t, M) \ll (u + 1)^{\pi(exp(M)) - \pi(M)}.$$

De plus, quand t tend vers l'infini (M fixe),

$$(u+1)^{\pi(exp(M))-\pi(M)} \ll \frac{M^{u-1}}{\ln t}.$$

Donc, il existe t_0 tel que, pour $t \geqslant t_0$ avec M fixé, on a

$$\pi(t/M) \geqslant \psi(t, \exp(M)) - \psi(t, M).$$

Etape 1

On enlève à l'intervalle $[1, t]$ la classe de congruence 0 pour les p tels que

- $1 \leqslant p \leqslant M$;
- $e^M \leqslant p \leqslant t/M$.

On enlève ainsi tous les multiples de p et p lui-même dans l'intervalle $[1, t]$. Il reste dans cet intervalle deux ensembles :
(a) = les premiers $> t/M$;
(b) = les entiers n dont tous les facteurs premiers sont compris dans l'intervalle $]M, e^M[$.

Posons $N = card(a) + card(b)$. On a $card(b) = | \{n \leqslant t \mid n = \prod_{M<p_i<\exp(M)} p_i^{\alpha_i}\} | = \psi(t, \exp(M)) - \psi(t, M)$.

En prenant $t \geqslant t_0$, on a

$$N = \pi(t) - \pi(t/M) + card(b) \leqslant \pi(t).$$

Etape 2

Maintenant, utilisons les p tels que $M < p < e^M$.

Prenons p suivant M. On choisit la classe modulo p qui touche le plus d'éléments de l'ensemble restant. Cette classe contient au moins N/p éléments. On enlève tous les éléments appartenant à cette classe. Il reste alors au plus $N(1 - 1/p)$ éléments.

En réitérant ce procédé pour tous les $p \in]M, e^M[$, il reste à la fin au plus NC_M éléments.

Etape 3

On enlève les $C_M N$ points restants un à un en utilisant un nouveau $p_i > t/M$ à chaque fois : pour un point n restant, on l'enlève en choisissant $j_i \equiv n \pmod{p_i}$.

Conclusion : l'ensemble des nombres premiers utilisés pour cribler totalement l'intervalle $[1, t]$ est de cardinal au plus égal à $\pi(t/M) + C_M\pi(t) \sim (1/M + C_M)\pi(t)$, qui peut être aussi petit que l'on veut par rapport à $\pi(t)$ car, d'après le théorème de MERTENS,

$$C_M \sim \frac{\ln M}{M}.$$

On a donc montré que $\pi(T) = o(\pi(t))$.

En appliquant le lemme 2.1 à la fonction $x \to \pi(x)$, il vient que $\pi(T) = o(\pi(t)) \Rightarrow T = o(t)$, ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 2.3 *Définissons T comme dans le lemme 2.2. Alors, si on se donne un entier $a > 0$, il existe un entier b tel que chaque terme de la progression arithmétique $b + a$, $b + 2a$, $\ldots$, $b + ta$ est divisible par un premier $p \leqslant T$.*

Preuve : D'après le lemme 2.2, tout l'intervalle $[1, t]$ est recouvert avec la réunion de congruences $j_i \pmod{p_i}$. Prenons un entier $n \in [1, t]$. Il est enlevé par une congruence j d'un $p \leqslant T$; supposons qu'il s'agisse, par exemple, de p_r. On a $n \equiv j_r \pmod{p_r}$. Construisons c pour que $n + c$ soit divisible par p_r, c'est-à-dire $n + c \equiv 0 \pmod{p_r}$. Il suffit de prendre $c \equiv -j_r \pmod{p_r}$ pour que $n + c$ soit divisible par p_r. Maintenant si l'on veut faire la même chose pour tous les éléments de $[1, t]$, il suffit de résoudre le système de congruences

$$c \equiv -j_i \pmod{p_i} \text{ pour } i = 1..\pi(T)$$

grâce au théorème chinois. Avec ce choix, comme chaque élément de $[1, t]$ est enlevé par une congruence j d'un $p \leqslant T$, chaque élément de l'intervalle $[c+1, c+t]$ est divisible par un $p \leqslant T$. Tous les termes de la progression arithmétique $a(c+1)$, $\ldots$, $a(c+t)$ sont divisibles par un p premier $\leqslant T$ (Si $n \equiv j_i \bmod p_i$ alors $a(n + c) \equiv a(j_i + c) \equiv 0 \bmod p_i$). On prend $b = ca$ pour obtenir le lemme. $\square$

Lemme 2.4 *Soit N un entier positif. Alors il existe un nombre $x_0 := x_0(N)$ tel que pour chaque entier $x \geqslant x_0$, pour tout y réel et pour chaque entier $a > 0$, il existe une progression arithmétique de raison a*

(a) d'une longueur $t = [2N \ln x]$,

(b) dont le premier terme $b + a$ appartient à l'intervalle $]y, y + x]$ et

(c) dont tous ses termes sont divisibles par des premiers $\leqslant \ln x/N$.

Preuve : Soit t un entier. Prenons T tel que, en enlevant une classe de congruences $\overline{j}_i$ modulo p_i pour chaque $p_i \leqslant T$ à l'intervalle $[1, t]$, on obtient finalement l'ensemble vide. En appliquant le lemme 2.2, on peut choisir T tel que : $T = o(t)$. Ainsi pour $c = \frac{1}{2N^2}$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait $T \leqslant ct$. Pour $x \geqslant \exp(A/(2N)) = x_0(N)$, on prend $t = [2N \ln x]$ et d'après le lemme 2.3, si on se donne un entier $a > 0$, il existe une progression arithmétique $b + a$, $\ldots$, $b + ta$ dont chaque terme est divisible par des premiers $p \leqslant T$. Or $T \leqslant \frac{t}{2N^2} = \frac{[2N \ln x]}{2N^2} \leqslant \ln x/N$ et les propositions (a) et (c) sont vérifiées.

Montrons que $(c) \Rightarrow (b)$.
Il est facile de voir que l'on peut faire translater la progression arithmétique d'un multiple de $\prod_{p \leqslant \frac{\ln x}{N}} p$ sans changer les propriétés (a) et (c). Or

$$\prod_{p \leqslant \frac{\ln x}{N}} p = \exp\left(\sum_{p \leqslant \frac{\ln x}{N}} \ln p\right) = \exp\left(\theta\left(\frac{\ln x}{N}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln x}{N}(1+o(1))\right) = x^{\frac{1+o(1)}{N}}$$

Donc on peut translater la progression arithmétique de telle sorte que le premier terme $b+a$ tombe dans un intervalle de longueur x. □

Nous sommes maintenant en mesure de construire un k-uple admissible super-dense. Pour cela fixons deux entiers x et N $(N \geqslant 3)$. Prenons l'intervalle $]-x/2, x/2[$ et criblons cet intervalle en enlevant tous les multiples des premiers plus petits que $x/(N \ln x)$. Nous allons montrer que cet ensemble, appelé **ensemble résiduel**, constitue un k-uple admissible super-dense si x est assez grand.

Lemme 2.5 *L'ensemble résiduel est admissible si x est assez grand.*

Preuve : Appliquons le lemme 2.4. Prenons $a = q > \frac{x}{N \ln x}$, $t = [2N \ln x]$ et le premier terme de la suite $b + q \in]\frac{-3x}{2}, \frac{-x}{2}[$ en prenant $y = -x$. Le dernier terme de la suite $b + tq$ est plus grand que $\frac{x}{2}$ car $b + tq > \frac{-3x}{2} + [2N \ln x]\frac{x}{N \ln x}$. Ainsi b détermine une classe de congruence modulo q qui ne touche aucun élément de l'ensemble résiduel, puisque tous les termes $b+a, \ldots, b+ta$ sont divisibles par un $p \leqslant \frac{\ln x}{N}$ et donc ont déjà été enlevés de l'ensemble résiduel. □

Lemme 2.6 *Le cardinal de l'ensemble résiduel excède $\pi(x)$ d'une valeur asymptotique supérieure à $(\ln 2 - \frac{2}{N})\frac{x}{\ln^2 x}$.*

Preuve : Le nombre d'éléments de l'ensemble résiduel est $2\pi(x/2) - 2\pi(x/N \ln x) + 2$.
Posons $\Delta = 2\pi(x/2) - 2\pi(x/N \ln x) - \pi(x)$.
D'après le théorème des nombres premiers, $\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$, et ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2\frac{x/2}{\ln(x/2)} + 2\frac{x/2}{\ln^2(x/2)} \\
&\quad -2\left(\frac{x/N\ln x}{\ln(x/N\ln x)} + \frac{x/N\ln x}{\ln^2(x/N\ln x)}\right) \\
&\quad -\left(\frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x}\right) + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \\
&= (\ln 2 - 2/N)\frac{x}{\ln^2 x} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.7 *L'ensemble résiduel construit à partir d'un intervalle de longueur x constitue un k-uple admissible super-dense si x est assez grand.*

Preuve : L'ensemble résiduel est admissible (lemme 2.5) et super-dense (lemme 2.6). □

Corollaire 2.3

$$\overline{\lim} \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln p_n} = +\infty.$$

Preuve : On veut montrer que pour tout C, il existe une infinité de n tel que $p_{n+1} - p_n \geqslant C \ln p_n$. Prenons $N = 3C$ et appliquons le lemme 2.4 : il existe m_0 tel que pour tout $m \geqslant m_0$, (en choisissant $x = p_m$, $y = x$ et $a = 1$) on peut construire une progression arithmétique de longueur $t = [N \ln p_m]$, de raison 1 et de premier terme $B \in]p_m, 2p_m]$, dont aucun terme n'est premier car divisible par un premier plus petit que $\ln p_m/N$. Soit p_n le nombre premier précédant B. On a

$$p_{n+1} - p_n \geqslant t = [N \ln p_m]. \tag{2.11}$$

Or B appartient à l'intervalle $]p_m, 2p_m]$ donc

$$p_m \leqslant p_n \leqslant 2p_m.$$

Il vient que

$$\ln p_m \geqslant \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln p_n}\right) \ln p_n.$$

En supposant $n \geqslant 2$ (il suffit de prendre $m \geqslant 2$ pour l'obtenir), on obtient

$$\ln p_m \geqslant \ln p_n/3.$$

En reprenant (2.11), il vient

$$p_{n+1} - p_n \geqslant (N/3) \ln p_n = C \ln p_n.$$

En choisissant dans le lemme un m plus grand que le dernier n trouvé (pour éviter de retomber sur le même n) : il y a une infinité de n vérifiant l'inégalité précédente. □

2.2.3 Construction de k-uples admissibles super-denses

Nous avons vu précédemment qu'il n'y avait pas de k-uple admissible super-dense de petite longueur. En fait, J. Selfridge a montré que tout k-uple admissible super-dense avait une longueur excédant 500 mais W. Stenberg a montré que l'on pouvait en trouver de longueur plus petite que 20000 (Voir [7]).

Premier essai : (suites gloutonnes) Soit n et k deux entiers. Partons de l'ensemble des entiers de 0 à n et éliminons pour les $p \leqslant k$ les éléments de la dernière classe qui reste à remplir par les éléments pris dans l'ordre quand toutes les autres contiennent au moins un représentant. L'ensemble des k premiers entiers de cet ensemble constitue un k-uple admissible.

Exemple : Partons de $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.
Modulo 2, la classe 0 est remplie tout de suite, donc on élimine la classe 1 : $I = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.
Modulo 3, les classes 0,2 sont remplies les premières, donc on élimine la classe 1 : $I = \{0, 2, 6, 8, 12, 14\}$.
Modulo 5, les classes 0,2,1,3 sont remplies les premières, donc on élimine la classe 4 : $I = \{0, 2, 6, 8, 12\}$. On trouve finalement le 5-uple admissible $(0, 2, 6, 8, 12)$.

Hélas, nous n'avons pas trouvé de k-uple admissible super-dense avec cette méthode (Nous avons trouvé qu'une suite de longueur 11763 et de taille 1364 et $\pi(11763) = 1409$).

Deuxième essai : Application des recherches précédentes.

Vehka [17] a trouvé un k-uple admissible super-dense de longueur $l = 11763$ et de taille 1412 ($\pi(11763) = 1409$). Nous ne savons pas quelle méthode il a utilisé mais pour retrouver à peu près le même résultat prenons $x = 11764$. Partons de l'ensemble composé uniquement d'entiers de l'intervalle $]-x/2, x/2] =]-5882, 5882]$. Fixons $N = 3$. Otons de l'ensemble tous les multiples des $p \leqslant \frac{x/2}{N \ln(x/2)} \approx 225$. Il reste alors dans cet ensemble les premiers de l'intervalle $]\frac{x/2}{N \ln(x/2)}, x/2]$ et leurs opposés ainsi que les unités ± 1 car $\sqrt{x/2} \approx 76,7 \leqslant 225$. Le nombre d'éléments de cet ensemble est égal à $2(\pi(x/2) - \pi\left(\frac{x/2}{N \ln(x/2)}\right) = 2(\pi(5882) - \pi(225)) + 2 = 1456$. Cet ensemble ne constitue pas encore un k-uple admissible. Pour qu'il soit admissible, il faut que pour chaque premier plus petit que 1456 il existe une classe qui ne contienne aucun élément de l'ensemble. Aussi, pour chaque premier appartenant à $]225, 1456]$,
(1) on regarde toutes les classes de congruences et on choisit celle qui touche le moins d'éléments (ou la dernière s'il y en a plusieurs)
(2) on enlève les éléments de la classe ainsi choisie.

L'ensemble résiduel ainsi obtenu constitue un k-uple admissible d'une longueur $l = 11763$ et contenant $k = 1415$ éléments (donc super-dense). Ce résultat est légèrement plus intéressant que celui de Vehka puisqu'il contient plus d'éléments.

2.2.4 Trouver p premier vérifiant un k-uple

On dira que l'entier t **vérifie** le k-uple si, et seulement si, tous les entiers $t + a_1, t + a_2, \ldots, t + a_k$ sont premiers. On ramène souvent le premier terme du vecteur à zéro par translation. Ainsi si t vérifie le k-uple $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ alors $p = t + a_1$ vérifie le k-uple suivant :

$$(0, a_2 - a_1, \ldots, a_k - a_1)$$

que l'on notera $(0, b_2, \ldots, b_k)$.

Enonçons maintenant une conjecture connue :

Conjecture 2.2 *(Conjecture des k-uples) : tout k-uple admissible est vérifié infiniment souvent avec nombre d'apparitions jusqu'à x est un*

$$\Omega\left(\frac{x}{\ln^k x}\right).$$

En supposant cette conjecture vraie, une infinité de premiers vérifient tout k-uple admissible. Si on trouve effectivement un premier qui vérifie un k-uple admissible super-dense, la seconde conjecture d'Hardy-Littlewood :

Conjecture 2.3

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y) \qquad \textit{pour } x, y \geqslant 2$$

est fausse (cf [6]).

Donnons quelques explications sur le fondement de la conjecture 2.2. Notons K un k-uple admissible. Soit $P_x(K)$ le nombre d'entiers plus petits que x vérifiant K (cf. [7]). Certains de ces nombres sont asymptotiquement donnés par les formules suivantes (où $\overset{c}{\sim}$ indique que l'équivalence est conjecturée mais non prouvée) :

$$\begin{aligned}
P_x(0,2) &\overset{c}{\sim} 2\prod_{p\geqslant 3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\int_2^x \frac{dx}{(\ln x)^2} = 1,320323632\int_2^x \frac{dx}{(\ln x)^2} \\
P_x(0,2,6) &\overset{c}{\sim} P_x(0,4,6) \overset{c}{\sim} \frac{9}{2}\prod_{p\geqslant 5}\frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}\int_2^x \frac{dx}{(\ln x)^3} = 2,858248596\int_2^x \frac{dx}{(\ln x)^3} \\
P_x(0,2,6,8) &\overset{c}{\sim} \frac{27}{2}\prod_{p\geqslant 5}\frac{p^3(p-4)}{(p-1)^4}\int_2^x \frac{dx}{(\ln x)^4} = 4,151180864\int_2^x \frac{dx}{(\ln x)^4} \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

où les constantes peuvent être calculées avec autant de précision que l'on veut (Constantes d'Hardy-Littlewood). Quelle est l'origine de ces formules ? Prenons par exemple le 4-uple (0,2,6,8). Si t vérifie ce 4-uple, les entiers $t, t+2, t+6, t+8$ sont tous premiers. En particulier, on évite qu'ils soient divisibles par 2 en choisissant $t \equiv 1 \pmod 2$. De même, on ne peut choisir ni $t \equiv 0 \pmod 3$ car t serait divisible par 3 (et t=3 ne convient pas) ni $t \equiv 1 \pmod 3$ car $t + b_2 = t + 2$ serait divisible par 3. Le seul choix possible est donc $t \equiv 2 \pmod 3$. Cela réduit le nombre de t utilisables à une seule congruence modulo 6, mais lorsque cette congruence est choisie, cela augmente la probabilité que $t, t+2, t+6, t+8$ soient premiers par un facteur de $\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2}\right)^4 = 81$ comparé à la situation où les 4 entiers sont choisis au hasard. Cela explique le coefficient $\frac{1}{6} \times 81 = \frac{27}{2}$ dans la formule (2.12). Maintenant, pour chaque $p \geqslant 5$, nous avons $p-4$ choix possibles pour éviter qu'aucun des entiers $t, t+2, t+6, t+8$ ne soit multiple de p, comparé aux $p-1$ choix pour chaque entier s'ils sont choisis indépendamment. Cela produit un gain de facteur

$$\left(1-\frac{4}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-4} = \frac{p^3(p-4)}{(p-1)^4}.$$

On retrouve ainsi la forme du produit infini (2.12).

Voici l'application des formules de HARDY-LITTLEWOOD : on calcule $P_x(K)$ pour $x = 10^8$ et on le compare avec les valeurs effectivement trouvées.

k-uple	Compté	Calc.
(0,2)	440312	440368
(0,2,6,8)	4768	4734

Comment trouver p vérifiant un k-uple admissible ?

Fixons une borne M. Construisons d'abord un ensemble de congruences que doit vérifier t modulo les premiers $\leqslant M$. Pour chaque $p_i \leqslant M$, tous les entiers $t+a_1, \ldots, t+a_k$ doivent être premiers, donc non divisibles par p_i (il faut vérifier que $t = p_i - a_1$ ne vérifie pas le k-uple). Ainsi on doit choisir $-t \not\equiv a_v \bmod p_i$ pour $v = 1..k$. Or, comme le k-uple est admissible, il existe modulo p_i au moins une classe j_i qui ne touche aucun élément du k-uple. La condition précédente est remplie en choisissant $-t \equiv j_i \pmod{p_i}$. A la fin, il suffit de résoudre le système

$$t \equiv -j_i \bmod p_i \qquad \text{pour les } p_i \leqslant M.$$

Dans le cas où il y a plusieurs classes qui ne touchent aucun élément du k-uple, on résout plusieurs systèmes de congruences (un pour chaque classe). On obtient finalement que t doit vérifier un ensemble de congruences du type

$$t \equiv c_1, c_2, \ldots \text{ ou } c_n \pmod{\prod_{p \leqslant M} p}.$$

Ensuite il suffit de faire des essais pour trouver t.

Exemple : Soit $K = (0, 4, 6, 10, 12, 16)$.

Regardons tout d'abord modulo 2 :
$K \bmod 2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. La classe $j_1 = 1 \bmod 2$ ne touche aucun élément de K. On choisit donc $t \equiv -1 \bmod 2$.

Regardons modulo 3 :
$K \bmod 3 = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$. La classe $j_2 = 2 \bmod 3$ ne touche aucun élément de K. On choisit donc $t \equiv -2 \bmod 3$.

Regardons modulo 5 :
K mod $5 = (0, 4, 1, 0, 2, 1)$. La classe $j_3 = 3$ mod 5 ne touche aucun élément de K. On choisit donc $t \equiv -3$ mod 5.

En regroupant les 3 congruences précédentes, il vient en utilisant le théorème chinois que $t \equiv 7$ mod 30.

Essayons de voir si les nombres congrus à 7 mod 30 vérifie le 6-uple :
$t = 7$ convient ; les nombres $(7, 11, 13, 17, 19, 23)$ sont tous premiers.
$t = 37$ ne convient pas ; $t + a_5 = 37 + 12 = 49$ n'est pas premier.
$t = 67$ ne convient pas ; $t + a_4 = 67 + 10 = 77$ n'est pas premier.
$t = 97$ convient ; les nombres $(97, 101, 103, 107, 109, 113)$ sont tous premiers.

En fait, quand on a vérifié que $t = 7$ convenait, il ne reste plus modulo 7 qu'une classe qui ne touche pas le 6-uple : $t \equiv 6$ mod 7. On en déduit que t doit vérifier la congruence $t \equiv 97$ mod 210.

On peut aller plus loin et vérifier que pour $p = 11$ on peut choisir

$$t \equiv -2, -3, -7, -8 \text{ ou } -9 \bmod 11.$$

Notons l'importance de l'admissibilité qui permet d'affirmer qu'il y a toujours une classe vide et donc de ne pas tomber sur des k-uples "impossibles". Pourtant c'est un exercice difficile de trouver un t vérifiant un k-uple admissible super-dense car (s'il existe) il est certainement très grand. J'ai pourtant expérimenté cette méthode pour la recherche de t vérifiant le k-uple super-dense que j'ai trouvé. Après la construction des congruences possibles pour $M = 380$, j'ai cherché un k-uple à partir de ces congruences en éliminant les éléments du k-uple qui ne sont pas premiers (nous avons un petit peu de marge car nous cherchons un t vérifiant un k-uple de taille $k = 1415$, mais si nous trouvons un t qui vérifie seulement un k-uple de taille $k = 1410$ nous aurions réussi car le k-uple reste super-dense).

2.2.5 Quelques rassemblements denses de nombres premiers

Des investigations ont été effectuées par Riesel [7] en 1969-70 pour trouver un rassemblement dense de premiers de grande taille. L'idée est de repérer les répétitions d'une séquence de premiers pris dans le début de la série. Le sujet était de découvrir une répétition de la série des premiers compris entre 11 et 67 qui est admissible. Cette recherche ne fut pas alors complète : le meilleur rassemblement trouvé fut

$$429983158710 + 11, 13, 17, 19, 23, 37, 41, 43, 47, 53, 59$$

avec tous ses éléments premiers (seuls les premiers 29, 31, 61 et 67 ne sont pas répétés). En 1982, la recherche fut reprise par Sten Säfholm et Demetre Betsis qui ont trouvé que

$$21817283854511250 + 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61$$

convenait. La densité moyenne de cet intervalle est d'un premier pour 38 entiers ce qui fait de cet intervalle, avec 14 premiers pour 51 entiers, un intervalle remarquable. Jusqu'où doit on aller pour retrouver le même rassemblement que les 15 premiers entre 11 et 67 ? En utilisant la conjecture des k-uples nous pouvons déduire que le nombre de ces rassemblements plus petits que x est approximativement de $187823,7\frac{x}{(\ln x)^{15}}$. Cette expression prend la valeur 1 pour x avoisinant $3,3 \cdot 10^{19}$, qui est l'ordre de grandeur de la première répétition du rassemblement. C'est un peu plus grand que ce que les recherches de 1970 avaient atteint, ce qui explique qu'aucune répétition de ce rassemblement ne fut trouvée.

Bibliographie

[1] E. EHRHART, “On prime numbers”, *Fibonacci Quarterly* (Août 1988).

[2] D. HENSLEY & I. RICHARDS, “Primes in intervals”, *Acta Arithmetica*, **25.4**, (1974) pp. 375-391.

[3] C. KARANIKOLOV, “On some properties of function $\pi(x)$”, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **29-30**, (1971) pp. 357-380.

[4] E. LANDAU, “Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen”, Chelsea, New York (1953) (Reprint.).

[5] JEAN-PIERRE MASSIAS & GUY ROBIN, “Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers”, *Publication Département Math. de Limoges* et *Journal Th. Nombres de Bordeaux*, Vol. **8** (1996) pp. 213-238.

[6] IAN RICHARDS, “On the incompatibility of two conjectures concerning primes”, *Bulletin of American Mathematical Society*, Vol. **80**, Number 3 (May 1974) pp. 419-438.

[7] HANS RIESEL, “Prime Numbers and Computer Methods for Factorization”, Birkhäuser (1985).

[8] GUY ROBIN, “Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le $k$ième nombre premier et grandes valeurs de la fonctions $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n”, *Acta Arithmetica*, vol. **42**, numéro 4 (1983) pp. 367-389.

[9] J. BARKLEY ROSSER & L. SCHOENFELD, “Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers”, *Illinois Journal Math.* **6** (1962) pp. 64-94.

[10] J. BARKLEY ROSSER & L. SCHOENFELD, “Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$”, *Math. Of Computation*, Vol. **29**, Number 129 (January 1975) pp. 243-269.

[11] J. BARKLEY ROSSER & L. SCHOENFELD, “Abstracts of brief scientific communications, Internat”, Congr. Mathematicians, Moscow 1966, Section 3, Theory of Numbers, 8.

[12] LOWELL SCHOENFELD, “Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$.II”, *Math. Of Computation*, Vol. **30**, Number 134 (April 1976) pp. 337-360.

[13] A. SCHINZEL & W. SIERPIǸSKI, “Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers”, *Acta Arith.*, Vol. **4**, Number 3 (1958) pp. 185-208.

[14] A. Schinzel, "Remarks on the paper : Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers", *Acta Arith.*, Vol. **7**, Number 1 (1961) pp. 1-8.

[15] Stanford L. Segal, "On $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$", *Transations of AMS*, Vol. **104**, Number 3 (September, 1962) pp. 523-527.

[16] Valeriu Şt. Udrescu, "Some remarks concerning the conjecture $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$", *Rev. Roum. Math. pures et appl.*, Tome **XX**, Numéro 10, Bucarest (1975) pp. 1201-1209.

