Лекция 8
Аберрации в турбулентной атмосфере

Содержание

1 Структурная функция фазы

1.1 Плоская волна

Рассмотрим два параллельных луча, расстояние между которыми — ρ, распространяющихся вдоль оси z по трассе длиной L. Набеги фаз вдоль лучей:

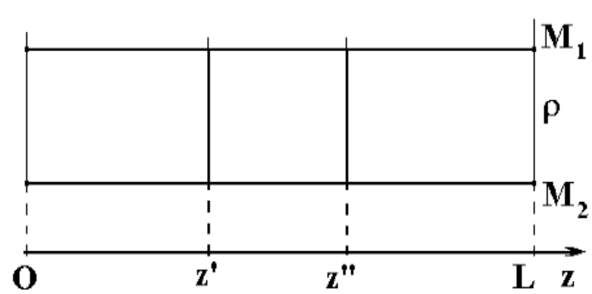

Рис. 1: Геометрия хода лучей при расчете структурной функции фазы

$$
\begin{aligned}
&\varphi(M_1) = k\int\limits_0^L n_1(z)dz,\\
&\varphi(M_2) = k\int\limits_0^L n_2(z)dz,\\
&\Delta\varphi^2 = k^2\int\limits_0^L\int\limits_0^L \left[n_1(z') - n_2(z')\right]\left[n_1(z'') - n_2(z'')\right]dz'dz'',\\
&\langle\Delta\varphi^2\rangle = \left\langle k^2\int\limits_0^L\int\limits_0^L \left[n_1(z') - n_2(z')\right]\left[n_1(z'') - n_2(z'')\right]dz'dz''\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Раскрывая скобки и производя усреднение, получим:

$$
\Delta\varphi^2 = D_\varphi(\rho) = k^2\int\limits_0^L\int\limits_0^L \left[D_n(\sqrt{\xi^2+\rho^2}) - D_n(\xi)\right]dz'dz''. \tag{2}
$$

здесь $\xi = z' - z''$, $D_n(\xi)$ — структурная функция показателя преломления, и учтено, что

$$
\langle n_1(z')n_2(z'')\rangle = B\left(\sqrt{\rho^2 + |z' - z''|^2}\right) \tag{3}
$$

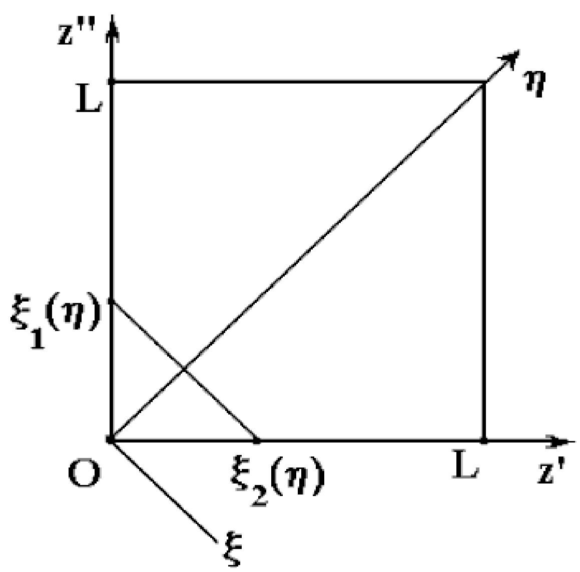

Рис. 2: Преобразование координат при расчете структурной функции

Область интегрирования в (2) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\eta &= \tfrac{z'+z''}{2}\\
\xi &= z' - z''.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В переменных (ξ, η) формула (2) принимает вид:

$$
D_\varphi(\rho) = k^2\int\limits_0^L d\eta\int\limits_{\xi_1(\eta)}^{\xi_2(\eta)} \left[D_n(\sqrt{\xi^2+\rho^2}) - D_n(\xi)\right]d\xi. \tag{5}
$$

