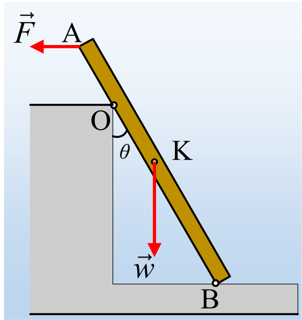
Η ισορροπία μιας δοκού

Η ομογενής δοκός ΑΒ μήκους ℓ και βάρους w=200N ισορροπεί όπως στο σχήμα, όπου στο σημείο Ο με (ΑΟ)= 0,18ℓ, στηρίζεται σε λείο κατακόρυφο τοίχο, ενώ με το άκρο της Β, στο έδαφος, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu_s=\mu=0,5$. Δίνεται ότι στο άκρο της Α ασκείται, μέσω νήματος, οριζόντια δύναμη F μέτρου F=25N, ενώ η γωνία θ που σχηματίζει η δοκός με τον τοίχο έχει ημθ=0,6 και συνθ=0,8.



i) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στην δοκό από τον τοίχο στο σημείο Ο.

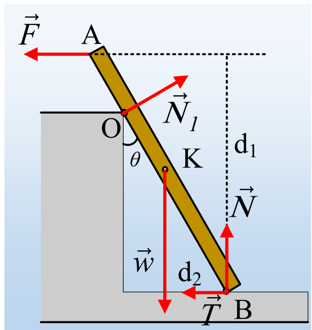
ii) Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στη δοκό από το έδαφος.

iii) Για ποια τιμή F_1 της οριζόντιας δύναμης, η δοκός χάνει οριακά την επαφή της με το έδαφος;

iv) Αν η δύναμη F άλλαζε φορά, διατηρώντας την οριζόντια διεύθυνση και μέτρο F=25N, θα ισορροπούσε ή όχι η δοκός;

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπου η N_1 είναι κάθετη στη ράβδο.



Από την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\Sigma F=0 \ \ (1) \ \ \text{και} \ \Sigma\tau=0 \ \ (2)$$

ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν πάρουμε τις ροπές.

i) Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2) ως προς το άκρο Β της δοκού, έχουμε:

$$\tau_F+\tau_{N_1}+\tau_w+\tau_N+\tau_T=0 \rightarrow$$

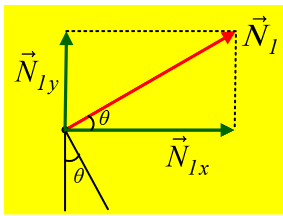
$$F\cdot d_1-N_1\cdot 0,82\ell+w\cdot d_2+0+0=0 \rightarrow$$

$$F\cdot \ell\cdot \sigma\upsilon\nu\theta-N_1\cdot 0,82\ell+w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot \eta\mu\theta \rightarrow$$

$$25\cdot 0,8N-0,82N_1+200\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,6N=0$$

$$N_1\approx 97,6N$$

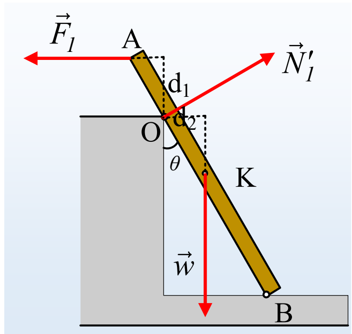
ii) Αναλύουμε την δύναμη N_1 σε δύο συνιστώσες μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, όπως στο διπλανό σχήμα. Η γωνία μεταξύ της δύναμης N_1 και της οριζόντιας διεύθυνσης είναι ίση με την γωνία θ που σχηματίζει η δοκός με τον τοίχο (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές), οπότε:



$N_{1x}=N_1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=97,6\cdot 0,8N=78N$ και $N_{1y}=N_1\cdot\eta\mu\theta=97,6\cdot 0,6N=58,6N$

Αλλά τότε εφαρμόζουμε την συνθήκη ισορροπίας (1) σε άξονες, παίρνοντας:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow N_{1x}-F-T=0 \rightarrow T=N_{1x}-F=78N-25N=53N$$

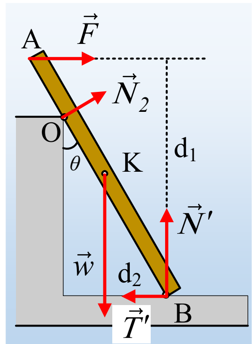


iii) Έστω για οριζόντια δύναμη μέτρου F_1 η δοκός χάνει οριακά την επαφή της με το έδαφος, ενώ ισορροπεί στην αρχική τη θέση. Τότε οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω της, είναι αυτές του διπλανού σχήματος. Παίρνουμε τις ροπές ως προς το σημείο Ο και έχουμε:

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow F_1\cdot d_1-w\cdot d_2=0 \rightarrow$$

$$F_1\cdot 0,18\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = w\cdot 0,32\ell\cdot\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$F_1=\frac{w\cdot 0,32\cdot\eta\mu\theta}{0,18\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{200\cdot 0,32\cdot 0,6}{0,18\cdot 0,8}N=266,7N$$



iv) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στην δοκό, μόλις η οριζόντια δύναμη F, αποκτήσει φορά προς τα δεξιά. Υποθέτουμε ότι η δοκός ισορροπεί και εφαρμόζουμε τις εξισώσεις (1) και (2) για την ισορροπία της, δουλεύοντας όπως και στα παραπάνω ερωτήματα.

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Β της δοκού, έχουμε:

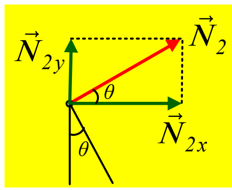
$$\tau_F+\tau_{N_2}+\tau_w+\tau_{N'}+\tau_{T'}=0\rightarrow$$

$$-F\cdot d_1-N_2\cdot 0,82\ell+w\cdot d_2+0+0=0\rightarrow$$

$$-F\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-N_2\cdot 0,82\ell+w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\theta\rightarrow$$

$$-25\cdot 0,8N-0,82N_2+200\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,6N=0$$

$$N_2=48,8N$$



Οπότε αναλύοντας την δύναμη N_2 σε δύο συνιστώσες, παίρνουμε:

$N_{2x}=N_2\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=48,8\cdot 0,8N=39N$ και $N_{2y}=N_2\cdot\eta\mu\theta=48,8\cdot 0,6N=29,3N$

Και από την εξίσωση (1), για την ισορροπία στους άξονες x και y βρίσκουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow N_{2x}+F-T'=0 \rightarrow T'=N_{2x}+F=39N+25N=64N$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_{2x}+N'-w=0 \rightarrow N'=w-N_{2y}=200N-29,3N=170,7N$$

Η μέγιστη δυνατή στατική τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί μεταξύ δοκού και οριζοντίου εδάφους (η οριακή τριβή) έχει μέτρο:

$$T_{o\rho}=\mu_s\cdot N'=0,5\cdot 170,7N\approx 85,4N$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί έχει μέτρο 85,4N, πολύ μεγαλύτερη από την απαραίτητη για την ισορροπία, στατική τριβή και η δοκός θα ισορροπήσει.

Σχόλιο:

Η ισορροπία είναι εξασφαλισμένη με την δύναμη F προς τα αριστερά; Μπορείτε να το ελέγξετε;

dmargaris@gmail.com