[17] Thomas Vehka & Ian Richards, "Explicit Construction of an Admissible Set for the Conjecture that Sometimes $\pi(x+y) > \pi(x) + \pi(y)$.", *Notices Am. Math. Soc.*, **26** (1979) p. A-453

Chapitre 3

Estimation de $\psi(x; k, l)$

Résumé

Il s'agit de compléter le travail de Ramaré & Rumely [3] non plus pour trouver une constante ε telle que, à partir d'un certain "rang", $\mid \psi(x; k, l) - x/\varphi(k) \mid < \varepsilon \cdot x$ mais une fonction $\varepsilon(x)$ vérifiant $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ et plus petite que toute puissance du logarithme :

$$\varepsilon(x) = o\left(\frac{1}{\ln^a x}\right) \qquad \text{pour tout } a > 0.$$

Définition 3.1 *Notons* (a, b) *le plus grand commun diviseur de* a *et* b. *Soit* φ *la fonction d'*EULER *définie par*

$$\varphi(k) = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant k \\ (n,k)=1}} 1.$$

Nous reprenons le travail de RAMARÉ & RUMELY, 1996 [3] pour trouver une fonction $\varepsilon(x)$ telle que, pour $x \geqslant x_0$

$$| \theta(x; k, l) - x/\varphi(k) | < x\varepsilon(x)$$

comme dans les travaux de ROSSER & SCHOENFELD, 1975/76 ([5], [6]). Ce résultat sera l'analogue du théorème 1.1 dans les progressions arithmétiques. Ce travail s'inspire donc largement de ces deux articles.

En particulier, nous montrerons que, pour $x > 1$ et $l = 1$ ou 2,

$$| \theta(x; 3, l) - x/2 | < 0,262 \frac{x}{\ln x}.$$

Introduisons quelques notations :
ρ représente toujours un zéro non trivial de la fonction L de Dirichlet, c'est-à-dire un zéro tel que $0 < \Re\rho < 1$. Posons $\rho = \beta + i\gamma$. Soit $\wp(\chi)$ l'ensemble des zéros ρ avec $0 < \beta < 1$ de la fonction $L(s, \chi)$. Pour un réel positif H donné, on dit que GRH(k,H) est satisfaite si, pour tous les χ modulo k, tous les zéros non triviaux de $L(s, \chi)$ avec $|\gamma| \leqslant H$ vérifient $\beta = 1/2$.

Si on suppose l'hypothèse de RIEMANN généralisée est vraie, on obtient un résultat plus précis que le précédent :
pour $k \leqslant 432$ et $x \geqslant 224$ et si GRH(k,∞) est vérifiée alors

$$|\psi(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \leqslant \frac{11}{32\pi} \sqrt{x} \ln^2 x.$$

Pour toute la suite, R désigne la constante : $R = 9,645908801$.

3.1 Lemmes introductifs

Comme dans ROSSER & SCHOENFELD qui ont traités le cas $k = 1$, il faut connaître le positionnement des zéros de $L(s, \chi)$ c'est-à-dire trouver un réel H tel que GRH(k,H) soit vérifiée et une région sans zéro.

3.1.1 Région sans zéro

Théorème 3.1 (Ramaré & Rumely [3]) *Soient χ un caractère de conducteur k, $H \geqslant 1000$ et $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro de $L(s,\chi)$ avec $|\gamma| \geqslant H$ alors il existe une constante $C_1(\chi, H)$ calculable telle que*

$$1 - \beta \geqslant \frac{1}{R\ln(k|\gamma|/C_1(\chi,H))}.$$

Exemples

k	H_k	$C_1(\chi, H_k)$
1	545000000	38,31
3	10000	20,92
420	2500	56,59

<u>Preuve</u> : Voir Définition et (3.6.6) de [3]. □

<u>Remarque</u> : Pour $k \geqslant 1$ et $H_k \geqslant 1000$, $C_1(\chi, H_k) \geqslant C_1(\chi_0, 1000) \geqslant 9,14$.

Nous choisirons pour toute la suite

$$C_1(k) = \min_{\chi \bmod k} C_1(\chi, H_\chi).$$

3.1.2 GRH(k,H) et $N(T,\chi)$

Lemme 3.1 (McCurley [1]) *Soient $C_2 = 0,9185$ et $C_3 = 5,512$. Posons $F(y,\chi) = \frac{y}{\pi}\ln\left(\frac{ky}{2\pi e}\right)$ et $R(y,\chi) = C_2\ln(ky) + C_3$. Soient χ est un caractère de Dirichlet de conducteur k, $T \geqslant 1$ un nombre réel et $N(T,\chi)$ le nombre de zéros $\beta + i\gamma$ de $L(s,\chi)$ dans le rectangle $0 < \beta < 1$, $|\gamma| \leqslant T$, alors*

$$|N(T,\chi) - F(T,\chi)| \leqslant R(T,\chi).$$

Lemme 3.2 (déduit de Rumely [3])

- *GRH(k,H) est vérifiée pour $H = 10000$ et $k \leqslant 13$.*
- *GRH(k,2500) est vraie pour les ensembles*
  $E_1 = \{k \leqslant 72\}$,
  $E_2 = \{k \leqslant 112, k \text{ composé}\}$,
  $E_3 = \{116, 117, 120, 121, 124, 125, 128, 132, 140, 143, 144$
  $156, 163, 169, 180, 216, 243, 256, 360, 420, 432\}$.

3.1.3 Encadrement de $|\psi(x;k,l)-x/\varphi(k)|$ à l'aide des zéros de $L(s,\chi)$

Théorème 3.2 (McCurley [1]) *Soient $x \geqslant 1$ un nombre réel, m et k deux entiers plus grands que 1, δ un nombre réel tel que $0<\delta<\frac{x-2}{mx}$ et T un réel positif. Posons*

$$A(m,\delta)=\frac{1}{\delta^m}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(1+j\delta)^{m+1}. \tag{3.1}$$

Supposons que GRH(k,1) soit vérifiée. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(k)}{x}\max_{1\leqslant y\leqslant x}|\psi(y;k,l)-\frac{y}{\varphi(k)}| \quad &< \quad A(m,\delta)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|>T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}\\ &\quad +\left(1+\frac{m\delta}{2}\right)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|}+\frac{m\delta}{2}+\tilde{R}/x\end{aligned}$$

où $\sum_\chi$ représente la sommation sur tous les caractères modulo k,

$$\tilde{R}=\varphi(k)[(f(k)+0,5)\ln x+4\ln k+13,4]$$

et $f(k)=\sum_{p|k}\frac{1}{p-1}$.

3.1.4 Forme plus explicite de l'encadrement.

Le lemme suivant peut être trouvé dans [3] à la différence près que ces auteurs supposent GRH(k,H) alors qu'ils n'utilisent en fait que GRH(k,1). Comme nous aurons besoin de l'appliquer pour $T>H$, nous en avons réécrit la preuve.

Lemme 3.3 *Soit χ un caractère modulo k. Supposons que GRH(k,1) soit vérifiée. Alors, pour $T\geqslant 1$, on a*

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T\\\rho\in\wp(\chi)}}\frac{1}{|\rho|}\leqslant\tilde{E}(T)$$

avec $\tilde{E}(T)=\frac{1}{2\pi}\ln^2(T)+\frac{\ln\left(\frac{k}{2\pi}\right)}{\pi}\ln(T)+C_2+2\left(\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{k}{2\pi e}\right)+C_2\ln k+C_3\right)$.

<u>Preuve</u> : Pour $|\gamma|\leqslant 1$, comme nous avons GRH(k,1),

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant 1\\\rho\in\wp(\chi)}}\frac{1}{|\rho|}\leqslant\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant 1\\\rho\in\wp(\chi)}}\frac{1}{|1/2+i\gamma|}\leqslant 2N(1,\chi).$$

Pour $|\gamma| > 1$,

$$\sum_{\substack{1<|\gamma|\leqslant T \\ \rho\in\wp(\chi)}} \frac{1}{|\rho|} \leqslant \int_1^T \frac{dN(t,\chi)}{t} = \int_1^T \frac{N(t,\chi)}{t^2}dt + \frac{N(T,\chi)}{T} - \frac{N(1,\chi)}{1}.$$

Donc

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T \\ \rho\in\wp(\chi)}} \frac{1}{|\rho|} \leqslant \int_1^T \frac{N(t,\chi)}{t^2}dt + \frac{N(T,\chi)}{T} + N(1,\chi).$$

On conclut en utilisant le lemme 3.1 :

$$\begin{aligned}
\int_1^T \frac{N(t,\chi)}{t^2}dt &\leqslant \int_1^T \frac{F(t,\chi)+R(t,\chi)}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_1^T \frac{\ln(kt/(2\pi e))}{t}dt + C_2\int_1^T \frac{\ln(kt)}{t^2}dt + C_3\int_1^T \frac{1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{kT}{2\pi e}\right)\right]_1^T \\
&\quad + C_2\left\{\left[-\frac{\ln(kt)}{t}\right]_1^T + \int_1^T \frac{1}{t^2}dt\right\} + C_3\left[-1/t\right]_1^T \\
&= \frac{1}{2\pi}\ln^2 T + \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{k}{2\pi e}\right)\ln T + C_2\left(-\frac{\ln(kT)}{T} + \ln k - 1/T + 1\right) \\
&\quad + C_3(1-1/T)
\end{aligned}$$

On majore de la même façon,

$$\frac{N(T,\chi)}{T} \text{ par } \frac{F(T,\chi)+R(T,\chi)}{T}$$

et

$$N(1,\chi) \text{ par } F(1,\chi)+R(1,\chi).$$

Finalement, on obtient

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T \\ \rho\in\wp(\chi)}} \frac{1}{|\rho|} \leqslant \frac{1}{2\pi}\ln^2(T) + \frac{\ln\left(\frac{k}{2\pi e}\right)}{\pi}\ln(T) + C_2 + 2\left(\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{k}{2\pi}\right) + C_2\ln k + C_3\right) - C_2/T.$$

□

Utilisons le fait que, si ρ est un zéro de $L(s,\chi)$ alors $\overline{\rho}$ est aussi un zéro de $L(s,\chi)$ et que ces deux zéros sont symétriques par rapport à la droite $\Re(z) = 1/2$, pour obtenir le lemme 3.4 directement issu de [3].

Lemme 3.4 *Soit*

$$\phi_m(t) = \frac{1}{|t|^{m+1}} \exp\left(\frac{-\ln x}{R\ln(k|t|/C_1(k))}\right) \tag{3.2}$$

avec $R = 9,645908801$. Alors

$$\sum_{\substack{|\gamma|\geqslant T\\ \rho\in\wp(\chi)}} \frac{x^\beta}{|\gamma|^{m+1}} + \sum_{\substack{|\gamma|\geqslant T\\ \rho\in\wp(\overline{\chi})}} \frac{x^\beta}{|\gamma|^{m+1}} \leqslant x \sum_{\substack{|\gamma|\geqslant T\\ \rho\in\wp(\chi)}} \phi_m(\gamma) + \sqrt{x} \sum_{\substack{|\gamma|\geqslant T\\ \rho\in\wp(\chi)}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}}.$$

Réécrivons le lemme 7 de [5], pour qu'il soit adapté aux fonctions $F(y,\chi)$ et $R(y,\chi)$ que nous utilisons.

Lemme 3.5 *Posons $N(y) = N(y,\chi)$, $F(y) = F(y,\chi)$ et $R(y) = R(y,\chi)$. Soit $1 < U \leqslant V$ et $\phi(y)$ une fonction positive et différentiable pour $U < y < V$. Soit W tel que $(W-y)\phi'(y) \geqslant 0$ pour $U < y < V$, où W n'appartient pas nécessairement à $[U,V]$. Soit Y l'un des nombres U, V, W qui n'est pas plus grand que les deux autres ni plus petit que les deux autres. Choisissons $j = 0$ ou 1 selon que $(-1)^j(V-W) \geqslant 0$. Alors*

$$\sum_{U<|\gamma|\leqslant V} \phi(\gamma) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_U^V \phi(y)\ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)dy + (-1)^j C_2 \int_U^V \frac{\phi(y)}{y}dy + B_j(Y,U,V)$$

où $B_j(Y,U,V) = \{1+(-1)^j\}R(Y)\phi(Y) + \{N(V) - F(V) - (-1)^j R(V)\}\phi(V) - \{N(U) - F(U) + R(U)\}\phi(U)$.

Preuve :

Nous avons

$$\sum_{U<|\gamma|\leqslant V} \phi(\gamma) = -\int_U^V N(y)\phi'(y)dy + N(V)\phi(V) - N(U)\phi(U).$$

- $j = 1$. On a $W > V$ et donc $Y = \min(V,W) = V$. Or, d'après le lemme 3.1, $N(y) \geqslant F(y) - R(y)$.

$$\sum_{U<|\gamma|\leqslant V} \phi(\gamma) \leqslant [(N(y)-F(y)+R(y))\phi(y)]_U^V + \frac{1}{\pi}\int_U^V \ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)\phi(y)dy - \int_U^V R'(y)\phi(y)dy$$

car $F'(y) = \ln\left(\frac{ky}{2\pi e}\right) + 1 = \ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)$. De plus,

$$-\int_U^V R'(y)\phi(y)dy = -C_2\int_U^V \frac{\phi(y)}{y}dy.$$

- $j = 0$. On a $V > W$ et donc $Y = \max(U, W)$. Coupons l'intégrale en Y. De cette façon, $-\phi'(y) \leqslant 0$ pour $y \in [U, Y]$ et $-\phi'(y) \geqslant 0$ pour $y \in [Y, V]$. Remplaçons $N(y)$ par $F(y) - R(y)$ dans la première partie et par $F(y) + R(y)$ dans la seconde ; nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{U<|\gamma|\leqslant V} \phi(\gamma) &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_U^V \ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)\phi(y)dy + \int_Y^V R'(y)\phi(y)dy - \int_U^Y R'(y)\phi(y)dy \\ &\quad + B_0(Y, U, V).\end{aligned}$$

De plus,

$$\int_Y^V R'(y)\phi(y)dy \leqslant (-1)^j C_2 \int_U^V \frac{\phi(y)}{y}dy$$

et

$$-\int_U^Y R'(y)\phi(y)dy \leqslant 0.$$

□

Théorème 3.3 *Soient $k \geqslant 1$ un entier, $H \geqslant 1000$ un nombre réel. Nous supposerons que GRH(k,H) est vérifiée. Soient x_0 un réel, m un entier $\geqslant 1$ et $\delta > 0$ un nombre réel tel que $0 < \delta < (x_0 - 2)/(mx_0)$ et Y défini comme au lemme 3.5. Posons*

$$\tilde{A} = \frac{1}{\pi}\int_H^\infty \phi_m(y)\ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)dy + C_2\int_H^\infty \frac{\phi_m(y)}{y}dy \tag{3.3}$$

$$\tilde{B}_H = B_0(Y, H, \infty) \tag{3.4}$$

$$\tilde{C}_H = \frac{1}{m\pi H^m}\left(\ln\left(\frac{kH}{2\pi}\right) + 1/m\right) \tag{3.5}$$

$$\tilde{D}_H = \left(2C_2\ln(kH) + 2C_3 + \frac{C_2}{m+1}\right)/H^{m+1} \tag{3.6}$$

Alors, pour tout $x \geqslant x_0$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(k)}{x}\max_{1\leqslant y\leqslant x}|\psi(x;k,l) - \frac{y}{\varphi(k)}| &\leqslant A(m,\delta)\frac{\varphi(k)}{2}\left(\tilde{A} + \tilde{B}_H + (\tilde{C}_H + \tilde{D}_H)/\sqrt{x}\right) \\ &\quad + \left(1 + \frac{m\delta}{2}\right)\varphi(k)\tilde{E}(H)/\sqrt{x} + \frac{m\delta}{2} + \tilde{R}/x.\end{aligned}$$

<u>Preuve</u> : Reprenons le résultat du théorème 3.2 :

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(k)}{x}\max_{1\leqslant y\leqslant x}|\psi(y;k,l) - \frac{y}{\varphi(k)}| &< A(m,\delta)\sum_\chi \sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|>H}} \frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|} \\ &\quad + \left(1 + \frac{m\delta}{2}\right)\sum_\chi \sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant H}} \frac{x^{\beta-1}}{|\rho|} + \frac{m\delta}{2} + \tilde{R}/x\end{aligned}$$

Prenons chaque morceau séparément :
• Par le lemme 3.4,

$$\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|>H}} \frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|} \leqslant \frac{x}{2}\sum_{\substack{|\gamma|\geqslant H\\ \rho\in\wp(\chi)}} \phi_m(\gamma) + \frac{\sqrt{x}}{2}\sum_{\substack{|\gamma|\geqslant H\\ \rho\in\wp(\chi)}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}}.$$

Posons, pour $m \geqslant 0$,

$$W_m = \frac{C_1(k)}{k}\exp(X/\sqrt{m+1}). \tag{3.7}$$

En appliquant le lemme 3.5 avec $U = H$, $V = \infty$ et $W = W_m$,

$$\sum_{\substack{|\gamma|\geqslant H\\ \rho\in\wp(\chi)}} \phi_m(\gamma) \leqslant \tilde{A} + \tilde{B}_H.$$

Par intégration par parties,

$$\sum_{\substack{|\gamma|\geqslant H\\ \rho\in\wp(\chi)}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}} \leqslant \tilde{C}_H + \tilde{D}_H.$$

• Par le lemme 3.2,

$$\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant H}} \frac{x^{\beta-1}}{|\rho|} < \tilde{E}(H)/\sqrt{x}.$$

□

3.1.5 Terme prépondérant : $\tilde{A}$

Pour majorer le terme prépondérant, nous allons procéder de la même façon que Rosser & Schoenfeld en utilisant des majorations d'intégrales. Les trois lemmes suivants sont directement issus de [5].

Lemme 3.6 (Fonctions proches de celles de Bessel) *Posons*

$$K_\nu(z,u) = \frac{1}{2}\int_u^\infty t^{\nu-1}H^z(t)dt$$

où $z > 0, u \geqslant 0$ *et*

$$H^z(t) = \{H(t)\}^z = \exp\{-\frac{z}{2}(t+1/t)\}.$$

De plus, on trouve que $K_\nu(z,0) = K_\nu(z)$ *qui est une notation standard pour les fonctions de Bessel du second ordre. Rappelons que*

$$K_1(z) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left(1+\frac{3}{8z}\right) \tag{3.8}$$

$$K_2(z) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left(1+\frac{15}{8z}+\frac{105}{128z^2}\right) \tag{3.9}$$

Lemme 3.7

$$K_\nu(z,x) + K_{-\nu}(z,x) = K_\nu(z).$$

Ainsi $K_\nu(z,x) \leqslant K_\nu(z)$ $(\nu \geqslant 0)$*.*

Lemme 3.8 (Rosser & Schoenfeld, 1975) *Soit*

$$Q_\nu(z,x) = x^{\nu+1}\exp\{-z(t+1/t)/2\}.$$

Si $z > 0$ *et* $x > 1$ *alors*

$$K_1(z,x) < Q_1(z,x)$$

et

$$K_2(z,x) < (x+2/z)Q_1(z,x).$$

Le terme prépondérant peut s'exprimer à l'aide de ces fonctions proches de celles de Bessel.

Posons $X = \sqrt{\frac{\ln x}{R}}$, $z_m = 2X\sqrt{m} = 2\sqrt{\frac{m\ln x}{R}}$ et $U_m = \frac{2m}{z_m}\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right) = \sqrt{\frac{Rm}{\ln x}}\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)$.

Lemme 3.9

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \frac{2}{\pi}\frac{\ln x}{Rm}\left(\frac{k}{C_1(k)}\right)^m K_2(z_m, U_m) \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{\ln x}{Rm}}\left(\frac{k}{C_1(k)}\right)^m K_1(z_m, U_m) \\
&\quad + 2C_2\sqrt{\frac{\ln x}{R(m+1)}}\left(\frac{k}{C_1(k)}\right)^{m+1} K_1(z_{m+1}, U_{m+1}).
\end{aligned}$$

Preuve : Ce ne sont que de simples manipulations algébriques ; par exemple, on calcule

$$I = \int_H^\infty \frac{C_2}{y^{m+1}}\exp\left(\frac{-\ln x}{R\ln(ky/C_1(k))}\right)\frac{dy}{y}.$$

On réalise le changement de variable :

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{R(m+1)}{\ln x}}\ln\left(\frac{ky}{C_1(k)}\right) \\
dt &= \sqrt{\frac{R(m+1)}{\ln x}}\frac{dy}{y};
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{-\ln x}{R\ln(ky/C_1(k))}\right) &= \exp\left(\frac{-\ln x}{Rt/\sqrt{\frac{R(m+1)}{\ln x}}}\right)\\
&= \exp\left(\sqrt{\frac{(m+1)\ln x}{R}}\frac{1}{t}\right) = \exp\left(\frac{-z_{m+1}}{2}\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{y^{m+1}} = \left(\frac{k}{C_1(k)}\right)^{m+1}\exp\left(-(m+1)\frac{t}{\sqrt{\frac{R(m+1)}{\ln x}}}\right) = \left(\frac{k}{C_1(k)}\right)^{m+1}\exp\left(-t\frac{z_{m+1}}{2}\right),$$

d'où

$$I = \int_{U_{m+1}}^{\infty} C_2\sqrt{\frac{\ln x}{R(m+1)}}\left(\frac{k}{C_1(k)}\right)^{m+1}\exp\left(\frac{-z_{m+1}}{2}(t+1/t)\right)dt.$$

□

3.1.6 Etude de $f(k)$ intervenant dans l'expression $\tilde{R}$.

Rappelons que $f(k) = \sum_{p|k}\frac{1}{p-1}$.

Proposition 3.1 *Pour k entier $\geqslant 1$,*
1) $f(k) \leqslant \frac{\ln k}{\ln 2}$,
2) soit $N_i = \prod_{n\leqslant i} p_n$ alors pour $k < N_{i+1}$ alors

$$f(k) \leqslant f(N_i) \leqslant \frac{\sum_{n=1}^{i}\ln p_n}{\ln 2}.$$

3) Soit $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ alors

$$f(k) \leqslant f(N_{\omega(k)}).$$

Preuve : Montrons par récurrence que

$$f(k) \leqslant \frac{\ln k}{\ln 2}.$$

Pour $k = 1$, cela convient. Pour $k = 2$, $f(k) = 1 \leqslant \frac{\ln 2}{\ln 2}$. Supposons que $f(k) \leqslant \frac{\ln k}{\ln 2}$ pour $k \leqslant n$.

Majorons $f(n+1)$. Si $(n+1)$ est premier, alors $f(n+1) = 1/n \leqslant \ln n/\ln 2$. Si $(n+1)$ est composé, il est divisible par un $p \leqslant n$. Etudions les différents cas :

Si $p = 2$ et $2^\alpha \parallel n+1$,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f\left(\frac{n+1}{2^\alpha}\cdot 2^\alpha\right) = f\left(\frac{n+1}{2^\alpha}\right) + f(2) \\ &= 1 + f\left(\frac{n+1}{2^\alpha}\right) \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln 2} + 1 - \frac{\ln 2}{\ln 2} \\ &\leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln 2} \end{aligned}$$

Si $p > 2$ et $p^\alpha \parallel n+1$,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f\left(\frac{n+1}{p^\alpha}\cdot p^\alpha\right) = f\left(\frac{n+1}{p^\alpha}\right) + f(p) \\ &= \frac{1}{p-1} + f\left(\frac{n+1}{p^\alpha}\right) \leqslant \ln(n+1) + \frac{1}{p-1} - \ln p \\ &\leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln 2} \quad \text{car } \frac{1}{p-1} - \ln p < 0 \text{ pour } p > 2 \end{aligned}$$

Il reste à prouver que $f(k) \leqslant f(N_{i-1})$.
k se décompose en facteurs premiers :

$$k = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$$

avec les q_i premiers ($q_{i+1} > q_i$) et $\alpha_i > 0$. Montrons que si $k \leqslant N_{i+1} - 1$ alors $r \leqslant i$. Supposons que $r > i$. Alors

$$\begin{aligned} k &\geqslant q_1 \cdots q_r \\ &\geqslant 2 \cdot 3 \cdots p_i p_{i+1} \cdots p_r \\ &\geqslant N_{i+1} \quad \text{d'où une contradiction.} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} p_1 \leqslant q_1 &\Rightarrow \frac{1}{p_1 - 1} \geqslant \frac{1}{q_1 - 1} \\ p_2 \leqslant q_2 &\Rightarrow \frac{1}{p_2 - 1} \geqslant \frac{1}{q_2 - 1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

En faisant la somme, on déduit que $f(N_i) \geqslant f(k)$. On appliquerait une même méthode pour $\omega(n)$ sauf que dans ce cas, on sait que $r = i$.

Autre méthode : remarquer que f est additive : $f(mn) = f(m) + f(n)$ si $(m, n) = 1$. $\square$

3.2 Méthode avec $m = 1$.

Théorème 3.4 *Soient* $X = \sqrt{\frac{\ln x}{R}}$, $H \geqslant 1000$, k *entier* $\leqslant H$ *et*

$$\varepsilon = 2\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)\sqrt{\pi}}}\left(1 + \frac{1}{2X}(15/16 + \ln(C_1(k)/(2\pi)))\right) X^{3/4}\exp(-X).$$

On suppose que GRH(k,H) est vraie. Si $\varepsilon \leqslant 0,588$ *et* $X \geqslant \sqrt{2}\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)$ *alors*

$$\mid \psi(x;k,l) - x/\varphi(k) \mid \leqslant \varepsilon x/\varphi(k).$$

Preuve : Prenons $m = 1$. Si $W_1 \leqslant H$ alors $Y = H$ et $\tilde{B}_H = (F(H) + R(H) - N(H))\phi_1(H)$. Si $W_1 > H$ alors $Y = W_1$. Pour $y > e^e$, $R(y)/\ln y$ décroit.

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_H &< 2R(Y)\phi_1(Y) < 2\frac{R(H)}{\ln H}\phi_1(W_1)\ln W_1 \\
&= 2\frac{R(H)}{\ln H}\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \ln\left(\frac{C_1(k)}{k}\right)\right)\phi_1(W_1) \\
&= 2\frac{R(H)}{\ln H}\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \ln\left(\frac{C_1(k)}{k}\right)\right)(k/C_1(k))^2\exp(-2\sqrt{2}X)
\end{aligned}$$

Des deux valeurs de $\tilde{B}_H$, on ne conservera que la valeur précédente en supposant $X \geqslant \sqrt{2}\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)$.