При $\xi \to \infty$ выражение в квадратных скобках (при разумных ограничениях на вид $D_n(\xi)$) стремится к нулю, и если $L >> \rho$, пределы во внутреннем интеграле можно устремить к бесконечности. В результате получим:

$$D_\varphi(\rho) \approx k^2 L \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[D_n(\sqrt{\xi^2+\rho^2}) - D_n(\xi) \right] d\xi. \tag{6}$$

1.2 Колмогоровская модель

Из Колмогоровской модели турбулентности следует, что

$$D_n(\xi) = C_n^2 \xi^{2/3}, \tag{7}$$

где C_n^2 – структурная постоянная, определяющая силу турбулентности. Подставляя (7) в (6), получим:

$$D_\varphi(\rho) = k^2 L C_n^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[(\xi^2+\rho^2)^{1/3} - \xi^{2/3} \right] d\xi, \tag{8}$$

или, полагая $x = \frac{\xi}{\rho}$

$$D_\varphi(\rho) = k^2 L C_n^2 \rho^{5/3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[(1+x^2)^{1/3} - x^{2/3} \right] dx. \tag{9}$$

Последний интеграл не зависит от параметров задачи, а просто равен некоторому числу. Вычислив этот интеграл, для плоской волны получим:

$$D_\varphi(\rho) = 2.92 k^2 L C_n^2 \rho^{5/3}. \tag{10}$$

По аналогии с этим выводом можно получить выражение для структурной функции сферической волны (задание студентам):

$$D_{sph}(\rho) = \frac{3}{8} D_{pl}(\rho). \tag{11}$$

Можно показать (задание для студентов), что если C_n^2 не является постоянной величиной вдоль оси z, а меняется достаточно плавно, то вместо (10) получим:

$$D_\varphi(\rho) = 2.92 k^2 \rho^{5/3} \int\limits_0^L C_n^2(z) dz. \tag{12}$$

Формально, (10) остается в силе, если заменить C_n^2 его средним значением:

$$\bar{C}_n^2 = \frac{1}{L} \int\limits_0^L C_n^2(z) dz,$$

практически именно эта величина измеряется обычно при исследовании атмосферы.

1.3 Радиус Фрида

Формулу (10) часто используют в следующей форме:

$$D_\varphi(\rho) = 6.88 \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}}. \tag{13}$$

где r_0 — т.н. Фридовский радиус (D. Fried), который учитывает параметры атмосферы и длину трассы:

$$r_0 \cong 1.68 \left(k^2 L \bar{C}_n^2\right)^{-\frac{3}{5}}. \tag{14}$$

2 Корреляционная матрица аберрационных коэффициентов для атмосферы

2.1 Коэффициенты Нолла

Подставим выражение (10) для $D_\varphi(\rho)$ в формулы для элементов корреляционной матрицы коэффициентов Цернике. После замены переменных получим:

$$\begin{cases} \alpha_{ik} = \gamma_{ik} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \\ \alpha_{00} = \sigma^2 - \gamma_{00} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \end{cases} \tag{15}$$

Здесь D — диаметр апертуры, а γ_{ik} — числовые коэффициенты, введенные Ноллом (R. Noll):

$$\gamma_{ik} = \int (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^{5/3} \varphi_i(\mathbf{r}_1) \varphi_k(\mathbf{r}_2) d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2. \tag{16}$$

Вот некоторые значения диагональных элементов:

$$\begin{aligned} &\gamma_{00} = 1.029 \\ &\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0.449 \\ &\gamma_{33} = \gamma_{44} = \gamma_{55} = 0.023 \\ &\gamma_{66} = \gamma_{77} = \gamma_{88} = \gamma_{99} = 0.0062 \end{aligned}$$

2.2 Учет внешнего масштаба

Величина σ_φ^2, входящая только в выражение для α_{00}, в рамках Колмогоровской теории не может быть найдена. При учете внешнего масштаба турбулентности L_0:

$$\sigma_\varphi^2 = 0.4 C_n^2 L k^2 L_0^{5/3} \approx \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3}. \tag{17}$$

С учетом внешнего масштаба элементы матрицы α_{ik} были вычислены Винкером (Winker) [3]. Для диагональных элементов справедливо выражение:

$$\alpha_{ii} = \gamma_{ii} \cdot \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} w_i(D/L_0). \tag{18}$$

Здесь считается, что параметр r_0 сохраняет прежнюю величину (14), хотя и утрачивает прежний физический смысл радиуса корреляции фазовых возмущений. Функции $w_i(D/L_0)$ для первых нескольких порядков приведены на рис. 3.