D'autre part, en substituant dans le lemme 3.9 les majorations (3.8) et (3.9)

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &< 2\left(\frac{k}{C_1(k)}\right)\Bigg[\sqrt{\frac{\pi}{4X}}\exp(-2X)\left(1 + \frac{15}{16X} + \frac{105}{512X^2}\right)X^2/\pi \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\ln\frac{C_1(k)}{2\pi}X\sqrt{\frac{\pi}{4X}}\exp(-2X)\left(1 + \frac{3}{16X}\right) \\
&\quad + C_2\frac{kX}{C_1(k)\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{4\sqrt{2}X}}\exp(-2\sqrt{2}X)\left(1 + \frac{3}{16\sqrt{2}X}\right)\Bigg] \\
&< \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{k}{C_1(k)}X^{3/2}\exp(-2X)\left[1 + \left(\frac{15}{16} + \ln\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)\frac{1}{2X}\right]^2 = F_1.
\end{aligned}$$

Remarquons plus précisément que (voir lemme suivant)

$$\tilde{A} + \tilde{B}_H + (\tilde{C}_H + \tilde{D}_H + 3\tilde{E}(H))/\sqrt{x} + \tilde{R}\frac{2}{x\varphi(k)} < F_1.$$

Il reste à choisir δ pour optimiser

$$\frac{A(1,\delta)}{2}\varphi(k)F_1 + \delta/2.$$

Posons $f = \varphi(k)F_1$; il revient à résoudre une équation du second degré ayant pour solution $\delta = \frac{f+\sqrt{2f}}{1-f}$; l'autre solution négative étant écartée vu que δ est petit (< 1) et positif, on obtient

$$\varepsilon(x) < \delta.$$

On montre facilement que pour $0 \leqslant f < 0,588$,

$$\frac{f+\sqrt{2f}}{1-f} < 2\sqrt{f}.$$

Il est clair que δ satisfait aux hypothèses puisque

$$0 < \delta < 0,54 < \frac{x}{x-2}.$$

$\square$

Lemme 3.10

$$\tilde{A} + \tilde{B}_H + (\tilde{C}_H + \tilde{D}_H + 3\tilde{E}(H))/\sqrt{x} + \tilde{R}\frac{2}{x\varphi(k)} < F_1.$$

Preuve : Montrons que $\tilde{A} + \tilde{B}_H < F_1$.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{k}{C_1(k)\sqrt{\pi}} X^{3/2} e^{-2X} \Big(1 + (15/16 + \ln(C_1(k)/2\pi))/X \\
&\quad + (225/1024 + \frac{15}{32}\ln(C_1(k)/2\pi) + \frac{1}{4}\ln^2(C_1(k)/2\pi))/X^2\Big) \\
\tilde{A} &< \frac{k}{C_1(k)\sqrt{\pi}} X^{3/2} e^{-2X} \Bigg(1 + \frac{15}{16X} + \frac{105}{512X^2} + \ln(C_1(k)/2\pi)(1/X + 3/(16X^2)) \\
&\quad + C_2 \frac{k\pi}{C_1(k)\sqrt{2\sqrt{2}}} \exp(-2(\sqrt{2}-1)X)(1/X + 3/(16\sqrt{2}X^2)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_H &< \frac{k}{\sqrt{\pi}C_1(k)} X^{3/2} \exp(-2X)\exp(-2(\sqrt{2}+1)X) \\
&\quad \times \left[\frac{2k\sqrt{\pi}}{C_1(k)\ln H}(C_2\ln(kH) + C_3)\left(\frac{1}{\sqrt{2X}} + \frac{1}{X\sqrt{X}}\ln(C_1(k)/k)\right)\right]
\end{aligned}$$

D'où $F_1 - \tilde{A} - \tilde{B}_H > 0$ si

$$\frac{1}{X^2}\left(\frac{15}{1024} + \frac{9}{32}\ln\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right) + \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{C_2\sqrt{\pi}k}{C_1(k)}\exp(-2(\sqrt{2}-1)X)\frac{1}{\sqrt{2X}} \\
&\quad\times\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}(\sqrt{\frac{2}{X}}+\frac{3}{16X^{3/2}})+2\left(1+\frac{\ln k + C_2/C_3}{\ln H}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{X}\ln\frac{C_1(k)}{k}\right)\right] \\
&> \frac{C_2k\sqrt{\pi}}{C_1(k)}\exp(-2(\sqrt{2}-1)X)\frac{1}{\sqrt{2X}}\cdot 18,2
\end{aligned}$$

pour $C_1(k) \leqslant 32\pi$, $X \geqslant \sqrt{2}\ln(1000/32\pi)$ et $k \leqslant H$.

Cela revient à voir si

$$\frac{C_1(k)}{kC_2\sqrt{\pi}\cdot 18,2}\,(15/1024+\cdots) > X^{3/2}\exp(-2(\sqrt{2}-1)X).$$

Or, pour $X \geqslant \sqrt{2}\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)$,

$$\begin{aligned}
X^{3/2}\exp(-2(\sqrt{2}-1)X) &< X^{3/2}\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)^{-3/2} \\
&= \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\sqrt{2}C_1(k)\ln(kH/C_1(k))}{H}\right)^{3/2}
\end{aligned}$$

La fonction $\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\sqrt{2}C_1(k)\ln(kH/C_1(k))}{H}\right)^{3/2}$ est maximale pour $k = e^3C_1(k)/H$. Ainsi

$$X^{3/2}\exp(-2(\sqrt{2}-1)X) < \frac{C_1(k)}{kH}(3\sqrt{2})^{3/2}/e^{3/2}.$$

Il faut donc comparer

$$\frac{1}{C_2\sqrt{\pi}\cdot 18,2}\,(15/1024+\cdots)\ \text{ avec }\ \frac{(3\sqrt{2})^{3/2}}{He^{3/2}}.$$

Comme $C_1(k) \geqslant 9,14$ et $C_2 = 0,9185$, il reste à voir si

$$0,1843 > \frac{(3\sqrt{2})^{3/2}}{He^{3/2}}(\approx 0,002)$$

ce qui est le cas comme $H \geqslant 1000$.

Le reste $(\tilde{C}_H+\tilde{D}_H)/\sqrt{x}+3\tilde{E}(H))/\sqrt{x}+\tilde{R}\frac{2}{x\varphi(k)}$ est négligeable...

• Majoration des termes $A(m,\delta)\frac{\varphi(k)}{2}(\tilde{C}_H+\tilde{D}_H)+\frac{3}{2}\varphi(k)\frac{\tilde{E}(H)}{\sqrt{x}}+\tilde{R}/x$ dans la méthode $m=1$.

On a supposé $X \geqslant \sqrt{2}\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)$ et $C_1(k) \leqslant 32\pi$ donc $X \geqslant \sqrt{2}\ln\left(\frac{1000}{32\pi}\right) \approx 3,24885$. On a

$$\text{Reste } = \tilde{C}_H + \tilde{D}_H + 3\tilde{E}(H)) + \tilde{R}/\sqrt{x} \leqslant \begin{cases} (\ln H \ln k)^2 & \text{si } k \neq 1 \\ (\ln H)^2 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Traitons le cas $k \neq 1$. Comme $X \geqslant \sqrt{2}\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)$,

$$\exp\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right) \geqslant \frac{kH}{C_1(k)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Reste } \leqslant (\ln H \ln k)^2 &\leqslant \frac{(\ln H \ln k)^2}{\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)^2}\exp(X\sqrt{2}) \\ &\leqslant C_1^2(\chi)\frac{1}{e^2}\left(\frac{\ln 1000}{1000}\right)^2\exp(X\sqrt{2}) \\ &\leqslant 0,0653\exp(X\sqrt{2}) \quad \text{car } C_1(k) \leqslant 32\pi. \end{aligned}$$

Posons $K = 0,0653$. Comparons maintenant

$$\varphi(k)\frac{K\exp(X\sqrt{2})}{\sqrt{x}} = \varphi(k)K\exp(X\sqrt{2} - RX^2/2)$$

avec

$$\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)\sqrt{\pi}}}X^{3/4}\exp(-X).$$

Remarquons d'abord que $\frac{k}{\varphi(k)C_1(k)\sqrt{\pi}} \geqslant \frac{1}{32\pi\sqrt{\pi}}$. Calculons c tel que

$$\begin{aligned} 0,0653\exp(X\sqrt{2} - RX^2/2) &\leqslant c\sqrt{\frac{1}{32\pi\sqrt{\pi}}}X^{3/4}\exp(-X) \\ \Leftrightarrow c &\geqslant K\sqrt{32\pi\sqrt{\pi}}\exp(X\sqrt{2} - RX^2/2 + X)X^{-3/4} \\ \Leftrightarrow c &\geqslant 7,1521 \cdot 10^{-20}. \end{aligned}$$

Le reste est négligeable et est absorbé par les arrondis. □

3.3 Méthode avec $m = 2$.

Corollaire 3.1 (Corollaire du lemme 3.5) *Si, en plus des hypothèses du lemme 3.5, on a* $\frac{2\pi}{k} < U$ *alors*

$$\sum_{U < |\gamma| \leqslant V} \phi(\gamma) \leqslant \left\{1/\pi + (-1)^j q(Y)\right\}\int_U^V \phi(y)\ln(y/2\pi)dy + B_j(Y, U, V)$$

où $q(y) = (-1)^j \frac{C_2}{y\ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)}$.

Preuve : $(-1)^j \frac{R'(y)}{\ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)} \leqslant (-1)^j \frac{C_2}{y\ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)}$ si $\frac{ky}{2\pi} > 1$. □

Lemme 3.11 *Soit $A(m,\delta)$ définie par la formule (3.1). Posons*

$$R_m(\delta) = \left(1 + (1+\delta)^{m+1}\right)^m.$$

$$\textit{Alors } A(m,\delta) \leqslant \frac{R_m(\delta)}{\delta^m}.$$

Preuve : La preuve de ce lemme apparaît dans [4] p. 222. □

Théorème 3.5 *Soit k un entier plus grand que 1. On rappelle que $R = 9,645908801$. Soit $H \geqslant 1000$. On suppose que GRH(k,H) est vérifiée. Soit $C_1(k)$ défini dans le théorème 3.1.*

Soient X_0, X_1, X_2 et X_3 vérifiant

$$\frac{e^{X_0}}{\sqrt{X_0}} = H\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}}, \quad \frac{e^{X_1}}{X_1} = 10\varphi(k),$$

$$X_2 = kC_1(k)/(2\pi\varphi(k)), \quad X_3 = \frac{2k\pi e}{C_1(k)\varphi(k)}.$$

Soit $C = \min(C_1(k), 32\pi)$ et $X_4 = \max(10, X_0, X_1, X_2, X_3)$.

Posons

$$\varepsilon(X) = 3\sqrt{\frac{k}{\varphi(k)C}}X^{1/2}\exp(-X).$$

Alors pour tous les x tels que $X = \sqrt{\frac{\ln x}{R}} \geqslant X_4$ on a

$$|\psi(x;k,l) - x/\varphi(k)|, \quad |\theta(x;k,l) - x/\varphi(k)| < \varepsilon\left(\sqrt{\frac{\ln x}{R}}\right)x.$$

Corollaire 3.2 *Reprenons les mêmes notations que dans le théorème 3.5. Soit $X_5 \geqslant X_4$. Soit $c = \varepsilon(X_5)$. Pour $x \geqslant \exp(RX_5^2)$,*

$$|\psi(x;k,l) - x/\varphi(k)|, \quad |\theta(x;k,l) - x/\varphi(k)| < cx.$$

Preuve : L'idée est de choisir $m = 2$ et de couper judicieusement l'intégrale en 2 parties avec des majorations "optimales" sur chaque partie.
Prenons T de la même forme que celle de W_m (formule (3.7)). Posons $T = \frac{C_1(k)}{k}\exp(\nu X)$. On suppose que $T \geqslant H$ et que $1/\sqrt{m+1} \leqslant \nu \leqslant 1$ pour que $W_m \leqslant T \leqslant W_0$. On reprend le théorème 3.2 et on coupe les sommes en T :

$$\begin{aligned}
& A(m,\delta)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|>T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}+\left(1+\frac{m\delta}{2}\right)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|}\\
= & \left(1+\frac{m\delta}{2}\right)\sum_{\chi}\left(\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant H}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|}+\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H<|\gamma|\leqslant T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|}\right)\\
& +A(m,\delta)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|>T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}\\
\leqslant & \left(1+\frac{m\delta}{2}\right)\varphi(k)\tilde{A}_1+A(m,\delta)\varphi(k)\tilde{A}_2.
\end{aligned}$$

1ère partie :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1=\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|} & = \sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant H}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|}+\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H<|\gamma|\leqslant T}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|}\\
& \leqslant \sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\|\gamma|\leqslant H}}\frac{1}{|\rho|}/\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\left(x\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H\leqslant|\gamma|\leqslant T}}\phi_0(\gamma)+\sqrt{x}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H\leqslant|\gamma|\leqslant T}}\frac{1}{|\gamma|}\right)\\
& \leqslant \tilde{E}(H)/\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H\leqslant|\gamma|\leqslant T}}\frac{1}{|\gamma|}/\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H\leqslant|\gamma|\leqslant T}}\phi_0(\gamma)\\
& \leqslant \tilde{E}(T)/\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H\leqslant|\gamma|\leqslant T}}\phi_0(\gamma).
\end{aligned}$$

En appliquant le corollaire 3.1 ($j = 1, m = 0$)

$$\sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\H\leqslant|\gamma|\leqslant T}}\phi_0(\gamma)=\{1/\pi-q(Y)\}\int_H^T\phi_0(y)\ln(y/2\pi)dy+B_1(T,H,T).$$

De plus, $B_1(T,H,T) < 2R(T)\phi_0(T)$.

Nous allons majorer

$$I_1 = \left(\frac{1}{\pi} - q(Y)\right) \int_H^T \phi_0(y) \ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right) dy.$$

Posons $V'' = X^2/\ln\left(\frac{kT}{C_1(k)}\right) = X/\nu = Y - 2X - \nu X$ où $Y = X(1-\nu)^2/\nu$. Posons $U'' = X^2/\ln\left(\frac{kH}{C_1(k)}\right)$ et $\Gamma(\nu, x) = \int_x^\infty e^{-u}u^{\nu-1}du$. Or,

$$\begin{aligned}\int_U^V \ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)\phi_0(y)dy &= \int_U^V \ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)\exp(-X^2/\ln\left(\frac{ky}{C_1(k)}\right))\frac{dy}{y}\\ &= X^4\left\{\Gamma(-2,V'') - \Gamma(-2,U'')\right\}\\ &\quad +X^2\ln\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)\left\{\Gamma(-1,V'') - \Gamma(-1,U'')\right\}\end{aligned}$$

en posant $y = \frac{C_1(k)}{k}\exp(X^2/y)$. Or, si $\nu \leqslant 1$ et $x > 0$ alors $\Gamma(\nu, x) \leqslant x^{\nu-1}\int_x^\infty e^{-t}dt = x^{\nu-1}e^{-x}$. Ainsi, nous avons

$$\int_U^V \ln\left(\frac{ky}{2\pi}\right)\phi_0(y)dy \leqslant X^4V''^{-3}e^{-V''} + X^2\ln\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)V''^{-2}e^{-V''}.$$

D'où

$$\begin{aligned}I_1 &\leqslant (1/\pi + q(Y))X^2(X^2V''^{-3} + \ln\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)V''^{-2})e^{-V''}\\ &\leqslant (1/\pi - q(T))e^{-Y}e^{-2X}\left(\frac{kT}{C_1(k)}\right)\left(\frac{X^4}{(X/\nu)^3} + \frac{dX^2}{(X/\nu)^2}\right)\\ &= (1/\pi - q(T))e^{-Y}e^{-2X}\left(\frac{kT}{C_1(k)}\right)XG_0\\ &\leqslant (1/\pi + q(T))e^{-Y}e^{-2X}\left(\frac{kT}{C_1(k)}\right)XG_0\end{aligned}$$

où $d = \ln\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)$ et $G_0 = \nu^2(\nu + d/X)$. Enfin,

$$\tilde{A}_1 \leqslant \tilde{E}(T)/\sqrt{x} + \frac{1}{2}\left\{(1/\pi + q(T))e^{-Y}e^{-2X}\left(\frac{kT}{C_1(k)}\right)XG_0 + 2R(T)\phi_0(T)\right\}.$$

2ème partie :
Soit

$$\tilde{A}_2 = \sum_{\substack{\rho\in\wp(\chi)\\ |\gamma|>T}} \frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}.$$

Par le lemme 3.4,

$$\tilde{A}_2 \leqslant \frac{x}{2} \sum_{\substack{\rho \in \wp(\chi) \\ |\gamma| > T}} \phi_m(\gamma) + \frac{\sqrt{x}}{2} \sum_{\substack{\rho \in \wp(\chi) \\ |\gamma| > T}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}}.$$

D'après le corollaire 3.1 ($j = 0$)

$$\sum_{\substack{\rho \in \wp(\chi) \\ |\gamma| > T}} \phi_m(\gamma) \leqslant \{1/\pi + q(Y)\} \int_T^\infty \phi_m(y) \ln(\frac{ky}{2\pi}) dy + B_0(Y, T, \infty).$$

On verra par la suite que $m = 2$ et donc que

$$B_0(T, T, \infty) < 2R(T)\phi_2(T).$$

De plus,

$$\sum_{\substack{\rho \in \wp(\chi) \\ |\gamma| > T}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}} \leqslant \tilde{C}_T + \tilde{D}_T.$$

Etudions plus particulièrement

$$\int_T^\infty \phi_m(y) \ln(ky/2\pi) dy = \frac{z_m^2}{2m^2} \left(\frac{k}{C_1(k)} \right)^m \left(K_2(z_m, U_m) + \frac{2md}{z_m} K_1(z_m, U_m) \right)$$

où $d = \ln\left(\frac{C_1(k)}{2\pi}\right)$ et $U_m = \frac{2m}{z_m} \ln\left(\frac{kT}{C_1(k)}\right) = \nu\sqrt{m} = U'$. Ecrivons, en posant $z = z_m$ et en utilisant le lemme 3.8,

$$\begin{aligned} K_2(z, U') + \frac{2dm}{z} K_1(z, U') &< (U' + 2/z + 2dm/z) Q_1(z, U') \\ &\leqslant \sqrt{m} \left(\nu + \frac{1 + dm}{mX} \right) \frac{U'^2}{z(U'^2 - 1)} \exp\left(-\frac{z}{2}(U' + 1/U') \right). \end{aligned}$$

Or $-\frac{z}{2}(U' + 1/U') = X\sqrt{m}(\nu\sqrt{m} + 1/(\nu\sqrt{m})) = m\nu X + X/\nu = m\nu X + (Y + 2X - \nu X)$, où $Y = X(1-\nu)^2/\nu$, d'où

$$K_2(z, U') + \frac{2dm}{z} K_1(z, U') < G_1 e^{-Y} \frac{m}{2(m-1)} X^{-1} e^{-2X} \left(\frac{kT}{C_1(k)} \right)^{-(m-1)}$$

où $G_1 = \frac{m-1}{m} \frac{U'^2}{z(U'^2-1)} \left(\nu + \frac{1+dm}{mX} \right) = \frac{(m-1)\nu^2}{m\nu^2 - 1} \left(\nu + \frac{1+dm}{mX} \right)$ car $e^{\nu X(m-1)} = \left(\frac{kT}{C_1(k)} \right)^{m-1}$ et $\frac{\sqrt{m}}{z} = \frac{1}{2} X^{-1}$. On a donc

$$\int_T^\infty \phi_m(y) \ln(ky/2\pi) dy < \frac{G_1 e^{-Y}}{m-1} \frac{k}{C_1(k)} X e^{-2X} T^{-(m-1)}.$$

Soit $G_2 = \frac{R_m(\delta)}{2^m}(1+\pi q(T))$. Il vient, en utilisant le lemme 3.11,

$$A(m,\delta)\frac{\varphi(k)}{2}(1/\pi + q(T))\int_T^\infty \phi_m(y)\ln(ky/2\pi)dy <$$
$$\left(\frac{2}{\delta}\right)^m \frac{\varphi(k)}{2}\left\{\frac{G_2}{\pi}\frac{kG_1e^{-Y}}{(m-1)C_1(k)}Xe^{-2X}T^{-(m-1)}\right\}.$$

En rassemblant les résultats de la première et de la deuxième partie, il vient

$$\begin{aligned}
&\varphi(k)\left(\frac{2+m\delta}{2}\tilde{A}_1 + A(m,\delta)\tilde{A}_2\right)\\
&< \frac{XG_2e^{-2X}e^{-Y}\varphi(k)}{2\pi}\left(\frac{k}{C_1(k)}\right)\left\{\frac{G_1}{m-1}T^{-(m-1)}\left(\frac{2}{\delta}\right)^m + G_0T\right\} + r
\end{aligned}$$

car $1 + m\delta/2 < R_m(\delta)/2^m < G_2/\pi$, avec

$$\begin{aligned}
r &= \varphi(k)(1+m\delta/2)R(T)\phi_0(T) + A(m,\delta)\varphi(k)R(T)\phi_2(T)\\
&+ \frac{\varphi(k)}{\sqrt{x}}((1+m\delta/2)\tilde{E}(T) + A(m,\delta)(\tilde{C}_T + \tilde{D}_T)/2).
\end{aligned}$$

Supposons que G_0/G_1 soit indépendant de ν ; l'expression entre accolades est minimale pour $T = (G_1/G_0)^{1/m}\cdot\frac{2}{\delta}$. Avec ce choix,

$$\frac{G_1}{m-1}T^{-(m-1)}\left(\frac{2}{\delta}\right)^m + G_0T = \frac{m}{m-1}G_1^{1/m}G_0^{1-1/m}\frac{2}{\delta}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \varphi(k)&\left(\frac{2+m\delta}{2}\tilde{A}_1 + A(m,\delta)\tilde{A}_2\right) + \frac{1}{2}m\delta <\\
&\frac{1}{2}mG_2\left\{Xe^{-2X}e^{-Y}\frac{2k\varphi(k)}{\delta(m-1)\pi C_1(k)}G_1^{1/m}G_0^{1-1/m} + \delta\right\} + r.
\end{aligned}$$

L'expression entre accolades est minimale pour

$$\delta = \left\{G_0^{1-1/m}G_1^{1/m}e^{-Y}\frac{2k\varphi(k)}{(m-1)\pi C_1(k)}\right\}^{1/2}X^{1/2}e^{-X}.$$

On écrit donc

$$T = \left(\frac{G_1}{G_0}\right)^{1/2m}\left(\frac{2C_1(k)}{k\varphi(k)}(m-1)\pi e^Y/G_0\right)^{1/2}X^{-1/2}e^X$$

et

$$\varepsilon_1 < G_2\left(G_0^{1-1/m}G_1^{1/m}e^{-Y}\frac{2k\varphi(k)}{\pi C_1(k)}\right)^{1/2}\frac{m}{\sqrt{m-1}}X^{1/2}e^{-X}+r. \tag{3.10}$$

On choisit $m=2$ pour minimiser l'expression $\frac{m}{\sqrt{m-1}}$. Regardons si le choix de T est convenable. D'une part,

$$T=\left(\frac{G_1}{G_0^3}\right)^{1/4}e^{Y/2}\sqrt{\frac{2\pi C_1(k)}{k\varphi(k)}}X^{-1/2}e^X$$

avec $Y=X(1-\nu)^2/\nu$ et d'autre part

$$T=\frac{C_1(k)}{k}\exp(\nu X).$$

Les deux équations sont compatibles si et seulement s'il existe ν tel que $f(\nu)=1$ où

$$f(\nu)=\frac{C_1(k)\varphi(k)}{2\pi k}\left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/2}Xe^{-X(1-\nu)^2/\nu}e^{-2X(1-\nu)}.$$

Si $1/\sqrt{2}<\nu\leqslant 1$, il n'est pas difficile de voir que G_1 décroît lorsque ν augmente. Aussi, $f(\nu)$ est strictement croissante pour $\nu\in]1/\sqrt{2},1]$. De plus, $\lim_{\nu\to(1/\sqrt{2})^+}f(\nu)=0$ et $f(1)>1$ (pour tout $X\geqslant 1$). Il en résulte qu'il existe un unique $\nu\in]1/\sqrt{2},1]$ tel que $f(\nu)=1$. Pour $1/\sqrt{2}<\nu\leqslant 1$, nous avons ($m=2$)

$$H(\nu)=\frac{G_0^3}{G_1}=\frac{[\nu^2(\nu+d/X)]^3}{\frac{\nu^2}{2\nu^2-1}(\nu+\frac{1+2d}{2X})}<(\nu+d/X)^2.$$

Posons

$$\nu_0=1-\frac{1}{2X}\ln\left(\frac{C_1(k)\varphi(k)X}{2k\pi}\right).$$

Etudions $H(\nu_0)$.

$$H(\nu_0)<1 \quad si \quad \nu+d/X$$

$$\text{c'est-à-dire pour}\qquad 1-\frac{1}{2X}\ln\left(\frac{C_1(k)\phi(k)X}{2\pi k}\right)+\frac{\ln(C_1(k)/2\pi)}{X}<1$$

$$\text{ou encore}\qquad X>\frac{kC_1(k)}{2\pi\phi(k)}.$$

Comme

$$f(\nu)=\frac{C_1(k)\varphi(k)}{2k\pi}\left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/2}X\exp(-X(1-\nu)^2/\nu)\exp(-2X(1-\nu)),$$

$$f(\nu_0) = \left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/2} \exp\left(-\ln^2\left(\frac{C_1(k)\varphi(k)X}{2k\pi}\right)/(4\nu_0 X)\right).$$

Pour $X > kC_1(k)/(2\pi\varphi(k))$, $f(\nu_0) < 1 = f(\nu)$ et donc les égalités sont vraies si $T > \frac{C_1(k)}{k}\exp(\nu_0 X) > H_k$. Or $\frac{C_1(k)}{k}\exp(\nu_0 X) = \sqrt{\frac{2\pi C_1(k)}{k\varphi(k)}} e^{X - \frac{1}{2}\ln X}$. Soit X_0 vérifiant

$$e^{X_0 - \frac{1}{2}\ln X_0} = H_k \sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}}.$$

On choisit $X \geqslant \max(X_0, 10)$.