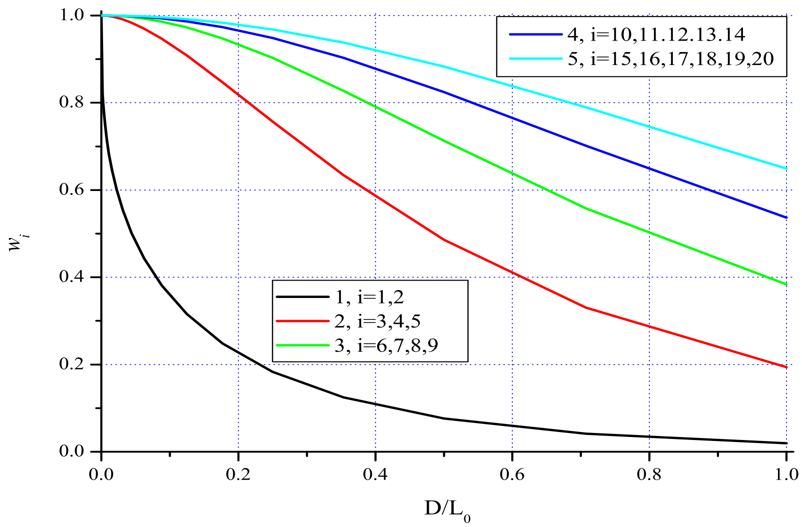

Рис. 3: Функции $w_i(D/L_0)$ для радиальных порядков $n = 1, 2, 3, 4$

3 Функции Карунена-Лоэва

3.1 Диагонализация матрицы корреляционных коэффицентов

Подбором системы функций $\{\varphi_i(\mathbf{r})\}$ можно сделать матрицу корреляционных коэффицентов α_{ik} диагональной. Рассмотрим функции φ_i, удовлетворяющие интегральному уравнению:

$$\lambda_i \varphi_i(\mathbf{r}) = \int B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\varphi_i(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}'. \tag{19}$$

Возьмем уравнение (19) для $\varphi_i(\mathbf{r})$ и $\varphi_k(\mathbf{r})$, умножим соответственно на $\varphi_k(\mathbf{r})$ и $\varphi_i(\mathbf{r})$, проинтегрируем по апертуре и вычтем одно из другого. В результате получим:

$$(\lambda_i - \lambda_k) \int \varphi_i(\mathbf{r}')\varphi_k(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}' = 0. \tag{20}$$

Таким образом, функции, удовлетворяющие (19), ортогональны, если $\lambda_i \neq \lambda_k$. Для равных собственных значений функции можно ортогонализировать. Такие функции называют ф-циями Карунена-Лоэва.

3.2 Функции Карунена-Лоэва

Найдем α_{ik}:

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{S^2}\int\int B(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_i(\mathbf{r})\varphi_k(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{r}' = \frac{\lambda_k}{S^2}\int\varphi_i\varphi_k d^2\mathbf{r}' = \frac{\lambda_k\delta_{ik}}{S}. \qquad (21)$$

т.е. $\alpha_{ii} = \lambda_i/S$. Функции (19) удобны для теоретических исследований, однако они не имеют аналитического представления, поэтому чаще для практических применений все же используют функции Цернике.

4 Задания по Лекции 8

1. Получить выражение (11) для структурной функции сферической волны.
2. Вывести формулу (12).

5 Вопросы по Лекции 8

1. Специфика измерения

Список литературы

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики, М.: Наука, 1985, 288 с.
2. А.В. Токовинин. Учебное пособие по адаптивной оптике обсерватории Серро Тололо, `http://www.astronet.ru/db/msg/1205112/intro.html`
3. Winker D. M. // J. Opt. Soc. Am. A. 1991. **8**. p.1568.