On suppose que $X \geqslant \frac{2k\pi e}{C_1(k)\varphi(k)}$ pour que ν_0 soit une fonction croissante de X et que $C_1(k) \leqslant 32\pi$ alors

$$\nu_0 > 0,746 \text{ et } \nu_0 < \nu < 1.$$

Nous cherchons à évaluer

$$K = G_2(\sqrt{G_0 G_1} e^{-Y})^{1/2}. \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} G_0 G_1 &< (1 + d/X)\frac{\nu_0}{2\nu_0^2 - 1}\left(\nu_0 + \frac{1 + 2d}{2X}\right) \\ &< 8,995. \end{aligned}$$

Dans plusieurs calculs suivants, nous utiliserons les majorations suivantes :

1.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}} X^{1/2}\exp(-X) &\leqslant \frac{e^{X - \ln\sqrt{X}}}{H\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}}}\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}} X^{1/2}\exp(-X) \\ &\leqslant \frac{1}{H}, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \delta &= 2\sqrt[4]{G_0 G_1}\exp(-Y/2)\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}} X^{1/2} e^{-X} \\ &\leqslant 2\sqrt{3}/H, \end{aligned}$$

3.

$$G_2 = \frac{R_2(\delta)}{2^2}(1 + \pi q(T)) < (1 + 3,006 \cdot \delta/2)^2 (1 + \pi q(T)),$$

car

$$\begin{aligned} \frac{R_2(\delta)}{2^2} &= \left\{\frac{(1+\delta)^3+1}{2}\right\}^2 \\ &= \left\{1+\frac{1}{2}\delta(3+3\delta+\delta^2)\right\}^2 < \left(1+\frac{3,006}{2}\delta\right)^2 \end{aligned}$$

comme $1+\delta+\delta^2/2 < 1,002$,

4.

$$\begin{aligned} |q(T)| &\leqslant \left|q\left(\frac{C_1(k)}{k}e^{\nu_0 X}\right)\right| = \frac{C_2}{\frac{C_1(k)}{k}e^{\nu_0 X}\ln(\frac{C_1(k)}{2\pi}e^{\nu_0 X})} \\ &< \frac{C_2}{T\ln(kH/(2\pi))} = C_2\left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/4} e^{-Y/2}\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}}X^{1/2}\exp(-X)/\ln\left(\frac{H}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Or $\frac{G_0^3}{G_1} < (\nu+d/X)^2 \leqslant (1+\ln(16)/10)^2$, $\exp(-Y/2)\leqslant 1$ et $H \geqslant 1000$, il vient

$$\begin{aligned} 1+\pi q(T) &< 1+\frac{\pi C_2\sqrt{1+\ln(16)/10}}{\ln(1000/(2\pi))}\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi C_1(k)}}X^{1/2}\exp(-X) \\ &< 1+\frac{\pi C_2}{\ln(1000/(2\pi))}\sqrt{1+\frac{\ln 16}{10}}. \end{aligned}$$

On obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned} K &< \sqrt{3}G_2 \\ &< \sqrt{3}\left(1+\frac{\pi C_2}{\ln(1000/(2\pi))}\sqrt{1+\frac{\ln 16}{10}}\right)\times\left(1+\frac{3,006}{2}\frac{2\sqrt{3}}{1000}\right)^2 \\ &< 1,75126. \end{aligned}$$

En remplaçant cette majoration de K (voir formule 3.11) dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &< 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}}X^{1/2}\exp(-X)) + r \\ &< 2,79461\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}}X^{1/2}\exp(-X)) + r \end{aligned}$$

- Majoration des termes $(1+m\delta/2)R(T)\phi_0(T)$ et $A(m,\delta)R(T)\phi_2(T)$.

Rappelons que

$$\begin{aligned} R(T) &= C_2\ln(kT)+C_3, \\ \phi_0(T) &= \frac{1}{T}\exp\left(-X^2/\ln(kT/C_1(k))\right), \\ \phi_m(T) &= \phi_0(T)T^{-m}. \end{aligned}$$

Or

$$\phi_0(T)=\frac{1}{T}\exp(-X^2/(\nu X))=\frac{1}{T}\exp(-\frac{1}{\nu}X)\leqslant\frac{1}{T}\exp(-X)$$

et

$$\frac{1}{T}=X^{1/2}\exp(-X)\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}}\left(\frac{G_0}{2\pi e^Y}\right)^{1/2}\left(\frac{G_0}{G_1}\right)^{1/4}$$

d'où

$$\begin{aligned} R(T)\phi_0(T) &\leqslant \frac{C_2\ln(kT)+C_3}{T}\exp(-X) \\ &\leqslant X^{1/2}\exp(-X)\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}}\left[(C_2\ln(kT)+C_3)\left(\frac{G_0}{2\pi e^Y}\right)^{1/2}\left(\frac{G_0}{G_1}\right)^{1/4}e^{-X}\right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} G_0 &\leqslant 1+\frac{\ln(C_1(k)/2\pi)}{X}, \\ \frac{G_0}{G_1} &\leqslant 2\nu^2-1<1 \quad (m=2), \\ \exp(Y) &> 1, \\ \ln(kT) &= \nu X+\ln(C_1(k))\leqslant X+\ln(C_1(k))\leqslant X+\ln(32\pi). \end{aligned}$$

donc, comme $X\geqslant 10$ et $C_1(k)\leqslant 32\pi$,

$$\begin{aligned} &(1+\delta)\varphi(k)\left[(C_2\ln(kT)+C_3)\left(\frac{G_0}{2\pi e^Y}\right)^{1/2}\left(\frac{G_0}{G_1}\right)^{1/4}\exp(-X)\right] \\ &\leqslant \varphi(k)\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{1000}\right)[C_2(X+\ln 32\pi)+C_3]\sqrt{\frac{1+\ln 16/10}{2\pi}}\exp(-X) \\ &\leqslant 0,933\varphi(k)X\exp(-X) \\ &\leqslant 0,0933 \text{ si } X\geqslant X_1. \end{aligned}$$

Le terme $(1+\delta)\varphi(k)R(T)\phi_0(T)$ est donc majoré par

$$0,0933\cdot\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}}X^{1/2}\exp(-X).$$

D'autre part,

$$A(2,\delta)/T^2 = 2\sqrt{\frac{G_1}{G_0}} < 2$$

et

$$A(2,\delta)R(T)\phi_2(T) < \frac{R_2(\delta)}{2^2}R(T)\phi_0(T),$$

donc le terme $A(2,\delta)R(T)\phi_2(T)\varphi(k)$ est donc majoré par

$$0,0943 \cdot \sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}X^{1/2}} \exp(-X).$$

Les deux termes sont donc majorés par

$$r \leqslant 0,2 \cdot \sqrt{\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}X^{1/2}} \exp(-X).$$

• Majoration des termes $\tilde{C}_T, \tilde{D}_T, \tilde{E}(T), \tilde{R}/x$.

Majorons d'abord $f(k) = \sum_{p|k} \frac{1}{p-1}$,

$$f(k) \leqslant \frac{\ln k}{\ln 2}.$$

Ecrivons explicitement ces termes pour $m = 2$, $H \geqslant 1000$ et $C_1(k) \leqslant 32\pi$.

$$\begin{array}{rcl}
3\tilde{E}(T) & = & 3(\frac{1}{2\pi}\ln^2 T + \frac{1}{\pi}\ln(k/2\pi)\ln T + C_2 + 2(\frac{1}{\pi}\ln(k/(2\pi e)) + C_2\ln k + C_3)), \\
\tilde{C}_T & = & \frac{1}{2\pi T^2}(\ln\left(\frac{kT}{2\pi}\right) + 1/2), \\
\tilde{D}_T & = & (2C_2\ln(kT) + 2C_3 + C_2/3)/T^3, \\
\tilde{R}/\sqrt{x} & \leqslant & \varphi(k)\left[(f(k)+0,5)\ln x/x + 4\ln k/x + 13,4\right]/\sqrt{x} \\
\text{Somme} & \leqslant & \begin{array}{ll} (\ln T\sqrt{\ln k})^2 & \text{pour } k \neq 1 \\ \ln^2 T & \text{pour } k = 1 \end{array}
\end{array}$$

Trouvons la valeur c pour laquelle

$$A(2,\delta)\varphi(k)\frac{(\ln T\sqrt{\ln k})^2}{\sqrt{x}} \leqslant c\left(\frac{k\varphi(k)}{C_1(k)}\right)^{1/2} X^{1/2}\exp(-X)$$

avec $X = \sqrt{\frac{\ln x}{R}}$.

Or $A(2,\delta) \leqslant \frac{R_2(\delta)}{\delta^2}$ et $T = \left(\frac{G_1}{G_0}\right)^{1/2} \frac{2}{\delta}$ donc

$$A(2,\delta) \leqslant \frac{R_2(\delta)}{2^2} T^2 \frac{G_0}{G_1}.$$

De plus, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \exp(-RX^2/2)$ d'où

$$c \geqslant \frac{R_2(\delta)}{2^2} \frac{G_0}{G_1} T^2 \varphi(k) (\ln T \sqrt{\ln k})^2 \left(\frac{C_1(k)}{k\varphi(k)}\right)^{1/2} X^{-1/2} \exp(X - RX^2/2).$$

Or $\frac{G_0}{G_1} < 1$, $T^2 = \frac{C_1^2(k)}{k^2} \exp(2\nu X) \leqslant \frac{C_1^2(k)}{k^2} \exp(2X)$, donc on peut choisir

$$c \geqslant \frac{R_2(\delta)}{2^2} C_1^2(k) \frac{\ln k}{k^2} (\ln(C_1(k)/k) + X)^2 \left(\frac{C_1(k)\varphi(k)}{k}\right)^{1/2} X^{-1/2} \exp(3X - RX^2/2).$$

Or $\frac{\varphi(k)}{k} \leqslant 1$, $\frac{\ln k}{k^2} \leqslant 1$ et $R_2(\delta) \leqslant (1 + 3,006\delta/2)^2$ avec $\delta \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{H} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{1000}$. On obtient

$$c \geqslant \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3,006}{2} \frac{2\sqrt{3}}{1000}\right)^2 C_1^2(k) (\ln C_1(k) + X)^2 \sqrt{C_1(k)} X^{-1/2} \exp(3X - RX^2/2).$$

Comme $C_1(k) \leqslant 32\pi$ et $X \geqslant 10$, il suffit de choisir

$$c \geqslant 0,64286 \cdot 10^{-190}.$$

Pour $k = 1$, on remplace la majoration $\frac{\ln k}{k^2} \leqslant 1$ par 1, ce qui correspond au calcul précédent. □

3.4 Application pour $k = 3$

Nous pouvons maintenant montrer et trouver les valeurs x_0 et c telles que, pour $x \geqslant x_0$,

$$|\ \theta(x; 3, l) - x/2\ | < cx/\ln x,$$

ce qui n'était pas possible avec les résultats de [3].

Calculons c tel que $|\ \theta(x; 3, l) - x/2\ | < cx/\ln x$ pour $x \geqslant x_0$.

D'après le théorème 3.5, pour $k = 3$,

$$\varepsilon(x) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{6}{20,92}} X^{1/2} \exp(-X).$$

Calculons le X_0 pour lequel ($H_3 = 10000$)

$$\exp(X_0 - \frac{1}{2}\ln X_0) \geqslant 10000\sqrt{\frac{6}{2\pi \cdot 20,92}} \approx 2136,51.$$

$X_0 \approx 8,76$ convient.

Calculons le X_1 pour lequel

$$\exp(X_1 - \ln X_1) \geqslant 20.$$

$X_1 \approx 4,5$ convient.

Calculons les deux autres bornes : $X_2 \approx 4,99$, $X_3 \approx 1,22$.

- Pour $\sqrt{\frac{\ln x}{R}} \geqslant 10$, posons $X = \sqrt{\frac{\ln x}{R}}$, alors

$$\varepsilon(X)\ln x = RX^2\varepsilon(X).$$

Cherchons la valeur de c pour laquelle

$$\varepsilon(X) < c/\ln(x).$$

Pour les x tels que $\sqrt{\frac{\ln x}{R}} \geqslant 10$, $c \leqslant R \cdot 10^2 \exp(10) \leqslant 0,12$.

Olivier Ramaré m'a gentiment calculé des valeurs supplémentaires :
on obtient

$$|\theta(x;3,l) - x/2| < c \cdot x/2$$

avec

$$\begin{aligned}
c &= 0.0008464421 \text{ pour } \ln x >= 400 \quad (m = 3, \delta = 0.00042325),\\
c &= 0.0006048271 \text{ pour } \ln x >= 500 \quad (m = 3, \delta = 0.00030250),\\
c &= 0.0004190635 \text{ pour } \ln x >= 600 \quad (m = 2, \delta = 0.00027950).
\end{aligned}$$

- Pour $e^{600} \leqslant x \leqslant e^{964,59\ldots}$

$$c \leqslant 0,0004190635 \cdot 964,6/\varphi(3) \leqslant 0,203.$$

- Pour $e^{400} \leqslant x \leqslant e^{600}$

$$c \leqslant 0,0008464421 \cdot 600/\varphi(3) \leqslant 0,254.$$

Utilisons les calculs effectués dans [3] :

- Pour $10^{100} \leqslant x \leqslant e^{400}$
$$c \leqslant 0,001310 \cdot 400/\varphi(3) \leqslant 0,262.$$
- Pour $10^{30} \leqslant x \leqslant 10^{100}$
$$c \leqslant 0,001813 \cdot 100 \ln 10/\varphi(3) \leqslant 0,42/2 \leqslant 0,21.$$
- Pour $10^{13} \leqslant x \leqslant 10^{30}$
$$c \leqslant 0,001951 \cdot 30 \ln 10/\varphi(3) \leqslant 0,14/2 \leqslant 0,07.$$
- Pour $10^{10} \leqslant x \leqslant 10^{13}$
$$c \leqslant 0,002238 \cdot 13 \ln 10/\varphi(3) \leqslant 0,067/2 \leqslant 0,00335.$$
- Pour $0 \leqslant x \leqslant 10^{10}$
$$\mid \theta(x;3,l) - x/2 \mid < 2,072\sqrt{x} \quad \text{(Th. 5.2.1 de Ramaré \& Rumely).}$$

Théorème 3.6 *Pour $x > 1$,*
$$\mid \theta(x;3,l) - x/2 \mid < 0,262\frac{x}{\ln x}.$$

Remarque : En utilisant uniquement les résultats parus dans [2, 3], on obtient
$$\mid \theta(x;3,l) - x/2 \mid < 0,393\frac{x}{\ln x} \qquad \text{pour } x \geqslant 1.$$

3.5 Résultats en utilisant GRH(k,∞).

Sous l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH(k,∞)), des résultats plus précis peuvent être trouvés.

Sous GRH(k,∞), on peut montrer que la fonction ψ se comporte de la façon suivante :

Proposition 3.2 ([7] p.294)
$$\psi(x;k,l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O(\sqrt{x}\ln^2 x).$$

Théorème 3.7 *Soit $x \geqslant 10^{10}$. Soit k un entier. On suppose que GRH(k,∞) est satisfaite.*

1) Si $k \leqslant \frac{4}{5}\ln x$ *alors*

$$|\psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \leqslant \frac{1}{4\pi}\sqrt{x}\ln^2 x.$$

2) Si $k \leqslant 432$ *alors*

$$|\psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \leqslant \frac{11}{32\pi}\sqrt{x}\ln^2 x.$$

Preuve : Posons $x_0 = 10^{10}$. En appliquant le théorème 3.2 de la même façon que dans la preuve du théorème 3.3 (on suppose $T \geqslant 1$),

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi(k)}{x}|\psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \\
< \ & \varepsilon = A(m,\delta)\sum_{\chi}\sum_{|\gamma|>T}\frac{x^{-1/2}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|} \\
& +(1+m\delta/2)\sum_{\chi}\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^{-1/2}}{|\rho|} + m\delta/2 + \tilde{R}/x \\
< \ & A(m,\delta)\frac{\varphi(k)}{\sqrt{x}}\sum_{|\gamma|>T}\frac{1}{|\gamma|^{m+1}} + (1+\frac{m\delta}{2})\frac{\varphi(k)}{\sqrt{x}}\sum_{|\gamma|<T}\frac{1}{|\rho|} + \frac{m\delta}{2} + \frac{\tilde{R}}{x} \\
< \ & A(m,\delta)\frac{\varphi(k)}{2\sqrt{x}}(\tilde{C}_T + \tilde{D}_T) + (1+\frac{m\delta}{2})\frac{\varphi(k)}{\sqrt{x}}\tilde{E}(T) + \frac{m\delta}{2} + \tilde{R}/x
\end{aligned}$$

Prenons $m = 1$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_T &= \frac{1}{\pi T}\left(\ln\left(\frac{kT}{2\pi}\right) + 1\right), \\
\tilde{D}_T &= \frac{1}{T^2}\left(2C_2\ln(kT) + 2C_3 + C_2/2\right), \\
\tilde{E}(T) &= \frac{1}{2\pi}\ln^2 T + \frac{1}{\pi}\ln(k/(2\pi))\ln T + C_2 + 2\left(\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{k}{2\pi e}\right) + C_2\ln k + C_3\right).
\end{aligned}$$

Choisissons $T = \frac{2R_1(\delta)}{\delta(2+\delta)}$ et $\delta = \frac{\ln x}{\pi\sqrt{x}}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{R_1(\delta)}{2\delta}(\tilde{C}_T + \tilde{D}_T) &= \frac{2+\delta}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{kR_1(\delta)}{\pi\delta(2+\delta)}\right) + 1\right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi\delta(2+\delta)}{2R_1(\delta)}(2C_2\ln\left(\frac{2kR_1(\delta)}{\delta(2+\delta)}\right) + 2C_3 + C_2/2)\right] \\
(1+\delta/2)\tilde{E}(T) &= \frac{2+\delta}{4\pi}\left[\ln^2\left(\frac{2R_1(\delta)}{\delta(2+\delta)}\right) + 2\ln(k/(2\pi))\ln\left(\frac{2R_1(\delta)}{\delta(2+\delta)}\right)\right. \\
&\quad \left. + 2\pi C_2 + 4\pi\left(\frac{1}{\pi}\ln(k/(2\pi e)) + C_2\ln k + C_3\right)\right],
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\varphi(k)} &= \frac{2+\delta}{4\pi}\left[\ln^2\left(\frac{2\pi\sqrt{x}}{\ln x}\cdot\frac{R_1(\delta)}{2+\delta}\right)+2\ln\left(\frac{k}{2\pi}\right)\ln\left(\frac{2\pi\sqrt{x}}{\ln x}\cdot\frac{R_1(\delta)}{2+\delta}\right)\right.\\ &\quad\left.+\ln\left(\frac{k\sqrt{x}}{\ln x}\cdot\frac{R_1(\delta)}{2+\delta}\right)+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\frac{2+\delta}{R_1(\delta)}(A)\right]\\ &\quad+\frac{2+\delta}{4\pi}(1+2\pi C_2+4\pi(\frac{1}{\pi}\ln(k/(2\pi e))+C_2\ln k+C_3)+\frac{\ln x}{2\pi\varphi(k)}+\frac{\tilde{R}}{\varphi(k)\sqrt{x}}\end{aligned}$$

avec

$$A = C_2\ln\left(\frac{2k\pi\sqrt{x}}{\ln x}\cdot\frac{R_1(\delta)}{2+\delta}\right)+C_3+C_2/4.$$

Soit $\delta_1=\frac{\ln x_0}{\pi\sqrt{x_0}}$. Majorons $\frac{R_1(\delta)}{2+\delta}=\frac{2+2\delta+\delta^2}{2+\delta}=1+\frac{\delta^2+\delta}{2+\delta}$ par $d_1:=1+\frac{\delta_1^2+\delta_1}{2+\delta_1}$ car $x\geqslant x_0$ et $\frac{2+\delta}{R_1(\delta)}$ par 1. Remarquons que $\varphi(k)$ se simplifie dans tous les termes sauf dans $\frac{\ln x}{2\pi\varphi(k)}$ où on le minore par 2. Notons ε' cette majoration de $\varepsilon\sqrt{x}/\varphi(k)$. Etudions la somme entre crochets pour $3\leqslant k\leqslant\frac{4}{5}\ln x$:

$$\begin{aligned}[\cdots] &= [\frac{1}{4}\ln^2 x+\ln^2\left(\frac{2\pi d_1}{\ln x}\right)+\ln x\ln\left(\frac{2\pi d_1}{\ln x}\right)\\ &\quad+2\ln\left(\frac{4\ln x}{10\pi}\right)\ln\left(\frac{2\pi d_1}{\ln x}\right)+\ln\left(\frac{4\ln x}{10\pi}\right)\ln x+\frac{1}{2}\ln x+\ln(4d_1/5)+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}(A)]\\ &= [\frac{1}{4}\ln^2 x+\ln x(\ln\left(\frac{2\pi d_1}{\ln x}\right)+1/2+\ln(4\ln x/(10\pi)))\\ &\quad+\ln^2\left(\frac{2\pi d_1}{\ln x}\right)+2\ln\left(\frac{4\ln x}{10\pi}\right)\ln\left(\frac{2\pi d_1}{\ln x}\right)+\ln(4d_1/5)+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}(A)]\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varepsilon'}{\ln^2 x}=\frac{1}{8\pi}.$$

La fonction représentée par l'expression $\varepsilon'\ln^2 x$ est une fonction croissante de k. On choisit $k=\frac{4}{5}\ln x$. L'expression précédente est une fonction décroissante de x, majorée par $0,0777763$ pour $x\geqslant x_0$. De plus, si on calcule directement le maximum de la fonction $\varepsilon\sqrt{x}/(\varphi(k)\ln^2 x)$ pour tous les k compris entre 1 et 432 en utilisant le calcul direct de $\varphi(k)$, on obtient que l'expression est majorée par $0,1094$. □

Remarque : Si on prend $k=1$ dans le théorème 3.7, on obtient une majoration deux fois moins bonne que celle obtenue par Rosser & Schoenfeld : pour $x>73,2$,

$$|\psi(x)-x|\leqslant\frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln^2 x.$$

Pourquoi cette différence ?
- un calcul exact des zéros avec $\gamma \leqslant D \approx 158$ (ceux qui sont prépondérants !) dans la somme $\sum \frac{1}{|\rho|}$.
- une meilleure connaissance de $R(T)$ (k fixé, $k = 1$).

Corollaire 3.3 *Pour tous les k cités dans le lemme 3.2 et $x \geqslant 224$,*

$$|\psi(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \leqslant \frac{11}{32\pi}\sqrt{x}\ln^2 x.$$

Preuve : On utilise le théorème 5.2.1 de [3] : Pour tous les k cités dans le lemme 3.2 et $224 \leqslant x \leqslant 10^{10}$,

$$|\psi(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \leqslant \sqrt{x}$$

et $\sqrt{x} < \frac{11}{32\pi}\sqrt{x}\ln^2 x$ pour $x \geqslant 21$. □

Bibliographie

[1] Kevin S. McCurley, “Explicit Zero-Free Regions for Dirichlet L-Functions”, *Journal Of Number Theory*, Vol. **19**, (1984) pp. 7-32.

[2] Kevin S. McCurley, “Explicit Estimates for $\theta(x;3,l)$ and $\psi(x,3,l)$”, *Math. Of Computation*, Vol. **42**, Number 165 (January 1984) pp. 287-296.

[3] O. Ramaré & R. Rumely, “Primes in arithmetic progressions”, *Math. Of Computation*, Vol. **65**, Number 213 (January 1996) pp. 397-425.

[4] J. Barkley Rosser, “Explicit Bounds for some functions of prime numbers”, *Amer. J. Math.*, Vol. **63**, (1941) pp. 211-232.

[5] J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, “Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$”, *Math. Of Computation*, Vol. **29**, Number 129 (January 1975) pp. 243-269.

[6] Lowell Schoenfeld, “Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$.II”, *Math. Of Computation*, Vol. **30**, Number 134 (April 1976) pp. 337-360.

[7] G. Tenenbaum, “Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres”, Institut Elie Cartan (1990)

Chapitre 4

$\pi(x)$ dans les progressions arithmétiques

Résumé

L'algorithme de Meissel-Lehmer permet de calculer rapidement $\pi(x)$. Nous le généraliserons pour calculer exactement $\pi(x; k, l)$ c'est-à-dire $\pi(x)$ dans les progressions arithmétiques :

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \bmod k}} 1.$$

Définition 4.1 *Soit*

$$\pi(x;k,l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \bmod k}} 1$$

la fonction qui compte le nombre de premiers plus petits que x congrus à l modulo k.

Nous montrerons dans un premier temps que

Théorème 4.1 *Pour $l = 1$ ou 2,*
(i)- $\frac{x}{2\ln x} < \pi(x;3,l)$ *pour* $x \geqslant 151$,
(ii)- $\pi(x;3,l) < 0,55\frac{x}{\ln x}$ *pour* $x \geqslant 229869$.

Nous redémontrons de cette façon que

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x).$$

Nous nous intéresserons ensuite à la généralisation de la formule de Meissel-Lehmer, qui est une méthode de crible combinatoire, pour le calcul exact de $\pi(x)$ dans les progressions arithmétiques.

4.1 Encadrement de $\pi(x;3,l)$

4.1.1 Majoration

Nous allons écrire ici la preuve du théorème 4.1(ii).

Lemme 4.1 *Soit* $I_n = \int_a^x \frac{dt}{\ln^n t}$. *Alors* $I_n = \frac{x}{\ln^n x} - \frac{a}{\ln^n a} + nI_{n+1}$. *De plus,*

$$(x-a)/\ln^n x \leqslant I_n \leqslant (x-a)/\ln^n a.$$

Théorème 4.2 (Théorème 2 de [6]) *Pour $1 \leqslant x \leqslant 10^{10}$, pour tout $k \leqslant 72$, pour tout l premier avec k,*

$$\max_{1 \leqslant y \leqslant x} \mid \theta(y;k,l) - \frac{y}{\varphi(k)} \mid \leqslant 2,072\sqrt{x}.$$

De plus, pour $x \geqslant 10^{10}$ et $k = 3$ ou 4,

$$\mid \theta(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)} \mid \leqslant 0,002238\frac{x}{\varphi(k)}.$$

Ecrivons d'abord

$$\pi(x;k,l)-\pi(x_0;k,l)=\frac{\theta(x;k,l)}{\ln(x)}-\frac{\theta(x_0;k,l)}{\ln(x_0)}+\int_{x_0}^{x}\frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt$$

Choisissons $x_0=10^5$.

Calculs préliminaires :
$\theta(10^5;3,1)=49753,417198\cdots$ $\quad\pi(10^5;3,1)=4784;$
$\theta(10^5;3,2)=49930,873458\cdots$ $\quad\pi(10^5;3,2)=4807.$

Posons $c_0=\frac{1,002238}{2}$ et $K=\max_l(\pi(10^5,3,l)-\theta(10^5,3,l)/\ln(10^5))\approx 470$ atteint pour $l=2$.

- Pour $10^{20}\leqslant x$,

$$\pi(x;k,l)-\pi(10^5;k,l)=\frac{\theta(x;k,l)}{\ln x}-\frac{\theta(10^5;k,l)}{\ln(10^5)}+\int_{10^5}^{x}\frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt$$

$$\int_{10^5}^{x}\frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt=\int_{10^5}^{10^{10}}\frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt+\int_{10^{10}}^{\sqrt{x}}\frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt+\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt$$

$$\begin{aligned}
\int_{10^5}^{10^{10}}\frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt &< 1/\varphi(k)\cdot\int_{10^5}^{10^{10}}\frac{dt}{\ln^2 t}+2,072\cdot\int_{10^5}^{10^{10}}\frac{dt}{\sqrt{t}\ln^2 t}=10381055,54\cdots=M\\
\int_{10^{10}}^{\sqrt{x}}\frac{\theta(t;3,l)}{t\ln^2 t}dt &< c_0\frac{\sqrt{x}-10^{10}}{\ln^2 10^{10}}\\
\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\theta(t;3,l)}{t\ln^2 t}dt &< c_0\frac{x-\sqrt{x}}{\ln^2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\pi(x;3,l) &< c_0\frac{x}{\ln x}+K+M+c\left(\frac{\sqrt{x}-10^{10}}{\ln^2 10^{10}}+\frac{x-\sqrt{x}}{\ln^2\sqrt{x}}\right)\\
&< \frac{x}{\ln x}\left(c_0+\left(K+M+c\frac{10^{20}-10^{10}}{\ln^2 10^{10}}\right)\frac{\ln 10^{20}}{10^{20}}\right)\\
&< 0,545\frac{x}{\ln x}.
\end{aligned}$$

- Pour $10^{10}\leqslant x\leqslant 10^{20}$, on a $10^5\leqslant\sqrt{x}\leqslant 10^{10}$.

$$\begin{aligned}
\pi(x;3,l) &< K+\int_{10^5}^{10^{10}}\frac{\theta(t;3,l)}{t\ln^2 t}dt+\int_{10^{10}}^{x}\frac{\theta(t;3,l)}{t\ln^2 t}dt\\
&< \frac{x}{\ln x}\left(c_0+\frac{\ln x}{x}\left(K+M-10^{10}\frac{c_0}{\ln^2 10^{10}}\right)+\frac{c_0}{\ln^2 10^{10}}\ln x\right)\\
&< 0,5468\frac{x}{\ln x}.
\end{aligned}$$

• Pour $10^5 \leqslant x \leqslant 10^{10}$,

$$\int_{10^5}^{x} \frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt < \frac{1}{2}\int_{10^5}^{x} \frac{dt}{\ln^2 t} + 2,072\int_{10^5}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t}\ln^2 t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ln^2 x} - \frac{10^5}{\ln^2 10^5} + 2\int_{10^5}^{x} \frac{dt}{\ln^3 t}\right) + 2,072\int_{10^5}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t}\ln^2 t}$$

Or, $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t}\ln^2 t} = \left[\frac{2\sqrt{t}}{\ln^2 t}\right]_a^b + 4\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t}\ln^3 t}$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\pi(x;3,l) &< \frac{1}{2}\frac{x}{\ln x} + 2,072\frac{\sqrt{x}}{\ln x} + K \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ln^2 x} - \frac{10^5}{\ln^2 10^5} + 2\int_{10^5}^{x} \frac{dt}{\ln^3 t}\right) \\
&\quad + 2,072\left(\frac{2\sqrt{x}}{\ln^2 x} - \frac{2\sqrt{10^5}}{\ln^2 10^5} + 4\int_{10^5}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t}\ln^3 t}\right) \\
&< 0,55\frac{x}{\ln x} \qquad \text{pour } x \geqslant 6\cdot 10^5
\end{aligned}$$

4.1.2 Minoration

Soit $KK = \min_l(\pi(10^5,3,l) - \theta(10^5,3,l)/\ln(10^5)) \approx 462$ et $c = 0,498881 = \frac{1-0,002238}{2}$.

• Pour $10^{10} \leqslant x$,

$$\begin{aligned}
\pi(x;3,l) &> KK + \frac{\theta(x;3,l)}{\ln x} + \int_{10^5}^{x} \frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt \\
&> \frac{cx}{\ln x}
\end{aligned}$$

car

$$KK > 0 \quad \text{et} \quad \int_{10^5}^{x} \frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt > 0.$$

• Pour $10^5 \leqslant x \leqslant 10^{10}$.

Lemme 4.2 (McCurley [5]) *Pour* $x \geqslant 91807$ *et* $d = 0,49585$, $\theta(x;3,l) \geqslant dx$.

Remarque : cette minoration est meilleure que celle du théorème 4.2 pour $x \leqslant 2,5\cdot 10^5$.

$$\pi(x;3,l) > KK + \frac{\theta(x;3,l)}{\ln x} + \int_{10^5}^{x} \frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\pi(x;3,l) &> KK + \frac{\theta(x;3,l)}{\ln x} + \int_{10^5}^{x_0} \frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt \text{ pour } x \geqslant x_0 \\
&> \frac{x}{\ln x}\left(d + \left(KK + \int_{10^5}^{x_0} \frac{\theta(t;3,l)}{t\ln^2 t}dt\right)\frac{\ln x_1}{x_1}\right) \text{ pour } x_0 \leqslant x \leqslant x_1
\end{aligned}$$

D'après la remarque précédente, on utilisera

$$\begin{aligned}
\int_{10^5}^{x} \frac{\theta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt &> d\int_{10^5}^{x} \frac{dt}{\ln^2 t} \text{ si } 10^5 \leqslant x \leqslant 2,5\cdot 10^5 \\
&\text{et} \\
&> d\int_{10^5}^{2,5\cdot 10^5} \frac{dt}{\ln^2 t} + \int_{2,5\cdot 10^5}^{x} \frac{t/2 - 2\sqrt{t}}{t\ln^2 t}dt \text{ si } 2,5\cdot 10^5 \leqslant x
\end{aligned}$$

pour effectuer les calculs par tranches à l'aide de Maple :

x_0	x_1
10^5	$2\cdot 10^6$
$2\cdot 10^6$	$3\cdot 10^7$
$3\cdot 10^7$	$3\cdot 10^8$
$3\cdot 10^8$	$3\cdot 10^9$
$3\cdot 10^9$	10^{10}

et on trouve que $\pi(x;3,l) > 0,499\frac{x}{\ln x}$ pour $10^5 \leqslant x \leqslant 10^{10}$.

4.1.3 Petites valeurs

Est-ce que $0,49888\frac{x}{\ln x} < \pi(x;3,l) < 0,55\frac{x}{\ln x}$ pour $x < 6\cdot 10^5$? Il suffit de regarder si

$$\pi(p;3,l) < 0,55\frac{p}{\ln p} \text{ pour } p \equiv l \bmod 3$$

et si

$$0,49888\frac{p}{\ln p} < \pi(p-1;3,l) \text{ pour } p \equiv l \bmod 3.$$

La plus grande valeur ne vérifiant pas la première inégalité est $p = 229849$ et pour la deuxième est $p = 151$. De plus, $\pi(229869;3,l) \leqslant 10241 < 0,55\frac{229869}{\ln 229869} \approx 10241,0075$ et $\pi(151;3,l) \geqslant 16 > 0,49888\frac{151}{\ln 151} \approx 15,01$.

Conclusion

$$0,49888\frac{x}{\ln x} \underset{x\geqslant 151}{<} \pi(x;3,l) \underset{x\geqslant 229869}{<} 0,55\frac{x}{\ln x}.$$

Remarque : on ne peut pas montrer que $x/(2\ln x) < \pi(x;3,l)$ en utilisant les formules $\theta(x) < c\cdot x$. Nous avons obtenu des formules à l'ordre 1 qui vont nous servir.

4.1.4 Minoration plus précise de $\pi(x;3,l)$.

Nous allons écrire ici la preuve du théorème 4.1(i).

Classiquement,

$$\pi(x;3,l)-\pi(10^5;3,l)=\frac{\theta(x;3,l)}{\ln(x)}-\frac{\theta(10^5;3,l)}{\ln(10^5)}+\int_{10^5}^{x}\frac{\theta(t;3,l)}{t\ln^2 t}dt.$$

Or $\theta(t;3,l)>\frac{x}{\varphi(3)}\left(1-\frac{\alpha}{\ln x}\right)$ avec $\alpha=\varphi(3)\cdot 0,262$ en appliquant le théorème 3.6. Donc, en posant

$$KK=\min_l(\pi(10^5;3,l)-\frac{\theta(10^5;3,l)}{\ln(10^5)}),$$

$$\pi(x;3,l)>J(x,\alpha)=KK+\frac{x}{\varphi(k)\ln x}\left(1-\frac{\alpha}{\ln x}\right)+\frac{1}{\varphi(k)}\int_{10^5}^{x}\frac{1-\alpha/\ln t}{\ln^2 t}dt.$$

La dérivée de $J(x,\alpha)$ par rapport à x est égale à

$$\frac{1}{\varphi(k)}\left(\frac{1-\alpha/\ln x}{\ln x}+\frac{\alpha}{\ln^3 x}\right).$$

D'autre part, la dérivée de $\frac{x}{\varphi(k)\ln x}$ est égale à

$$\frac{1}{\varphi(k)}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

Quand est-ce que

$$\frac{1}{\varphi(k)}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}\right)<\frac{1}{\varphi(k)}\left(\frac{1-\alpha/\ln x}{\ln x}+\frac{\alpha}{\ln^3 x}\right)?$$

C'est-à-dire lorsque $\alpha-1<\alpha/\ln x$, qui est vrai pour tout $x>1$. Reste à trouver une valeur x_1 pour laquelle

$$J(x_1,\alpha)>\frac{x_1}{\varphi(k)\ln x_1}.$$

Pour $x_1=10^5$, $J(10^5,0.524)\approx 4607,75$ et $\frac{10^5}{2\ln 10^5}\approx 4342,94$. On vérifie avec l'ordinateur pour les petites valeurs de $x\leqslant 10^5$ et $l=1$ ou 2. Donc

$$\frac{x}{2\ln x}<\pi(x;3,l)\text{ pour }x\geqslant 151.$$

4.2 Formule de calcul exact pour $\pi(x;4,l)$ et sa généralisation

4.2.1 Formule de Legendre

Pour obtenir les nombres premiers $p \equiv 1 \bmod 4$ jusqu'à un entier x, il faut
• (Première étape) Cribler avec les $p \leqslant \sqrt{x}$ (C'est-à-dire enlever les entiers $n \equiv 0 \bmod p$ pour $p \leqslant \sqrt{x}$; p lui-même est criblé !)
• (Deuxième étape) Cribler les $n \equiv 3 \bmod 4$
• (Troisième étape) Enlever 1 qui n'est pas premier et qui n'est pas criblé !

Exemple :
On crible avec $p = 2 \longrightarrow \left[\frac{x}{2}\right]$ nombres criblés,
puis avec $p = 3 \longrightarrow \left[\frac{x}{3}\right]$ criblés mais $\left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{2\cdot 3}\right]$ nouveaux enlevés,
puis avec $p = 5 \longrightarrow \left[\frac{x}{5}\right]$ criblés mais $\left[\frac{x}{5}\right] - \left[\frac{x}{2\cdot 5}\right] - \left[\frac{x}{3\cdot 5}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 3\cdot 5}\right]$ nouveaux enlevés.

Ainsi à la fin de la première étape, il reste de l'intervalle $[1,x]$ simplement $\{1\} \cup$ premiers $\in]\sqrt{x}, x]$ c'est-à-dire

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 \text{ nombres non criblés.}$$

On aboutit à la formule due à Legendre

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = x - \sum_{p_i \leqslant \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{p_i < p_j \leqslant \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \cdots$$

On utilise l'idée simple que les entiers plus petits que x se classent dans trois ensembles disjoints : l'ensemble des premiers, des composés et des unités. Le terme $\left[\frac{x}{p_i}\right]$ compte le nombre d'entiers divisibles par p_i dans l'intervalle $[1,x]$. Comme tous les entiers composés ont tous au moins un facteur premier $\leqslant \sqrt{x}$, on compte $\sum_{p_i \leqslant \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_i}\right]$ multiples de premiers dans cet intervalle. Dans ce compte, p_i est donné comme un multiple de p_i et de ce fait considéré comme composé ($p_i = 1 \cdot p_i$). On rajoute donc le terme

$$\sum_{p_i \leqslant \sqrt{x}} 1 = \pi(\sqrt{x}).$$

Les autres termes viennent du fait que les composés de $[1,x]$ peuvent être divisibles à la fois par p_i et p_j. Ils sont donc comptés deux fois dans la somme $\sum \left[\frac{x}{p_i}\right]$. On corrige en ajoutant le terme $\sum \left[\frac{x}{p_i p_j}\right]$. Cette fois on en rajoute trop car les entiers de la forme $p_i p_j p_k$ enlevés dans $\sum \left[\frac{x}{p_i}\right]$, rajoutés dans $\sum \left[\frac{x}{p_i p_j}\right]$, ne sont plus comptés comme composés ! C'est pour cela que le terme $\sum\left[\frac{x}{p_ip_jp_k}\right]$ apparaît et ainsi de suite... En fait, $\sum\left[\frac{x}{p_ip_j}\right]$ correspond au nombre de termes enlevés à la fois par p_i et p_j c'est-à-dire les entiers n tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 0 \bmod p_i \\ n & \equiv & 0 \bmod p_j \end{array}\right. \Rightarrow n \equiv 0 \bmod p_ip_j$$

Ensuite on reprend cet intervalle criblé pour enlever les $n \equiv 3 \bmod 4$. Regardons les nombres touchés à la fois par $n \equiv 3 \bmod 4$ et par $n \equiv 0 \bmod 2$: il n'y a pas de correspondant ! Regardons les nombres touchés à la fois par $n \equiv 3 \bmod 4$ et par $n \equiv 0 \bmod 3$: ceux sont les nombres $n \equiv 3 \bmod 12$; il y a donc $\left[\frac{x+9}{12}\right]$ nombres touchés. On crible donc $\left[\frac{x+1}{4}\right]$ nombres mais seulement

$$\left[\frac{x+1}{4}\right] - \sum_{2<p_i\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x+c_i}{4p_i}\right] + \sum_{2<p_i<p_j\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x+c_{ij}}{4p_ip_j}\right] - \cdots$$

nouveaux nombres effectivement enlevés où

$$\begin{array}{rcl} c_i & = & -\text{solution du système chinois} \left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 0 \bmod p_i \\ n & \equiv & 3 \bmod 4 \end{array}\right. \pmod{4p_i} \\ c_{ij} & = & -\text{solution du système chinois} \left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 0 \bmod p_ip_j \\ n & \equiv & 3 \bmod 4 \end{array}\right. \pmod{4p_ip_j} \end{array}$$

en prenant toujours le représentant positif c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} a \pmod b & = & \text{le représentant de } a \text{ appartenant à } [0,b] \text{ de } a \\ & = & \left\{\begin{array}{lll} a \bmod b & \text{si} & a \geqslant 0 \\ b-(a \bmod b) & \text{si} & a<0 \end{array}\right. \end{array}$$

Il reste les premiers appartenant à l'intervalle $]\sqrt{x},x]$ congrus à 1 mod 4 et $\{1\}$. Après la 3[e] étape, $\{1\}$ est enlevé. On aboutit à la formule

$$\begin{array}{rcl} \pi(x;4,1) & = & x - \left(\sum_{p_i\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{p_i}\right] - \sum_{p_i<p_j\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{p_ip_j}\right] + \cdots\right) + \pi(\sqrt{x};4,1) - 1 \\ & & -\left(\left[\frac{x+1}{4}\right] - \sum_{p_i\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x+c_i}{4p_i}\right] + \sum_{p_i<p_j\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x+c_{ij}}{4p_ip_j}\right] - \cdots\right) \end{array}$$

Exemple : Pour $x \in [7^2, 11^2-1] = [49,120]$, la formule devient

$$\begin{array}{rcl} \pi(x;4,1) & = & \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 + \pi(\sqrt{x};4,1) - 1 \\ & & -\left(\left[\frac{x+1}{4}\right] - \left[\frac{x+9}{12}\right] - \left[\frac{x+5}{20}\right] + \left[\frac{x+45}{60}\right]\right. \\ & & \left.-\left[\frac{x+21}{28}\right] + \left[\frac{x+21}{84}\right] + \left[\frac{x+105}{140}\right] - \left[\frac{x+105}{420}\right]\right). \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\pi(100;4,1) &= \pi(100)-\pi(10)+1+\pi(\sqrt{100};4,1)-1\\
&\quad -\left(\left[\frac{101}{4}\right]-\left[\frac{109}{12}\right]-\left[\frac{105}{20}\right]+\left[\frac{145}{60}\right]\right.\\
&\quad \left.-\left[\frac{121}{28}\right]+\left[\frac{121}{84}\right]+\left[\frac{205}{140}\right]-\left[\frac{205}{420}\right]\right)\\
&= 25-4+1+1-1-(25-9-5+2-4+1+1+0)\\
&= 11
\end{aligned}$$

En ne considérant que la différence $\pi(x;4,3)-\pi(x;4,1)$, la formule se simplifie (il n'y a plus besoin de calculer $\pi(x)-\pi(\sqrt{x})$).

4.2.2 Formule générale de Meissel-Lehmer

L'idée de départ est de ne plus s'arrêter à $\sqrt{x}$ dans les sommes dans la formule de Legendre mais s'arrêter bien avant en sommant jusqu'à p_a ($a \in \mathbb{N}$), le $a^{i\grave{e}me}$ nombre premier. Il faut donc voir ce qui n'a pas été enlevé.

Soit $P_m(x,a;k,l)$ le nombre d'entiers de l'intervalle $[1,x]$ congrus à l mod k pouvant s'écrire comme un produit de m (non nécessairement distincts) facteurs premiers $> p_a$. La formule de Meissel et sa généralisation sont basées sur l'analyse des P_m. Si m est pris successivement égal à $1,2,3,\ldots$ ces expressions vont compter tous les entiers qui n'ont pas de facteurs $\leqslant p_a$ congrus à l modulo k. Posons $P_m(x,a)=P_m(x,a;1,1)$ le nombre d'entiers de l'intervalle $[1,x]$ pouvant s'écrire comme un produit de m facteurs premiers $> p_a$. Criblons l'intervalle $[1,x]$ avec les premiers $p_1,\ldots,p_a$. On enlève les nombres composés ayant un facteur premier $\leqslant p_a$ ainsi que les premiers eux-mêmes. Ils sont en nombre de

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant a}[x/p_i]-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant a}[x/p_ip_j]+\cdots$$

Il reste 1 et les entiers ayant uniquement des facteurs premiers $> p_a$. Ils sont au nombre de

$$1+P_1(x,a)+P_2(x,a)+P_3(x,a)+\cdots$$

$P_1(x,a)$ peut s'exprimer simplement car il compte les nombres premiers compris entre p_a et x. Il vient

$$P_1(x,a)=\pi(x)-\pi(p_a)=\pi(x)-a.$$

On aboutit à la formule

$$[x]=\sum_{1\leqslant i\leqslant a}[x/p_i]-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant a}[x/p_ip_j]+\cdots+1+\pi(x)-a+P_2(x,a)+P_3(x,a)+\cdots$$

Définition 4.2 *Soit*

$$\phi(x,a)=\#\{n\leqslant x : p\mid n \Rightarrow p>p_a\}$$

ou encore

$$\boxed{\phi(x,a) = [x] - \sum_{1\leqslant i\leqslant a}\left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant a}\left[\frac{x}{p_ip_j}\right] - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant a}\left[\frac{x}{p_ip_jp_k}\right] + \cdots}$$

qui compte les entiers $\leqslant x$ qui ne sont pas divisibles par les premiers $p_1,\ldots,p_a$.

On obtient la formule

$$\phi(x,a) = 1 + \pi(x) - \pi(p_a) + P_2(x,a) + P_3(x,a) + \ldots \tag{4.1}$$

Définissons $\phi(x,a;k,l)$ qui compte les entiers $\leqslant x$ congrus à l modulo k qui ne sont pas divisibles par les premiers $p_1,\ldots,p_a$.

Recherche de la formule générale sur un exemple.

Reprenons l'égalité (4.1) et séparons ce qui concerne les entiers congrus à 1 modulo 4 de ceux congrus à 3 modulo 4 (par un crible). Il vient, pour $a\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\phi(x,a;4,1)+\phi(x,a;4,3) &= 1+\pi(x;4,1)+\pi(x;4,3)-\pi(p_a;4,1)-\pi(p_a;4,3)\\ &\quad +P_2(x,a;4,1)+P_2(x,a;4,3)+\cdots\end{aligned}$$

En identifiant ce qui concerne les $n\equiv 1 \bmod 4$ des $n\equiv 3 \bmod 4$, on obtient deux formules :

$$\pi(x;4,1) = \phi(x,a;4,1)+\pi(p_a;4,1)-1-P_2(x,a;4,1)-\cdots \tag{4.2}$$
$$\pi(x;4,3) = \phi(x,a;4,3)+\pi(p_a;4,3)-P_2(x,a;4,3)-\cdots \tag{4.3}$$

Formule générale

Théorème 4.3 *Avec les notations précédentes, nous avons pour $a\geqslant 1$ et $x\geqslant p_a$,*

$$\pi(x;k,l) = \pi(p_a;k,l)+\phi(x,a;k,l)-\delta(l)-P_2(x,a;k,l)-P_3(x,a;k,l)-\cdots$$

avec

$$\delta(l) = \begin{cases} 1 & si\ l=1\\ 0 & sinon\end{cases}$$

La formule est évidente : les nombres premiers congrus à l modulo k de l'intervalle $[p_a+1,x]$ sont les nombres congrus à l modulo k dont tous les facteurs premiers sont $> p_a$ $(=\phi(x,a;k,l)-\delta(l)\approx\phi(x,a;k,l))$ auxquels on ôte les nombres congrus à l modulo k composés de deux, ou plus, facteurs $> p_a$ $(P_2(x,a;k,l)+P_3(x,a;k,l)+\cdots)$. La petite correction sur $\phi(x,a;k,l)$ est due à la manière de compter : $\phi(x,a;k,l)$ compte les entiers $\leqslant x$ congrus à l modulo k qui ne sont divisibles par aucun des premiers $p_1,\ldots,p_a$. Le nombre 1 appartient à ce compte uniquement lorsque $l=1$.

4.2.3 Formule de Meissel

En reprenant la formule 4.1, on se pose la question :
combien de termes $P_m(x,a)$ doivent être écrits ? Cela dépend de la valeur de a choisie. Si a est choisi de telle façon que $p_{a+1} > \sqrt{x} \geqslant p_a$ l'expression $P_2(x,a)$ est égale à zéro ainsi que tous les termes suivants. Dans ce cas, la formule de Legendre réapparaît. Si a est choisi tel que $x^{1/3} < p_{a+1} \leqslant x^{1/2}$, $P_2(x,a)$ va contenir quelques termes mais $P_3(x,a)$ est une somme vide puisque $p_ip_jp_k > x^{1/3}x^{1/3}x^{1/3} = x$. De façon générale, $P_r(x,a)$ sera égal à zéro et $P_{r-1}(x,a) \neq 0$ si a est choisi tel que $x^{1/r} < p_{a+1} \leqslant x^{1/(r-1)}$. C'est pour cela que l'on prendra toujours a égal à quelque chose de la forme $\pi(x^{1/r})$.

Pour obtenir la formule de Meissel originelle, on choisit $a = \pi(x^{1/3})$. Donc les termes après $P_2(x,a)$ sont tous nuls.

Evaluation de $P_2(x,a)$

$P_2(x,a)$ est le nombre d'entiers de l'intervalle $[1,x]$ dont la décomposition est un produit de deux premiers p_i et p_j avec $a+1 \leqslant i < j$. Considérons un seul facteur en premier, nous avons

$$\begin{aligned}
P_2(x,a) &= \#\{p_j \mid p_{a+1}p_j \leqslant x \text{ avec } a+1 \leqslant j\} \\
&\quad +\#\{p_j \mid p_{a+2}p_j \leqslant x \text{ avec } a+2 \leqslant j\} \\
&\quad +\cdots \\
&= \pi\left(\frac{x}{p_{a+1}}\right) - a + \pi\left(\frac{x}{p_{a+2}}\right) - (a+1) + \cdots \\
&= \sum_{p_a < p_i \leqslant \sqrt{x}} \left\{\pi\left(\frac{x}{p_i}\right) - (i-1)\right\}
\end{aligned}$$

En posant $b = \pi(\sqrt{x})$ et $c = \pi(x^{1/3})$, on obtient

$$\begin{aligned}
P_2(x,c) &= \sum_{c < i \leqslant b} \left\{\pi\left(\frac{x}{p_i}\right) - (i-1)\right\} \\
&= \sum_{i=c+1}^{b} \pi\left(\frac{x}{p_i}\right) - \frac{(b-c)(b+c-1)}{2}
\end{aligned}$$

On aboutit à la formule de Meissel ($b = \pi(\sqrt{x})$, $c = \pi(x^{1/3})$)

$$\boxed{\pi(x) = \phi(x,c) + \frac{(b+c-2)(b-c+1)}{2} - \sum_{i=c+1}^{b} \pi\left(\frac{x}{p_i}\right)}$$

Evaluation de $P_2(x,a;4,l)$

Etudions d'abord $P_2(x,a;4,1)$. Comment créer un entier n composé de 2 premiers p,p' pour qu'il soit congru à 1 mod 4 ? Il faut soit que p et p' soient congrus à 1 mod 4 soit que p et p' soient congrus à 3 mod 4 car $3\cdot 3\equiv 1$ mod 4. Ainsi

$$\begin{aligned}P_2(x,a;4,1) &= \#(\{n\leqslant x \mid n=pp'; p\equiv p'\equiv 1 \bmod 4; p,p'>p_a\}\\ &\quad \cup\{n\leqslant x \mid n=pp'; p\equiv p'\equiv 3 \bmod 4; p,p'>p_a\})\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}&\#\{n\leqslant x \mid n=pp'; p\equiv p'\equiv 1 \bmod 4; p,p'>p_a\}\\ &= \sum_{\substack{p'>p_a\\ p'\equiv 1 \bmod 4}}^{p'\leqslant x}\ \sum_{p\geqslant p'}^{\left[\frac{x}{p'}\right]} 1 = \sum_{\substack{p'>p_a\\ p'\equiv 1 \bmod 4}}^{p'\leqslant\sqrt{x}}\ \sum_{p\geqslant p'}^{\left[\frac{x}{p'}\right]} 1\\ &= \sum_{\substack{p'>p_a\\ p'\equiv 1 \bmod 4}}^{p'\leqslant\sqrt{x}} (\pi(x/p';4,1)-\pi(p'-1;4,1))\end{aligned}$$

On en déduit la formule :

$$P_2(x,a;4,1) = \sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 1 \bmod 4}} (\pi(x/p;4,1)-\pi(p-1;4,1)) + \sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 3 \bmod 4}} (\pi(x/p;4,3)-\pi(p-1;4,3)) \tag{4.4}$$

Cette formule peut être explicitée :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 1 \bmod 4}} \pi(p-1;4,1) &= \sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 1 \bmod 4}} (\pi(p-1;4,1)-\pi(p_a;4,1)) + \pi(p_a;4,1)\sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 1 \bmod 4}} 1\\ &= \sum_{\substack{j\geqslant 1\\ p_{a+j}\leqslant\sqrt{x}\\ p_{a+j}\equiv 1 \bmod 4}} (\pi(p_{a+j}-1;4,1)-\pi(p_a;4,1))\\ &\quad +\pi(p_a;4,1)(\pi(\sqrt{x};4,1)-\pi(p_a;4,1))\\ &= \sum_{\substack{i\geqslant 1\\ p_{a+j_i}\leqslant x\\ p_{a+j_i}\equiv 1 \bmod 4}} (i-1) + \pi(p_a;4,1)(\pi(\sqrt{x};4,1)-\pi(p_a;4,1))\\ &= \sum_{i=1}^{\pi(\sqrt{x};4,1)-\pi(p_a;4,1)} (i-1) + \pi(p_a;4,1)(\pi(\sqrt{x};4,1)-\pi(p_a;4,1))\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 3 \bmod 4}} \pi(p-1;4,3) = \sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 3 \bmod 4}} (\pi(p-1;4,3)-\pi(p_a;4,3)) + \pi(p_a;4,3)\sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 3 \bmod 4}} 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{j\geqslant 1\\ p_{a+j}\leqslant\sqrt{x}\\ p_{a+j}\equiv 3 \bmod 4}} (\pi(p_{a+j}-1;4,3)-\pi(p_a;4,3))\\
&\quad +\pi(p_a;4,3)(\pi(\sqrt{x};4,3)-\pi(p_a;4,3))\\
&= \sum_{\substack{i\geqslant 1\\ p_{a+j_i}\leqslant\sqrt{x}\\ p_{a+j_i}\equiv 3 \bmod 4}} (i-1)+\pi(p_a;4,3)(\pi(\sqrt{x};4,3)-\pi(p_a;4,3))\\
&= \sum_{i=1}^{\pi(\sqrt{x};4,3)-\pi(p_a;4,3)} (i-1)+\pi(p_a;4,3)(\pi(\sqrt{x};4,3)-\pi(p_a;4,3))
\end{aligned}
$$

Intéressons-nous à $P_2(x,a;4,3)$. Pour créer un entier n congru à 3 mod 4 composé de 2 premiers p_1,p_2, il faut que l'un soit congru 3 mod 4 et l'autre à 1 mod 4.

$$
\begin{aligned}
P_2(x,a;4,3) &= \#\{n\leqslant x \mid n=pp'; p\equiv 3 \bmod 4; p'\equiv 1 \bmod 4; p,p'>p_a\}\\
&= \#(\{n\leqslant x \mid n=pp'; p\equiv 1 \bmod 4; p'\equiv 3 \bmod 4; p\geqslant p'>p_a\}\\
&\quad \cup\{n\leqslant x \mid n=pp'; p\equiv 3 \bmod 4; p'\equiv 1 \bmod 4; p\geqslant p'>p_a\})
\end{aligned}
$$

On en déduit la formule :

$$
P_2(x,a;4,3) = \sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 1 \bmod 4}} (\pi(x/p;4,3)-\pi(p-1;4,3)) + \sum_{\substack{p_a<p\leqslant\sqrt{x}\\ p\equiv 3 \bmod 4}} (\pi(x/p;4,1)-\pi(p-1;4,1)) \tag{4.5}
$$

On retrouve ici les résultats de [2].

Evaluation de $P_2(x,a;k,l)$

Soient p,q des nombres premiers.

$$
\begin{aligned}
P_2(x,a;k,l) &= \#\{n\leqslant x \mid n=pq\equiv l \bmod k; q\geqslant p>p_a\}\\
&= \sum_{\substack{(r,s)\in([0..k[)^2\\ rs\equiv l \bmod k}} \sum_{\substack{p>p_a\\ p\equiv r \bmod k}}^{p\leqslant x} \sum_{\substack{p\leqslant q\leqslant x/p\\ q\equiv s \bmod k}} 1\\
&= \sum_{\substack{(r,s)\in([0..k[)^2\\ rs\equiv l \bmod k}} \sum_{\substack{p>p_a\\ p\equiv r \bmod k}}^{p\leqslant\sqrt{x}} (\pi(x/p;k,s)-\pi(p-1;k,s))
\end{aligned}
$$

4.2.4 Formule de Lehmer

Au lieu de prendre $a=\pi(x^{1/3})$, nous prendrons $a=\pi(x^{1/4})$. Il faut donc évaluer P_3 dont la somme n'est plus vide.

Evaluation de $P_3(x,a)$

$P_3(x,a)$ compte le nombre d'entiers plus petits que x et de trois facteurs premiers $> p_a$.

$$\begin{aligned}
P_3(x,a) &= \#\{p_jp_k \mid p_{a+1}p_jp_k \leqslant x \text{ avec } a+1 \leqslant j \leqslant k\} \\
&\quad +\#\{p_jp_k \mid p_{a+2}p_jp_k \leqslant x \text{ avec } a+2 \leqslant j \leqslant k\} \\
&\quad +\cdots \\
&= P_2(x/p_{a+1},a) + P_2(x/p_{a+2},a+1) + \cdots \\
&= \sum_{i>a} P_2\left(\frac{x}{p_i}, i-1\right) \\
&= \sum_{i=a+1}^{\pi(x^{1/3})} \sum_{j=i}^{\pi(\sqrt{x/p_i})} \left\{\pi\left(\frac{x}{p_ip_j}\right) - (j-1)\right\}
\end{aligned}$$

On obtient la formule de Lehmer ($a=\pi(x^{1/4}), b=\pi(\sqrt{x}), c=\pi(x^{1/3})$) :

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= [x] - \sum_{i=1}^{a}\left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant a}\left[\frac{x}{p_ip_j}\right] - \cdots \\
&\quad + \frac{(b+a-2)(b-a+1)}{2} \\
&\quad - \sum_{a<i\leqslant b} \pi\left(\frac{x}{p_i}\right) - \sum_{i=a+1}^{c}\sum_{j=i}^{\pi(\sqrt{x/p_i})}\left\{\pi\left(\frac{x}{p_ip_j}\right) - (j-1)\right\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Evaluation de $P_3(x,a;4,l)$

Dans cette partie et la suivante, p, p', q désigneront des nombres premiers. Par exemple pour calculer

$$P_3(x,a;4,1) = \#(\{n \equiv 1 \bmod 4 \mid n = pp'q \leqslant x; p_a < p \leqslant p' \leqslant q\}$$

quatre cas seraient à considérer :

- $p, p', q \equiv 1 \bmod 4$
- $p \equiv 1 \bmod 4; p', q \equiv 3 \bmod 4$
- $p \equiv 3 \bmod 4; p' \equiv 1 \bmod 4; q \equiv 3 \bmod 4$
- $p \equiv 3 \bmod 4; p' \equiv 3 \bmod 4; q \equiv 1 \bmod 4$

Evaluation de $P_3(x,a;k,l)$

$$\begin{aligned} P_3(x,a;k,l) &= \#\{n \leqslant x \mid n = pp'q \equiv l \bmod k; p_a < p \leqslant p' \leqslant q\} \\ &= \sum_{\substack{(r,s)\in[0,k[^2 \\ rs\equiv l \bmod k}} \sum_{\substack{p_i > p_a \\ p_i \equiv r \bmod k}} P_2(x/p_i, i-1; k, s) \end{aligned}$$

car lorsqu'on fixe $p \equiv r \bmod k$, on cherche ensuite les entiers composés de deux premiers congrus à s modulo k tel que $rs \equiv l \bmod k$.

4.2.5 Etude de ϕ

C'est la partie qui demande le plus de temps de calcul dans le calcul de $\pi(x)$. Heureusement elle bénéficie de propriétés facilitant son calcul :
- d'abord une formule de calcul récursif permettant de décrémenter les a :

$$\phi(x,a) = \phi(x,a-1) - \phi(x/p_a, a-1)$$

qui exprime le fait que les entiers divisibles par aucun des $p_1,\ldots,p_a$ sont les entiers qui ne sont pas divisibles par les $p_1,\ldots,p_{a-1}$ à l'exception de ceux qui ne sont pas divisibles par p_a. Pour le démontrer, il suffit de revenir à la définition 4.2 :

$$\begin{aligned} \phi(x,a-1) &= [x] - \sum_{p_i \leqslant p_{a-1}} \left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{p_i < p_j \leqslant p_{a-1}} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \cdots \\ \phi(x/p_a, a-1) &= \left[\frac{x}{p_a}\right] - \sum_{p_i \leqslant p_{a-1}} \left[\frac{x}{p_a p_i}\right] + \cdots \end{aligned}$$

En faisant la différence le résultat se déduit facilement.
- ensuite une formule permettant de réduire le x : soit $m_k = p_1 p_2 \cdots p_k$.

$$\begin{aligned} \phi(m_k,k) &= [m_k] - \sum \left[\frac{m_k}{p_i}\right] + \sum \left[\frac{m_k}{p_i p_j}\right] - \cdots \\ &= m_k - \sum \frac{m_k}{p_i} + \sum \frac{m_k}{p_i p_j} - \cdots \\ &= m_k \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1) = \varphi(m_k) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\phi(s \cdot m_k + t, k) = s \cdot \varphi(m_k) + \phi(t,k)$$

où s est un entier et t peut être choisi entre 0 et m_k.

Si $t > m_k/2$, on peut utiliser la formule “symétrique” :

$$\phi(t,k) = \varphi(m_k) - \phi(m_k - t - 1, k)$$

due à la symétrie des multiples autour du point 0. Il existe une formule “inversée”: soit $a \in \mathbb{N}^*$, pour $p_a \leqslant x < p_{a+1}^4$,

$$\phi(x,a) = 1 + \pi(x) - a + P_2(x,a) + P_3(x,a).$$

Formule de calcul de $\phi(x,a;4,1)$

$$\phi(x,a;4,1) \;=\; \left[\frac{x+3}{k}\right] - \sum_{2<p_i\leqslant p_a}\left[\frac{x+c_i}{4p_i}\right] + \sum_{2<p_i<p_j\leqslant p_a}\left[\frac{x+c_{ij}}{4p_ip_j}\right] - \cdots$$

où les c_i, $c_{ij}, \ldots$ sont définis par :

$$c_i = - \text{ solution du système } \left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 1 \bmod 4 \\ n & \equiv & 0 \bmod p_i \end{array}\right. \bmod 4p_i$$

$$c_{ij} = - \text{ solution du système } \left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 1 \bmod 4 \\ n & \equiv & 0 \bmod p_ip_j \end{array}\right. \bmod 4p_ip_j$$

En fait, on regarde les collisions.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{aligned}
\phi(30,2;4,1) &= \#\{1,5,13,17,25,29\} = 6 \\
\phi(x,2;4,1) &= \left[\frac{x+3}{4}\right] - \left[\frac{x+3}{12}\right] \\
\phi(30,2;4,1) &= \left[\frac{33}{4}\right] - \left[\frac{33}{12}\right] = 6
\end{aligned}$$

◇

En reprenant la formule de Legendre,

$$\begin{aligned}
\phi(x,a;4,1) &= \left([x] - \sum\left[\frac{x}{p_i}\right] + \cdots\right) - \left(\left[\frac{x+1}{4}\right] - \left[\frac{x+\overline{c_i}}{4p_i}\right] + \cdots\right) \\
&= \left[\frac{x+3}{4}\right] - \left[\frac{x+c_i}{4p_i}\right] + \cdots
\end{aligned}$$

comme

$$\phi(x,a) = \phi(x,a;4,1) + \phi(x,a;4,3) \quad \text{pour } a \geqslant 1 \text{ et } x \text{ quelconque.}$$

Remarque : Pour $a=0$,

$$\begin{aligned}\phi(x,0) &= [x] = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x+3}{4}\right] + \left[\frac{x+2}{4}\right] + \left[\frac{x+1}{4}\right] \\ &= \phi(x,0;4,0) + \phi(x,0;4,1) + \phi(x,0;4,2) + \phi(x,0;4,3)\end{aligned}$$

Formule de calcul de $\phi(x,a;k,l)$

$$\phi(x,a) = \phi(x,a;1,1)$$

$$\phi(x,a) = \sum_{l=0}^{k-1} \phi(x,a;k,l)$$

Si $(k,l)=1$,

$$\phi(x,a;k,l) = \left[\frac{x+c_0}{k}\right] - \sum_{\substack{p_i \leqslant p_a \\ (p_i,k)=1}} \left[\frac{x+c_i}{kp_i}\right] + \sum_{\substack{p_i<p_j \leqslant p_a \\ (p_ip_j,k)=1}} \left[\frac{x+c_{ij}}{kp_ip_j}\right] - \cdots \tag{4.7}$$

où $c_0 = -l \bmod k = \begin{cases} 0 & \text{si } l=0 \\ k-l & \text{sinon} \end{cases}$

et les c_i, c_{ij}, ... sont définis par :

$$c_i = - \text{ solution du système } \begin{cases} n \equiv l \bmod k \\ n \equiv 0 \bmod p_i \end{cases} \bmod kp_i$$

$$c_{ij} = - \text{ solution du système } \begin{cases} n \equiv l \bmod k \\ n \equiv 0 \bmod p_ip_j \end{cases} \bmod kp_ip_j$$

Remarque : La solution c_i est unique modulo kp_i car $(p_i,k)=1$.

Si $(k,l) \neq 1$ alors $\phi(x,a)=0$ dès qu'il existe $i \leqslant a$ tel que $p_i \mid l$. Sinon la formule précédente reste valable. Par exemple, $\phi(x,1;3,6) = [\frac{x+3}{6}]$.

Démonstration : Sur les $\left[\frac{x+c_0}{k}\right]$ entiers plus petits que x congrus $l \bmod k$, on enlève ceux qui sont divisibles par p (avec $(p,k)=1$). Regardons les “collisions” , c'est-à-dire les entiers n congrus à la fois à $l \bmod k$ et à $0 \bmod p$ (divisibles par p) : ce sont les $n \equiv \overline{c'} \bmod kp$ (grâce au théorème chinois). En posant $c = -c' \bmod kp$, il y a $\left[\frac{x+c}{kp}\right]$ collisions et ainsi de suite. □

La résolution du système de congruences n'est pas compliquée : si $(p_i,k)=1$ alors il existe u,v tels que $up_i + vk = 1$ (Bezout). En multipliant par l, on obtient $ulp_i + vlk = l$. Soit $d = ulp_i \bmod kp_i$. Alors d est bien solution du système

$$\begin{cases} n \equiv l \bmod k \\ n \equiv 0 \bmod p_i \end{cases}$$

Posons

$$c_i = -d = -lp_i(p_i^{-1} \bmod k) \bmod kp_i.$$

De même

$$c_{ij} = -lp_ip_j((p_ip_j)^{-1} \bmod k) \bmod kp_ip_j.$$

<u>Remarque</u> : La fonction ϕ est définie sur les réels puisque

$$\phi(x, a; k, l) = \phi([x], a; k, l).$$

Toutefois, en général,

$$\phi(x - x/p, a; k, l) \neq \phi([x] - [x/p], a; k, l).$$

<u>Exemple</u> :

$$\begin{aligned}
\phi(x, 4; 10, 3) &= \left[\frac{x+7}{10}\right] - \left[\frac{x+c_2}{30}\right] - \left[\frac{x+c_4}{70}\right] + \left[\frac{x+c_{24}}{210}\right] \\
&\quad \text{où } c_2 \equiv -3 = 27, c_4 \equiv -63 = 7, c_{24} \equiv -63 = 147 \\
&= \#\{\cancel{3}, \underline{13}, \underline{23}, \cancel{33}, \underline{43}, \underline{53}, \cancel{63}, \underline{73}, \underline{83}, \cancel{93}, \underline{103}, \underline{113}, \cancel{123}, 133, 143, \cancel{153}, \\
&\quad \underline{163}, \underline{173}, \cancel{183}, \underline{193}, 203, \cancel{213}, \ldots\} \\
\phi(100, 4; 10, 3) &= 10 - 4 - 1 + 1 = 6 \\
\phi(100, 1; 10, 9) &= \#\{9, 19, \ldots\} \\
&= \left[\frac{x+1}{10}\right] \\
\phi(x, 3; 0, 6) &= \#\{6, 12, 18, 24, \cancel{30}, \ldots\} \\
&= \left[\frac{x}{6}\right] - \left[\frac{x}{30}\right]
\end{aligned}$$

◇

Propriétés de $\phi(x, a; k, l)$

ϕ vérifie les propriétés suivantes (cf [2]) :

$$\begin{aligned}
\phi(4 \cdot p_2 \cdots p_a \cdot q + r, a; 4, l) &= q \cdot \varphi(p_2 \cdots p_a) + \phi(r, a; 4, l) \\
\phi(6 \cdot p_3 \cdots p_a \cdot q + r, a; 6, l) &= q \cdot \varphi(p_3 \cdots p_a) + \phi(r, a; 6, l)
\end{aligned}$$

De façon générale lorsque x se décompose sous la forme :

$$[x] = \text{ppcm}(k, \prod_{p \leqslant p_a} p) \cdot q + r$$

on a
$$\phi(x,a;k,l) = q \cdot \varphi(\mathrm{ppcm}(k, \prod_{p \leqslant p_a} p)/k) + \phi(r,a;k,l).$$

De plus, si $p_a \nmid k$
$$\phi(x,a;k,l) = \phi(x,a-1;k,l) - \phi(x/p_a, a-1; k, lp_a^{-1})$$
sinon si $p_a \mid k$ et $p_a \mid l$ alors
$$\phi(x,a;k,l) = \phi(x,a-1;k,l) - \phi(x/p_a, a-1; k/p_a, lp_a^{-1})$$
sinon si $p_a \mid k$ et $p_a \nmid l$ alors
$$\phi(x,a;k,l) = \phi(x,a-1;k,l).$$

<u>Démonstration</u> : Posons $k = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} p_k^{\alpha_k}$. Soit
$$m_a = \mathrm{ppcm}(k, \prod_{p \leqslant p_a} p) = p_1 p_2 \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_j^{\alpha_j} \cdots p_a \cdot p_k^{\alpha_k}.$$
Alors
$$z := \frac{m_a}{k} = p_1 p_2 \cdots \widehat{p_i^{\alpha_i}} \cdots \widehat{p_j^{\alpha_j}} \cdots p_a.$$
En utilisant l'identité de la fonction indicatrice d'Euler
$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} (1 - 1/p)$$
on obtient
$$\varphi(m_a/k) = \frac{m_a}{k} \prod_{p_i \mid \frac{m_a}{k}} (1 - 1/p_i) = \frac{m_a}{k} \prod_{\substack{p_i \leqslant p_a \\ (p_i,k)=1}} (1 - 1/p_i)$$
D'après l'équation 4.7,
$$\begin{aligned} &\phi(q \cdot m_a + r, a; k, l) \\ &= \left[\frac{q \cdot m_a + r + c_0}{k}\right] - \sum_{\substack{p_i \leqslant p_a \\ (p_i,k)=1}} \left[\frac{q \cdot m_a + r + c_i}{kp_i}\right] + \sum_{\substack{p_i < p_j \leqslant p_a \\ (p_i p_j,k)=1}} \left[\frac{q \cdot m_a + r + c_{ij}}{kp_i p_j}\right] - \cdots \\ &= \phi(r,a;k,l) + qz - \sum_{\substack{p_i \leqslant p_a \\ (p_i,k)=1}} \frac{q \cdot z}{p_i} + \sum_{\substack{p_i < p_j \leqslant p_a \\ (p_i p_j,k)=1}} \frac{q \cdot z}{p_i p_j} - \cdots \\ &= q \cdot \varphi(z) + \phi(r,a;k,l) \end{aligned}$$

Etudions maintenant l'autre égalité : $\phi(x,a;k,l)$ désigne les nombres plus petits que x congrus à $l \bmod k$ composés de facteurs $> p_a$; $\phi(x,a-1;k,l)$ désigne les nombres plus petits que x congrus à $l \bmod k$ composés de facteurs $> p_{a-1}$. La différence des deux parties représente le nombre d'entiers n plus petits que x tels que $n = p_a m \equiv l \bmod k$ avec $m = 1$ ou m composé de premiers $> p_{a-1}$ $((m, \prod_{p \leqslant p_{a-1}} p) = 1)$. C'est donc les entiers m divisibles par aucun des $p_1 \cdots p_{a-1}$ plus petits que x/p_a tels que $p_a m \equiv l \bmod k$ ou encore $m \equiv l p_a^{-1} \bmod k$ si $(p_a, k) = 1$. Si $p_a \mid k$ il faut résoudre l'équation

$$p_a m \equiv l \bmod k.$$

Si $p_a \not| \, l$ il n'y a pas de solution sinon on résout

$$m \equiv \frac{l}{p_a} \bmod \frac{k}{p_a}.$$

$\square$

4.2.6 Applications

Pour plus de simplicité dans les notations, nous utiliserons parfois $\pi_{k,l}(x)$ au lieu de $\pi(x; k, l)$ ainsi que $\phi_{k,l}(x, a)$ au lieu de $\phi(x, a; k, l)$.

Formule pour les premiers $p \equiv \pm 1 \bmod 3$

D'après le théorème 4.3 pour $l = 1, 2$

$$\pi(x; 3, l) = \pi(p_a; 3, l) + \phi(x, a; 3, l) - \delta(l) - P_2(x, a; 3, l).$$

Choisissons $x = 2000$. Ainsi $c = a = \pi(2000^{1/3}) = 5$ et $b = \pi(\sqrt{2000}) = 14$. Calculons $\phi(2000, 5; 3, 1)$ à l'aide des propriétés de ϕ.

$$\begin{aligned}
\phi(2000, 5; 3, 1) &= \phi(2000, 4; 3, 1) - \phi(2000/11, 5; 3, 2) \\
&= 9 \cdot \varphi(210/3) + \phi(110, 4, 3, 1) - \phi(181, 4, 3, 2) \\
&= 9 \cdot 24 + \phi_{3,1}(110, 3) - \phi_{3,1}(110/7, 3) - (\phi_{3,2}(181, 3) - \phi_{3,2}(181/7, 3)) \\
\phi(2000, 5; 3, 1) &= 216 + 16 - 3 - (24 - 3) = 208
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient $\phi(2000, 5; 3, 2) = 208$. On peut aussi retrouver ce calcul par la formule (4.7). D'autre part $\pi(p_5; 3, 1) = 1$ et $\pi(p_5; 3, 2) = 3$. Calculons maintenant $P_2(2000, 5; 3, 1)$.

$$\begin{aligned}
&P_2(2000, 5; 3, 1) \\
&= \sum_{(r,s)=(1,1),(2,2)} \sum_{\substack{p > p_5 \\ p \equiv r \bmod 3}}^{p \leqslant \sqrt{x}} (\pi(x/p; 3, s) - \pi(p-1; 3, s)) \\
&= \sum_{\substack{p > p_5 \\ p \equiv 1 \bmod 3}}^{p \leqslant \sqrt{x}} (\pi_{3,1}(2000/p) - \pi_{3,1}(p-1)) + \sum_{\substack{p > p_5 \\ p \equiv 2 \bmod 3}}^{p \leqslant \sqrt{x}} (\pi_{3,2}(2000/p) - \pi_{3,2}(p-1))
\end{aligned}$$

Soit $S_1 = \sum\limits_{\substack{p>p_5 \\ p\equiv 1 \bmod 3}}^{p\leqslant\sqrt{x}} (\pi_{3,1}(2000/p) - \pi_{3,1}(p-1))$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi_{3,1}(2000/13) - \pi_{3,1}(13-1) + \pi_{3,1}(2000/19) - \pi_{3,1}(19-1) + \pi_{3,1}(2000/31) \\ &\quad -\pi_{3,1}(31-1) + \pi_{3,1}(2000/37) - \pi_{3,1}(37-1) + \pi_{3,1}(2000/43) - \pi_{3,1}(43-1) \\ &= 16 - 1 + 12 - 2 + 7 - 3 + 6 - 4 + 6 - 5 = 32 \end{aligned}$$

Soit $S_2 = \sum\limits_{\substack{p>p_5 \\ p\equiv 2 \bmod 3}}^{p\leqslant\sqrt{x}} (\pi(2000/p;3,2) - \pi(p-1;3,2))$.

$$\begin{aligned} S_2 &= \pi(2000/17;3,2) - \pi(17-1;3,2) + \pi(2000/23;3,2) - \pi(23-1;3,2) \\ &\quad +\pi(2000/29;3,2) - \pi(29-1;3,2) + \pi(2000/41;3,2) - \pi(41-1;3,2) \\ &= 16 - 3 + 12 - 4 + 10 - 5 + 8 - 6 = 28 \end{aligned}$$

Donc

$$\pi(2000;3,1) = 1 + 208 - 1 - 60 = 148.$$

Calculons $P_2(2000,5;3,2)$.

$$\begin{aligned} &P_2(2000,5;3,2) \\ &= \sum_{(r,s)=(1,2),(2,1)} \sum_{\substack{p>p_5 \\ p\equiv r \bmod 3}}^{p\leqslant\sqrt{x}} (\pi(x/p;3,s) - \pi(p-1;3,s)) \\ &= \sum_{\substack{p>p_5 \\ p\equiv 1 \bmod 3}}^{p\leqslant\sqrt{x}} (\pi_{3,2}(2000/p) - \pi_{3,2}(p-1)) + \sum_{\substack{p>p_5 \\ p\equiv 2 \bmod 3}}^{p\leqslant\sqrt{x}} (\pi_{3,1}(2000/p) - \pi_{3,1}(p-1)) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrlr} \pi(2000/13;3,2) = & 19 & \pi(13-1;3,2) = & 3 \\ \pi(2000/17;3,1) = & 13 & \pi(17-1;3,1) = & 2 \\ \pi(2000/19;3,2) = & 14 & \pi(19-1;3,2) = & 4 \\ \pi(2000/23;3,1) = & 10 & \pi(23-1;3,1) = & 3 \\ \pi(2000/29;3,1) = & 8 & \pi(29-1;3,1) = & 3 \\ \pi(2000/31;3,2) = & 10 & \pi(31-1;3,2) = & 6 \\ \pi(2000/37;3,2) = & 9 & \pi(37-1;3,2) = & 6 \\ \pi(2000/41;3,1) = & 6 & \pi(41-1;3,1) = & 5 \\ \pi(2000/43;3,2) = & 7 & \pi(43-1;3,2) = & 7 \\ & - & & - \\ & 93 & & 39 \end{array}$$

Ainsi $P_2(2000,5;3,2)=57$ et

$$\pi(2000;3,2)=3+208-0-57=154.$$

Il est alors facile de vérifier que

$$\pi(2000)=\pi(2000;3,1)+\pi(2000;3,2)+\#\{3\}.$$

Formule pour les premiers $p\equiv\pm1 \bmod 4$

D'après le théorème 4.3 pour $l=1,3$

$$\pi(x;4,l)=\pi(p_a;4,l)+\phi(x,a;4,l)-\delta(l)-P_2(x,a;4,l).$$

Reprenons $x=2000$. $\pi(p_5;4,1)=1$ et $\pi(p_5;4,3)=3$.
Calculons $\phi(2000,5;4,l)$.

$$\begin{aligned}
\phi(2000,5;4,1) &= \phi(2000,4;4,1)-\phi(2000/11,5;4,3) \quad (11^{-1}\equiv 3 \bmod 4)\\
&= 4\cdot\varphi(210)+\phi(320,4,3,1)-\phi(181,4,4,3)\\
&= 192+\phi_{4,1}(320,3)-\phi_{4,3}(320/7,3)-(\phi_{4,3}(181,3)-\phi_{4,1}(181/7,3))\\
\phi(2000,5;3,1) &= 208
\end{aligned}$$

De même, $\phi(2000,5;4,3)=208$.
Calculons $P_2(2000,5;4,l)$.

Lorsque $pp'\equiv 1 \bmod 4$, deux cas sont possibles :

- $p\equiv 1 \bmod 4, p'\equiv 1 \bmod 4$
- $p\equiv 3 \bmod 4, p'\equiv 3 \bmod 4$

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
\pi(2000/13;4,1)= & 16 & \pi(13-1;4,1)= & 1\\
\pi(2000/17;4,1)= & 14 & \pi(17-1;4,1)= & 2\\
\pi(2000/19;4,3)= & 14 & \pi(19-1;4,3)= & 3\\
\pi(2000/23;4,3)= & 13 & \pi(23-1;4,3)= & 4\\
\pi(2000/29;4,1)= & 8 & \pi(29-1;4,1)= & 3\\
\pi(2000/31;4,3)= & 9 & \pi(31-1;4,3)= & 5\\
\pi(2000/37;4,1)= & 7 & \pi(37-1;4,1)= & 4\\
\pi(2000/41;4,1)= & 6 & \pi(41-1;4,1)= & 5\\
\pi(2000/43;4,3)= & 7 & \pi(43-1;4,3)= & 6\\
 & - & & -\\
 & 94 & & 33
\end{array}$$

Ainsi $P_2(2000, 5; 4, 1) = 94 - 33 = 61$.

Lorsque $pp' \equiv 3 \bmod 4$, deux cas sont possibles :

- $p \equiv 1 \bmod 4, p' \equiv 3 \bmod 4$
- $p \equiv 3 \bmod 4, p' \equiv 1 \bmod 4$

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
\pi(2000/13;4,3) = & 19 & \pi(13-1;4,3) = & 3 \\
\pi(2000/17;4,3) = & 15 & \pi(17-1;4,3) = & 3 \\
\pi(2000/19;4,1) = & 12 & \pi(19-1;4,1) = & 3 \\
\pi(2000/23;4,1) = & 9 & \pi(23-1;4,1) = & 3 \\
\pi(2000/29;4,3) = & 10 & \pi(29-1;4,3) = & 5 \\
\pi(2000/31;4,1) = & 8 & \pi(31-1;4,1) = & 4 \\
\pi(2000/37;4,3) = & 8 & \pi(37-1;4,3) = & 6 \\
\pi(2000/41;4,3) = & 8 & \pi(41-1;4,3) = & 6 \\
\pi(2000/43;4,1) = & 6 & \pi(43-1;4,1) = & 6 \\
 & - & & - \\
 & 95 & & 39
\end{array}$$

Ainsi $P_2(2000, 5; 4, 3) = 95 - 39 = 56$. D'où

$\pi(2000; 4, 1) = 1+208-1-(94-33) = 147 \qquad \pi(2000; 4, 3) = 3+208-0-(95-39) = 155.$

Premiers de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathcal{D}(0, R)$

Combien existe-t-il de premiers de $\mathbb{Z}[i]$ appartenant au disque fermé de centre O et de rayon R (soit $N(R)$, ce nombre) ?

Les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ se regroupent en trois classes distinctes :

- $(1 + i)$ et ses associés
- $p \equiv 3 \bmod 4$ $(\pm p, \pm ip)$
- $(\pm a \pm ib)$ tel que $a^2 + b^2 = p \equiv 1 \bmod 4$ (symétrique en a et b)

Il vient naturellement que pour $R \geqslant \sqrt{2}$,

$$N(R) = 4 + 4\pi(R; 4, 3) + 8\pi(R^2, 4, 1).$$

Exemple : $N(\sqrt{2000}) = 4 + 4 \cdot 7 + 8 \cdot 147 = 1208.$ $\diamond$

Les irréductibles primaires de $\mathbb{Z}[i]$ sont ceux qui sont congrus à 1 modulo $(2+2i)^3$, c'est-à-dire congrus à 1 ou $3+2i$ modulo 4. Ou encore $r+is$ est primaire si et seulement si s est pair et $r+s \equiv 1 \bmod 4$. Parmi les quatre irréductibles qui engendrent le même idéal, il y en a exactement un qui est primaire parmi ceux de la deuxième et troisième "classes".

Il en existe donc $(8\pi(R^2,4,1) + 4\pi(R,4,3))/4$ de forme primaire contenus dans le disque $\mathcal{D}(0,R)$. Soit 301 pour $R = \sqrt{2000}$.

Sur la différence $\Delta(x) = \pi(x;4,3) - \pi(x;4,1)$

Soit $\Delta(x) = \pi(x;4,3) - \pi(x;4,1)$. Choisissons cette fois $x = 26861$. Alors $\pi(\sqrt{x}) = 38$ et $\pi(\sqrt[3]{x}) = 10$. En appliquant les différentes formules, il vient

$$\begin{aligned} \phi(x,10;4,1) &= 2131 \\ \phi(x,10;4,3) &= 2119 \\ P_2(x,10;4,1) &= 661 \\ P_2(x,10;4,3) &= 652 \end{aligned}$$

Comme $\pi(29;4,1) = 4$ et $\pi(29;4,3) = 5$,

$$\pi(x;4,1) = 4 + 2131 - 1 - 661 = 1473 \qquad \pi(x;4,3) = 5 + 2119 - 0 - 652 = 1472.$$

Donc

$$\Delta(26861) = -1.$$

C'est en fait la première valeur pour laquelle $\pi(x;4,3) < \pi(x;4,1)$.

Formule pour les premiers $p \equiv \pm 1 \bmod 6$

D'après le théorème 4.3 pour $l = 1$ ou 5,

$$\pi(x;6,l) = \pi(p_a;6,l) + \phi(x,a;6,l) - \delta(l) - P_2(x,a;6,l).$$

Reprenons $x = 2000$. On sait que $\pi(p_5;6,1) = 1$ et $\pi(p_5;6,5) = 2$. Grâce à la formule (4.7), on obtient

$$\phi(2000,5;6,1) = \phi(2000,5;6,5) = 208.$$

Lorsque $pp' \equiv 1 \bmod 6$, deux cas sont possibles :

- $p \equiv 1 \bmod 6$, $p' \equiv 1 \bmod 6$
- $p \equiv 5 \bmod 6$, $p' \equiv 5 \bmod 6$

$$
\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
\pi(2000/13;6,1) = & 16 & \pi(13-1;6,1) = & 1 \\
\pi(2000/17;6,5) = & 15 & \pi(17-1;6,5) = & 2 \\
\pi(2000/19;6,1) = & 12 & \pi(19-1;6,1) = & 2 \\
\pi(2000/23;6,5) = & 11 & \pi(23-1;6,5) = & 3 \\
\pi(2000/29;6,5) = & 9 & \pi(29-1;6,5) = & 4 \\
\pi(2000/31;6,1) = & 7 & \pi(31-1;6,1) = & 3 \\
\pi(2000/37;6,1) = & 6 & \pi(37-1;6,1) = & 4 \\
\pi(2000/41;6,5) = & 7 & \pi(41-1;6,5) = & 5 \\
\pi(2000/43;6,1) = & 6 & \pi(43-1;6,1) = & 5 \\
 & - & & - \\
 & 89 & & 29
\end{array}
$$

Ainsi $P_2(2000,5;6,1) = 89 - 29 = 60$.

Lorsque $pp' \equiv 5 \bmod 6$, deux cas sont possibles :

- $p \equiv 1 \bmod 6,\ p' \equiv 5 \bmod 6$
- $p \equiv 5 \bmod 6,\ p' \equiv 1 \bmod 6$

$$
\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
\pi(2000/13;6,5) = & 18 & \pi(13-1;6,5) = & 2 \\
\pi(2000/17;6,1) = & 13 & \pi(17-1;6,1) = & 2 \\
\pi(2000/19;6,5) = & 13 & \pi(19-1;6,5) = & 3 \\
\pi(2000/23;6,1) = & 10 & \pi(23-1;6,1) = & 3 \\
\pi(2000/29;6,1) = & 8 & \pi(29-1;6,1) = & 3 \\
\pi(2000/31;6,5) = & 9 & \pi(31-1;6,5) = & 5 \\
\pi(2000/37;6,5) = & 8 & \pi(37-1;6,5) = & 5 \\
\pi(2000/41;6,1) = & 6 & \pi(41-1;6,1) = & 5 \\
\pi(2000/43;6,5) = & 6 & \pi(43-1;6,5) = & 6 \\
 & - & & - \\
 & 91 & & 34
\end{array}
$$

Ainsi $P_2(2000,5;6,5) = 91 - 34 = 57$. D'où

$$\pi(2000;6,1) = 1 + 208 - 1 - 60 = 148 \qquad \pi(2000;6,5) = 2 + 208 - 0 - 57 = 153.$$

On peut vérifier que $\pi(2000) = \pi(2000;6,1) + \pi(2000;6,5) + \#\{2,3\}$.

Formule pour les premiers $p \equiv \pm 1 \bmod 10$

D'après le théorème 4.3 pour $l = 1, 9$

$$\pi(x;10,l) = \pi(p_a;10,l) + \phi(x,a;10,l) - \delta(l) - P_2(x,a;10,l).$$

Reprenons $x = 2000$. $\pi(p_5; 10, 1) = 1$ et $\pi(p_5; 10, 9) = 0$. Grâce à la formule (4.7), on obtient

$$\phi(2000, 5; 10, 1) = \phi(2000, 5; 10, 9) = 104.$$

Lorsque $pp' \equiv 1 \bmod 10$, quatre cas sont possibles :

- $p \equiv 1 \bmod 10,\ p' \equiv 1 \bmod 10$
- $p \equiv 3 \bmod 10,\ p' \equiv 7 \bmod 10$
- $p \equiv 7 \bmod 10,\ p' \equiv 3 \bmod 10$
- $p \equiv 9 \bmod 10,\ p' \equiv 9 \bmod 10$

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
\pi(2000/13; 10, 7) = & 9 & \pi(13-1; 10, 7) = & 1 \\
\pi(2000/17; 10, 3) = & 9 & \pi(17-1; 10, 3) = & 2 \\
\pi(2000/19; 10, 9) = & 5 & \pi(19-1; 10, 9) = & 0 \\
\pi(2000/23; 10, 7) = & 5 & \pi(23-1; 10, 7) = & 2 \\
\pi(2000/29; 10, 9) = & 3 & \pi(29-1; 10, 9) = & 1 \\
\pi(2000/31; 10, 1) = & 4 & \pi(31-1; 10, 1) = & 1 \\
\pi(2000/37; 10, 3) = & 5 & \pi(37-1; 10, 3) = & 3 \\
\pi(2000/41; 10, 1) = & 3 & \pi(41-1; 10, 1) = & 2 \\
\pi(2000/43; 10, 7) = & 3 & \pi(43-1; 10, 7) = & 3 \\
 & - & & - \\
 & 46 & & 15
\end{array}$$

Ainsi $P_2(2000, 5; 10, 1) = 46 - 15 = 31$.

Lorsque $pp' \equiv 9 \bmod 10$, quatre cas sont possibles :

- $p \equiv 1 \bmod 10,\ p' \equiv 9 \bmod 10$
- $p \equiv 3 \bmod 10,\ p' \equiv 3 \bmod 10$
- $p \equiv 7 \bmod 10,\ p' \equiv 7 \bmod 10$
- $p \equiv 9 \bmod 10,\ p' \equiv 1 \bmod 10$

$$
\begin{array}{lrlr}
\pi(2000/13;10,3) = & 9 & \pi(13-1;10,3) = & 1 \\
\pi(2000/17;10,7) = & 7 & \pi(17-1;10,7) = & 1 \\
\pi(2000/19;10,1) = & 6 & \pi(19-1;10,1) = & 1 \\
\pi(2000/23;10,3) = & 7 & \pi(23-1;10,3) = & 2 \\
\pi(2000/29;10,1) = & 4 & \pi(29-1;10,1) = & 1 \\
\pi(2000/31;10,9) = & 3 & \pi(31-1;10,9) = & 2 \\
\pi(2000/37;10,7) = & 4 & \pi(37-1;10,7) = & 2 \\
\pi(2000/41;10,9) = & 2 & \pi(41-1;10,9) = & 2 \\
\pi(2000/43;10,3) = & 4 & \pi(43-1;10,3) = & 3 \\
 & - & & - \\
 & 46 & & 15
\end{array}
$$

Ainsi $P_2(2000,5;10,9) = 46 - 15 = 31$.

D'où

$$\pi(2000;10,1) = \pi(2000;10,9) = 73.$$

4.2.7 Temps de calcul théorique pour $\pi(x)$

Méthode	Temps	Stockage
Legendre	$O(x)$	$O(\sqrt{x})$
Meissel	$O(x/\ln^3 x)$	$O(x^{1/2}/\ln x)$
Lehmer	$O(x/\ln^4 x)$	$O(x^{1/3}/\ln x)$
Mapes	$O(x^{0,7})$	$O(x^{1-\varepsilon})$
Lagarias-Miller-Odlysko	$O(x^{2/3+\varepsilon})$	$O(x^{1/3+\varepsilon})$
Lagarias-Odlysko	$O(x^{3/5+\varepsilon})$	$O(x^{\varepsilon})$

La dernière méthode est une méthode théorique puisqu'elle n'a pas été programmée. Les calculs les plus récents sont dans [1] ont pour base la méthode de Meissel-Lehmer.

Bibliographie

[1] M. Deleglise & J. Rivat, "Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method", *Math. Of Computation*, Vol. **65**, Number 213 (January 1996) pp. 235-245.

[2] R. H. Hudson & A. Brauer, "On the exact number of primes in the arithmetic progressions $4n \pm 1$ and $6n \pm 1$.", *J. Reine Angew. Math.*, Vol. **291**, (1977) pp. 23-29.

[3] J. C. Lagarias, V. S. Miller & A. M. Odlyzko, "Computing $\pi(x)$: The Meissel-Lehmer Method", *Math. Of Computation*, Vol. **44**, Number 170 (April 1985) pp. 537-560.

[4] D. H. Lehmer, "On the exact number of primes less than a given limit", *Illinois Journal of Math.*, Vol. **3**, (1959) pp. 381-388.

[5] Kevin S. McCurley, "Explicit Estimates for $\theta(x; 3, l)$ and $\psi(x, 3, l)$", *Math. Of Computation*, Vol. **42**, Number 165 (January 1984) pp. 287-296.

[6] O. Ramaré & R. Rumely, "Primes in arithmetic progressions", *Math. Of Computation*, Vol. **65**, Number 213 (January 1996) pp. 397-425.

[7] Hans Riesel, "Prime Numbers and Computer Methods for Factorization", Birkhäuser (1985)

Conclusion

Les encadrements sur p_k et $\pi(x)$ démontrés dans cette thèse font apparaître de plus en plus de termes du développement asymptotique. Ces raffinements sont facilités par l'augmentation de la puissance des ordinateurs, permettant des calculs de plus en plus compliqués. Sur cette partie, la théorie mathématique n'a pas tellement avancé puisque ce n'est qu'une mise à jour des travaux de ROSSER & SCHOENFELD. Les estimations de ces derniers sont très utilisées de part le monde pour obtenir des résultats effectifs. Les améliorations présentées ici ont déjà été utilisées dans d'autres démonstrations.

Mais tout ne peut pas être résolu avec les machines. Par exemple, pour exhiber un k-uple admissible super-dense, il faudra encore beaucoup de temps. Il est parfois plus rapide de réfléchir un peu plus pour donner un programme plus simple à résoudre avec la machine. Il est dommage de n'avoir pas pu trouver un contre-exemple à la conjecture d'HARDY-LITTLEWOOD. La première occurrence pour une solution du k-uple proposé se situe dans les limites des grands nombres pouvant être représentés sur les machines actuelles.

La troisième partie propose une fonction ε qui permet d'encadrer ψ sans avoir besoin de calculer des intégrales compliquées. Une simple calculatrice permet d'obtenir les valeurs de $\varepsilon(x)$ pour les x grands. Plus besoin d'ordinateur pour avoir des majorations précises de la fonction ψ.

Pour communiquer avec un ordinateur, il faut structurer sa pensée et mettre les différentes opérations dans un ordre précis. Cette réflexion est présentée sous forme d'algorithme. Celui-ci doit être traduit dans le langage de programmation qui n'est pas toujours tâche aisée. Le travail effectué sur l'algorithme de calcul de $\pi(x;k,l)$ va déboucher sur un article en collaboration avec M. DELÉGLISE.

Il reste beaucoup de choses à faire en mathématiques. Par exemple, le travail effectué sur les premiers peut être repris dans les progressions arithmétiques. En définissant par $p(n;k,l)$ le n-ième premier dans la progression arithmétique l mod k, est-ce que

$$p(n;k,l) \geqslant n\varphi(k)\left(\ln n + \ln\ln n - 1 + \ln\varphi(k)\right) ?$$

Contenu des annexes

- Calcul des epsilons
- Chercher un k-uple super-dense
- Trouver un p vérifiant un k-uple
- Calcul des $C1(k)$
- Calcul de $\phi(x, a; k, l)$

Annexe A

Calcul des ε de la Table 1

```
# Auteur : Pierre DUSART
# Titre : Table de Rosser & Schoenfeld
# Title : Rosser & Schoenfeld 's Table
# Fichier : Rosser2.map
# Version 1.0 (06/09/1996)
# Langage Maple V.2
#
# Ex : (A:=545439823.215) -> 18.42, 2, .0002406250000, .001186413731

zeroDiff:=proc(dW1,delta)
local precision,F1,k,m1,M1,s;
precision:=10**(-1):
F1:=unapply(dW1,delta);
k:=1:
while (evalf(F1(10**(-k)))>0) do
k:=k+1:od:
m1:=10**(-k):M1:=10**(-k+1):
if evalb((evalf(F1(m1))<=0) and (evalf(F1(M1))>0)) then
s:=(m1+M1)/2;
while evalb(evalf(abs(F1(s)))>precision) do
if evalb(evalf(F1(s))>=0) then M1:=s
else m1:=s;fi:
s:=(m1+M1)/2;
od:
else print(`erreur de type de fonction dans zero`);fi;
s;
end:
```

```
mini_m:=proc(eps,dWr,b1,delta)
local min1,delta1,cpt_m,s,dW1,mini,min_m,dW;
min1:=10:delta1:=1:min_m:=0:
dW:=unapply(dWr,b,m):
for cpt_m from 2 to 20 do   # Pourquoi pas m=0 et m=1 ?
dW1:=dW(b1,cpt_m);
s:=zeroDiff(dW1,delta);
mini:=evalf(subs({b=b1,m=cpt_m,delta=s},eps)):
if evalb(mini<min1) then
min1:=mini:
min_m:=cpt_m:
delta1:=s;
fi:
od:
[b1,min_m,delta1,min1]
end:

# Precision :
Digits:=40:
C1 :=38.31:
F:=T->T/(2*Pi)*ln(T/(2*Pi))-T/(2*Pi)+7/8:
Rt:=T->0.137*ln(T)+0.443*ln(ln(T))+1.588:
K:=(n,z,x)->1/2*Int(t**(n-1)*exp(-1/2*z*(t+1/t)),t=x..infinity):
Rm:=(m,delta)->((1+delta)**(m+1)+1)**m:
T1:=(m,delta)->1/delta*(2*Rm(m,delta)/(2+m*delta))^(1/m):
x:=exp(b):
R:=9.645908801:
X:=sqrt(ln(x)/R):
phi:=(m,y)->y**(-m-1)*exp(-X**2/ln(y/C1)):
z:=2*X*sqrt(m):

# A:=1894438.51224:
A:=545439823.215:

Ap:=(2*m/z)*ln(A/C1):
Y:=max(A,C1*exp(sqrt(b/((m+1)*R)))):
Omega2:=0.159155*Rm(m,delta)*z/(2*m**2*C1^m)*(z*K(2,z,Ap)+2*m*ln(C1/(2*Pi
))*K(1,z,Ap))+Rm(m,delta)*(2*Rt(Y)*phi(m,Y)-Rt(A)*phi(m,A)):
Omega1:=(2+m*delta)/(4*Pi)*((ln(T1(m,delta)/(2*Pi))+1/m)**2
+0.038207+1/m**2-2.82*m/((m+1)*T1(m,delta))):
```

```
eps:=Omega1*exp(-b/2)+Omega2*(delta**(-m))+m*delta/2+exp(-b)*ln(2*Pi):

interface(quiet=true):

dWr:=diff(eps,delta):
# B:=[23,50,100,1000]:
 B:=[50]:
for i to nops(B) do
Result[i]:=mini_m(eps,dWr,B[i],delta);

interface(quiet=false):

print(B[i],Result[i][2],evalf(Result[i][3]),Result[i][4]);

interface(quiet=true):
od;
interface(quiet=false);
quit;
```

Annexe B

Chercher un k-uple super-dense

```
# Auteur : Pierre DUSART
# Titre : rho(11763)>=1415
# Version 1.0 (07/02/1995)
# Langage Maple V.2


# initialisation

p:=nextprime(225):
L:={}:
while (p<=5882) do
    L:={op(L),-p,p}:
    p:=nextprime(p):
od:

L:={op(L),-1,1}:

# Procedures
#
cherche_classe_min:=proc(L,p)
local Classes,i,c,min;
Classes:=array(0..p-1):
for i from 0 to p-1 do Classes[i]:=0:od:
for i from 1 to nops(L) do
c:=L[i] mod p:
Classes[c]:=Classes[c]+1:
od:
```

```
min:=p-1:
for i from 0 to p-1 do
if (Classes[i]<=min) then
min:=Classes[i]:
c:=i:
fi:
od:
RETURN([c,min])
end:
eliminer:=proc(L,j,p)
local liste,i;
liste:=L;
for i from 1 to nops(L) do
if (L[i] mod p=j) then
liste:=liste minus {L[i]};fi:
od:
RETURN(liste):
end:

# programme
#
p:=nextprime(225):
while (p<=nops(L)) do
j:=cherche_classe_min(L,p):
if (j[2]<>0) then
L:=eliminer(L,j[1],p);fi;
p:=nextprime(p);
od:
L:=sort([op(L)]):
lprint(nops(L),L[nops(L)]-L[1]+1);

quit;
```

Annexe C

Trouver un p vérifiant un k-uple

```
# Auteur : Pierre DUSART
# Titre : chercher le premier $p$ verifiant un k-uple admissible
# Title : find the first prime $p$ which satisfy a admissible k-uple
# Fichier : k_uple3.map
# Version 1.0 (31/05/1995)
# Langage Maple V.2
# test_p([0,2,12,14,20],17); -> true
# Ex : trouve_p([0,4,6,10,12,16],3,1); -> 7
# Ex : trouve_p([0,2,12,14,20],3,1); -> 17
# Ex : trouve_p([0,2,6,8],3,1); -> 5
# Ex : trouve_p([0,2,6,8],2,1); -> 5
# Ex : trouve_p([0,2,12,14,20,24,30,32,38],10,1000); ->  130619
# Ex : trouve_p([0,2,12,14,20,24,30,32,38,42],20,10000);
#     ->  3511374299  (bytes used=877459204, alloc=7011068,time=1898.42)
# Ex : trouve_p([0,2,12,14,20,24,30,32,38,42,54],20,10000);
# ->  400622731109 (bytes used=61731105076, alloc=5438492, time=179229.86)

test_p:=proc(k_uple,p)
local i,convient;
convient:=true;
i:=1;
while ((i<=nops(k_uple)) and convient) do
convient:=isprime(p+k_uple[i]);
i:=i+1;
od;
RETURN(convient);
end:
```

```
appartient:=proc(elem,ens,p)
local i,trouve;
i:=1;
trouve:=false;
while ((i<=nops(ens)) and  not trouve) do
trouve:=evalb((ens[i] + elem) mod p = 0):
i:=i+1;od;
RETURN(trouve);
end:


verifier:=proc(z,k_uple,B1,B2)
local p,convient;
p:=nextprime(B1);
convient:=true;
while (((p<=B2) and (convient)) and (z<p)) do
convient:= not appartient(z,k_uple,p);
p:=nextprime(p):
od:
RETURN(convient);
end:

congruences_mod_p:=proc(k_uple,p)
local cg,L;
L:=[];
cg:=0;
while (cg<=p-1) do
if not appartient(cg,k_uple,p) then L:=[op(L),cg];fi;
cg:=cg+1;
od;
RETURN(L);
end;

trouve_p:=proc(k_uple,Borne,nbre_essais)
local Z,p,i,j,C,R,produit,essai,trouve,n;
p:=2;produit:=2;
Z:=congruences_mod_p(k_uple,p);
while (p<=Borne) do
p:=nextprime(p);
```

```
if test_p(k_uple,p-k_uple[1]) then RETURN(p-k_uple[1]);fi;
C:=congruences_mod_p(k_uple,p);
R:=[];
for i to nops(Z) do
for j to nops(C) do
R:=[op(R),chrem([C[j],Z[i]],[p,produit])];
od;
od;
produit:=produit*p;
Z:=copy(R);
od;
Z:=sort(Z);
trouve:=false;essai:=0;
while (essai<=nbre_essais) and (not trouve) do
i:=1;
while (i<=nops(Z)) and (not trouve) do
n:=Z[i] + essai*produit;
trouve:=test_p(k_uple,n);
i:=i+1;
od;
essai:=essai+1;
od;
if trouve then RETURN(n)
else RETURN(`Premier non trouve'`);fi;
end;

cherche_k_uple_max:=proc(L,p)
# On enleve dans Liste les elements de L qui ne conviennent pas
local Liste,i;
Liste:=copy(convert(L,set));
for i to nops(L) do
if not isprime(p+L[i]) then
Liste:=Liste minus {L[i]}; fi;
od;
Liste:=sort(convert(Liste,list)):
# print(Liste);
if nops(Liste)>0 then
   [nops(Liste),Liste[nops(Liste)]-Liste[1]+1]
else
   [nops(Liste),0];fi;
end:
```

```
test_k_uple_super_dense:=proc(k_uple,p)
local R,taille,longueur;
R:=cherche_k_uple_max(k_uple,p);
taille:=R[1];longueur:=R[2];
if taille>=2 then
evalb(ithprime(taille)>longueur)
else false;fi;
end:

Recherche_k_uple_super_dense
           :=proc(k_uple,liste_entiers,modulo,Nbre_essais)
local trouve,n,i,essai;
for essai from 0 to Nbre_essais do
for i to nops(liste_entiers) do
n:=liste_entiers[i]+essai*modulo;
trouve:=test_k_uple_super_dense(k_uple,n);
if trouve then print(`super-dense pour p =`,n);fi;
od;
od;
end;

Recherche_n_fois_k_uple:=proc(k_uple,liste_entiers,modulo,Nbre_fois)
local i,n,fois,trouve,essai;
essai:=0;fois:=0;
while (fois<Nbre_fois) do
for i to nops(liste_entiers) do
n:=liste_entiers[i]+essai*modulo;
trouve:=test_p(k_uple,n);
if trouve then print(`k_uple verifie' pour p =`,n);
fois:=fois+1;fi;
od;
essai:=essai+1;
od;
end;
```

Annexe D

Calcul des $C_1(\chi)$

```
# Auteur : Pierre DUSART
# Titre : Article de RAMARE (Math Of Comp  Vol 65, Nbr 213 Jan 1996)
# Title :
# Fichier : RAMARE.MAP (01/08/1996)
# Version 1.0 (07/01/1997)
# Langage Maple V.2
#
# Ex : C1(1,545000000);  ->  38.32392130
#      C1(420,2500); -> 56.60860707
# eps(10**10,16,6,.003); -> .01291514142

with(numtheory,tau,phi):
R:=9.645908801:
C2:=0.9185:
C3:=5.512:
# H:=2500:

De:=proc(k,sigma)
local sum,Dp,p:

Dp:=proc(p,sigma)
local khi,c,a0,sigma1,x;
a0:=11.1859355312082048:
khi:=sigma->(1+4/5*sqrt(sigma-1))/sqrt(5):
# c:=(p,sigma,sigma1)->1/(p^sigma-1)-khi(sigma)/(p^sigma1-1):
c:=(p,sigma,sigma1)->1/(p^sigma-1)
      -((1+4/5*sqrt(sigma-1))/sqrt(5))/(p^sigma1-1):
```

```
sigma1:=fsolve(sqrt(x*(x-1))+sqrt(sigma*(sigma-1))=1,
                x=(1+sqrt(2))/2..(1+sqrt(5))/2):
         if (p=2) then
                5.99*c(2,sigma,sigma1)
        elif (p=3) then
                5.467*c(3,sigma,sigma1)
        else
                a0*c(p,sigma,sigma1)
        fi:
end:
sum:=0:
if isprime(k) then sum:=Dp(k,sigma)*ln(k)
else
  p:=2:
  while (p<=evalf(sqrt(k))) do
     if (k mod p =0) then
         sum:=sum+Dp(p,sigma)*ln(p)
     fi:
     p:=nextprime(p):
  od:
fi:
evalf(sum)
end:

C1:=proc(k,H)
local C,alpha,x,Delta,w,Db,E,S,a0,Gb:
C:=4.171838431:
alpha:=0.647213592:
w:=1.705118356:
x:=sqrt(w)-1:
Delta:=1/(x*R*ln(k*H/C)):
Db:=De(k,1+Delta):
E:=1.08699+1.40018*sqrt(Delta)+1.86576*Delta+2.32244*Delta^(3/2):
S:=-1/(1+Delta)+(1+4/5*sqrt(Delta))*sqrt(1-8/5*sqrt(Delta^2+Delta)
          +4/5*(Delta^2+Delta))/(1-sqrt(Delta^2+Delta))^2:
a0:=11.1859355312082048:
Gb:=E-w*S+Db/a0:
C*exp(1/R*(alpha/x*sqrt(1/Delta)+1/x^2*Gb)
/(1+alpha/sqrt(w)*sqrt(Delta)+1/(x*sqrt(w))*Delta*Gb));
end:
```

```
K:=(n,z,x)->1/2*Int(t**(n-1)*exp(-1/2*z*(t+1/t)),t=x..infinity):

At:=proc(k,m,H,x0,CK)
local Zm,Um,Zm1,Um1:
C2:=0.9185:
Zm:=evalf(2*sqrt(m*ln(x0)/R));
Zm1:=evalf(2*sqrt((m+1)*ln(x0)/R));
Um:=evalf(sqrt(R*m/ln(x0))*ln(k*H/CK));
Um1:=evalf(sqrt(R*(m+1)/ln(x0))*ln(k*H/CK));
2/Pi*ln(x0)/(R*m)*(k/CK)**m*K(2,Zm,Um)
+2/Pi*ln(CK/(2*Pi))*sqrt(ln(x0)/(R*m))*(k/CK)**m*K(1,Zm,Um)
+2*C2*sqrt(ln(x0)/(R*(m+1)))*(k/CK)**(m+1)*K(1,Zm1,Um1)
end:

Bt:=proc(k,m,H,x0,CK)
evalf(2/H^(m+1)*exp(-ln(x0)/(R*ln(k*H/CK)))*(C2*ln(k*H)+C3))
end:

Ct:=proc(k,m,H)
evalf((ln(k*H/(2*Pi))+1/m)/(Pi*m*H^m))
end:

Dt:=proc(k,m,H)
evalf((2*C2*ln(k*H)+2*C3+C2/(m+1))/H^(m+1))
end:

Et:=proc(k,H)
evalf(1/(2*Pi)*ln(H)^2+ln(k/(2*Pi))/Pi*ln(H)
+C2+2*(ln(k/(2*Pi*exp(1)))/Pi+C2*ln(k)+C3))
end:

Rt:=proc(k,x)
local f ;
f:=proc(k)
local sum,p:
p:=2: sum:=0:
while (p<=evalf(sqrt(k))) do
    if (k mod p=0) then sum:=sum+1/(p-1):fi:
```

```
    p:=nextprime(p):
od:
sum
end:
evalf(phi(k)/x*((f(k)+0.5)*ln(x)+4*ln(k)+13.4))
end:

A:=proc(m,delta)
 local j,sum;
 sum:=0:
 for j from 0 to m do
   sum:=sum+binomial(m,j)*(1+j*delta)^(m+1):od:
 sum/delta^m;
#(1+(1+delta)**(m+1))**m/(delta)**m;
end:


nb_div:=proc(n)
tau(n)
end:

eps:=proc(x0,k,m,delta,H)
local CK:
CK:=C1(k,H):
evalf(1/2*(1+(1+delta)**(m+1))**m/(delta)**m*(At(k,m,H,x0)+Bt(k,m,H,x0)+
   (Ct(k,m,H)+Dt(k,m,H))/sqrt(x0))*phi(k)
+(1+m*delta/2)/sqrt(x0)*Et(k,H)*phi(k)+m*delta/2+Rt(k,x0));
end:

fct:=proc(k,m,x0,delta)
local L,H,CK;
# Determiner H
L:=[116,117,120,121,124,125,128,132,140,143,144,156,163,169,
180,216,243,256,360,420,432]:
if (k=1) then H:=545439823.215
elif (k<=13) then H:=10000
else
if (k<=72) then H:=2500
elif ((k<=112) and (not isprime(k))) then H:=2500
else if member(k,L) then H:=2500
else print(`H non trouve'`);fi;
```

```
fi;fi;

CK:=evalf(C1(k,H)):
evalf(1/2*A(m,delta)*(At(k,m,H,x0,CK)+Bt(k,m,H,x0,CK)
+(Ct(k,m,H)+Dt(k,m,H))/sqrt(x0))
+(1+m*delta/2)/sqrt(x0)*Et(k,H));
end;

zeroDiffV:=proc(dW1,delta)
        local precision,k,m1,M1,s;
# Precision
        precision:=10**(-2):    k:=1:

        while (evalf(subs(delta=10**(-k),dW1))>0) do
                k:=k+1:od:
        m1:=10**(-k):M1:=10**(-k+1):
        if ((evalf(subs(delta=m1,dW1))<=0)
                and (evalf(subs(delta=M1,dW1))>0)) then
                s:=(m1+M1)/2;
                while (abs(evalf(subs(delta=s,dW1)))>precision) do
                        if evalf(subs(delta=s,dW1))>=0 then M1:=s
                                else m1:=s;fi:
                        s:=(m1+M1)/2;
                od:
        else print(`erreur de type de fonction dans zero`);fi;
s;
end:

eps3:=proc(k,x0)
# Th5_1_1 mod 3
local m,m1,delta1,mini1,dV,V,InvK, delta, mini;
m1:=0;delta1:=0;mini1:=1:delta:='delta':
for m from 2 to 20 do
        V:=m*delta/2+Rt(k,x0):
        V:=evalf(V+fct(1,m,x0,delta)+fct(3,m,x0,delta));
        dV:=diff(V,delta):
        delta2:=zeroDiffV(dV,delta):
        mini:=evalf(subs(delta=delta2,V)):
        if (mini1>mini) then
                mini1:=mini:
                m1:=m:
```

```
                delta1:=delta2:
        fi:
        delta:='delta':
od;
[mini1,m1,delta1]
end;

#interface(quiet=true);
#eps3(3,10.**100); -> [.001322532012, 5, 7/16000]
#interface(quiet=false);
#quit;
```

Annexe E

Calcul de $\phi(x, a; k, l)$

```
# Auteur : Pierre DUSART
# Titre : Calcul de Phi(x,a) & Phi(x,a;k,l)
# Title : Compute Phi(x,a) & Phi(x,a;k,l)
# Fichier : PHI
# Version 1.2 (07/03/1997)
# Langage Maple V.2
#
# Ex : PHI14(30,2) -> 6

chinois:=proc(u1,m1,u2,m2)
local c,prod:
c:=chrem([u1,u2],[m1,m2]):
prod:=m1*m2:
if c>0 then (prod-c) else (-c) mod prod:fi:
end:

PHI14:=proc(x,a)
local T,k,k1,beta,cpt,ck,prod;
T:=0:
for k from 0 to 2^(a-1)-1 do
beta:=[]:k1:=k:cpt:=2:
while (k1>0) do
if (k1 mod 2=1) then beta:=[op(beta),cpt]:fi:
k1:=iquo(k1,2):
cpt:=cpt+1: od:
prod:=1:
for k1 in beta do
```

```
prod:=prod*ithprime(k1):od:
if (prod<>1) then ck:=chinois(1,4,0,prod) else ck:=3:fi:
T:=T+(-1)^nops(beta)*trunc((x+ck)/(4*prod)):
od:
T
end;

PHI34:=proc(x,a)
local T,k,k1,beta,cpt,ck,prod;
T:=0:
for k from 0 to 2^(a-1)-1 do
        beta:=[]:k1:=k:cpt:=2:
        while (k1>0) do
                if (k1 mod 2=1) then beta:=[op(beta),cpt]:fi:
                k1:=iquo(k1,2):
                cpt:=cpt+1: od:
        prod:=1:
        for k1 in beta do
                prod:=prod*ithprime(k1):od:
        if (prod<>1) then ck:=chinois(3,4,0,prod) else ck:=1:fi:
        T:=T+(-1)^nops(beta)*trunc((x+ck)/(4*prod)):
od:
T
end;

PHI:=proc(x,a)
local T,k,k1,beta,cpt,ck,prod;
T:=0:
for k from 0 to 2^a-1 do
beta:=[]:k1:=k:cpt:=1:
while (k1>0) do
if (k1 mod 2=1) then beta:=[op(beta),cpt]:fi:
k1:=iquo(k1,2):
cpt:=cpt+1: od:
prod:=1:
for k1 in beta do
prod:=prod*ithprime(k1):od:
T:=T+(-1)^nops(beta)*trunc(x/prod):
od:
T
end:
```

```
PHIK:=proc(x,a,k,l)
local T,n,n1,signe,cpt,ck,prod,P;
P:=[]:
for n from 1 to a do
if (gcd(k,ithprime(n))=1) then
P:=[op(P),ithprime(n)]:fi:od:
T:=0:
for n from 0 to 2^nops(P)-1 do
signe:=1: n1:=n: cpt:=1:  prod:=1:
while (n1>0) do
if (n1 mod 2=1) then
signe:=-signe:
prod:=prod*P[cpt]:
fi:
n1:=iquo(n1,2):
cpt:=cpt+1: od:
if (prod<>1) then ck:=chinois(l,k,0,prod) else ck:= (-l) mod k:fi:
T:=T+signe*trunc((x+ck)/(k*prod)):
od:
T
end:
```

Bibliographie

[BaysHudson, 1978] CARTER BAYS & RICHARD H. HUDSON, "On the Fluctuations of Littlewood for Primes of the Form $4n \pm 1$", *Math. Of Computation*, Vol. **32**, Number 141 (January 1978) pp. 281-286.

[Bohman, 1972] J. BOHMAN, "On the number of primes less than a given limit", *BIT*, Vol. **12** (1972) pp. 576-588.

[Brent, 1979] R. P. BRENT, "On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip.", *Math. Of Computation*, Vol. **33**, Number 148 (October 1979) pp. 1361-1372.

[Brent, 1982] R. P. BRENT, J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE & D. T. WINTER, "On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip. II", *Math. Of Computation*, Vol. **39**, Number 160 (October 1982) pp. 681-688.

[Brent, 1975] R. P. BRENT, "Irregularities in the Distribution of Primes and Twin Primes", *Math. Of Computation*, Vol. **29**, Number 129 (January 1975) pp. 43-56. UMT, *Math. Of Computation*, Vol. **30**, Number 134 (April 197) p. 379.

[Cesaro, 1895] E. CESARO, "Sur une formule empirique de M. Pervouchine", *Comptes rendus hebdo. des séances de l'académie des sciences*, Vol. **CXIX**, (1895) pp. 848-849.

[Cipolla, 1902] M. CIPOLLA, "La determinazione assintotica dell'n^{imo} numero primo", *Matematiche Napoli*, Vol. **3**, (1902) pp. 132-166.

[DelegliseRivat, 1996] M. DELEGLISE & J. RIVAT, "Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method", *Math. Of Computation*, Vol. **65**, Number 213 (January 1996) pp. 235-245.

[Diamond, 1982] H. G. DIAMOND, "Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers", *Bulletin of A.M.S.*, Vol. **7**, Number 3 (November 1982) pp. 553-589.

[Ehrhart, 1988] E. EHRHART, "On prime numbers", *Fibonacci Quarterly* (Août 1988).

[EllisonMendes, 1975] W.J. Ellison & M. Mendès France, "Les nombres premiers", Hermann, Paris (1975)

[Erdos, 1935] P. Erdös, "On the difference of consecutive primes", *Quarterly Journal of Mathematics*, **6**, (1935) pp. 124-128.

[HardyWright, 1979] G.H. Hardy & E.M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers", Fifth edition, Oxford (1979).

[HensleyRichards, 1974] D. Hensley & I. Richards, "Primes in intervals", *Acta Arithmetica*, **25.4**, (1974) pp. 375-391.

[Hudson, 1977] R. H. Hudson, "A formula for the exact number of primes below a given bound in any arithmetic progression.", *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. **16**, (1977) pp. 67-73.

[HudsonBays, 1977] R. H. Hudson & C. Bays, "The mean behavior of primes in arithmetic progressions.", *J. Reine Angew. Math.*, Vol. **296**, (1977) pp. 80-99.

[HudsonBrauer, 1977] R. H. Hudson & A. Brauer, "On the exact number of primes in the arithmetic progressions $4n \pm 1$ and $6n \pm 1$.", *J. Reine Angew. Math.*, Vol. **291**, (1977) pp. 23-29.

[Kara, 1971] C. Karanikolov, "On some properties of function $\pi(x)$", Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **29-30**, (1971) pp. 357-380.

[LMO, 1985] J. C. Lagarias, V. S. Miller & A. M. Odlyzko, "Computing $\pi(x)$: The Meissel-Lehmer Method", *Math. Of Computation*, Vol. **44**, Number 170 (April 1985) pp. 537-560.

[LagOdly, 1987] J. C. Lagarias & A. M. Odlyzko, "Computing $\pi(x)$: An Analytic Method", *Journal of Algorithms*, Vol. **8**, (1987) pp. 173-191.

[Landau, 1953] E. Landau, "Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", Chelsea, New York (1953) (Reprint.)

[Lehman, 1966] R. Sherman Lehman, "On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$", *Acta Arith.*, Vol. **XI**, Number 4 (1966) pp. 397-410.

[Lehmer, 1959] D. H. Lehmer, "On the exact number of primes less than a given limit", *Illinois Journal of Math.*, Vol. **3**, (1959) pp. 381-388.

[LuneRieleW, 1984] J. van de Lune, H. J. J. te Riele & D.T. Winter, "Recent Progress on the Numerical Verification of the Riemann Hypothesis" *CWI Newsletter*, Vol. **2**, (March 1984) pp. 35-37.

[LuneRieleW, 1986] J. van de Lune, H. J. J. te Riele & D.T. Winter, “On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip.IV” *Math. Of Computation*, Vol. **46**, Number 174 (April 1986) pp. 667-681.

[Mapes, 1963] D. Mapes, “Fast Method for Computing the Number of Primes Less than a Given Limit” *Math. Of Computation*, Vol. **17**, (1963) pp. 179-185.

[McCurley, 1984] Kevin S. McCurley, “Explicit Zero-Free Regions for Dirichlet L-Functions”, *Journal Of Number Theory*, Vol. **19**, (1984) pp. 7-32.

[McCurley2, 1984] Kevin. S. McCurley, “Explicit Estimates for the Error Term in the Prime Number Theorem for Arithmetic Progression”, *Math. Of Computation*, Vol. **42**, Number 165 (January 1984) pp. 265-285.

[McCurley3, 1984] K. S. McCurley, “Explicit Estimates for $\theta(x;3,l)$ and $\psi(x,3,l)$”, *Math. Of Computation*, Vol. **42**, Number 165 (January 1984) pp. 287-296.

[MassiasRobin, 1988] Jean-Pierre Massias & Guy Robin, “Minoration de p_k” Compte rendu du congrès de théorie des nombres de BRUNSWICK (USA), (1988).

[MassiasRobin, 1996] J.P. Massias & G. Robin, “Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers”, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **8** (1996), 213-238.

[MontVaug, 1973] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, “the large sieve”, *Mathematika*, Vol. **20.2**, Number 40 (December, 1973) pp. 119-134.

[Pereira, 1985] N. Costa Pereira, “Estimates for the Chebyshev Function $\psi(x)-\theta(x)$”, *Math. Of Computation*, Vol. **44**, Number 169 (January 1985) pp. 211-221.

[RamRum, 1996] O. Ramaré & R. Rumely, “Primes in arithmetic progressions”, *Math. Of Computation*, Vol. **65**, Number 213 (January 1996) pp. 397-425.

[Richards, 1974] Ian Richards, “On the incompatibility of two conjectures concerning primes”, *Bulletin of American Mathematical Society*, Vol. **80**, Number 3 (May 1974) pp. 419-438.

[Rieger, 1964] G.J. Rieger, “Uber die Folge der Zahlen der Gestalt p_1+p_2”, *Archiv der Mathematik*, Vol. **XV**, Fasc. 1 (1964) pp. 33-41.

[Riesel, 1985] Hans Riesel, “Prime Numbers and Computer Methods for Factorization”, Birkhäuser (1985)

[Robin, 1983] Guy Robin, “Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le $k$ième nombre premier et grandes valeurs de la fonctions $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n”, *Acta Arithmetica*, vol. **42**, numéro 4 (1983) pp. 367-389.

[Robin, 1988] Guy Robin, “Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques”, *Publications de l'institut mathématique de Beograd*, tome 43 (57), (1988) pp. 17-25.

[Rosser, 1941] J. Barkley Rosser, “Explicit Bounds for some functions of prime numbers”, *Amer. J. Math.*, Vol. **63**, (1941) pp. 211-232.

[Rosser, 1939] J. Barkley Rosser, “the n-th prime is greater than $n \log n$”, *Proc. London Math. Soc. (2)*, Vol. **45**, (1939) pp. 21-44.

[RS, 1962] J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, “Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers”, *Illinois Journal Math.* **6** (1962) pp. 64-94.

[RS, 1975] J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, “Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$”, *Math. Of Computation*, Vol. **29**, Number 129 (January 1975) pp. 243-269.

[RS, 1966] J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, “Abstracts of brief scientific communications, Internat”, Congr. Mathematicians, Moscow 1966, Section 3, Theory of Numbers, 8.

[RSYo, 1969] J. Barkley Rosser, J.M. Yohe & L. Schoenfeld, “Rigorous computation and the zeros of the Riemann zeta function”, Proc. IFIP 1968 (Edinburgh), Vol. **1** : *Mathematics, Software,* North-Holland, Amsterdam (1969), pp. 70-76.

[Salvy, 1994] Bruno Salvy, “Fast computation of some asymptotic functional inverses”, *J. Symbolic Computation*, Vol. **17**, (1994) pp. 227-236.

[SchinSierp, 1958] A. Schinzel & W. Sierpiǹski, “Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers”, *Acta Arith.*, Vol. **4**, Number 3 (1958) pp. 185-208.

[Schinzel, 1961] A. Schinzel, “Remarks on the paper : Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers”, *Acta Arith.*, Vol. **7**, Number 1 (1961) pp. 1-8.

[Schoenfeld, 1976] Lowell Schoenfeld, “Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$.II”, *Math. Of Computation*, Vol. **30**, Number 134 (April 1976) pp. 337-360.

[Segal, 1962] Stanford L. Segal, “On $\pi(x+y) \leqslant \pi(x)+\pi(y)$”, *Transations of AMS*, Vol. **104**, Number 3 (September, 1962) pp. 523-527.

[Sierp, 1964] W. Sierpiǹski, “Elementary theory of numbers”, (1964)

[Tenenbaum, 1990] G. Tenenbaum, “Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres”, Institut Elie Cartan (1990)

[Udrescu, 1975] VALERIU ŞT. UDRESCU, “Some remarks concerning the conjecture $\pi(x+y)\leqslant\pi(x)+\pi(y)$”, *Rev. Roum. Math. pures et appl.*, Tome **XX**, Numéro 10, Bucarest (1975) pp. 1201-1209.

[VehkaRich, 1979] THOMAS VEHKA & IAN RICHARDS, “Explicit Construction of an Admissible Set for the Conjecture that Sometimes $\pi(x + y) > \pi(x) + \pi(y)$.”, *Notices Am. Math. Soc.*, **26** (1979) p. A-453

[War, 1961] ANDRÉ WARUSFEL, “Les nombres et leurs mystères ”, *Editions du Seuil*, Collections microcosme, série le rayon de la science, (1961)

Résumé

Les nombres entiers supérieurs à 2 se décomposent en deux grandes classes disjointes : les nombres premiers et les nombres composés. Le travail présenté s'articule autour de la fonction $\pi(x)$ qui compte le nombre de premiers inférieurs à x. Depuis que le théorème des nombres premiers a été démontré, il y a un peu plus de cent ans, nous connaissons un équivalent de $\pi(x)$ pour x tendant vers l'infini. Nous démontrons un encadrement précis de $\pi(x)$ ainsi qu'une estimation pour les nombres premiers par l'intermédiaire des fonctions de CHEBYSHEV. Nous nous appuyons sur des méthodes proposées par ROSSER & SCHOENFELD (1975). Dans un deuxième temps, nous étudions sur quels domaines la fonctions $\pi(x)$ possède la propriété de sous-additivité $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$. Cette propriété est pourtant incompatible avec une généralisation des nombres premiers jumeaux : la conjecture des k-uples. Nous exhibons un k-uple admissible super-dense. Enfin, poursuivant le chemin tracé par MC CURLEY (1984) puis RAMARÉ & RUMELY (1996), nous donnons des estimations des fonctions de CHEBYSHEV dans les progressions arithmétiques. Pour finir, nous proposons un algorithme de calcul exact de $\pi(x)$ jusqu'à $x = 10^{20}$ dans les progressions arithmétiques basé sur la notion de crible combinatoire (crible de MEISSEL-LEHMER (1870)) plus efficace que le crible d'ERATOSTHÈNE (200 avant JC).

Mots-clés.
Encadrement des fonctions ψ, θ, π et du $k^{ième}$ nombre premier ; calcul exact de $\pi(x; k, l)$; nombre premier.

Title

Around the function which counts the number of primes

Abstract

The set of positive integers can be decomposed into two large disjointed classes: the prime numbers and the composite numbers. The present work deals with the $\pi(x)$ function which counts the number of primes not greater than x. For large x, a function equivalent to $\pi(x)$ has been known for a hundred years, since when the prime number theorem was shown. We find sharper bounds for $\pi(x)$ and estimates for prime numbers through the instrumentality of CHEBYSHEV's functions. We lean on methods proposed by ROSSER & SCHOENFELD (1975). In a second part, we study on which domains the function $\pi(x)$ has the property of under-additivity $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$. This property is nevertheless incompatible with a generalization of the twin primes conjecture: the k-uple conjecture. We give an admissible super-dense k-uple. Next, following the ideas of MC CURLEY (1984), and then RAMARÉ & RUMELY (1996), we give estimates for the CHEBYSHEV's functions in arithmetic progressions. Finally we propose an algorithm for exact computation of $\pi(x)$ in arithmetic progressions based on combinatorial sieve notion (sieve of MEISSEL-LEHMER (1870)), which is faster than the ERATOSTHENES sieve (200 B.C.).

Key words. Estimates of the functions ψ, θ, π and of the k^{th} prime number; exact computation of $\pi(x; k, l)$; prime number.

Intitulé et adresse du laboratoire

L.A.C.O.,
123, avenue Albert THOMAS,
87060 LIMOGES Cedex.